ANALISI 2 | ve 24/4/20

In tutti gli esercizi che seguono si suppone fissato uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Sia X una v.a. con legge binomiale $\mathcal{B}(2,p)$, e sia $Z = X(2-X)$. Determinare la densità discreta congiunta di X e Z.

2. Sia X una v.a. con legge di Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{3})$. Posto $Y = 2X-1$, calcolare $\mathbb{E}[Y]$ e $\mathrm{Var}[Y]$.

3. Siano X, Y v.a. indipendenti e bernoulliane di parametri $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Trovare le leggi di $X+Y$, $X-2Y$, $|X-Y|$.

4. Siano X, Y v.a. continue, con densità congiunta
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c & \text{se } y \leq x^2 \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases} \quad (x,y) \in [0,1]^2.$$
(i) Calcolare c,
(ii) determinare le densità marginali $f_X(x)$, $f_Y(y)$,
(iii) calcolare $P(X \leq Y)$.

5. Siano X, Y v.a. che rappresentano il risultato del lancio del 1° e del 2° di due dadi equilibrati. Calcolare la densità discreta di $Z = X-2Y$ e determinare $\mathbb{E}[Z]$, $\mathrm{Var}[Z]$.

6. Se le v.a. X_1, X_2, X_3 e X_4 rappresentano il risultato dei lanci successivi di un dado equilibrato, calcolare $\mathbb{E}\left[(X_1+X_2)(X_3+X_4)\right]$.

7. Siano X, Y v.a. indipendenti con la stessa legge. Posto $U = X-Y$, $V=X+Y$, calcolare il coefficiente di correlazione fra U e V.

8. Siano X, Y v.a. indipendenti con leggi di Poisson di parametri 2 e 3. Calcolare $\mathbb{E}\left[X(1-X)Y\right]$.

9. Sia X una v.a. a valori in $\{a,-a\}$ tale che $P(X=a)=P(X=-a)=\frac{1}{2}$. Trovare i valori di a per i quali risulta $\mathrm{Var}[X]=1$. Se poi X_1, X_2 sono v.a. indipendenti con la stessa legge di X, si calcoli $P(|X_1+X_2|<1)$.

10. Siano X_1, X_2 v.a. indipendenti con legge $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda>0$.
(i) Determinare λ in modo che $\mathbb{E}\left[|X_1-X_2|^2\right]=1$.
(ii) Per tale λ, calcolare $P\{X_1+X_2 \geq 2\}$.
(iii) Per tale λ, calcolare $\mathbb{E}\left[g(X_1)\right]$, ove

$$g(t)=\begin{cases} t & \text{se } t\leq 2 \\ 2 & \text{se } t\geq 2. \end{cases}$$

11. Siano X, Y v.a. indipendenti, con X di legge esponenziale $\mathcal{E}(1)$, e Y a valori in $\{-1,1\}$ con $P(Y=1) = P(Y=-1) = \frac{1}{2}$. Posto $Z = XY$, calcolare:

(i) la funzione di ripartizione di Z,

(ii) la densità f_Z di Z,

(iii) la varianza di Z,

(iv) il coefficiente di correlazione fra X e Z.

12. Siano X, Y v.a. indipendenti, con X di legge $\mathcal{B}(2, \frac{1}{3})$ e Y di legge $\mathcal{E}(2)$. Calcolare:

(i) $\mathbb{E}[X(Y-X)]$,

(ii) $P(XY \leq 1)$,

(iii) il coefficiente di correlazione fra X e XY.

13. Siano X, Y v.a. indipendenti con legge $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$ e sia $Z = XY$.

(i) Determinare la densità congiunta di X e Z.

(ii) Stabilire se X e Z sono indipendenti.

(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione fra X e Z.

Risoluzione

1. Essendo $P(X=h)=\binom{2}{h}p^h(1-p)^{2-h}$, $h=0,1,2$, si ha

$$P(Z=k)=\sum_{h=0}^{2}P(X(2-X)=k,\ X=h)=$$

$$=P(X=0,\ 0=k)+P(X=1,\ 1=k)+P(X=2,\ 0=k)=$$

$$=\begin{cases} P(X=0)+P(X=2)=(1-p)^2+p^2 & \text{se } k=0 \\ P(X=1)=2p(1-p) & \text{se } k=1 \\ 0 & \text{se } k\neq 0,1. \end{cases}$$

Dunque

$$f_{XZ}(h,k)=P(X=h,\ Z=k)=\begin{cases} 0 & \text{se } k\neq h(2-h) \\ P(X=h) & \text{se } k=h(2-h), \end{cases}$$

da cui

$f_{XZ}(0,0)=p^2$, $f_{XZ}(1,1)=2p(1-p)$, $f_{XZ}(2,0)=(1-p)^2$,

mentre $f_{XZ}(h,k)=0$ in tutti gli altri casi.

2. Poiché $P(X=1)=\frac{1}{3}$, $P(X=0)=\frac{2}{3}$, si ha $Y=2X-1\in\{1,-1\}$ con $P(Y=1)=P(X=1)=\frac{1}{3}$, $P(Y=-1)=P(X=0)=\frac{2}{3}$.

Perciò $\mathbb{E}[Y]=1\cdot\frac{1}{3}-1\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$, $\mathrm{Var}[Y]=E[Y^2]-\frac{1}{9}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

3. Si ha $X+Y\in\{0,1,2\}$ con

$$P(X+Y=0)=P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3},$$

$$P(X+Y=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{2}{3}=\frac{1}{2},$$

$$P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{2}\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Poi, $X-2Y \in \{-2,-1,0,1\}$, con

$P(X-2Y=-2) = P(X=0, Y=1) = \frac{1}{6}$,
$P(X-2Y=-1) = P(X=1, Y=1) = \frac{1}{6}$,
$P(X-2Y=0) = P(X=0, Y=0) = \frac{1}{3}$,
$P(X-2Y=1) = P(X=1, Y=0) = \frac{1}{3}$.

Infine, $|X-Y| \in \{0,1\}$, con

$$P(|X-Y|=0) = P(X=1, Y=1) + P(X=0, Y=0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$
$$P(|X-Y|=1) = P(X=1, Y=0) + P(X=0, Y=1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

4.(i) Dev'essere $\int_0^1 \int_0^1 f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$, ossia

$$1 = \int_0^1 \int_0^{x^2} c\,dy\,dx = \int_0^1 cx^2\,dx = \frac{c}{3},$$

vale a dire $c = 3$.

(ii) Con $c=3$ si ha

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^{x^2} 3\,dy = 3x^2,$$

$$f_Y(x) = \int_0^1 f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{\sqrt{y}}^1 3\,dx = 3(1-\sqrt{y}).$$

(iii) Si ha

$$P(X \leq Y) = P((X,Y) \in \{(x,y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}) = \int_0^1 \int_x^1 f_{XY}(x,y)\,dy\,dx =$$
$$= \int_0^1 \int_x^1 3\, I_{[0,x^2]}(y)\,dy\,dx = 0.$$

5. Si ha $Z = X - 2Y \in \{-11, -10, \dots, 2, 3, 4\}$. Inoltre

$Z=-11 \iff X=1, Y=6,$
$Z=-10 \iff X=2, Y=6,$
$Z=-9 \iff X=3, Y=6,$ oppure $X=1, Y=5,$
$Z=-8 \iff X=4, Y=6,$ oppure $X=2, Y=5;$

$Z=-7 \iff X=1, Y=4,$ oppure $X=3, Y=5,$ oppure $X=5, Y=6,$
$Z=-6 \iff X=2, Y=4,$ oppure $X=4, Y=5,$ oppure $X=6, Y=6,$
$Z=-5 \iff X=1, Y=3,$ oppure $X=3, Y=4,$ oppure $X=5, Y=5,$
$Z=-4 \iff X=2, Y=3,$ oppure $X=4, Y=4,$ oppure $X=6, Y=5,$
$Z=-3 \iff X=1, Y=2,$ oppure $X=3, Y=3,$ oppure $X=5, Y=4,$
$Z=-2 \iff X=2, Y=2,$ oppure $X=4, Y=3,$ oppure $X=6, Y=4,$
$Z=-1 \iff X=1, Y=1,$ oppure $X=3, Y=2,$ oppure $X=5, Y=3,$
$Z=0 \iff X=2, Y=1,$ oppure $X=4, Y=2,$ oppure $X=6, Y=3;$

$Z=1 \iff X=3, Y=1,$ oppure $X=5, Y=2,$
$Z=2 \iff X=4, Y=1,$ oppure $X=6, Y=2,$
$Z=3 \iff X=5, Y=1,$
$Z=4 \iff X=6, Y=1.$

Poiché X e Y sono indipendenti, $P(X=k, Y=h) = \frac{1}{36}$ per ogni h, k fra 1 e 6. Perciò $P(Z=h) = \frac{1}{36}$ per $h = -11, -10, 3, 4$; poi,

$P(Z=h)=\frac{1}{18}$ per $h=-9,-8,1,2$, e infine

$P(Z=h)=\frac{1}{12}$ per $h=-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0$.

Inoltre, essendo $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[Y]=\frac{1}{6}\sum_{h=1}^{6} h=\frac{7}{2}$, si ha

$$\mathbb{E}[Z]=\mathbb{E}[X-2Y]=\mathbb{E}[X]-2\mathbb{E}[Y]=-\frac{7}{2},$$

$$\mathrm{Var}[Z]=\mathbb{E}[Z^2]-\mathbb{E}[Z]^2=\mathbb{E}[X^2-4XY+4Y^2]-\frac{49}{4}=$$

$$=\mathbb{E}[X^2]-4\,\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]+4\,\mathbb{E}[Y^2]-\frac{49}{4}=$$

$$=\frac{5}{6}\sum_{h=1}^{6}h^2-5\cdot\frac{49}{4}=\frac{5}{6}\cdot 91-\frac{5}{4}\cdot 49=\frac{275}{12}.$$

6. Per indipendenza, e per il fatto che $\mathbb{E}[X_i]=\frac{7}{2}$ $(i=1,2,3,4)$, si ha

$$\mathbb{E}[(X_1+X_2)(X_3+X_4)]=(\mathbb{E}[X_1]+\mathbb{E}[X_2])(\mathbb{E}[X_3]+\mathbb{E}[X_4])=7\cdot 7=49.$$

7. Si ha $\mathbb{E}[U]=\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[Y]=0$ perché X e Y hanno la stessa legge; $\mathbb{E}[V]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]=2\,\mathbb{E}[X]$ per lo stesso motivo. Poi, $\mathbb{E}[UV]=\mathbb{E}[X^2-Y^2]=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[Y^2]=0$, e quindi $\mathrm{Cov}(U,V)=\mathbb{E}[UV]-\mathbb{E}[U]\,\mathbb{E}[V]=0$. Dunque $\rho(U,V)=0$.

8. Si ha per indipendenza, essendo $\mathbb{E}[X]=2$, $\mathrm{Var}[X]=2$, $\mathbb{E}[Y]=3$:

$$\mathbb{E}[X(1-X)Y]=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X^2Y]=\mathbb{E}[Y](\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[X^2])=$$

$$=3(2-\mathrm{Var}[X]+\mathbb{E}[X]^2)=3(2-2+4)=12.$$

9. Si ha

$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = a^2 - 0 = a^2 = 1$ se e solo se $a = \pm 1$. Tanto vale supporre $a = 1$. Allora

$$P(|X_1 + X_2| < 1) = P(X_1 = 1, X_2 = -1) + P(X_1 = -1, X_2 = 1) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

10. Si ha per indipendenza, essendo $\mathrm{Var}[X_i] = \mathbb{E}[X_i] = \lambda$, $i = 1,2$

$$1 = \mathbb{E}[(X_1 - X_2)^2] = \mathbb{E}[X_1^2] + \mathbb{E}[X_2^2] - 2\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] =$$

$$= \mathrm{Var}[X_1] + \mathbb{E}[X_1]^2 + \mathrm{Var}[X_2] + \mathbb{E}[X_2]^2 - 2\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] =$$

$$= \lambda + \lambda^2 + \lambda + \lambda^2 - 2\lambda^2 = 2\lambda,$$

cioè $\lambda = \frac{1}{2}$. Poi, essendo $P(X_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$,

$$P(X_1 + X_2 \geq 2) = 1 - P(X_1 + X_2 < 2) =$$

$$= 1 - P(X_1 = 0, X_2 = 1) - P(X_1 = 1, X_2 = 0) - P(X_1 = 0, X_2 = 0) =$$

$$= 1 - P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) - P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) - P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) =$$

$$= 1 - \lambda e^{-2\lambda} - \lambda e^{-2\lambda} - e^{-2\lambda} = 1 - (2\lambda + 1)e^{-2\lambda},$$

e per $\lambda = \frac{1}{2}$ viene $P(X_1 + X_2 \geq 2) = 1 - 2e^{-1}$.

Infine

$$\mathbb{E}[g(X_1)] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) P(X=k) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \sum_{k=2}^{\infty} P(X=k) =$$

$$= e^{-\lambda} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} + 2(1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}) =$$

$$= 2 - e^{-\lambda} - 2\lambda e^{-\lambda},$$

e per $\lambda = \frac{1}{2}$ viene $\mathbb{E}[g(X_1)] = 2 - 2e^{-1/2}$.

11. X ha legge esponenziale $\mathcal{E}(1)$, dunque densità

$$f_X(t)=\begin{cases} e^{-t} & \forall t>0 \\ 0 & \forall t<0. \end{cases}$$

La funzione di ripartizione $F_Z(t)$ è, per $t\geq 0$,

$$F_Z(t) = P(XY\le t) = P\left(Y=1,\ X\le t\right) + P\left(Y=-1,\ X\geq 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t e^{-s}\,ds + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1-e^{-t}\right) =$$

$$= 1-\frac{1}{2}e^{-t};$$

se $t<0$, invece,

$$F_Z(t) = P\left(Y=-1,\ X\geq -t\right) = \frac{1}{2}P(X\geq t) = \frac{1}{2}\left[1-P(X<-t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\int_0^{-t} e^{-s}\,ds\right) = \frac{1}{2}\left(1+e^{t}-1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{t}.$$

La densità $f_Z(t)$ è $\frac{d}{dt}F_Z(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & \text{se } t\geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} & \text{se } t<0 \end{cases}$, cioè

$$f_Z(t) = \frac{1}{2}e^{|t|} \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Infine

$$Var[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{2}e^{-|t|}\,dt - \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{t}{2}e^{-|t|}\,dt\right]^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} t^2 e^{-t}\,dt - 0 = 2,$$

mentre, essendo $E[Y]=0$,

$$\rho(X,Z) = \frac{\mathbb{E}[X^2Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[XY]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[XY]}} = \mathbb{E}[Y]\,\frac{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[XY]}} =$$

$$= 0.$$

12. (i) $\mathbb{E}[X(Y-X)] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X^2] =$

$$= \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] - Var[X] - \mathbb{E}[X]^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{9}.$$

(ii) $P(XY \leq 1) = \sum_{k=0}^{2} P(XY \leq 1, X=k) =$

$$= P(X=0) + P(X=1)P(Y\leq 1) + P(X=2)P(Y \leq \tfrac{1}{2}) =$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{9}\int_0^1 2e^{-2t}\,dt + \frac{1}{9}\int_0^{1/2} 2e^{-2t}\,dt =$$

$$= 1 - \frac{4}{9}e^{-2} - \frac{1}{9}e^{-1}.$$

(iii) $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathbb{E}[X^2Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[XY]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[XY]}} = \dfrac{\sqrt{Var[X]}\;\mathbb{E}[Y]}{\sqrt{Var[XY]}}.$

Dato che

$$Var[XY] = \mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]^2\,\mathbb{E}[Y]^2 =$$

$$= (Var[X] + \mathbb{E}[X]^2)(Var[Y] + \mathbb{E}[Y]^2) - \mathbb{E}[X]^2\mathbb{E}[Y]^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{8},$$

si ottiene $\rho(X,Y) = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{8}}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}.$

13. La v.a. X prende i valori 0,1,2; la v.a. Z=XY (374)

prende i valori 0,1,2,4. Si ha

$$P(X=0,\ XY=k)=\begin{cases} P(X=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^2 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k=1,2,4; \end{cases}$$

$$P(X=1,\ XY=k)=P(X=1)\,P(Y=k)=\frac{1}{3}\cdot\binom{2}{k}\frac{1}{3^k}\left(\frac{2}{3}\right)^{2-k} \quad k=0,1,2,4;$$

$$P(X=2,\ XY=k)=\begin{cases} 0 & \text{se } k=1; \\ P(X=2)\,P\left(Y=\frac{k}{2}\right)=\frac{1}{9}\cdot\binom{2}{k/2}\frac{1}{3^{k/2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{k}{2}} & \text{se } k=0,2,4. \end{cases}$$

Le v.a. X e XY non sono indipendenti perché

$$\begin{cases} P(X=0)\,P(XY=k)=0 & \text{per } k=1,2,4, \\ P(X=0)=\frac{4}{9}, \quad P(XY=k)\neq 0. \end{cases}$$

Infine:

$$E[X]=1, \quad Var[X]=\frac{1}{2}, \quad E[Z]=E[X]\,E[Y]=1,$$

$$Var[Z]=[Var[X]+E[X]^2][Var[Y]+E[Y]^2]-E[X]^2E[Y]^2=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)-1=\frac{5}{4},$$

$$Cov(X,Z)=E[X^2]\,E[Y]-E[X]^2E[Y]=Var[X]\,E[Y]=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2},$$

e pertanto

$$\rho(X,Z)=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Z]}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{5}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$