CURVE E SUPERFICI

Abbiamo già visto esempi di curve e superfici quando abbiamo studiato i problemi di massimo e di minimo vincolati. Ora ne riparliamo in modo sistematico, con l'obiettivo di calcolarne lunghezze ed aree, nonché di farci gli integrali.

Definizione Una curva in $\mathbb{R}^N$ è un'applicazione $\underline{\varphi}: I \to \mathbb{R}^N$ di classe C^k $(k \geq 0)$, ove I è un intervallo di $\mathbb{R}$, limitato o no. Le N equazioni

$$\begin{cases} x_k = \varphi_k(t) \\ k = 1, \dots, N, \end{cases} \qquad t \in I,$$

costituiscono la rappresentazione parametrica della curva; l'insieme $\Gamma = \underline{\varphi}(I)$ è il sostegno della curva, ossia l'immagine di $\underline{\varphi}$. Ciò che ci interessa, in effetti, è il sostegno Γ più che l'applicazione $\underline{\varphi}$: nella pratica si assegna l'oggetto geometrico Γ, e se ne deve cercare una parametrizzazione, cioè una curva $\underline{\varphi}$ che abbia Γ come sostegno.

Tutte le curve possiedono un'orientazione, vale a dire un verso di percorrenza: quello indotto dal verso delle t crescenti, oppure quello opposto. Se $\underline{\varphi}: [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è una curva, allora $\underline{\psi}: [a,b] \to \mathbb{R}^N$, $\underline{\psi}(t) = \underline{\varphi}(a+b-t)$, è una curva che ha lo stesso sostegno di $\underline{\varphi}$, ma verso opposto (essa si chiama l'opposta di $\underline{\varphi}$).

Esempi (1) (rette, semirette, segmenti) L'equazione

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + t\underline{v}, \quad t \in I,$$

con $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\underline{v} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$ fissati, descrive:

- la retta per $\underline{x}_0$ con direzione $\underline{v}$, se $I = \mathbb{R}$,
- la semiretta di estremo $\underline{x}_0$ e direzione $\underline{v}$, se $I = [0, \infty[$,
- il segmento di estremi $\underline{x}_0$ e $\underline{x}_1$, se $I = [0,1]$ e $\underline{v} = \underline{x}_1 - \underline{x}_0$.

(2) (circonferenze, ellissi). Se $N=2$, il sistema

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

descrive:

- la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio a, se $b = a > 0$,
- l'ellisse centrata in $(0,0)$, di semiassi a e b paralleli agli assi, se $a \neq b$ e $b, a > 0$.

(3) (curve cartesiane) Se $N=2$, il grafico $y = g(x)$ di una funzione $g \in C^k([a,b])$ è il sostegno della curva

$$\begin{cases} x = x \\ y = g(x), \end{cases} \quad x \in [a,b].$$

(4) (curve in coordinate polari). Se $N=2$, l'equazione $r = g(\theta)$, con $g \in C^k([\theta_0, \theta_1])$, $g \geq 0$, descrive la curva piana

$$\begin{cases} x = g(\theta)\cos\theta \\ y = g(\theta)\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_1].$$

Se la curva $\underline{\varphi}$ è di classe C^1, il vettore $\underline{\varphi}'(t)$, purché non nullo, dà la direzione tangente a Γ nel punto $\underline{\varphi}(t)$. Infatti, per la formula di Taylor, fissato $t\in I$ si ha

$$\underline{\varphi}(t+h) = \underline{\varphi}(t) + \underline{\varphi}'(t)h + o(h) \quad \text{per } h\to 0,$$

quindi la retta di equazioni

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(t) + \underline{\varphi}'(t)h, \quad h\in\mathbb{R},$$

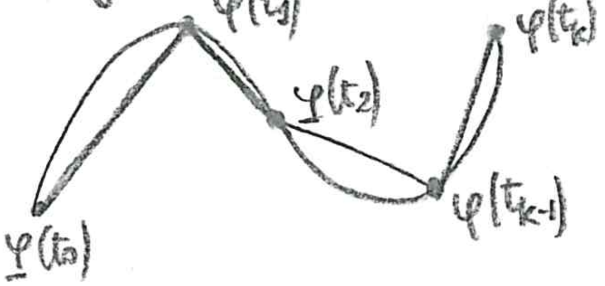
passa per $\underline{\varphi}(t)$ ed è un'approssimazione di $\underline{\varphi}(t+h)$ di ordine superiore a $|h|$ per $h\to 0$: dunque è la retta tangente.

Una curva $\underline{\varphi}$, di classe C^1, tale che $\underline{\varphi}'(t)\neq \underline{0}$, si dice <u>regolare</u>. In tal caso,

$$\underline{\tau} = \frac{\underline{\varphi}'(t)}{|\underline{\varphi}'(t)|_N}$$

è il versore tangente a Γ nel punto $\underline{\varphi}(t)$, orientato nel verso delle t crescenti.

<u>Lunghezza di una curva</u>



Per misurare la lunghezza di una curva, si procede così:

- si fissa una partizione σ di I mediante i punti
  $\inf I \le t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k \le \sup I$;
- si considera la lunghezza della spezzata che unisce i punti $\underline{\varphi}(t_0), \underline{\varphi}(t_1), \dots, \underline{\varphi}(t_{k-1}), \underline{\varphi}(t_k)$, cioè

$$\ell_\sigma = \sum_{j=1}^{k} |\underline{\varphi}(t_j) - \underline{\varphi}(t_{j-1})|_N ;$$

- si osserva che aumentando i nodi t_j la quantità l_σ cresce; per di più, date due partizioni σ_1 e σ_2, e detta σ la partizione formata con tutti i nodi di σ_1 e σ_2, si riconosce subito che $l_{\sigma_1} \leq l_\sigma$, $l(\sigma_2) \leq l_\sigma$.
- Dunque, è del tutto naturale <u>definire la lunghezza di φ</u> come

$$\ell(\underline{\varphi}) = \sup_{\sigma} l_\sigma .$$

Questa definizione non è molto comoda, anche se basta a garantire che certe curve hanno lunghezza infinita: ad esempio ciò accade per la curva grafico di $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \in [0, \pi]$ (esercizio non facilissimo).

Fortunatamente c'è un teorema che ci aiuta nel caso di curve di classe C^1.

<u>Teorema</u> Sia $\underline{\varphi}: I \to \mathbb{R}^N$ una curva di classe C^1. Allora

$$\ell(\underline{\varphi}) = \int_I |\underline{\varphi}'(t)|_N \, dt .$$

<u>Osservazione</u> Se $\underline{\varphi}: I \to \mathbb{R}^N$, $\underline{\psi}: J \to \mathbb{R}^N$ sono due curve di classe C^1 che hanno lo stesso sostegno e sono <u>semplici</u>, ossia iniettive nell'interno del loro intervallo di definizione (ma gli estremi possono anche coincidere), allora si può dimostrare che esiste una funzione $p: J \to I$, bigettiva e di

classe C^1, tale che $\underline{\varphi}(p(\tau)) = \underline{\psi}(\tau)$ per ogni $\tau \in J$.

Ne segue

$$\ell(\underline{\varphi}) = \int_I |\underline{\varphi}'(t)|_N \, dt = [t = p(\tau)]$$

$$= \int_J |\underline{\varphi}'(p(\tau))| \, |p'(\tau)| \, d\tau = \int_J |\underline{\psi}'(\tau)|_N \, d\tau = \ell(\underline{\psi}).$$

Questo fatto ci autorizza ad utilizzare la notazione $\ell(\Gamma)$, intendendo con ciò la lunghezza di una qualunque curva semplice, di classe C^1, che abbia Γ come sostegno.

<u>Esempi</u> Calcoliamo la lunghezza delle curve degli esempi (1), (2), (3), (4).

(1) Sia $\Gamma = \{\underline{x} = \underline{x}_0 + t\underline{v}, \ t \in [a,b]\}$. Allora $\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_0 + t\underline{v}$ e dunque $\underline{\varphi}'(t) = \underline{v}$. Perciò $\ell(\Gamma) = \int_a^b |\underline{v}| \, dt = (b-a)|\underline{v}|$.

Se $\underline{v} = \underline{x}_1 - \underline{x}_0$ e $[a,b] = [0,1]$, si trova che la lunghezza del segmento di estremi $\underline{x}_0$ e $\underline{x}_1$ è, come è giusto, $|\underline{x}_1 - \underline{x}_0|_N$.

(2) Per l'ellisse Γ di semiassi a e b si ha

$$x'(\theta) = -a \sin\theta, \quad y'(\theta) = b \cos\theta,$$

da cui

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta} \, d\theta.$$

Questo integrale si calcola esplicitamente solo nel caso di una circonferenza $(a=b)$, nel qual caso, come è giusto,

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} a \, d\theta = 2\pi a,$$

(3) Per la curva cartesiana $\Gamma = \{(x,y) : y = g(x),\ x \in [a,b]\}$, si ha $x' = 1$, $y' = g'(x)$, e dunque

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} \, dx.$$

Se ad esempio $g(x) = x^2$, con $x \in [-a,a]$, si ha

$$\ell(\Gamma) = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+4x^2}\, dx = 2\int_0^a \sqrt{1+4x^2}\, dx = \int_0^{2a} \sqrt{1+t^2}\, dt =$$

$$= \left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) \right]_0^{2a} = a\sqrt{1+4a^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2a + \sqrt{1+4a^2}\right).$$

(4) Dall'equazione in coordinate polari $r = g(\theta)$, $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, segue $x'(\theta) = g'(\theta)\cos\theta - g(\theta)\sin\theta$, $y'(\theta) = g'(\theta)\sin\theta + g(\theta)\cos\theta$, da cui

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = g'(\theta)^2 + g(\theta)^2,$$

e dunque

$$\ell(\Gamma) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2}\, d\theta.$$

Se ad esempio, $g(\theta) = e^{-\theta}$, $\theta \geq 0$, cosicché Γ è una spirale che si avvolge attorno all'origine, si ha

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{\infty} \sqrt{e^{-2\theta} + e^{-2\theta}}\, d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-\theta}\, d\theta = \sqrt{2}.$$

<u>Esercizio</u> Calcoliamo la lunghezza delle seguenti curve:

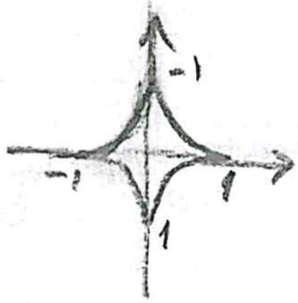
(i) (<u>astroide</u>) $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $t\in[0,2\pi]$;

(ii) (<u>cicloide</u>) $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $t\in[0,2\pi]$,

(iii) (<u>elica cilindrica</u>) $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, $t\in[0,A]$.

Si ha:

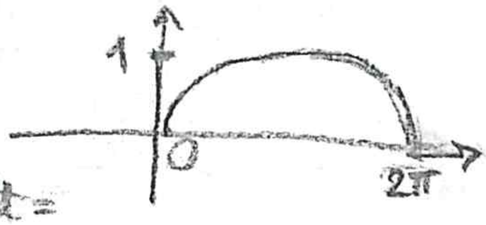
(i) $x'(t)=-3\cos^2 t\sin t$, $y'(t)=3\sin^2 t\cos t$;



$$l(\Gamma)=\int_0^{2\pi}\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=3\int_0^{2\pi}|\cos t||\sin t|\,dt=12\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t=6.$$

(ii) $x'(t)=1-\cos t$, $y'(t)=\sin t$;

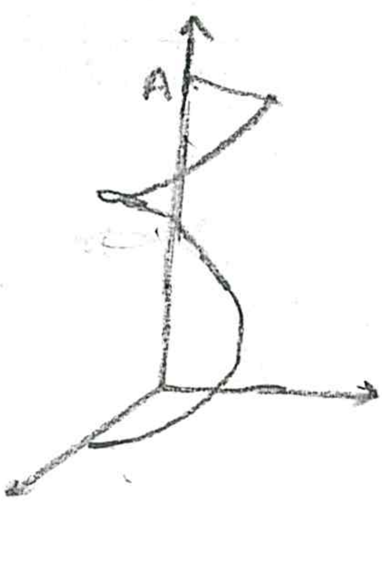


$$l(\Gamma)=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2 t/2}\,dt=2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=4\int_0^{\pi}\sin s\,ds=8.$$

(iii) $x'(t)=-\sin t$, $y'(t)=\cos t$, $z'(t)=1$;

$$l(\Gamma)=\int_0^{A}\sqrt{1+1}\,dt=\sqrt{2}A.$$



Ascissa curvilinea

Sia $\underline{\varphi}:[a,b]\to\mathbb{R}^N$ una curva regolare: dunque $|\underline{\varphi}'(t)|_N>0$ per ogni $t\in[a,b]$. Sia Γ il sostegno di $\underline{\varphi}$. Poniamo

$$s=\gamma(t):=\int_a^t |\underline{\varphi}'(\tau)|_N\,d\tau,\qquad t\in[a,b]:$$

s è la lunghezza dell'arco di curva fra $\underline{\varphi}(a)$ e $\underline{\varphi}(t)$. Essendo $\gamma'(t)=|\underline{\varphi}'(t)|_N>0$, possiamo scrivere

$$t=\gamma^{-1}(s),\qquad (\gamma^{-1})'(s)=\frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(s))}=\frac{1}{|\underline{\varphi}'(\gamma^{-1}(s))|_N}>0.$$

Il parametro s è detto <u>ascissa curvilinea</u> o <u>parametro lunghezza d'arco</u>. Se parametrizziamo Γ in funzione di s, troviamo

$$\underline{\alpha}(s):=\underline{\varphi}(\gamma^{-1}(s)),\ s\in[0,\ell(\Gamma)],\ \underline{\alpha}'(s)=\underline{\varphi}'(\gamma^{-1}(s))\,(\gamma^{-1})'(s)=\frac{\underline{\varphi}'(\gamma^{-1}(s))}{|\underline{\varphi}'(\gamma^{-1}(s))|_N};$$

quindi

$$|\underline{\alpha}'(s)|_N=1.$$

Dunque $\underline{\alpha}(s)$ è il punto di Γ tale che la lunghezza dell'arco fra $\underline{\alpha}(0)$ e $\underline{\alpha}(s)$ è esattamente uguale a s:

$$\int_0^s |\underline{\alpha}'(\sigma)|_N\,d\sigma=\int_0^s 1\,d\sigma=s.$$

Utilizzando s, molti calcoli relativi a Γ si semplificano.

Detto $\underline{T}(s)$ il versore tangente a Γ in $\underline{\alpha}(s)$, si ha

$$\underline{T}(s)=\underline{\alpha}'(s).$$

Integrali curvilinei

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Sia $\underline{\varphi}: I \to \mathbb{R}^N$ è una curva di classe C^1 tale che $\underline{\varphi}(I) = \Gamma \subseteq A$.

Definizione L'*integrale curvilineo* di f lungo la curva $\underline{\varphi}$ è

$$\int_{\varphi} f\, ds := \int_I f(\underline{\varphi}(s))\, |\underline{\varphi}'(s)|_N\, ds.$$

Si noti che se $\underline{\psi}: J \to \mathbb{R}^N$ è tale che $\underline{\psi}(\tau) = \underline{\varphi}(p(\tau))$, $\tau \in J$, ove $p: J \to I$ è un'applicazione bigettiva con $p, p^{-1} \in C^1$, si ha

$$\int_{\underline{\varphi}} f\, ds = \int_I f(\underline{\varphi}(t))|\underline{\varphi}'(t)|_N\, dt = [t = p(\tau)]$$
$$= \int_J f(\underline{\varphi}(p(\tau)))\, |\underline{\varphi}'(p(\tau))|_N |p'(\tau)|\, d\tau = \int_J f(\underline{\psi}(\tau))\, |\underline{\psi}'(\tau)|_N\, d\tau = \int_{\underline{\psi}} f\, ds.$$

Ciò ci permette di scrivere $\int_\Gamma f\, ds$, intendendo con ciò l'integrale di f lungo una qualunque curva $\underline{\varphi} \in C^1$ semplice, di sostegno Γ.

Osservazioni (1) Se $f \equiv 1$ si ha $\int_\Gamma 1\, ds = \ell(\Gamma)$.

(2) L'integrale curvilineo è lineare e monotono rispetto a f; in particolare, $\left|\int_\Gamma f\, ds\right| \le \int_\Gamma |f|\, ds$.

(3) Come negli integrali ordinari in 1 variabile, l'integrale $\int_\Gamma f\, ds$ non dipende dall'orientazione di Γ.

(4) Se $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, con $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{\underline{x}\}$ (un singolo punto), allora

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_{\Gamma_1} f\,ds + \int_{\Gamma_2} f\,ds.$$

Questo ci permette di suddividere un fissato Γ in vari tratti, e di parametrizzare separatamente ciascun tratto: si pensi, ad esempio, al caso in cui Γ è bordo di un poligono.

<u>Esercizio</u> Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

(i) $\int_\Gamma x\,ds$, $\quad\Gamma = [0,1]\times\{0\}$,

(ii) $\int_\Gamma e^{x-y}\,ds$, $\quad\Gamma = \{(x,y):\ |x|+|y|=1\}$

(iii) $\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, $\quad\Gamma = \{x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ t\in[0,2\pi]\}$.

<u>Integrali curvilinei di campi vettoriali</u>

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia $\underline{F}: A\to\mathbb{R}^N$: la funzione $\underline{F}=(F_1,F_2,\dots F_N)$ che per ogni $\underline{x}\in A$ fornisce una N-pla di valori, è detta <u>campo vettoriale</u>.
Se $\underline{\varphi}: I\to\mathbb{R}^N$ è una curva regolare con sostegno $\Gamma\subset A$, sia $\underline{\tau}$ il versore tangente a Γ, secondo una fissata orientazione. Si definisce l'integrale curvilineo del campo $\underline{F}$ lungo la curva orientata $\underline{\varphi}$ nel modo seguente (esso esprime il <u>lavoro</u> compiuto dal campo $\underline{F}$ lungo la curva)

$$\int_{+\underline{\varphi}} \underline{F}\cdot d\underline{x} := \int_{+\underline{\varphi}} [F_1\,dx_1 + \dots + F_N\,dx_N] := \int_{\underline{\varphi}} \langle \underline{F}, \underline{\tau}\rangle_N\,ds,$$

ove si è indicato con $+\underline{\varphi}$ la curva $\underline{\varphi}$ orientata nel verso di $\underline{\tau}$, mentre $-\underline{\varphi}$ denoterà la curva $\underline{\varphi}$ orientata nel verso opposto a $\underline{\tau}$).

Si osservi che $\int_{+\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x}$ è un integrale orientato: infatti esso coincide con l'integrale (non orientato) $\int_{\underline{\varphi}} \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_N \, ds$, nel quale però è presente il versore $\underline{\tau}$ che determina l'orientazione di $\underline{\varphi}$: cambiando $\underline{\varphi}$ in $-\underline{\varphi}$, l'integrale $\int_{+\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x}$ cambia segno diventando $\int_{-\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x} = -\int_{+\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x}$.

Il simbolo $\underline{F} \cdot d\underline{x} = F_1 \, dx_1 + \dots + F_N \, dx_N$ ci suggerisce il calcolo esplicito di $\int_{+\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x}$: se $\underline{\varphi}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$, $t \in I$, si ha $\underline{\tau} = \frac{\underline{\varphi}'(t)}{|\underline{\varphi}'(t)|_N}$ e

$$\int_{+\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x} = \int_{+\underline{\varphi}} (F_1 \, dx_1 + \dots + F_N \, dx_N) = \int_{\underline{\varphi}} \sum_{i=1}^N F_i(\underline{\varphi}(t)) \cdot \frac{\varphi_i'(t)}{|\underline{\varphi}'(t)|_N} \cdot |\underline{\varphi}'(t)|_N \, dt,$$

e dunque

$$\int_{+\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x} = \sum_{i=1}^N \int_{\underline{\varphi}} F_i(\underline{\varphi}(t)) \varphi_i'(t) \, dt = \int_{\underline{\varphi}} \langle \underline{F}(\underline{\varphi}(t)), \underline{\varphi}'(t) \rangle_N \, dt.$$

<u>Osservazione</u>. Se $\underline{\psi}: J \to \mathbb{R}^N$ è tale che $\underline{\psi}(\tau) = \underline{\varphi}(p(\tau))$, ove $p: J \to I$ è una funzione bigettiva con $p, p^{-1} \in C^1$, allora $p' \neq 0$ in J. Se $p' > 0$, $\underline{\varphi}$ e $\underline{\psi}$ hanno la stessa orientazione; se $p' < 0$, le orientazioni di $\underline{\varphi}$ e $\underline{\psi}$ sono opposte. Nel primo caso, con $t = p(\tau)$ si trova

$$\int_{+\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x} = \int_I \langle \underline{F}(\underline{\varphi}(t)), \underline{\varphi}'(t) \rangle_N \, dt = \int_J \langle \underline{F}(\underline{\varphi}(p(\tau))), \underline{\varphi}'(p(\tau)) p'(\tau) \rangle \, d\tau =$$

$$= \int_J \langle \underline{F}(\underline{\psi}(\tau)), \underline{\psi}'(\tau) \rangle_N \, d\tau = \int_{+\underline{\psi}} \underline{F} \cdot d\underline{x};$$

nel secondo caso, si ha $\int_{+\underline{\psi}} \underline{F} \cdot d\underline{x} = \int_{-\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x} = -\int_{+\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x}$.

siamo dunque autorizzati a scrivere $\int_{+\Gamma} F\cdot dx$ per indicare l'integrale di un campo vettoriale lungo una qualunque curva φ, semplice e di classe C^1, che abbia come sostegno Γ e come orientazione quella prefissata su Γ (e denotata con $+\Gamma$).

<u>Esercizio</u> Calcolare i seguenti integrali curvilinei di campi vettoriali:

i) $\displaystyle\int_{+\Gamma} [xy\,dx+(y^2+1)\,dy]$, $+\Gamma$ = segmento da $(0,0)$ a $(1,1)$;

ii) $\displaystyle\int_{+\Gamma} [x^2\,dx + xy^2\,dy]$, $+\Gamma = \partial([0,1]\times[0,1])$ con verso antiorario;

iii) $\displaystyle\int_{+\Gamma} [(x-z)\,dx+(1-xy)\,dy+y\,dz]$, $+\Gamma = \{(t,t^2,t^3) : t\in[0,1]\}$ col verso delle t crescenti;

iv) $\displaystyle\int_{+\Gamma} (x^2+y^2+z^2)(dx+dy+dz)$, $+\Gamma = \{(\cos t, \sin t, t) : t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, col verso delle t crescenti;

v) $\displaystyle\int_{-\Gamma} (e^z\,dx+e^x\,dy+e^y\,dz)$, $+\Gamma = \{(1,t,e^t) : t\in[0,1]\}$ col verso delle t crescenti;

vi) $\displaystyle\int_{-\Gamma} [\sin(x+y)\,dx+\cos(x-y)\,dy]$, $+\Gamma$ = lati del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, verso orario;

vii) $\displaystyle\int_{+\Gamma} (-y\,dx+x\,dy)$, $+\Gamma = \{(t\sin t, 2t), t\in[0,\pi]\}$.