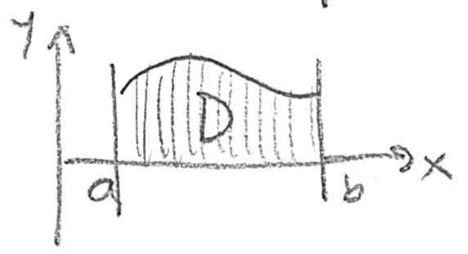
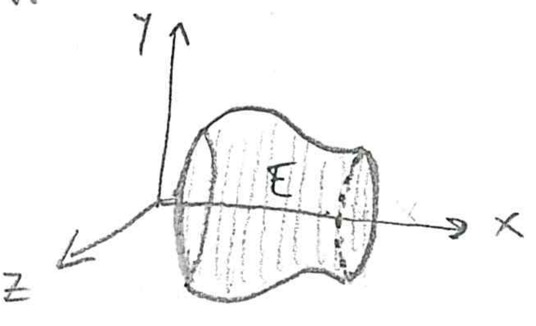
Esercizi:

- Consideriamo una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e positiva. Sia D il sottografico di f, ossia
$$D=\{(x,y):\ a\le x\le b,\ \ 0\le y\le f(x)\}.$$
Indicando con E il ruotato di D attorno all'asse x, vogliamo calcolare il volume di E.
Utilizzando coordinate cilindriche di asse x,
$$\begin{cases} x=x \\ y=r\cos\theta \\ z=r\sin\theta \end{cases} \qquad x\in[a,b],\ \ \theta\in[0,2\pi],$$
l'insieme E è descritto dalle relazioni
$$a\le x\le b,\qquad 0\le r\le f(x),\qquad 0\le\theta\le 2\pi$$
(infatti, per ogni x il raggio della rotazione è $f(x)$).





Dunque
$$m_3(E)=\int_0^{2\pi}\int_a^b\int_0^{f(x)} r\,dr\,dx\,d\theta = 2\pi\int_a^b\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{f(x)}dx =$$
$$=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx.$$

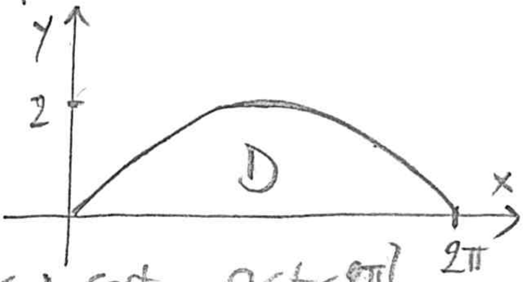
Quindi il volume di E si ottiene integrando, rispetto a x, fette circolari verticali di raggio f(x).

• Quindi, se $f(x)=\sin x$, $0\leq x\leq \pi$, il volume del ruotato del sottografico di f ha volume

$$\pi\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

• Consideriamo la cicloide, Γ, definita da

$$\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 1-\cos t, \end{cases} \quad 0\leq t\leq 2\pi .$$



Se $D=\{(x,y):\ x=t-\sin t,\ 0\leq y\leq 1-\cos t,\ 0\leq t\leq 2\pi\}$, ed E è il ruotato di D attorno all'asse x, qual è il volume di E?

Possiamo scrivere, in coordinate cilindriche,

$$\begin{cases} x = t-\sin t & t\in[0,2\pi] \\ y = r\cos\theta & r\in[0,1-\cos t] \\ z = r\sin\theta & \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$$

Questo è un cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^3$: la matrice delle derivate è

$$\begin{pmatrix} 1-\cos t & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

e il determinante Jacobiano è

$$J = (1-\cos t)\, r .$$

Quindi

$$m_3(E) = \int_E dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos t} r(1-\cos t)\,dr\,dt\,d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1-\cos t} dt = \pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\,dt =$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \left[1 + 3\cos^2 t\right] dt = \pi(2\pi + 3\pi) = 5\pi^2 .$$

Si poteva ragionare anche così: dall'equazione $x = t - \sin t$, posto $\alpha(t) = t - \sin t$ e osservato che

$$\alpha'(t) = 1 - \cos t > 0 \quad \text{in }]0, 2\pi],$$

si deduce che $\alpha : [0,2\pi] \to [0,2\pi]$ è invertibile con inversa continua e C^1 in $]0,2\pi]$. Quindi

$$t = \alpha^{-1}(x),$$

da cui

$$y = 1 - \cos \alpha^{-1}(x).$$

Perciò D è sottografico della funzione $x \mapsto 1 - \cos \alpha^{-1}(x)$. Pertanto

$$m_3(E) = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos \alpha^{-1}(x))^2\,dx = [x = \alpha(t)]$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \alpha'(t)\,dt = \pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\,dt = 5\pi^2$$