VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Passiamo a considerare v.a. non discrete, cioè tali che l'insieme dei loro valori non sia né finito né numerabile. Le v.a. di questo tipo si chiamano v.a. reali e il loro studio, in generale, è molto complicato. Noi ci limiteremo al caso di v.a. continue, ovvero dotate di densità.

Definizione Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. reale. Se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, sommabile, con $\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,dt = 1$, tale che

$$P(X \in I) = \int_I f_X(t)\,dt \quad \text{per ogni intervallo } I \subseteq \mathbb{R},$$

diremo che X è una v.a. continua, dotata della densità f_X.

La v.a. X assumerà con maggior probabilità i valori $c \in \mathbb{R}$ nei quali $f_X(c)$ è grande: infatti, almeno nel caso in cui c sia punto di continuità per f_X, per il teorema della media integrale si ha

$$P(c-\varepsilon \leq X \leq c+\varepsilon) = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f_X(t)\,dt \simeq 2\varepsilon f_X(c) \quad \text{per } \varepsilon \text{ piccolo},$$

cioè $P(X \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ è proporzionale a $f_X(c)$. Si noti che se X è dotata di densità f_X, allora X è una v.a. diffusa, vale a dire risulta $P(X=c)=0$ per ogni $c \in \mathbb{R}$: infatti

$$P(X=c) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} \left\{X \in \left[c-\tfrac{1}{n}, c+\tfrac{1}{n}\right]\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(t)\,dt = 0.$$

<u>Esempio</u> Sia X una v.a. dotata della densità

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0, \end{cases} \qquad \text{con } \lambda > 0.$$

Allora X è una v.a. quasi certamente positiva, che si chiama v.a. esponenziale di parametro λ.

<u>Definizione</u> Sia X una v.a. reale (non necessariamente continua). La <u>funzione di ripartizione</u> di X è la funzione $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, così definita:

$$F_X(t) = P(X \leq t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che la funzione di ripartizione è crescente, con

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(t) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(t) = 1,$$

ed è continua a destra, cioè $\lim_{t \to c^+} F_X(t) = F_X(c)$: infatti, per ogni successione $a_n \to 0^+$ si ha

$$F_X(c+a_n) - F_X(c) = P(X \leq c+a_n) - P(X \leq c) =$$
$$= P(X \in \,]c, c+a_n]),$$

ed essendo

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} \,]c, c+a_n] = \emptyset,$$

deve essere

$$\lim_{n \to \infty} [F_X(c+a_n) - F_X(c)] = 0.$$

Invece, in generale, la funzione di ripartizione non è continua a sinistra, cioè non vale $\lim_{t\to c^-} F_X(t) = F_X(c)$: infatti se $a_n \to 0^-$ si ha

$$F_X(c+a_n) - F_X(c) = P(X \le c+a_n) - P(X \le c) =$$
$$= -P(X \in]c+a_n, c]),$$

ma stavolta

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+}]c+a_n, c] = \{c\},$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} [F_X(c+a_n) - F_X(c)] = -P(X=c) \le 0.$$

Naturalmente, se X è dotata di densità f_X, allora X è diffusa, e di conseguenza la funzione di ripartizione F_X è continua.

Osserviamo che la funzione di ripartizione è crescente, ma non strettamente crescente in generale. Ad esempio, se X ha densità f_X e f_X è nulla in un certo intervallo $[a,b]$, allora

$$F_X(a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\,dt = F_X(b),$$

e dunque

$$F_X(c) = F_X(a) \quad \forall c \in [a,b].$$

Se poi la densità f_X è strettamente positiva in $\mathbb{R}$, allora la funzione di ripartizione F_X è strettamente crescente da $\mathbb{R}$ in $[0,1]$, quindi è invertibile: ciò avrà grande importanza nel seguito.

Supponiamo adesso che la densità f_X sia una funzione continua: allora la funzione di ripartizione $F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds$ è derivabile in $\mathbb{R}$, con

$$\frac{d}{dt} F_X(t) = f_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Viceversa, se X è una v.a. reale e se la sua funzione di ripartizione F_X è derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata $\frac{d}{dt} F_X = g$ sommabile su $\mathbb{R}$, allora X è dotata di densità g. Infatti

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b g(t)\,dt, \quad \forall\,]a,b] \subseteq \mathbb{R}.$$

In particolare X è diffusa perché

$$P(X=c) = \lim_{n\to\infty} P\left(c - \tfrac{1}{n} < X \leq c\right) = \lim_{n\to\infty} \int_{c-\frac{1}{n}}^{c} f_X(t)\,dt = 0.$$

<u>Esempio</u> Sia X una v.a. reale con funzione di ripartizione

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^t & \text{se } t < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-t} & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Si noti che $F_X(t)$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$, con

$$\frac{d}{dt} F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^t & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } t = 0 \\ \frac{1}{2} e^{-t} & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Ne segue che X ha densità

$$f_X(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R},$$

e in particolare è diffusa.

Speranza di una v.a. continua

Definizione Sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. continua, con densità f_X tale che $\int_{\mathbb{R}} |t| f_X(t)\, dt < \infty$. La speranza della v.a. X è il numero

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} t\, f_X(t)\, dt .$$

Riportiamo senza dimostrazione i seguenti fatti importanti.

Se X, Y sono v.a. continue con densità f_X e f_Y, allora $X+Y$ ha densità $f_{X+Y} = f_X + f_Y$, e cX ha densità $f_{cX} = c f_X$.

Di conseguenza la speranza è lineare:

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y], \qquad \mathbb{E}[cX] = c\,\mathbb{E}[X].$$

La speranza è isotona: se $X \leq Y$ quasi certamente, ossia $P(X \leq Y) = 1$, allora $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.

Se $\{X_n\}$ è una successione di v.a. continue tali che $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ quasi certamente per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora esiste $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ e si ha

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] .$$

Se $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $\int_{\mathbb{R}} |\phi(t)| f_X(t)\, dt$ sia finito, allora vale la formula

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\, f_X(t)\, dt ;$$

In particolare, scelta $\phi(x) = x^r$, $r \in \mathbb{N}^+$, la quantità

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_{\mathbb{R}} t^r f_X(t)\, dt$$

si chiama <u>momento di ordine r</u> di X.

<u>Esempio</u> Sia $f_X(t) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(t)$. Se X è una v.a. continua con densità f_X, si dice che X è <u>uniformemente ripartita</u> su $[a,b]$, e la misura di probabilità

$$A \longrightarrow P(X \in A) \quad , \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

è detta <u>ripartizione uniforme</u> in $[a,b]$. Questa è la più semplice <u>legge</u> di una v.a. continua.

La speranza di tale X è allora

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{b-a} \int_a^b t\, dt = \frac{b+a}{2},$$

e il momento di ordine r è

$$\mathbb{E}[X^r] = \frac{1}{b-a} \int_a^b t^r\, dt = \frac{1}{r+1} \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{b-a} = \frac{1}{r+1} \sum_{h=0}^{r} a^h b^{r-h}.$$

<u>Osservazione</u> Per una v.a. discreta, il momento di ordine r è

$$\mathbb{E}[X^r] = \sum_{k \in E_X} k^r P(X=k).$$

<u>Osservazione</u> Se X è una v.a. continua, posto $X^+ = \max\{X,0\}$ e $X^- = -\min\{X,0\}$, si ha $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$, se $\mathbb{E}[X^\pm] < \infty$.

<u>Osservazione</u> Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio probabilizzato.

Vediamo le parti analoghe tra $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e $(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}_N, m_N)$.

- eventualità $\omega \in \Omega$ $\longleftrightarrow$ punti $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$
- eventi $A \in \mathcal{A}$ $\longleftrightarrow$ insiemi misurabili $E \in \mathcal{M}_N$
- probabilità $P(A)$ $\longleftrightarrow$ misure $m_N(E)$
- v.a. discrete $X : \Omega \to E_X$ $\longleftrightarrow$ funzioni semplici $\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$
- v.a. continue $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\longleftrightarrow$ funzioni sommabili $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$
- v.a. continue q.c. positive $\longleftrightarrow$ funzioni misurabili q.o. positive
- speranza $\mathbb{E}[X]$, X discreta $\longleftrightarrow$ $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\underline{x}$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$
- speranza $\mathbb{E}[X]$, X continua e positiva $\longleftrightarrow$ $\int_{\mathbb{R}^N} f \, d\underline{x}$, f misurabile su $\mathbb{R}^N$ e positiva
- speranza $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$ per v.a. continue con $\mathbb{E}[X^\pm] < \infty$ $\longleftrightarrow$ $\int_{\mathbb{R}^N} f \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^- dx$, per funzioni sommabili
- linearità di $\mathbb{E}[X]$ $\longleftrightarrow$ linearità dell'integrale
- isotonia di $\mathbb{E}[X]$ $\longleftrightarrow$ monotonia dell'integrale
- $0 \le X_n \le X_{n+1}$, $X_n \nearrow X \Rightarrow \mathbb{E}[X_n] \nearrow \mathbb{E}[X]$ $\longleftrightarrow$ teorema di B. Levi.

Varianza e covarianza di v.a. continue

Se X è una v.a. continua con densità f_X tale che $\int_{\mathbb{R}} t^2 f_X(t)dt < \infty$, la varianza di X è

$$Var[X] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Dunque, posto $\mu = \mathbb{E}[X]$, si ha

$$Var[X] = \int_{\mathbb{R}} (t-\mu)^2 f_X(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} t^2 f_X(t)dt - \mu^2.$$

La quantità $\sqrt{Var[X]}$ si chiama deviazione standard di X.

Se X, Y sono v.a. continue con densità f_X e f_Y, tali che $\int_{\mathbb{R}} t^2 f_X(t)dt < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} t^2 f_Y(t)dt < \infty$, la covarianza di X e Y è

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Se, in particolare, le v.a. X e Y sono indipendenti, allora si può dimostrare (come già sappiamo nel caso discreto) che

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y],$$

e dunque, in tal caso, $Cov(X,Y) = 0$.

Se $Cov(X,Y) = 0$ si dice che le due v.a. X e Y sono non correlate.

Quindi due v.a. indipendenti sono non correlate ma il viceversa non è vero in generale. Vale sempre la formula

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2\,Cov(X,Y).$$

Notiamo che la covarianza di X e Y è una misura della relazione che sussiste fra essi. Per renderci conto di ciò, supponiamo che A, B siano eventi e che $X = I_A$, $Y = I_B$.
Allora $XY = I_{A \cap B}$, e pertanto

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] =$$

$$= P(X=1, Y=1) - P(X=1)\,P(Y=1) = P(A \cap B) - P(A)P(B).$$

Perciò $\mathrm{Cov}(X,Y) > 0$ se e solo se

$$P(A \cap B) > P(A)\,P(B), \quad \text{ovvero} \quad P(A|B) > P(A).$$

Dunque la covarianza fra I_A e I_B è positiva nel caso in cui sapere che si è verificato B rende più probabile il verificarsi di A.
La forza della relazione fra X e Y è meglio espressa dal coefficiente di correlazione

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\,\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}},$$

il quale tiene conto anche delle deviazioni standard di X e di Y.