Esercizi

1. Un distributore di caffè eroga mediamente 25 cm^3 di caffè con uno scarto quadratico medio di 4 cm^3. Trovare la probabilità che venga erogata una tazza con più di 29 cm^3 di caffè.

Ogni tazza erogata è una misurazione approssimata di 25 cm^3 di caffè; la v.a. X che rappresenta la quantità di caffè nella k-sima tazza è dunque dotata di legge $\mathcal{N}(25, 16)$. Quindi

$$P(X \geq 29) = P\left(\frac{X-25}{4} \geq 1\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

2. Lo scorso anno nell'esame di Analisi 2 gli studenti hanno riportato una media di 26 con scarto quadratico medio di 2.3. Qual è la probabilità che uno studente di quel corso abbia riportato un voto compreso fra 23 e 27?

Detta X_k la valutazione del k-simo studente, le v.a. X_k sono indipendenti e tutte con la stessa legge. Il risultato di un esame, assimilato alla misura della "bravura dello studente", avrà una legge approssimativamente gaussiana $\mathcal{N}(26, (2.3)^2)$. Quindi

$$P(23 \leq X \leq 27) = P(X \leq 27.5) - P(X \leq 22.5) \cong$$

$$= P\left(\frac{X-26}{2.3} \leq \frac{1.5}{2.3}\right) - P\left(\frac{X-26}{2.3} \leq \frac{-3.5}{2.3}\right) \simeq$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{1.5}{2.3}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{3.5}{2.3}\right) \simeq \Phi(0.65) + \Phi(1.56) - 1 \simeq$$

$$\simeq 0.7422 + 0.9394 - 1 = 0.6816.$$

3. Un medicinale contiene un principio attivo. Da un controllo emerge che il contenuto del principio attivo in ogni pasticca è mediamente di 0.8 mg, con uno scarto quadratico medio di 0.2 mg. Considerato che ogni scatola contiene 40 pasticche e che una scatola viene commercializzata solo se ha almeno 30 mg di principio attivo, determinare la percentuale di confezioni vendibili.

Il contenuto di principio attivo in ogni pasticca di una scatola è espresso da una v.a.; per ciascuna pasticca queste v.a. sono indipendenti, con la stessa legge, media 0.8 mg e varianza $(0.2)^2$ mg^2. La loro somma è quindi una v.a. S con legge all'incirca gaussiana $\mathcal{N}(40 \cdot 0.8,\ 40 \cdot (0.2)^2) = \mathcal{N}(32, 1.6)$

$$P(S \geq 30) \simeq P\left(\frac{S-32}{\sqrt{1.6}} \geq \frac{-2}{\sqrt{1.6}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-2}{\sqrt{1.6}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{1.6}}\right) \simeq 0.94.$$

4. Nel 70% delle confezioni di una merendina vi è un piccolo premio. Qual è la probabilità che comprando 40 confezioni ci siano più di 15 scatole senza premio?

Il numero X di scatole con premio segue una legge $\mathcal{B}(40, 0.7)$. Allora
$$P(X \leq 25) \simeq P\left(\frac{X - 40 \cdot 0.7}{\sqrt{40 \cdot 0.7 \cdot 0.3}} \leq \frac{25 - 40 \cdot 0.7}{\sqrt{40 \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) \simeq \Phi(-1.03) = 1 - \Phi(1.03) =$$
$$= 1 - 0.8485 = 0.1515.$$

Osservazione Se il produttore di merendine decide di fare in modo che la probabilità di trovare al più 25 premi in 40 confezioni debba essere (ad esempio) 0.3, quale percentuale di merendine dovrebbe contenere il premio?

Con lo stesso calcolo di prima, dobbiamo avere

$$P(X \leq 25) = 0.3,$$

ove stavolta X segue una legge binomiale $\mathcal{B}(40, p)$, con $p \in]0,1[$ incognita. Deve essere (con $q = 1-p$)

$$0.3 = P(X \leq 25) = P\left(\frac{X-40p}{\sqrt{40pq}} \leq \frac{25-40p}{\sqrt{40pq}}\right) = \Phi\left(\frac{25-40p}{\sqrt{40pq}}\right)$$

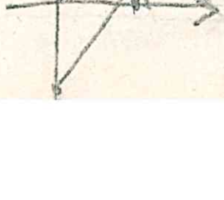
cioè la quantità $\frac{25-40p}{\sqrt{40pq}}$ deve coincidere con il quantile $\phi_{0.3}$. Ma siccome $0.3 < \frac{1}{2}$, sarà $\frac{25-40p}{\sqrt{40pq}} < 0$, quindi occorre scrivere

$$0.3 = 1 - \Phi\left(\frac{40p-25}{\sqrt{40pq}}\right), \quad \text{cioè} \quad \Phi\left(\frac{40p-25}{\sqrt{40pq}}\right) = 0.7.$$

Perciò

$$\frac{40p-25}{\sqrt{40pq}} = \phi_{0.7} = 0.53.$$

Se ne deduce l'equazione $40p - 25 = 0.53\sqrt{p(1-p)}$, che ha un'unica soluzione $p \in]\frac{5}{8}, 1[$.



397

5. Sia X una v.a. con legge $\chi^2(n)$. Qual è la sua varianza?

Sappiamo che $X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, con X_i v.a. indipendenti, tutte di legge $\mathcal{N}(0,1)$, e che $\mathbb{E}[X] = n$.

Si ha allora

$$Var[X] = \mathbb{E}[(X_1^2 + \dots + X_n^2)^2] - n^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i^4] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i^2 X_j^2] - n^2 =$$

$$= n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^4 e^{-t^2/2} dt + n(n-1) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2/2} dt - n^2 =$$

$$= 3n + n(n-1) - n^2,$$

visto che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2/2} dt = \left[-\frac{t e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right]_{\mathbb{R}} + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 1,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^4 e^{-t^2/2} dt = \left[-\frac{t^3 e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right]_{\mathbb{R}} + 3 \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 3.$$

Dunque $Var[X] = 2n$.

6. Sia X una v.a. con legge $\mathcal{N}(0,1)$. Si calcoli

$$P(|X| \geq \phi_{1-\alpha/2}), \qquad \alpha \in]0,1[.$$

Si ha $|X| \geqslant \phi_{1-\alpha/2}$ se e solo se $X > \phi_{1-\alpha/2}$ oppure $X < -\phi_{1-\alpha/2}$. Dunque

$$P(|X| \geq \phi_{1-\alpha/2}) = P(X > \phi_{1-\alpha/2}) + P(X < -\phi_{1-\alpha/2}) =$$

$$= 1 - P(X \leq \phi_{1-\alpha/2}) + [1 - P(X < \phi_{1-\alpha/2})] =$$

$$= 2 - 2(1-\alpha/2) = \alpha.$$

<u>Osservazione</u> Si è utilizzato solo il fatto che la densità della legge normale è una funzione pari. La stessa proprietà vale allora per ogni v.a. Z dotata della legge di Student:

$$P(|Z| \geq t_{1-\alpha/2}) = \alpha.$$

7. Sia X una v.a. gaussiana, tale che $P(X \geqslant 35) = 0.20$ e $P(X \geqslant 38) = 0.15$. Si calcolino la speranza e la varianza di X.

Siano $\mu = \mathbb{E}[X]$, $\sigma = \sqrt{Var[X]}$. Si ha

6. Sia X una v.a. con legge $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Si calcoli

$$P(|X| \geq \phi_{1-\alpha/2}), \qquad \alpha \in]0,1[.$$

Si ha $|X| \geq \phi_{1-\alpha/2}$ se e solo se $X > \phi_{1-\alpha/2}$ oppure $X < -\phi_{1-\alpha/2}$. Dunque

$$P(|X| \geq \phi_{1-\alpha/2}) = P(X > \phi_{1-\alpha/2}) + P(X < -\phi_{1-\alpha/2}) =$$

$$= 1 - P(X \leq \phi_{1-\alpha/2}) + [1 - P(X < \phi_{1-\alpha/2})] =$$

$$= 2 - 2(1 - \alpha/2) = \alpha.$$

<u>Osservazione</u> Si è utilizzato solo il fatto che la densità della legge normale è una funzione pari. La stessa proprietà vale allora per ogni v.a. Z dotata della legge di Student:

$$P(|Z| \geq t_{1-\alpha/2}) = \alpha.$$

7. Sia X una v.a. gaussiana, tale che $P(X \geq 35) = 0.20$ e $P(X \geq 38) = 0.15$. Si calcolino la speranza e la varianza di X.

Siano $\mu = \mathbb{E}[X]$, $\sigma = \sqrt{Var[X]}$. Si ha

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{35-\mu}{\sigma}\right)=0.20, \quad P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{38-\mu}{\sigma}\right)=0.15;$$

essendo $\frac{X-\mu}{\sigma}$ dotata di legge $N(0,1)$, ciò equivale a dire

$$1-\Phi\left(\frac{35-\mu}{\sigma}\right)=0.20, \quad 1-\Phi\left(\frac{38-\mu}{\sigma}\right)=0.15,$$

cioè

$$\Phi\left(\frac{35-\mu}{\sigma}\right)=0.80, \quad \Phi\left(\frac{38-\mu}{\sigma}\right)=0.85.$$

Passando ai quantili,

$$\frac{35-\mu}{\sigma}=\phi_{0.80} \simeq 0.84, \quad \frac{38-\mu}{\sigma}=\phi_{0.85} \simeq 1.04.$$

Si ha allora il sistema lineare

$$\begin{cases} 0.84\,\sigma+\mu=35 \\ 1.04\,\sigma+\mu=38, \end{cases}$$ ossia, con facili calcoli,

$$\mu=22.60, \qquad \sigma=15.$$

<u>Osservazione</u> Quanto deve essere grande n per poter usare l'approssimazione normale? Se le v.a. X_n non sono troppo asimmetriche, l'esperienza dice che per $n \geq 30$, o per sicurezza $n \geq 50$, l'approssimazione normale è piuttosto buona, o molto buona.