LEGGI CONTINUE

Abbiamo già incontrato la legge esponenziale $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda>0$: è la legge di una v.a. $X\geq 0$, con densità

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0,\end{cases}$$

e per tale v.a. si ha

$$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{\lambda},\qquad Var[X]=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Come abbiamo visto in un esercizio, se X ha legge $\mathcal{E}(\lambda)$ si ha

$$P(X>s+t\,|\,X>t)=P(X>s)\qquad \forall s,t\geq 0.$$

Questa proprietà è chiamata assenza di memoria: il motivo è il seguente. Sia X una v.a. che rappresenta il tempo di funzionamento di una certa macchina prima che si guasti. Sapendo che la macchina funziona al tempo t, la probabilità che essa continui a funzionare per un ulteriore intervallo di tempo s è il primo membro della relazione sopra scritta. Se la relazione è soddisfatta, la probabilità di vita residua è la stessa per una macchina nuova e per una macchina già funzionante da un tempo t. Dunque la vetustà della macchina non conta.

Definizione Si chiama legge gamma di parametri $\alpha, \lambda > 0$ (si scrive $\gamma(\alpha,\lambda)$), la legge di una v.a. $X \geq 0$ con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

ove $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ è la funzione Gamma di Eulero.

Essa verifica la proprietà $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $\forall x > 0$, da cui segue induttivamente $\Gamma(n+1) = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Risulta, se X ha legge $\gamma(\alpha,\lambda)$, ponendo $t = \lambda x$,

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda},$$

mentre

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2},$$

e dunque

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

È importante la proprietà seguente:

Teorema Se $X_1, \dots, X_n$ sono v.a. indipendenti con leggi $\gamma(\alpha_1,\lambda)$, $\dots$, $\gamma(\alpha_n,\lambda)$, allora la v.a. $S = X_1 + \dots + X_n$ ha legge $\gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n, \lambda)$.

dim. omessa. □

Corollario Se $X_1, \dots, X_n$ sono v.a. indipendenti, tutte con legge esponenziale $\mathcal{E}(\lambda)$, allora $S = X_1 + \dots + X_n$ ha legge $\gamma(n, \lambda)$.

dim. La legge esponenziale $\mathcal{E}(\lambda)$ coincide con la legge $\gamma(1, \lambda)$. Quindi la tesi è conseguenza immediata del teorema precedente. □

Esempio Un dispositivo funziona con una batteria. Se disponiamo di n batterie, la cui durata è una v.a. X_i, dotata di legge $\mathcal{E}(\lambda)$, per un certo $\lambda > 0$, quale sarà il tempo totale di funzionamento? Esso è espresso dalla v.a. $S = X_1 + \dots + X_n$, che ha legge $\gamma(n, \lambda)$. Quindi il dispositivo funziona almeno fino al tempo t con probabilità

$$P(S > t) = 1 - P(S \le t) = 1 - \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = 1 - \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\lambda t} e^{-u} u^{n-1} du,$$

e con n-1 integrazioni per parti si trova

$$P(S > t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k t^k}{k!}.$$

Leggi normali

La famiglia di leggi più importante in assoluto è quella delle leggi normali.

Definizione Si chiama legge normale ridotta, e si denota con $N(0,1)$ la legge di una v.a. X con densità

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si vede subito che X è una v.a. di media 0 e varianza 1.

Definizione Si chiama legge normale, e si denota con $N(\mu, \sigma^2)$, la legge di una v.a. X con densità

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si vede facilmente che X è una v.a. di media μ e varianza σ^2. Si noti che se X ha legge $\mathcal{N}(0,1)$ allora $Y = \sigma X + \mu$ ha legge $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Una v.a. che abbia legge normale si chiama v.a. gaussiana.

Due proprietà molto importanti e utili nelle applicazioni sono le seguenti.

Teorema Sia X una v.a. con legge $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora la v.a. αX ha legge $\mathcal{N}(\alpha\mu, \alpha^2\sigma^2)$.

dim. Per ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$ si ha, per $\alpha > 0$,

$$P(\alpha X \in [a,b]) = P\left(X \in \left[\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}\right]\right) = \int_{\frac{a}{\alpha}}^{\frac{b}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = [\alpha x = t]$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha\sigma} e^{-\frac{(t-\alpha\mu)^2}{2\alpha^2\sigma^2}} dt,$$

da cui la tesi per $\alpha > 0$. Il caso $\alpha < 0$ è analogo. $\square$

Teorema Siano X, Y due v.a. indipendenti, con leggi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Allora la v.a. $X+Y$ ha legge normale $\mathcal{N}(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

dim. omessa. $\square$

Osservazione Nel teorema precedente l'ipotesi che le due v.a. siano indipendenti è essenziale. Infatti, se X è una v.a. gaussiana con legge $\mathcal{N}(0,1)$ e se $Y = X$, allora la v.a. $2X$ ha legge $\mathcal{N}(0,4)$ per il primo teorema, e non $\mathcal{N}(0,2)$ come direbbe il secondo teorema se valesse senza l'ipotesi di indipendenza.

Si noti che se X è una v.a. gaussiana con legge $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, allora $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ è gaussiana con legge $\mathcal{N}(0,1)$.
Si dice che Z è <u>standardizzata</u>, e che Z è ottenuta da X mediante <u>standardizzazione</u>.

Torneremo in seguito sulle leggi normali.

<u>Definizione</u> Si chiama <u>legge del chi-quadro a n gradi di libertà</u>, e si denota con $\chi^2(n)$, la legge di una v.a. Z della forma

$$Z = X_1^2 + \dots + X_n^2,$$

dove $X_1,\dots,X_n$ sono n v.a. indipendenti, tutte di legge $\mathcal{N}(0,1)$.

Per gli usi che ne faremo, non sarà necessario conoscere la densità di una v.a. Z avente legge del chi-quadro. Ma è facile invece conoscerne la speranza: poichè $Z=\sum_{j=1}^n X_j^2$, e $\mathbb{E}[X_j]=0$, $Var[X_j]=1$, si ricava

$$\mathbb{E}[Z]= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X_j^2] = \sum_{j=1}^n Var[X_j] = n,$$

cioè la speranza di una v.a. con legge $\chi^2(n)$ coincide con il numero dei gradi di libertà.

Inoltre $Var[Z] = 2n$ (esercizio).

Si noti che se X è una v.a. gaussiana con legge $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, allora $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ è gaussiana con legge $\mathcal{N}(0,1)$.
Si dice che Z è standardizzata, e che Z è ottenuta da X mediante standardizzazione.

Torneremo in seguito sulle leggi normali.

Definizione Si chiama legge del chi-quadro a n gradi di libertà, e si denota con $\chi^2(n)$, la legge di una v.a. Z della forma

$$Z = X_1^2 + \dots + X_n^2 ,$$

dove $X_1, \dots, X_n$ sono n v.a. indipendenti, tutte di legge $\mathcal{N}(0,1)$.

Per gli usi che ne faremo, non sarà necessario conoscere la densità di una v.a. Z avente legge del chi-quadro. Ma è facile invece conoscerne la speranza: poiché $Z=\sum_{j=1}^{n} X_j^2$, e $E[X_j]=0$, $Var[X_j]=1$, si ricava

$$E[Z] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] = \sum_{j=1}^{n} Var[X_j] = n ,$$

cioè la speranza di una v.a. con legge $\chi^2(n)$ coincide con il numero dei gradi di libertà.

<u>Definizione</u> Si chiama <u>legge di Student a n gradi di libertà</u>, e si denota con $t(n)$, la legge di una v.a. della forma

$$T = \frac{Z\sqrt{n}}{\sqrt{Y}},$$

dove Z è una v.a. con legge $\mathcal{N}(0,1)$ e Y una v.a. con legge $\chi^2(n)$.

Si noti che la legge del chi-quadro ha una densità definita in $[0,\infty[$, mentre le leggi normali e la legge di Student hanno densità, definite su $\mathbb{R}$, che sono funzioni pari. Ciò significa che, se X ha legge normale $\mathcal{N}(0,1)$ oppure legge $t(n)$, allora per ogni $\beta>0$ si ha (v. figura)

$$P(X\le-\beta) = P(X\ge\beta) = 1-P(X\le\beta).$$