Un po' di integrali

1. $\int_A \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\left(z+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right) dx\,dy\,dz$, $A=\{(x,y,z): z\geq 0, y\geq 0, 1-z\geq\sqrt{x^2+y^2}\}$.

2. Calcolare il baricentro dell'insieme

$A=\{(x,y,z): x^2+y^2\leq 1,\ 1-\sqrt{1-x^2-y^2}\leq z\leq 2-x^2-y^2\}$.

3. $\int_D \operatorname{arctg}(y-x^2)\,dx\,dy$, $D=\{(x,y): x^2\leq y\leq x^2+1, (x-1)^2\leq y\leq (x-1)^2+1\}$.

4. $m_2(D)$, $D=\{(x,y): 0\leq y\leq 2^{5-x}+x-6,\ 2^y+y^2\leq x\leq 4\}$.

5. $\int_T x\,dx\,dy\,dz$, $T=\{(x,y,z): y\geq 0,\ y^2-(x^2+z^2)\geq 1,\ x^2+y^2\leq 4\}$.

6. $\int_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, $A=\{(x,y): \sqrt{|x|}\leq y\leq 1\}$.

7. $\int_D (x-1)\,dx\,dy$, $D=\{(x,y): |x|y\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ |x|\leq 2\}$.

8. $m_3(T)$, T regione interna alla superficie ottenuta ruotando la curva $x=\sqrt{\frac{z}{2}}\,e^{-z^2+\frac{1}{4}}$, $0\leq z\leq 1$, attorno all'asse z.

9. $\int_D \frac{|y|}{x} e^{y^2x^{-3/2}}\,dx$, $D=\{(x,y): y^2\leq x^3\leq 1\}$.

Altri esercizi

10. Sia $\underline{\varphi}(t)=\left(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\sqrt{3}\right)$, $t\in\mathbb{R}$.

(a). Trovare $t_0\in\mathbb{R}$ tale che $\|\underline{\varphi}(t_0)\|_3=2$;

(b) Trovare $t_1\in\mathbb{R}$ tale che l'arco di curva fra $\underline{\varphi}(t_0)$ e $\underline{\varphi}(t_1)$ misuri $2\sqrt{5}$.

(c) Trovare la retta tangente e il piano normale in $\underline{\varphi}(t_0)$.

11. Sia $\underline{\varphi}(t)=\left(t\cos 2t, -t\sin 2t\right)$, $-1\leq t\leq 1$.

(a) Trovare la retta tangente in $\underline{\varphi}(0)$;

(b) calcolare $\int_{\underline{\varphi}}\sqrt{x^2+y^2}\,ds$.

12. Sia $\underline{\varphi}(t)=\left(\sin t, t, 1\right)$, $t\in[0,2\pi]$.

(a) Trovare il versore tangente in $\underline{\varphi}(0)$, $\underline{\varphi}(\frac{\pi}{2})$ e $\underline{\varphi}(\pi)$.

(b) Calcolare $\int_{\underline{\varphi}} xyz\sqrt{1+\cos^2 y}\,ds$.

13. Sia $\underline{\varphi}(t)=\left(t\sin t, 2t\right)$, $t\in\mathbb{R}$, e sia $\underline{F}(x,y)=(-y,x)$.

(a) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\underline{F}$ sul tratto di curva da $P_0=(0,0)$ a $P_1=(0,2\pi)$.

(b) Calcolare il lavoro compiuto da $\underline{F}$ sul segmento da P_0 a P_1.

14. Si calcoli il lavoro di $\underline{F}(x,y)=(3y,1+x)$ lungo la curva $\underline{\varphi}(t)=\left(t^2, t+\operatorname{arctg} t\right)$, $0\leq t\leq 2$.

15. Calcolare l'area della regione interna all'ellisse di equazione $x^2+\frac{y^2}{3}=1$ ed esterna all'ellisse di equazione $3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$.

16. Calcolare $\int_\Gamma \frac{\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, ove

$$\Gamma=\left\{(x,y):\ y^2-x^2=1,\ y>0,\ |x|\leq\frac{e^2-1}{2e}\right\}.$$

17. $m_2(E)$, $E=$ regione delimitata dalle curve

$$x^2+y^2=\frac{\pi^2}{2},\quad y=\arcsin\frac{2}{\pi}x,\quad y=0.$$

18. Calcolare $\int_\Gamma \frac{4x}{4+y^2}\,ds$, $\Gamma=\{(x,y):\ y=2\sqrt{x},\ x\in[0,1]\}$.

19. Provare che il campo

$$\underline{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2+2z}}+xz,\ -\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2+2z}},\ \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2+2z}}+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$$

è conservativo in $A=\left\{(x,y,z):\ z\geq\frac{y^2-x^2}{2}\right\}$, e determinarne il potenziale che si annulla in $(0,0,1)$.

20. Trovare $f\in C(\mathbb{R})$, $g\in C^1(\mathbb{R})$ tali che il campo

$$\left(2f(x)\frac{x^2y^2}{y^2+1}+\frac{z^2}{z^2+1},\ (g(x)-g(0))f(y),\ x f(z)\right)$$

sia conservativo in $\mathbb{R}^3$, e determinarne i potenziali.