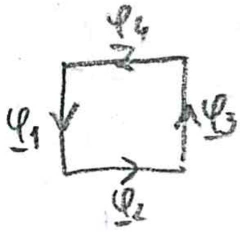
ANALISI 2 | Lu 9/3/20 | 244

Curve di classe C^1 a tratti

Iniziamo con una notazione: date 2 curve continue $\underline{\varphi}:[a,b]\to\mathbb{R}^N$, $\underline{\psi}:[c,d]\to\mathbb{R}^N$, con $\underline{\varphi}(b)=\underline{\psi}(c)$, indichiamo con $\underline{\varphi}\vee\underline{\psi}$ la curva ottenuta percorrendo la $\underline{\varphi}$ da $\underline{\varphi}(a)$ a $\underline{\varphi}(b)$, e poi la $\underline{\psi}$ da $\underline{\psi}(c)=\underline{\varphi}(b)$ a $\underline{\psi}(d)$. Non è necessario scrivere una parametrizzazione unica per $\underline{\varphi}\vee\underline{\psi}$. Scriveremo anche $-\underline{\psi}$ per indicare l'opposta di $\underline{\psi}$, cioè la curva che ha lo stesso sostegno di $\underline{\psi}$ ma lo percorre in verso opposto.

Definizione Sia $\underline{\varphi}:I\to\mathbb{R}^N$ una curva. Diciamo che $\underline{\varphi}$ è di classe C^1 a tratti se esistono $\underline{\varphi}_1,\dots,\underline{\varphi}_k$, curve di classe C^1, tali che $\underline{\varphi}=\underline{\varphi}_1\vee\underline{\varphi}_2\vee\dots\vee\underline{\varphi}_k$.

Esempio Se $\underline{\varphi}:I\to\mathbb{R}^2$ è la curva che descrive il bordo di un quadrato in verso antiorario,



allora $\underline{\varphi}$ è di classe C^1 a tratti, con $\underline{\varphi}=\underline{\varphi}_1\vee\underline{\varphi}_2\vee\underline{\varphi}_3\vee\underline{\varphi}_4$ come in figura.

Osserviamo che se $\underline{\varphi}=\underline{\varphi}_1\vee\dots\vee\underline{\varphi}_k$ è di classe C^1 a tratti, allora

$$l(\underline{\varphi})=\sum_{i=1}^{k} l(\underline{\varphi}_i),\quad \int_{\underline{\varphi}} f\,ds=\sum_{i=1}^{k}\int_{\underline{\varphi}_i} f\,ds,\quad \int_{+\underline{\varphi}} \underline{F}\cdot d\underline{x}=\sum_{i=1}^{k}\int_{+\underline{\varphi}_i}\underline{F}\cdot d\underline{x}$$

per ogni funzione $f:A\to\mathbb{R}$ continua, per ogni campo vettoriale continuo $\underline{F}:A\to\mathbb{R}^N$, con A aperto contenente il sostegno di $\underline{\varphi}$.

Campi vettoriali conservativi

Questa nozione è importantissima perché si incontra continuamente in fisica: ad esempio il campo gravitazionale ed il campo elettrico generato da una carica puntiforme sono campi conservativi.

Definizione Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto. Un campo vettoriale $\underline{F}: A \to \mathbb{R}^N$ è conservativo se esiste una funzione $f: A \to \mathbb{R}$, differenziabile, tale che $\nabla f(\underline{x}) = \underline{F}(\underline{x})$ per ogni $\underline{x} \in A$. In tal caso la funzione f è un potenziale di $\underline{F}$.

Una condizione equivalente alla conservatività è:

Proposizione Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e sia $\underline{F}: A \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale continuo: $\underline{F}$ è conservativo se e solo se risulta

$$\int_{+\Gamma} \underline{F} \cdot d\underline{x} = 0$$

per ogni curva chiusa Γ, di classe C^1 a tratti, contenuta in A.

dim ($\Longrightarrow$) Sia $\underline{F}$ conservativo e sia $f: A \to \mathbb{R}$ un potenziale di $\underline{F}$. Allora, se $\underline{\varphi}: [a,b] \to \mathbb{R}^N$ ha sostegno $\Gamma \subset A$, è di classe C^1 a tratti ed è chiusa, (cioè $\underline{\varphi}(a) = \underline{\varphi}(b)$), si ha

$$\int_{+\Gamma} \underline{F} \cdot d\underline{x} = \int_a^b \langle \underline{F}(\underline{\varphi}(t)), \underline{\varphi}'(t) \rangle_N \, dt = \int_a^b \langle \nabla f(\underline{\varphi}(t)), \underline{\varphi}'(t) \rangle_N \, dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\underline{\varphi}(t)) \, dt = f(\underline{\varphi}(b)) - f(\underline{\varphi}(a)) = 0.$$

($\Longleftarrow$) Supponiamo che sia $\int_{+\Gamma} \underline{F} \cdot d\underline{x} = 0$ per ogni curva chiusa Γ, di classe C^1 a tratti, contenuta in A. Fissato $\underline{x}_0 \in A$, per ogni $\underline{z} \in A$ sia $\mathcal{C}(\underline{z})$ l'insieme di tutte le curve di classe C^1 a tratti, con sostegno contenuto in A, che hanno primo estremo $\underline{x}_0$ e secondo estremo $\underline{z}$. Questo insieme $\mathcal{C}(\underline{z})$ è certamente non vuoto per ogni $\underline{z}$ abbastanza vicino a $\underline{x}_0$. Supporremo $\mathcal{C}(\underline{z}) \neq \emptyset$ $\forall \underline{z} \in A$.

Allora, per ciascuna $\underline{\varphi} \in \mathcal{C}(\underline{z})$ il valore dell'integrale $\int_{\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x}$ non cambia, ossia esso dipende solo dall'estremo $\underline{z}$: infatti, se $\underline{\varphi}, \underline{\psi} \in \mathcal{C}(\underline{z})$, allora la curva $\underline{\gamma}$ che si ottiene percorrendo di seguito prima $\underline{\varphi}$ da $\underline{x}_0$ a $\underline{z}$, e poi $-\underline{\psi}$ da $\underline{z}$ a $\underline{x}_0$ è chiusa, di classe C^1 a tratti e contenuta in A: dunque, per ipotesi,

$$0 = \int_{\underline{\gamma}} \underline{F} \cdot d\underline{x} = \int_{+\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x} + \int_{-\underline{\psi}} \underline{F} \cdot d\underline{x} = \int_{+\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x} - \int_{+\underline{\psi}} \underline{F} \cdot d\underline{x} .$$

Poniamo allora

$$f(\underline{z}) = \int_{\underline{\varphi}} \underline{F} \cdot d\underline{x} \qquad \text{ove } \underline{\varphi} \in \mathcal{C}(\underline{z}),$$

e questa funzione è ben definita per ogni $\underline{z} \in A$.

Proviamo ora che $\nabla f(\underline{z}) = \underline{F}(\underline{z})$ per ogni $\underline{z} \in A$: per $1 \le i \le N$ consideriamo il rapporto incrementale $\frac{1}{h}\left[f(\underline{z} + h\underline{e}_i) - f(\underline{z})\right]$.

Il numeratore è $\int_{\underline{\varphi}_1} \underline{F} \cdot d\underline{x} - \int_{\underline{\varphi}_2} \underline{F} \cdot d\underline{x}$, ove $\underline{\varphi}_1 \in \mathcal{C}(\underline{z} + h\underline{e}_i)$, $\underline{\varphi}_2 \in \mathcal{C}(\underline{z})$.

La curva $\underline{\varphi}_1 \vee (-\underline{\varphi}_2)$ ha primo estremo $\underline{x}_0$ e secondo estremo $\underline{z}$, dopo essere passata da $\underline{z}+h\underline{e}_i$. Nulla ci vieta di scegliere $\underline{\varphi}_1 = \underline{\varphi}_2 \vee \underline{\psi}$, ove $\underline{\psi}(t) = \underline{z}+th\underline{e}_i$, $t\in[0,1]$, è il segmento di estremi $\underline{z}$ e $\underline{z}+h\underline{e}_i$, poiché $\underline{\varphi}_1 \in \mathcal{G}(\underline{z}+h\underline{e}_i)$ al pari di $\underline{\varphi}$. Con questa scelta,

$$\frac{f(\underline{z}+h\underline{e}_i)-f(\underline{z})}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{\underline{\varphi}_1}\underline{F}\cdot d\underline{x} - \int_{\underline{\varphi}_2}\underline{F}\cdot d\underline{x}\right] = \frac{1}{h}\left[\int_{\underline{\varphi}_2}\underline{F}\cdot d\underline{x} + \int_{\underline{\psi}}\underline{F}\cdot d\underline{x} - \int_{\underline{\varphi}_2}\underline{F}\cdot d\underline{x}\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{\underline{\psi}}\underline{F}\cdot d\underline{x} = \frac{1}{h}\int_0^1 \langle \underline{F}(\underline{z}+th\underline{e}_i), h\underline{e}_i\rangle_N\, dt = \int_0^1 F_i(\underline{z}+th\underline{e}_i)\, dt$$

Grazie alla continuità di F_i in $\underline{z}$, per $h\to 0$ si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{z}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\underline{z}+h\underline{e}_i)-f(\underline{z})}{h} = F_i(\underline{z}), \quad \underline{z}\in A, \ i=1,\dots,N. \ \square$$

Una condizione più maneggevole, che non garantisce la conservatività ma ne è condizione necessaria, è la seguente.

__Proposizione__ Sia $A\subseteq\mathbb{R}^N$ aperto. Se $\underline{F}: A\to\mathbb{R}^N$ è un campo vettoriale di classe C^1 conservativo, allora

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\underline{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x}\in A, \ \forall i,j=1,\dots,N.$$

__dim.__ Sia f un potenziale di $\underline{F}$: allora, essendo $\frac{\partial f}{\partial x_i} = F_i$, si ha

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \qquad \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j};$$

poiché $f\in C^2(A)$, dal teorema di Schwarz segue subito la tesi. $\square$

Osserviamo che il viceversa della proposizione precedente è falso.
Ad esempio, sia

$$\underline{F}(x,y)=\left(\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{-x}{x^2+y^2}\right),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Il campo $\underline{F}$ è di classe C^∞, e verifica

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right),$$

ma non è conservativo, perché il suo integrale lungo la circonferenza Γ: $x=\cos\vartheta$, $y=\sin\vartheta$, $\vartheta\in[0,2\pi]$ vale

$$\int_{+\Gamma}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\,dx-\frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right]=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\sin^2\vartheta}{1}-\frac{\cos^2\vartheta}{1}\right]d\vartheta=-2\pi\neq 0,$$

e ciò viola la proposizione precedente. □

Tuttavia se A è un aperto di $\mathbb{R}^N$ <u>semplicemente connesso</u>, ossia ogni curva chiusa, con sostegno contenuto in A, è contraibile a un punto senza uscire da A, allora ogni campo vettoriale di classe C^1, tale che

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\quad \text{in } A,\quad \forall i,j=1\dots N,$$

è conservativo (dimostrazione omessa).

Ma come si costruisce un potenziale di un campo vettoriale conservativo?

Vediamo un esempio pratico. Consideriamo

$$\underline{F}(x,y)=\left(e^{x-y}(1+x+y),\ e^{x-y}(1-x-y)\right),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{x-y}(1+x+y)\right]=-e^{x-y}(x+y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x-y}(1-x-y)\right],$$

quindi, essendo $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso, il campo è conservativo.

Cerchiamo $f(x,y)$ tale che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x-y}(1+x+y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x-y}(1-x-y) \end{cases}$$

Integriamo la prima equazione: avremo

$$f(x,y) = \int e^{x-y}(1+x+y)\,dx = e^{x-y}(1+x+y) - \int e^{x-y}\,dx =$$

$$= e^{x-y}(x+y) + c(y),$$

con $c(y)$ costante di integrazione, quindi funzione indipendente da x, ma dipendente da y.

Sostituiamo l'espressione di f nella seconda equazione, dopo averla derivata rispetto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{(x-y)}(x+y) + e^{x-y} + c'(y) = e^{x-y}(1-x-y);$$

si deduce

$$c'(y) = 0,$$

dunque $c(y) = c$ e

$$f(x,y) = e^{x-y}(x+y) + c.$$

<u>Esercizio</u> Verificare che i seguenti campi sono conservativi e scriverne un potenziale:

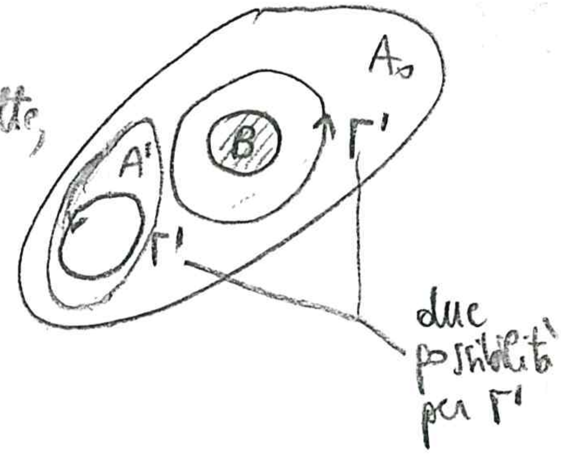
(i) $\left(\dfrac{1}{x+y}, \dfrac{1}{x+y}\right)$, (ii) $\left(2xy - y^2\cos x + 1, -2y\sin x + x^2 + y, 3e^z\right)$.

Che succede se l'aperto A in cui è definito il campo vettoriale non è semplicemente connesso? Succede che esistono campi di classe C^1, tali che $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ in A, eppure non sono conservativi.

Tuttavia, sia $\underline{F}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo vettoriale di classe C^1, con $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$ per ogni $(x,y) \in A$. Supponiamo che A sia della forma

$$A = A_0 \setminus B,$$

dove A_0 è un aperto semplicemente connesso e B è una palla chiusa contenuta in A_0.

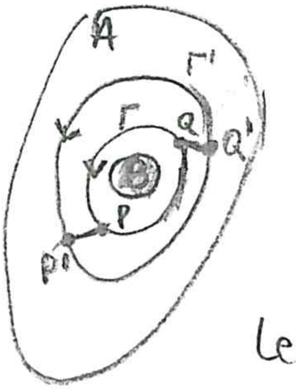


<u>Proposizione</u> Nelle ipotesi sopra dette, se esiste una curva chiusa Γ che
(a) è contenuta in A_0,
(b) circonda B,
(c) $\int_{+\Gamma} \underline{F} \cdot d\underline{x} = 0$,
allora il campo $\underline{F}$ è conservativo in A.

<u>dim.</u> Proviamo che per ogni curva chiusa $\Gamma' \subset A$ si ha $\int_{\Gamma'} \underline{F} \cdot d\underline{x} = 0$. I casi sono 2: o Γ' non circonda B, e quindi è contenuta, con tutto il suo interno, in $A = A_0 \setminus B$; oppure Γ' circonda B. Nel 1° caso, Γ' è contenuta in un opportuno aperto $A' \subset A$,

semplicemente connesso; quindi, essendo $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, deve essere $\int_{+\Gamma'} \underline{F} \cdot d\underline{x} = 0$.

Nel secondo caso, supposto che $+\Gamma$ e $+\Gamma'$ circondino B in verso antiorario, fissiamo $P, Q \in \Gamma$ e $P', Q' \in \Gamma'$, come in figura; consideriamo i segmenti $P'P$ e $Q'Q$, nonché



le curve

$$\Gamma_1 : \; Q' \xrightarrow{\text{su } \Gamma'} P' \to P \xrightarrow{\text{su } -\Gamma} Q \to Q'$$

$$\Gamma_2 : \; P' \xrightarrow{\text{su } \Gamma'} Q' \to Q \xrightarrow{\text{su } -\Gamma} P \to P'.$$

Le curve Γ_1 e Γ_2 sono di classe C^1 a tratti, chiuse, non circondano B; quindi

$$\int_{+\Gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{x} = \int_{+\Gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{x} = 0.$$

Perciò

$$0 = \int_{+\Gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{x} + \int_{+\Gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{x} =$$

$$= \int_{\substack{Q' \to P' \\ \text{su } +\Gamma'}} \underline{F} \cdot d\underline{x} + \cancel{\int_{P'P} \underline{F} \cdot d\underline{x}} + \int_{\substack{P \to Q \\ \text{su } -\Gamma}} \underline{F} \cdot d\underline{x} + \cancel{\int_{QQ'} \underline{F} \cdot d\underline{x}} +$$

$$+ \int_{\substack{P' \to Q' \\ \text{su } +\Gamma'}} \underline{F} \cdot d\underline{x} + \cancel{\int_{Q'Q} \underline{F} \cdot d\underline{x}} + \int_{\substack{Q \to P \\ \text{su } -\Gamma}} \underline{F} \cdot d\underline{x} + \cancel{\int_{P'P} \underline{F} \cdot d\underline{x}} =$$

$$= \int_{+\Gamma'} \underline{F} \cdot d\underline{x} + \int_{-\Gamma} \underline{F} \cdot d\underline{x} = \left(\text{essendo } \int_{\Gamma} \underline{F} \cdot d\underline{x} = 0\right)$$

$$= \int_{+\Gamma'} \underline{F} \cdot d\underline{x}.$$

Per l'arbitrarietà di Γ', $\underline{F}$ è conservativo. $\square$

Osservazione Il discorso è analogo se l'aperto A è del tipo $A = A_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, con A_0 aperto semplicemente connesso e $B_1 \dots B_m$ palle chiuse, disgiunte, contenute in A_0.
Un campo $\underline{F} : A \to \mathbb{R}^N$, di classe C^1, con $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ in A, è conservativo se esistono m curve chiuse, di classe C^1 a tratti, contenute in A, tali che

(i) Γ_j circonda B_j ma non le altre palle B_i,

(ii) $\int_{\Gamma_j} \underline{F} \cdot d\underline{x} = 0$, $j = 1 \dots m$. $\square$

Esercizio Verificare se i seguenti campi vettoriali sono, o no, conservativi e scriverne eventualmente un potenziale:

(i) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x \right)$,

(ii) $\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2} \right)$,

(iii) $\left(\sqrt{\frac{y+2}{x+2}}, \sqrt{\frac{x+2}{y+2}} \right)$.

Osservazione Torniamo all'ultimo esercizio di pag. 243: il campo là scritto è conservativo perchè: (a) è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, (b) $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, come è facile verificare, (c) se Γ_0 è la circonferenza $x = \cos t$, $y = \sin t$ che circonda il "buco" $(0,0)$, l'integrale $\int_{+\Gamma_0} \underline{F} \cdot d\underline{x}$ è nullo (verifica immediata). Trovato un potenziale f di $\underline{F}$, l'integrale proposto, senza calcoli, vale $f\left(\frac{1}{(4\pi+1)^2}, 0\right) - f(1,0)$.

Risolviamo gli esercizi di pag. 249.

(i) Ovviamente le derivate incrociate sono uguali:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{x+y} = -\frac{1}{(x+y)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x+y}.$$

Su ciascuno dei due aperti $\{x+y>0\}$ e $\{x+y<0\}$, che sono semipiani e quindi semplicemente connessi, il campo è conservativo. Un potenziale f verifica

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x+y}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{x+y};$$

dalla 1ª equazione

$$f(x,y) = \ln|x+y| + c(y),$$

dalla 2ª equazione

$$\frac{1}{x+y} = f_y(x,y) = \frac{1}{x+y} + c'(y),$$

dunque $c'(y)=0$, $c=$ costante e $f(x,y) = \begin{cases} \ln|x+y|+c_1 & \text{se } x+y<0 \\ \ln|x+y|+c_2 & \text{se } x+y>0. \end{cases}$

(ii) Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy - y^2\cos x + 1) = 2x - 2y\cos x = \frac{\partial}{\partial x}(-2y\sin x + x^2 + y),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(2xy - y^2\cos x + 1) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}3e^z,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(-2y\sin x + x^2 + y) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}3e^z.$$

Dunque il campo è conservativo. Sia $f(x,y,z)$ un potenziale: allora

$$f_x = 2xy - y^2\cos x + 1, \quad f_y = -2y\sin x + x^2 + y, \quad f_z = 3e^z.$$

Dalla 3ª equazione

$$f(x,y,z) = 3e^z + g(x,y);$$

dalla 1ª equazione

$$2xy - y^2\cos x + 1 = f_x = g_x ,$$

e dunque

$$g(x,y) = x^2y - y^2\sin x + x + c(y) ;$$

dalla 2ª equazione

$$-2y\sin x + x^2 + y = f_y = g_y = x^2 - 2y\sin x + c'(y),$$

da cui

$$c'(y) = y , \qquad c(y) = \frac{y^2}{2} + c ,$$

e infine

$$f(x,y,z) = 3e^z + x^2y - y^2\sin x + x + \frac{y^2}{2} + c .$$

Risolviamo adesso gli esercizi di pag. 252.

(i) Il dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ e non è semplicemente connesso. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right] = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} + 1 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right],$$

quindi le derivate incrociate sono uguali. Prendiamo una curva Γ che circonda $(0,0)$: ad esempio $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta, \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$.

Lungo questa curva, orientata in verso antiorario,

$$\int_\Gamma \left[\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)dy\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[(\cancel{\cos\theta} + \sin\theta)(-\sin\theta) + (\cancel{\sin\theta} + \cos\theta)\cos\theta\right]d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta)\,d\theta + \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = -\pi + \pi = 0 .$$

Se ne deduce che il campo è conservativo.
Un potenziale f soddisfa

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \quad , \quad f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x \, .$$

Dalla 1^a equazione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy + c(y) \, ,$$

e dalla 2^a

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x = f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x + c'(y) \, ;$$

dunque $c(y) =$ costante e

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy + C \, .$$

(ii) Il dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, non semplicemente connesso. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{x-y}{x^2+y^2} = \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x+y}{x^2+y^2} \, ;$$

quindi la condizione necessaria è verificata. Inoltre, scelta la curva $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, che circonda $(0,0)$, si ha

$$\int_{+\Gamma} \left[\frac{x-y}{x^2+y^2} \, dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} \, dy \right] = \int_0^{2\pi} \left[(\cancel{\cos\theta} - \sin\theta)(-\sin\theta) + (\cos\theta + \cancel{\sin\theta})\cos\theta \right] d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \, d\theta = 2\pi \neq 0 \, .$$

Dunque il campo non è conservativo.

(iii) Il dominio è definito da $(x+2)(y+2) > 0$, che è l'unione di due quadranti aperti, disgiunti, con vertice in $(-2,2)$. Ciascuno dei due quadranti è semplicemente connesso. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{y+2}{x+2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(y+2)(x+2)}} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\frac{x+2}{y+2}}.$$

Cerchiamo un potenziale f: deve essere

$$f_x(x,y) = \sqrt{\frac{y+2}{x+2}}, \qquad f_y(x,y) = \sqrt{\frac{x+2}{y+2}}.$$

Dalla 1ª relazione

$$f(x,y) = 2\sqrt{(x+2)(y+2)} + c(y),$$

e dalla 2ª

$$\sqrt{\frac{x+2}{y+2}} = f_y(x,y) = \sqrt{\frac{x+2}{y+2}} + c'(y),$$

da cui $c'(y) = 0$ e $c =$ costante. Perciò

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\sqrt{(x+2)(y+2)} + c_1 & \text{se } x+2>0,\ y+2>0, \\ 2\sqrt{(x+2)(y+2)} + c_2 & \text{se } x+2<0,\ y+2<0. \end{cases}$$

Rivediamo infine l'esercizio di pag 243 citato nell'osservazione di pag. 252. Il campo

$$\left(e^x\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2}\right),\ e^x\frac{2y}{x^2+y^2}\right),$$

definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[e^x\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right] = \frac{2ye^x}{x^2+y^2} - \frac{4xye^x}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[e^x\frac{2y}{x^2+y^2}\right] = e^x\frac{2y}{x^2+y^2} - e^x\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2},$$

quindi le derivate incrociate sono uguali. Scelta la curva $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$, $\theta\in[0,2\pi]$ che circonda l'origine, si ha

$$\int_\Gamma \left[\left(e^x\left(\ln(x^2+y^2)+\frac{2x}{x^2+y^2}\right)dx + \frac{e^x\, 2y}{x^2+y^2}\,dy\right]=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[e^{\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,(-\sin\theta) + e^{\cos\theta}\,2\sin\theta\cos\theta\right]d\theta=0.$$

Dunque il campo è conservativo. Un potenziale f verifica

$$f_x(x,y)=e^x\left(\ln(x^2+y^2)+\frac{2x}{x^2+y^2}\right),\quad f_y(x,y)=\frac{2ye^x}{x^2+y^2}.$$

Dalla 2ª equazione

$$f(x,y)=e^x\ln(x^2+y^2)+c(x),$$

e dalla 1ª

$$e^x\left(\ln(x^2+y^2+\frac{2x}{x^2+y^2}\right)=f_x(x,y)=e^x\ln(x^2+y^2)+\frac{2xe^x}{x^2+y^2}+c'(x),$$

da cui $c'(x)=0$ e pertanto

$$f(x,y)=e^x\ln(x^2+y^2)+c.$$

La curva Γ_0 è descritta da $r=\frac{1}{(\theta+1)^2}$, $0\le\theta\le\pi$, ossia

$$x=\frac{1}{(\theta+1)^2}\cos\theta,\quad y=\frac{1}{(\theta+1)^2}\sin\theta,\quad \theta\in[0,4\pi].$$

Il 1° estremo è $(1,0)$, il 2° estremo è $\left(\frac{1}{(4\pi+1)^2},0\right)$. Dato che f è conservativo, il lavoro del campo su Γ_0 è semplicemente $f\left(\frac{1}{(4\pi+1)^2},0\right)-f(1,0)=e^{\frac{1}{(4\pi+1)^2}}\cdot\ln\frac{1}{(4\pi+1)^4}$.