ANALISI 2 | Lu 30/3/20 |

Calcolo combinatorio

Raggruppamenti Siano A, B insiemi finiti, di cardinalità k e n rispettivamente: dunque, $\#A = k$ e $\#B = n$. Definiamo un raggruppamento come l'insieme che si ottiene prendendo tutte le coppie (a,b) formate da un elemento $a \in A$ ed un elemento $b \in B$. Esso dà luogo al prodotto cartesiano $A \times B$, ed evidentemente

$$\# A \times B = kn.$$

Esempio Se nel mio armadio ci sono 3 magliette e 4 (paia di) pantaloni, in quanti modi diversi mi posso vestire? In $4 \cdot 3 = 12$ modi.

Disposizioni semplici Siano A, B come sopra, con $A \subseteq B$ e $k \leq n$. Una disposizione semplice di n elementi e di classe k si ottiene scegliendo, con ordine e senza ripetizione, k elementi da un insieme di n elementi. In altre parole, una disposizione semplice è l'immagine $f(A)$ di una funzione iniettiva da A in B. Calcoliamo la cardinalità $D_{n,k}$ di tutte le disposizioni semplici di n elementi e di classe k: il 1° elemento (dei k da prendere) si può scegliere in n modi; il secondo lo si potrà scegliere dagli $n-1$ elementi di B rimasti; per il terzo elemento restano $n-2$ scelte, e così via; per il k-esimo elemento avremo $n-k+1$ scelte possibili. Perciò la generica disposizione semplice si può costruire in $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ modi. In altre parole, detta $D_{n,k}$ la cardinalità di tali disposizioni semplici,

$$D_{n,k} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Nei calcoli conviene utilizzare la 1ª espressione, perché la 2ª dà spesso luogo a numeri molto grandi.

<u>Esempio</u> Ad una finale olimpica prendono parte 10 atleti. Quante sono le possibili terne di vincitori di medaglie d'oro, argento, bronzo? Sono in numero di $D_{10,3} = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$.

<u>Disposizioni con ripetizione</u> Sia ancora $k \le n$. Una <u>disposizione con ripetizione</u> di n elementi e di classe k si ottiene scegliendo, <u>con ordine</u> e <u>con ripetizione</u>, k elementi da un insieme di n elementi. In altri termini, una disposizione con ripetizione è l'immagine di una <u>qualunque</u> funzione da A in B. La cardinalità delle disposizioni con ripetizione di n elementi e di classe k, che indichiamo con $D^r_{n,k}$, è

$$D^r_{n,k} = n^k\,;$$

infatti possiamo scegliere ciascuno dei k elementi liberamente fra gli n disponibili.

Esempio Quanti sono i possibili PIN per i bancomat emessi da una banca? I PIN sono formati da una sequenza di 5 cifre scelte in $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Quindi avremo esattamente

$$D^r_{10,5} = 10^5 = 100.000$$

PIN distinti.

Permutazioni Supponiamo $k=n$. In questo caso le disposizioni semplici di n elementi e di classe n si chiamano permutazioni di n elementi. Il loro numero è

$$P_n = D_{n,n} = n!\,.$$

Esempio Quanti sono gli anagrammi di ROMA, sensati o no? Sono $P_4 = 4! = 24$. Quanti sono gli anagrammi di CARRARA? Mentre ROMA ha 4 lettere distinte, CARRARA ha 3 lettere, con A e R ripetute 3 volte. In questo caso abbiamo le permutazioni con ripetizione: il loro numero si trova eliminando gli anagrammi che danno risultati uguali, che sono $P_3 = 6$ per la A e altrettanti per la R. Per CARRARA si hanno allora, dividendo per $(3!)^2$,

$$\frac{7!}{(3!)^2}$$

anagrammi distinti.

<u>Combinazioni semplici</u> Sia nuovamente $k \leq n$. Contiamo il numero $C_{n,k}$ dei sottoinsiemi $U \subset B$ aventi esattamente k elementi distinti: ciascuno di tali insiemi U è una <u>combinazione semplice</u> di n elementi presi "a k a k", cioè k per volta. Per trovare il numero $C_{n,k}$, notiamo che ognuno di tali insiemi è l'immagine di una funzione iniettiva da $A = \{1, 2, \dots, k\}$ in B con $f(A) = U$, e che di tali funzioni, come sappiamo, ce n'è $k!$. Poichè gli insiemi U, per definizione, sono in numero di $C_{n,k}$, il numero delle funzioni iniettive da A in B è pari a $C_{n,k} \cdot k!$. Ma esso è anche uguale a $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, perchè è il numero delle disposizioni semplici di n elementi di classe k. Perciò

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = C_{n,k} \cdot k!,$$

ovvero

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k},$$

il coefficiente binomiale.

Esempio Da un gruppo di 80 studenti universitari se ne vogliono scegliere 5 per mandarli in delegazione dal rettore. In quanti modi si può fare questa scelta?

I modi possibili sono

$$\binom{80}{5} = \frac{80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot 76}{5!} = 24.040.016.$$

Esercizio Si estraggono in sequenza 5 numeri della tombola. Qual'è la probabilità che tra questi numeri vi sia il 17?

Supponendo che l'uscita di ciascun numero sia equi-probabile, il 17 uscirà per primo con probabilità $\frac{1}{90}$; uscirà per secondo con probabilità $\frac{89}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{90}$, perchè alla 1^a estrazione esce un numero $\neq 17$ (probabilità $\frac{1}{90}$) e alla seconda esce il 17 su 89 numeri possibili (probabilità $\frac{1}{89}$). Similmente, il 17 uscirà per terzo, quarto, o quinto con rispettive probabilità

$$\frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{1}{88} = \frac{1}{90}, \quad \frac{89}{90} \, \frac{88}{89} \, \frac{87}{88} \cdot \frac{1}{87} = \frac{1}{90}, \quad \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{87}{88} \cdot \frac{86}{87} \cdot \frac{1}{86} = \frac{1}{90}.$$

Infine, per additività, il 17 esce fra i primi cinque estratti con probabilità $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$.

Probabilità condizionale

Molto spesso, nel corso di un esperimento aleatorio, si viene in possesso di nuove informazioni che possono modificare il nostro metro di valutazione della probabilità di un evento. In questo caso si sarà portati a modificare la misura probabilità scelta.

Definizione Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio probabilizzato. Sia $H \in \mathcal{A}$ un evento non trascurabile, si chiama <u>misura di probabilità dedotta da P secondo la condizione H</u> la misura di probabilità $P_H : \mathcal{A} \to [0,1]$ così definita:

$$P_H(A) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Il numero $P_H(A)$ è detto <u>probabilità condizionale di A, secondo P, sotto la condizione H</u>, e si denota con $P(A|H)$ (si legge "probabilità di A supposto H").

In effetti, il nuovo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P_H)$ è quello che siamo indotti a scegliere alla luce della nuova informazione che "l'evento H si è realizzato", ossia che il risultato dell'esperimento "certamente cadrà in H". Infatti, in tale situazione, $A \cap H$ è la sola parte dell'evento A che conta.

La quantità a denominatore serve a rendere P_H una probabilità: $P(\Omega|H) = \dfrac{P(\Omega \cap H)}{P(H)} = \dfrac{P(H)}{P(H)} = 1$.

Formula della disintegrazione

Sia $\{H_n\}$ una successione (finita o infinita) di eventi non trascurabili fra loro disgiunti, tali che $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \Omega$. Si può scrivere

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap H_n), \quad A \in \mathcal{A},$$

e per numerabile additività si ottiene per ogni $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap H_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|H_n)\, P(H_n).$$

Questa è la formula di disintegrazione, che esprime $P(A)$ come la media ponderata delle probabilità condizionali $P(A|H_n)$, ognuna col peso $P(H_n)$.

Nelle applicazioni pratiche, gli H_n giocano il ruolo di possibili cause, di cui sono note le relative probabilità, ed è spesso più facile calcolare le singole $P(A|H_n)$ che non l'intera $P(A)$.

Esempio La probabilità, lanciando 2 dadi, di ottenere 8 è $\frac{5}{36}$ (2-6, 3-5, 4-4, 5-3, 6-2). Se però si sa che al 1° lancio si è ottenuto il valore n $(n=1,2,3,4,5,6)$, le corrispondenti probabilità condizionali sono:

$$P(8|1)=0, \quad P(8|n)=\frac{1}{6} \quad \text{per } n=2,3,4,5,6.$$

Infatti si ha, per esempio, $P(8|3)=\dfrac{P(\{3,5\})}{P(3)}=\dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{6}$.

Dunque, per disintegrazione,

$$P(8)=\sum_{n=2}^{6} P(8|n)\,P(n)=\sum_{n=2}^{6}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}.$$

Formula di Bayes

Per stabilire quale delle cause H_n è la più probabile ad aver causato l'evento A, è utilissima la formula di Bayes che segue: se A, H sono eventi non trascurabili,

$$P(H|A)=\frac{P(H\cap A)}{P(A)}=\frac{P(H)\,P(A|H)}{P(A)}.$$

Essa fornisce la "probabilità a posteriori" che l'evento A sia stato provocato dalla causa H. Dalla formula di disintegrazione segue anche

$$P(H_j|A)=\frac{P(H_j)\,P(A|H_j)}{P(A)}=\frac{P(H_j)\,P(A|H_j)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(H_n)\,P(A|H_n)}.$$

Esempio Una popolazione è costituita al 40% da fumatori e al 60% da non fumatori. Si sa poi che il 25% dei fumatori e il 7% dei non fumatori sono affetti da una malattia respiratoria cronica. Qual è la probabilità che un individuo, scelto a caso, sia affetto dalla malattia?

Siano H, K, A gli eventi "l'individuo scelto è un fumatore", "l'individuo scelto è non fumatore", "l'individuo scelto è malato".

Dobbiamo calcolare $P(A)$. Sappiamo che

$$P(H) = 0.4, \quad P(K) = 0.6, \quad P(A|H) = 0.25, \quad P(A|K) = 0.07.$$

Inoltre $H \cap K = \phi$ e $H \cup K = \Omega$. Per disintegrazione

$$P(A) = P(H)\, P(A|H) + P(K)\, P(A|K) = 0.142.$$

Notiamo che, per la formula di Bayes, la probabilità che un individuo malato sia fumatore è

$$P(H|A) = \frac{P(H)\, P(A \cap H)}{P(A)} \simeq 0.704,$$

e quindi se un individuo preso a caso è malato, al 70% di probabilità egli sarà un fumatore.

<u>Esempio</u> Tre mobili indistinguibili contengono ciascuno due cassetti. Il primo contiene in ciascun cassetto una moneta d'oro, il secondo ha una moneta d'oro nel primo cassetto ed una d'argento nel secondo, il terzo ha una moneta d'argento in ciascun cassetto. Si apre a caso un cassetto, e si trova una moneta d'oro. Qual è la probabilità che l'altro cassetto dello stesso mobile contenga una moneta d'oro?

Siano A_1, A_2, A_3, B gli eventi:

A_i = "è stato aperto un cassetto del mobile i-esimo" $(i=1,2,3)$,

B = "la moneta estratta dal cassetto prescelto è d'oro".

Siccome i mobili sono stati scelti a caso, si ha

$$P(B|A_1)=1, \quad P(B|A_2)=1/2, \quad P(B|A_3)=0$$

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}.$$

Quindi

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=$$

$$=\frac{1}{2},$$

e dalla formula di Bayes

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{2}{3}.$$

Si osservi che, avendo il 1° mobile 2 monete d'oro, e il 2° mobile una sola moneta d'oro, se è stata estratta una moneta d'oro è più probabile che fosse stato scelto il 1° mobile.