ANALISI 2 | ma 21/4/20

Esercizi

1. Sia X una v.a. continua con legge esponenziale: cioè
$$f_X(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t>0\\ 0 & \text{se } t\le 0,\end{cases}$$
ove $\lambda>0$. Provare che vale l'assenza di memoria, cioè che $P(X>s+t \mid X>s)=P(X>t)$ per ogni $s,t>0$.

2. Sia X una v.a. continua con legge esponenziale di parametro $\lambda>0$; sia $Y=e^X$.
   (i) Per quali $\lambda>0$ si ha $\mathbb{E}[Y]<\infty$?
   (ii) Per quali $\lambda>0$ si ha $Var[Y]<\infty$?
   (iii) Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X,Y)$.

3. Sia X una v.a. con densità $f_X(t)=\begin{cases} ct^2 & \text{se } 0\le t\le 3\\ 0 & \text{se } t\in\mathbb{R}\setminus[0,3].\end{cases}$
   Determinare il valore di c e calcolare $\mathbb{E}[X]$, $Var[X]$.

4. Sia X una v.a. con legge uniforme su $[0,1]$, cioè con
$$f_X(t)=\begin{cases}1 & \text{se } t\in[0,1]\\ 0 & \text{se } t\in\mathbb{R}\setminus[0,1].\end{cases}$$
Determinare la legge di $Y=e^{\lambda X}$, ove $\lambda>0$, e calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Risoluzione

1. Si ha per ogni $\alpha \in [0, \infty[$

$$P(X > \alpha) = \int_\alpha^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_\alpha^\infty = e^{-\lambda\alpha}.$$

Quindi

$$P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X>s+t, X>s)}{P(X>s)} = \frac{P(X>s+t)}{P(X>s)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t).$$

2. Si ha $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[e^X] = \int_0^\infty e^t \cdot \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \int_0^\infty e^{(1-\lambda)t}\, dt$; questo integrale è finito se e solo se $1-\lambda < 0$, e in tal caso vale $\frac{\lambda}{\lambda-1}$. Inoltre $Var[Y] = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}[Y]^2$, e si ha

$\mathbb{E}[Y] = \frac{\lambda}{\lambda-1}$, $\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^\infty e^{2t} \cdot \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \frac{\lambda}{\lambda-2}$ se $\lambda > 2$,

mentre $\mathbb{E}[Y^2] = \infty$ se $\lambda \leq 2$. Perciò

$$Var[Y] = \frac{\lambda}{\lambda-2} - \frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^2} = \frac{\lambda}{(\lambda-2)(\lambda-1)^2}.$$

Infine

$$c(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}};$$

poiché

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda},$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \frac{2}{\lambda^2},$$

si ha $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$. Poi,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[Xe^X] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[e^X] =$$

$$= \int_0^\infty t e^t \lambda e^{-\lambda t}\,dt - \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\lambda-1} = \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2} - \frac{1}{\lambda-1} = \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2},$$

e dunque

$$\rho(X,Y) = \frac{\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}}{\frac{1}{\lambda}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda-2}\,(\lambda-1)}} = \frac{\lambda}{\lambda-1}\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda-2}\,.$$

3. Deve essere

$$1 = \int_0^3 ct^2\,dt = \frac{c}{3}\left[t^3\right]_0^3 = 9c,$$

ossia $c = \frac{1}{9}$. Dunque

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^3 t\cdot\frac{1}{9}t^2\,dt = \frac{1}{36}\left[t^4\right]_0^3 = \frac{9}{4},$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \frac{81}{16} = \int_0^3 t^2\cdot\frac{1}{9}t^2\,dt - \frac{81}{16} = \frac{27}{5} - \frac{81}{16} = \frac{27}{80}.$$

4. La legge di X è

$$P(X\in[a,b]) = \begin{cases} 0 & \text{se } b\le 0 \text{ oppure } a\ge 1 \\ b & \text{se } a<0<b\le 1 \\ b-a & \text{se } 0\le a<b\le 1 \\ 1-a & \text{se } 0\le a<1\le b. \end{cases}$$

Quindi, per $Y = e^{\lambda X}$ (con $\lambda>0$) si ha

$$P(Y\in[c,d]) = P\left(X\in\left[\frac{1}{\lambda}\ln c, \frac{1}{\lambda}\ln d\right]\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } d\le 1 \text{ oppure } c\ge e^\lambda \\ \frac{1}{\lambda}\ln d & \text{se } c<1<d\le e^\lambda \\ \frac{1}{\lambda}\ln\frac{d}{c} & \text{se } 1\le c<d\le e^\lambda \\ 1-\frac{1}{\lambda}\ln c & \text{se } 1\le c\le e^\lambda\le d. \end{cases}$$

Infine $\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 e^{\lambda t}\,dt = \frac{e^\lambda - 1}{\lambda}$.

Vettori aleatori, leggi congiunte, leggi marginali

In molti esperimenti aleatori può capitare che ci siano più di una v.a. legata al risultato: se si vuole allora calcolare la probabilità $P(X=k, Y=h)$ e le v.a. X, Y non sono indipendenti, è utile introdurre la nozione di "vettore aleatorio".

<u>Definizione</u> Su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ siano $X_1, \dots, X_N$ v.a. reali (discrete o continue). Si chiama <u>vettore aleatorio</u> la funzione $\underline{X} = (X_1, \dots, X_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N$, definita da

$$\underline{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_N(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

Le v.a. $X_1, \dots, X_N$ sono le <u>componenti</u> del vettore aleatorio $\underline{X}$.

È chiaro che se $\underline{X}$ è un vettore aleatorio allora per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (i boreliani di $\mathbb{R}^N$) si ha $\{\underline{X} \in A\} \in \mathcal{A}$.

La funzione $A \mapsto P(\underline{X} \in A)$ è una misura di probabilità su $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ e si chiama <u>legge</u> del vettore aleatorio $\underline{X}$.

Consideriamo dapprima vettori aleatori <u>discreti</u>: dunque $X_1, \dots, X_N$ sono v.a. discrete con insiemi di valori $E_1, \dots, E_N$.

In tal caso, la funzione $p_{\underline{X}} : E_1 \times \dots \times E_N \to [0,1]$,

$$p_{\underline{X}}(\underline{k}) = P(\underline{X} = \underline{k}) = P(X_1 = k_1, \dots, X_N = k_n), \quad \underline{k} \in E_1 \times \dots \times E_N,$$

si chiama <u>densità discreta congiunta</u> di $\underline{X}$, o delle v.a. $X_1, \dots, X_N$.

Nel caso in cui le v.a. $X_1, \dots, X_N$ sono indipendenti, abbiamo

$$p_{\underline{X}}(\underline{k}) = \prod_{j=1}^{N} P(X_j = k_j) = \prod_{j=1}^{N} p_{X_j}(k_j),$$

ove p_{X_j} è la densità discreta di X_j, e che in questo contesto prende il nome di <u>densità marginale</u> di X_j. Nel caso generale, in cui la relazione sopra scritta non vale, è ancora possibile ricavare le densità marginali dalla densità congiunta, sempre che questa sia nota. Se $N=2$ si ha

$$p_{X_1}(k_1) = P(X_1 = k_1) = \sum_{k_2 \in E_2} P(X_1 = k_1, X_2 = k_2) = \sum_{k_2 \in E_2} p_{\underline{X}}(k_1, k_2),$$

e similmente

$$p_{X_2}(k_2) = \sum_{k_1 \in E_1} p_{\underline{X}}(k_1, k_2).$$

Nel caso $N>2$ si ha, allo stesso modo,

$$p_{X_j}(k_j) = \sum_{i \neq j} \sum_{k_i \in E_i} p_{\underline{X}}(k_1, \dots k_N).$$

<u>Esempio</u>. Da un'urna contenente 6 palline numerate da 1 a 6 se ne estraggono 3 in sequenza, senza re-inserire le palline nell'urna. Indichiamo con X, Y, Z i risultati della 1^a, 2^a e 3^a estrazione. Calcoliamo la densità congiunta

e la densità marginali. Possiamo scegliere

$\Omega = \{(k_1, k_2, k_3) : k_i \in \{1, \dots, 6\},\ k_i \neq k_j \text{ per } i \neq j\}$

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$,

$\mathbb{P}$ = ripartizione uniforme su Ω

Si ha dunque

$$X(k_1, k_2, k_3) = k_1,\quad Y(k_1, k_2, k_3) = k_2,\quad Z(k_1, k_2, k_3) = k_3.$$

Dato che Ω contiene $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ elementi, la densità congiunta sarà (posto $\underline{V} = (X, Y, Z)$)

$$p_{\underline{V}}(k_1, k_2, k_3) = P(X = k_1, Y = k_2, Z = k_3) = \frac{1}{120},$$

mentre le densità marginali di X, Y, Z saranno

$$p_X(k_1) = \sum_{k_2 \neq k_1} \sum_{k_3 \neq k_2, k_1} P(X = k_1, Y = k_2, Z = k_3) = 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{120} = \frac{1}{6},$$

$$p_Y(k_2) = \frac{1}{6},$$

$$p_Z(k_3) = \frac{1}{6}.$$

Cioè, le tre densità marginali sono date dalla ripartizione uniforme su $\{1, \dots, 6\}$.

Passiamo ora al caso dei vettori aleatori continui.

Definizione Sia $\underline{X}=(X_1,\dots,X_N)$ un vettore aleatorio definito su $(\Omega,\mathcal{A},P)$ a valori in $\mathbb{R}^N$. Diciamo che $\underline{X}$ ha una densità, ovvero che $X_1,\dots,X_N$ hanno una densità congiunta, se esiste una funzione $f_{\underline{X}}:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ tale che

$$P(\underline{X}\in A)=\int_A f_{\underline{X}}(\underline{y})\,d\underline{y}=\int_A f_{\underline{X}}(y_1,\dots,y_N)\,dy_1\dots dy_N \quad \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Come nel caso discreto, se $X_1,\dots,X_N$ hanno densità congiunta $f_{\underline{X}}$, allora hanno anche densità marginali $f_{X_i}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, date da

$$f_{X_i}(y_i)=\int_{\mathbb{R}^{N-1}} f_{\underline{X}}(\underline{y})\,dy_1\dots dy_{i-1}\,dy_{i+1}\dots dy_N .$$

Facciamo la verifica di questa affermazione nel caso $N=2$: se $\underline{V}=(X,Y)$ è il vettore aleatorio con densità congiunta $f_{\underline{V}}$, per $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ si ha

$$P(X\in A)=P(X\in A,\,Y\in\mathbb{R})=\int_{A\times\mathbb{R}} f_{\underline{V}}(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_A\left[\int_{\mathbb{R}} f_{\underline{V}}(x,y)\,dy\right]dx,$$

e dunque X ha densità marginale $f_X(x)=\int_{\mathbb{R}} f_{\underline{V}}(x,y)\,dy$. Analogamente, Y ha densità marginale $f_Y(y)=\int_{\mathbb{R}} f_{\underline{V}}(x,y)\,dx$.

Se, in particolare, le v.a. X,Y sono indipendenti, allora $P(X\in A,\,Y\in B)=P(X\in A)\,P(Y\in B)$; ne segue

$$P(X\in A,\ Y\in B)=\int_{A\times B} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy,$$

$$P(X\in A)\,P(Y\in B) = \int_A f_X(x)\,dx \int_B f_Y(y)\,dy = \int_{A\times B} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy,$$

e dunque, per l'arbitrarietà di A e B,

$$f_{XY}(x,y)= f_X(x)\,f_Y(y):$$

la densità congiunta è il prodotto delle densità marginali.

<u>Esempio</u> Siano X, Y due v.a. reali con densità congiunta sia

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{se } x>0 \text{ e } y>0, \\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Calcoliamo $P(X>1,\ Y<1)$. Dato che (X,Y) è quasi certamente nullo per $y\le 0$ oppure $x\le 0$, si ha

$$P(X>1,\ Y<1)= \int_0^1 \left[\int_1^\infty 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\right]dy =$$

$$= \int_1^\infty e^{-x}\,dx \int_0^1 2e^{-2y}\,dy = e^{-1}(1-e^{-2}).$$

Calcoliamo ora $P(X<Y)$:

$$P(X<Y)=\int_{\{0<x<y\}} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy = \int_0^\infty\int_x^\infty 2e^{-x}e^{-2y}\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\left[-e^{-2y}\right]_x^\infty dx = \int_0^\infty e^{-3x} = \frac{1}{3}.$$

Si può anche osservare che X e Y sono v.a. indipendenti, con densità marginali uguali alle leggi esponenziali $\mathcal{E}(1)$ e $\mathcal{E}(2)$ rispettivamente.

Anche per i vettori aleatori vale la formula per la speranza di una funzione composta: se $\underline{X}$ è un vettore aleatorio a valori in $\mathbb{R}^N$, dotato di densità congiunta $f_{\underline{X}}$, e se $\phi: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $\int_{\mathbb{R}^N} |\phi(\underline{x})| f_{\underline{X}}(\underline{x})\, d\underline{x} < \infty$, allora

$$\mathbb{E}[\phi(\underline{X})] = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\underline{x}) f_{\underline{X}}(\underline{x})\, d\underline{x}.$$

Un'utile e importante proprietà delle v.a. continue e indipendenti è la seguente:

<u>Teorema</u> Su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, siano X, Y due v.a. integrabili e indipendenti. Allora il loro prodotto XY è integrabile e

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

Si noti che questa proprietà <u>non vale</u> senza l'ipotesi di indipendenza.

<u>dim</u> Dall'indipendenza di X e Y segue $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$. Perciò

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} xy\, f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} x f_X\,dx \int_{\mathbb{R}} y f_Y\,dy =$$
$$= \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]. \quad \square$$