ANALISI 2 | ve. 13/3/20 |

Esercizi

1. Posto $\underline{\varphi}(t) = \left(\frac{2+3t}{8t}, 2t-1, \ln t \right)$, $t \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, determinare:
   (a) la retta tangente alla curva nel punto $\underline{\varphi}(1)$;
   (b) la lunghezza di $\underline{\varphi}$.

2. Posto $\underline{\varphi}(t) = (te^{2t}, 3te^{2t}, 2te^{2t})$, $t \in [0,1]$, determinare:
   (a) la retta tangente e il piano normale in $\underline{\varphi}\left(\frac{1}{2}\right)$;
   (b) la lunghezza di $\underline{\varphi}$.

3. Sia $\underline{\varphi}(t) = \left(\frac{5}{3}t^3, \frac{5}{2}t^2 - 1 \right)$, $t \geq 0$. Sia $A = \underline{\varphi}(0)$.
   (a) Trovare un punto $B = \underline{\varphi}(t)$, tale che l'arco di curva fra A e B misuri $\frac{5}{3}(\sqrt{8}-1)$;
   (b) determinare la retta tangente e la retta normale in B.

4. Sia $\underline{\varphi}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$; sia Γ il sostegno di $\underline{\varphi}$.
   (a) Calcolare l'integrale $\int_\Gamma z \, ds$,
   (b) determinare il piano normale a $\underline{\varphi}$ in $(-\pi, 0, \pi)$.

5. Posto $E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x^2}{4} \right\}$, si calcoli
$$\int_{\partial E} \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}} \, ds,$$
e si scriva la retta tangente a ∂E in $\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

6. Sia $\underline{F}(x,y,z) = (ze^{xz},\ 1+z^2\cos y,\ xe^{xz}+2z\sin y)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Provare che $\underline{F}$ è conservativo e scriverne un potenziale.

7. Sia $\underline{F}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+5y^2,\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+10xy\right)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\underline{0}\}$.

(a) Stabilire se $\underline{F}$ è conservativo,

(b) Calcolare $\int_{+\Gamma} \underline{F}\cdot d\underline{x}$, ove $\Gamma=\underline{\varphi}([0,1])$, $\underline{\varphi}(t)=(\cos t\pi+t^2, 1+t^2)$.

8. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = (\sin(x+y),\ \cos(x+y)),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

lungo il bordo del triangolo di vertici $(0,0)$, $(\pi,0)$ $(0,\pi)$, percorso in verso antiorario.

9. Sia $\underline{\varphi}$ la curva chiusa che percorre i segmenti che uniscono $(1,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,6)$, $(1,0,0)$ nell'ordine.

(a) Calcolare $\int_\Gamma z^2\,ds$,

(b) Calcolare $\int_\Gamma \underline{V}\cdot d\underline{x}$, ove $\underline{V}(x,y,z) = (x^2, y, z)$.

10. Trovare l'area delle regioni delimitate dalle seguenti curve:

(a) cardioide: $r = 1+\cos\theta$, $|\theta|\le\pi$; (b) astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=1$;

(c) strofoide $y^2 = x^2\frac{(1+x)}{1-x}$, (d) lemniscata di Bernoulli $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$.