Soluzione degli esercizi di pag. 181

L'integrando converge q.o. in $[0,2\pi]$ alla funzione $f(x)=0$.

o è dominato:

$$\frac{|\sin x|^n}{|2+(\sin x)^n|} \leq \frac{1}{2-1} = 1,$$

la funzione costante 1 è certamente sommabile in $[0,2\pi]$.

ciò

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{(\sin x)^n}{2+(\sin x)^n}\,dx = \int_0^{2\pi} 0\,dx = 0.$$

Per $(x,y)\in B$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}(1-x^2-y^2)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0<x^2+y^2<2 \\ 1 & \text{se } x^2+y^2=0 \\ \text{non esiste} & \text{se } x^2+y^2=2, \end{cases}$$

poiché $m_2(\{(x,y):\ x^2+y^2=2\})=0$, l'integrando $(1-x^2-y^2)^n$ converge a 0 q.o. in B. Inoltre

$$|(1-x^2-y^2)^n| \leq 1 \qquad \forall (x,y)\in B,$$

unque la convergenza è dominata e pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_B (1-x^2-y^2)^n\,dx = \int_B 0\,dx = 0.$$

La serie è a termini non negativi: quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-x^2)^n}{n}\,dx = \int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^2)^n}{n}\,dx.$$

Ricordando che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} = \ln(1+t) \quad \forall t \in ]-1,1],$$

risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-t)^n}{n} = -\ln(1-t) \quad \forall t \in [-1,1[,$$

dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n} = -\ln[1-(1-x^2)] = -\ln x^2 \text{ q.o. in } [-1,1].$$

Perciò

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^n}{n} dx = \int_{-1}^{1} [-\ln x^2] dx = -2\int_0^1 \ln x^2 dx =$$

$$= -4\int_0^1 \ln x \, dx = -4 [x\ln x - x]_0^1 = 4.$$

. Risulta per $x \in [0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2x)^n}{1+(2x)^n} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se} \quad \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

quindi l'integrando converge q.o. in $[0,1]$ alla funzione $f(x) = I_{[\frac{1}{2},1]}(x)$. D'altra parte

$$\frac{(2x)^n}{1+(2x)^n} \le 1 \quad \forall x \in [0,1],$$

dunque, per convergenza dominata,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{(2x)^n}{1+(2x)^n}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 1\cdot dx = \frac{1}{2}.$$

i. Per $x\in[1,e^3]$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln x + x}{nx + x^2\ln x} = \frac{\ln x}{x},$$

e inoltre

$$0 \le \frac{n\ln x + x}{nx + x^2\ln x} = \frac{\ln x + \frac{x}{n}}{x + \frac{x^2\ln x}{n}} \le \frac{\ln x + e}{x},$$

e naturalmente $\frac{\ln x + e}{x}$ è sommabile su $[1,e^3]$, essendo continua in tale intervallo. Perciò

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{e^3} \frac{n\ln x + x}{nx + x^2\ln x}\,dx = \int_1^{e^3}\frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\Big[(\ln x)^2\Big]_1^{e^3} = \frac{9}{2}.$$

. Per $x>0$ si ha, essendo $|\sin e^{-nx}| \le e^{-nx}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+10}\sin e^{-nx}}{1+x^n} = 0.$$

D'altra parte,

$$\frac{x^{n+10}\,|\sin e^{-nx}|}{1+x^n} \le$$

$$\leq \begin{cases} e^{-nx} \leq e^{-x} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^{10} e^{-nx}}{1} \leq x^{10} e^{-x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

poichè la funzione

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x^{10} e^{-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

è sommabile in $[0, \infty[$, concludiamo che

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty \frac{x^{n+10} \sin e^{-nx}}{1 + x^n} dx = \int_0^\infty 0 \, dx = 0.$$

. Per ogni $\alpha > 1$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(\sin x)^n}{x^\alpha} = 0 \qquad \forall x > 0.$$

Per dominare l'integrando osserviamo che se $n > \alpha$ possiamo scrivere

$$\frac{|\sin x|^n}{x^\alpha} = \frac{|\sin x|^\alpha \, |\sin x|^{n-\alpha}}{x^\alpha} \leq \frac{|\sin x|^\alpha}{x^\alpha};$$

d'altra parte la funzione $\left|\frac{\sin x}{x}\right|^\alpha$ è sommabile in $[0, \infty[$, poichè

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|^\alpha \leq \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1], \\ \dfrac{1}{x^\alpha} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{|\sin x|^n}{x^\alpha}\,dx \le \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{|\sin x|^n}{x^\alpha}\,dx = 0 .$$

. L'integrando converge puntualmente in $[0,\infty[$ alla funzione $f(x) = xe^{-2x}$. Inoltre per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\frac{|nxe^x - e^{2x}|}{x^2e^x + ne^{3x}} \le \frac{nxe^x + e^{2x}}{ne^{3x}} \le$$

$$\le xe^{-2x} + e^{-x} .$$

Dato che quest'ultima funzione è sommabile in $[0,\infty[$, si conclude che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{nxe^x - e^{2x}}{x^2e^x + ne^{3x}}\,dx = \int_0^\infty xe^{-2x}\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^\infty = \frac{1}{4} .$$

# Ulteriori esercizi

- $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{x^n + x^{5n}}{1+x^{2n}}\, dx$

L'integrando converge puntualmente a $0$ per ogni $x \in ]-1,1[$, cioè q.o. in $[-1,1]$. Inoltre, visto che $x^{2n} \geq 0$,

$$\left| \frac{x^n + x^{5n}}{1+x^{2n}} \right| \leq \frac{|x|^n + |x|^{5n}}{1} \leq 2 \quad \forall x \in [-1,1],$$

e la funzione $g(x) = 2$ è sommabile in $[-1,1]$. Ne deduciamo che il limite proposto vale $0$.

- $\lim_{n\to\infty} \int_{-2}^{2} \sqrt{|1-x^{2n}|}\, dx$

Per parità dell'integrando, possiamo fare il limite di $\int_0^2 \sqrt{|1-x^{2n}|}\,dx$.
L'integrando ha limite dato da

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{|1-x^{2n}|} = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Possiamo spezzare l'integrale in 2:

$\int_0^1 \sqrt{1-x^{2n}}\, dx \to \int_0^1 1\, dx = 1$ per convergenza dominata: infatti $\sqrt{1-x^{2n}} \leq 1$ per ogni $x \in [0,1]$, e la funzione $1$ è sommabile in $[0,1]$;

$\int_1^2 \sqrt{x^{2n}-1}\, dx \to +\infty$ per convergenza monotona: infatti

$$\sqrt{x^{2n}-1} \leq \sqrt{x^{2(n+1)}-1} \quad \forall x \in [1,2],\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si conclude che il limite proposto vale $1+\infty=+\infty$.

- $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx.$

La funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari e verifica

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1 \quad \forall x \geq 0, \qquad \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} \quad \forall x \geq 1.$$

La prima stima è utile in $[0,1]$, la seconda è utile in $[1,+\infty[$. Si ha allora

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = 2\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = 2\int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx + 2\int_1^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx.$$

In $[0,1]$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n = 0 \quad , \quad \left|\frac{\sin x}{x}\right|^n \leq 1,$$

cosicché, per convergenza dominata,

$$\lim_{n\to\infty} 2\int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = 2\int_0^1 0\, dx = 0;$$

in $[1,\infty[$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n = 0, \qquad \left|\frac{\sin x}{x}\right|^n \leq \frac{1}{|x|^n} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall n \geq 2,$$

e pertanto, per convergenza dominata,

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = 0.$$

Perciò il limite proposto è 0.

- $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{x+n\sin x}{n+\sin x}\,dx$

L'integrando tende a $\sin x$ per $n\to\infty$. Inoltre

$$\left|\frac{x+n\sin x}{n+\sin x}\right| \le \frac{\pi+n}{n-1} \le \pi+2 \quad \forall n\ge 2,\ \forall x\in[0,\pi].$$

Poichè la costante $\pi+2$ è sommabile in $[0,\pi]$, per convergenza dominata il limite proposto è uguale a

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2.$$

- $\lim_{n\to\infty} \int_0^{n} \frac{\operatorname{arctg} nx}{1+(n-x)^2}\,dx$

L'integrando è $\frac{\operatorname{arctg} nx}{1+(n-x)^2} I_{[0,n]}(x)$. Non è evidente che esso sia crescente rispetto a $n$, perchè $\frac{1}{1+(n-x)^2} \ge \frac{1}{1+(n+1-x)^2}$. Facciamo però un conto "artigianale", dividendo $[0,n]$ in 2 parti uguali; l'integrale su $[0,\frac{n}{2}]$ si maggiora così:

$$\int_0^{n/2} \frac{\operatorname{arctg} nx}{1+(n-x)^2}\,dx \le \int_0^{n/2} \frac{\frac{\pi}{2}}{1+\left(\frac{n}{2}\right)^2} = \frac{\frac{n\pi}{4}}{1+\frac{n^2}{4}} \to 0 \text{ per } n\to\infty,$$

mentre per l'integrale su $[\frac{n}{2},n]$ abbiamo, ponendo $n-x=t$:

$$\int_{\frac{n}{2}}^{n} \frac{\operatorname{arctg} nx}{1+(n-x)^2}\,dx = \int_0^{\frac{n}{2}} \frac{\operatorname{arctg} n(1-t)}{1+t^2}\,dt$$

e stavolta l'integrando $\frac{\operatorname{arctg} n(1+t)}{1+t^2} I_{[0,\frac{n}{2}]}(t)$ è crescente rispetto a $n$. Dunque, per convergenza monotona,

$$\int_{\frac{n}{2}}^{n} \frac{\operatorname{arctg} nx}{1+(n-x)^2}\,dx \to \int_0^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi^2}{4} \text{ per } n\to\infty.$$

Si conclude che il limite proposto è $\frac{\pi^2}{4}$.

- $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{n+10} \sin e^{-nx}}{1+x^n}\,dx$$

Poichè $|\sin e^{-nx}| \le e^{-nx}$, l'integrando tende a $0$ puntualmente in $[0,\infty[$. La dominazione è facile:

$$\left| \frac{x^{n+10} \sin e^{-nx}}{1+x^n} \right| \le x^{n+10} e^{-nx} \le x^{n+10} e^{-x}$$

per ogni $n\ge 1$, per ogni $x>0$. Poichè $x^{n+10}e^{-x}$ è sommabile su $[0,\infty[$, si conclude che il limite proposto è $0$.