ANALISI 2 | Ve 15/5/20

Esercizi

1. Sia

$$f_\theta(x)=\begin{cases} c_\theta x^\theta & \text{se } 0<x<2, \\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus]0,2[, \end{cases} \quad \theta\in\mathbb{R}.$$

(i) Per quali $\theta\in\mathbb{R}$ e per quale costante c_θ la funzione f_θ è una densità di probabilità?

(ii) Se X è una v.a. con densità f_θ, calcolare la speranza e la varianza di X.

(iii) Stimare il parametro θ col metodo dei momenti, in presenza del campione di taglia 10

1.6, 0.5, 0.6, 1.7, 1.4, 0.8, 1.2, 1.1, 1.3, 0.9.

2. Rispondere alle stesse domande, con

$$f_\theta(x)=\begin{cases} c_\theta(2x+\theta), & \text{se } 0<x<1, \\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus]0,1[, \end{cases} \quad \theta\in\mathbb{R},$$

in presenza del campione di taglia 10

0.31, 0.71, 0.32, 0.61, 0.55, 0.46, 0.55, 0.67, 0.78, 0.69.

3. Sia X una statistica dotata della seguente densità:

$$f_\theta(x) = c_\theta\, e^{-\theta|x|}, \quad x \in \mathbb{R}; \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

(i) Per quali $\theta \in \mathbb{R}$ e $c_\theta \geq 0$ la f_θ è davvero una densità?

(ii) Calcolare media e varianza di X secondo tale densità.

(iii) Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.

(iv) Stimare θ in presenza del campione di taglia 10

0.21, 0.34, −0.13, 0.27, −0.03, −0.11, 0.83, 0.36, −0.18, −0.07.

4. Rispondere alle stesse domande, con

$$f_\theta(x) = \begin{cases} c_\theta\, e^{(1-\theta)x}, & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R},$$

in presenza del campione di taglia 12

4.2, 6.3, 7.1, 5.8, 8.3, 4.9,
4.8, 6.2, 6.3, 7.0, 6.5, 7.7.

5. Sia $(X_1, \dots, X_n)$ un campione statistico estratto da una popolazione con legge di densità

$$f_\theta(x) = \begin{cases} c_\theta x^{\theta-1} & \text{se } 0<x<1 \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus]0,1[\end{cases}$$

(i) Determinare il valore $c_\theta > 0$ che rende f_θ una densità.

(ii) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.

(iii) Determinare uno stimatore di θ col metodo dei momenti.

(iv) Dare una stima di θ con entrambi gli stimatori, in presenza del campione di taglia 10

0.88, 0.37, 0.41, 0.94, 0.10, 0.08, 0.71, 0.97, 0.21, 0.92

Risoluzione

1. (i) Deve essere $\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x)\,dx = \int_0^2 c_\theta x^\theta\,dx = 1$, quindi deve essere $\theta > -1$ (altrimenti l'integrale viene $+\infty$), e dunque

$$1 = c_\theta \int_0^2 x^\theta\, d\theta = \frac{c_\theta}{\theta+1} 2^{\theta+1}, \quad \text{ossia} \quad c_\theta = \frac{\theta+1}{2^{\theta+1}}.$$

(ii) Siccome $f_\theta(x) = \frac{\theta+1}{2^{\theta+1}} x^\theta$ per $0<x<2$, si ha

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^2 x \cdot \frac{\theta+1}{2^{\theta+1}} x^\theta\, dx = \frac{\theta+1}{2^{\theta+1}} \left[\frac{x^{\theta+2}}{\theta+2} \right]_0^2 = 2\,\frac{\theta+1}{\theta+2};$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \int_0^2 \frac{\theta+1}{2^{\theta+1}} x^{\theta+2}\, dx - \frac{4(\theta+1)^2}{(\theta+2)^2} =$$

$$= \frac{4(\theta+1)}{(\theta+3)^2} - \frac{4(\theta+1)^2}{(\theta+2)^2}.$$

(iii) Si ha $m_1(\theta) = \mathbb{E}[X] = \frac{2(\theta+1)}{\theta+2}$, per cui

$$(\theta+2)\,m_1 = 2\theta+2,$$

$$\theta(m_1-2) = 2(1-m_1)$$

$$\theta = \frac{2(m_1-1)}{2-m_1}.$$

Lo stimatore dei momenti di θ è dunque, in base ai dati,

$$\hat{\theta} = \frac{2(M_1-1)}{2-M_1}, \quad \text{ove } M_1 = \overline{X} = 1.11.$$

perciò

$$\hat{\theta} = \frac{2(0.11)}{0.89} \cong 0.247.$$

2 (i) Per avere $\int_0^1 c_\theta(2x+\theta)\,dx = 1$ deve essere

$$1 = c_\theta\left[x^2+\theta x\right]_0^1 = c_\theta(1+\theta), \text{ ossia } c_\theta = \frac{1}{1+\theta}, \ \theta \neq -1.$$

(ii) $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x\, f_\theta(x)\,dx = \frac{1}{1+\theta}\int_0^1 (2x^2+\theta x)\,dx = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{2}{3}+\frac{\theta}{2}\right);$

$\mathrm{Var}[X] = \int_0^1 x^2 f_\theta(x)\,dx - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{1+\theta}\int_0^1 (2x^3+\theta x^2)\,dx - \frac{1}{(1+\theta)^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{\theta}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{3}\right) - \frac{1}{(1+\theta)^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{\theta}{2}\right)^2.$$

(iii) Poiché $m_1 = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{2}{3}+\frac{\theta}{2}\right)$, si ha $(1+\theta)m_1 - \frac{\theta}{2} = \frac{2}{3}$,

$\theta\left(m_1-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} - m_1$ e infine $\theta = \frac{\frac{2}{3}-m_1}{m_1-\frac{1}{2}}$. Perciò $\hat{\theta} = \frac{\frac{2}{3}-M_1}{M_1-\frac{1}{2}}$,

con $M_1 = \overline{X} \cong 0.67$. Dunque $\hat{\theta} = \frac{\frac{2}{3}-0.67}{0.67-\frac{1}{2}} \cong -6.55$.

3.(i) Deve essere

$$1 = c_\theta \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta|x|}\,dx = 2c_\theta \int_0^\infty e^{-\theta x}\,dx = \frac{2}{\theta} c_\theta, \text{ cioè } c_\theta = \frac{\theta}{2}$$

(ii) $\mathbb{E}[X] = \frac{\theta}{2}\int_{\mathbb{R}} x e^{-\theta|x|}\,dx = 0$ per disparità dell'integrando.

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - 0 = \frac{\theta}{2}\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\theta|x|} = \theta\int_0^\infty x^2 e^{-\theta x}\,dx =$$

$$= \cancel{\left[-x^2 e^{-\theta x}\right]_0^\infty} + 2\int_0^\infty x e^{-\theta x}\,dx = \cancel{\left[\frac{-2}{\theta} x e^{-\theta x}\right]_0^\infty} + \frac{2}{\theta}\int_0^\infty e^{-\theta x}\,dx = \frac{2}{\theta^2}.$$

(iii) Si ha, con un campione di taglia 10,

$$\mathcal{M}(\theta; x_1 \cdots x_{10}) = \prod_{j=1}^{10} \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x_j|} = \frac{\theta^{10}}{2^{10}} \prod_{j=1}^{10} e^{-\theta|x_j|},$$

$$\ln \mathcal{M}(\theta, x_1 \cdots x_{10}) = 10 \ln\theta - 10\ln 2 - \theta \sum_{j=1}^{10} |x_j|,$$

$$\frac{d}{d\theta} \ln \mathcal{M} = 0 \iff \frac{10}{\theta} - \sum_{j=1}^{10} |x_j| = 0,$$

dunque

$$\hat{\theta} = \frac{10}{\sum_{j=1}^{10} |x_j|} = \frac{10}{2.53} \simeq 3.95.$$

N.B. Con lo stimatore dei momenti, usando $\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m_2}}$, si trova $\hat{\theta} \simeq 4.23$.

4 (i) Deve essere $\theta > 1$ per non avere integrale $+\infty$; in tal caso,

$$1 = c_\theta \int_0^\infty e^{(1-\theta)x}\,dx = \frac{c_\theta}{\theta - 1}, \qquad \text{ossia} \quad c_\theta = \theta - 1.$$

(ii) Si ha

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (\theta-1) x e^{-(\theta-1)x}\,dx = \cancel{\left[-x e^{-(\theta-1)x}\right]_0^\infty} + \int_0^\infty e^{-(\theta-1)x}\,dx = \frac{1}{\theta-1};$$

$$\mathrm{Var}[X] = \int_0^{\infty} (\theta-1) x^2 e^{-(\theta-1)x}\, dx - \frac{1}{(\theta-1)^2} =$$

$$= \cancel{\left[-x^2 e^{-(\theta-1)x}\right]_0^{\infty}} - \left[\frac{2x}{\theta-1} e^{-(\theta-1)x}\right]_0^{\infty} + \frac{2}{(\theta-1)^2} - \frac{1}{(\theta-1)^2} = \frac{1}{(\theta-1)^2}.$$

(iii) Il campione ha taglia 12. Quindi

$$\mathcal{M}(\theta, x_1, \dots, x_{12}) = \prod_{j=1}^{12} \left[(\theta-1) e^{-(\theta-1)x_j}\right] = (\theta-1)^{12} e^{-(\theta-1)\sum_{j=1}^{12} x_j},$$

$$\ln \mathcal{M} = 12 \ln(\theta-1) - (\theta-1) \sum_{j=1}^{12} x_j,$$

$$\frac{d}{d\theta} \ln \mathcal{M} = 0 \iff \frac{12}{\theta-1} - \sum_{j=1}^{12} x_j = 0,$$

ossia $$\hat{\theta} = 1 + \frac{12}{\sum_{j=1}^{12} x_j} \simeq 1.16.$$

5.(i) Si ha, per $\theta > 0$ (altrimenti l'integrale è $+\infty$)

$$1 = c_\theta \int_0^1 x^{\theta-1}\, dx = c_\theta \left[\frac{x^\theta}{\theta}\right]_0^1 = \frac{c_\theta}{\theta}, \quad \text{ossia } c_\theta = \theta.$$

(ii) Con un campione di taglia N,

$$\mathcal{M}(\theta, x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^{N} \theta x_j^{\theta-1} = \theta^N \prod_{j=1}^{N} x_j^{\theta-1},$$

$$\ln \mathcal{M} = N \ln\theta + (\theta-1) \sum_{j=1}^{N} \ln x_j,$$

$$\frac{d}{d\theta} \ln \mathcal{M} = \frac{N}{\theta} + \sum_{j=1}^{N} \ln x_j = 0 \iff \hat{\theta} = -\frac{N}{\ln \prod_{j=1}^{N} x_j}.$$

(iii) $m_1(\theta) = \int_0^1 x \cdot \theta x^{\theta-1}\, dx = \theta \left[\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$; quindi

$$(\theta+1)\, m_1 = \theta,$$

$$\theta(1-m_1) = m_1$$

$$\theta = \frac{m_1}{1-m_1},$$

ovvero

$$\hat{\theta} = \frac{M_1}{1-M_1} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}.$$

(iv) In presenza del campione dato, si ha $\bar{X} = 0.559$ e $\frac{-N}{\ln \prod_{j=1}^{N} X_j} \cong 1.12$. Quindi, con lo stimatore di massima verosimiglianza

$$\hat{\theta} = \frac{N}{\ln \prod_{j=1}^{N} X_j} \cong 1.12,$$

e con lo stimatore dei momenti

$$\hat{\theta} = \frac{0.559}{1-0.559} \cong 1.268.$$

<u>Ultimo esercizio (non svolto)</u> Sia $f_\theta(x) = \begin{cases} c_\theta x & \text{in }]0,\theta[\\ 0 & \text{in } \mathbb{R} \setminus]0,\theta[. \end{cases}$

(i) Trovare $c_\theta > 0$ in modo che f_θ sia una densità.

(ii) Trovare uno stimatore per θ e stimare θ in presenza del campione di taglia 10

4.7, 5.1, 3.8, 4.0, 5.5, 6.2, 5.3, 4.9, 3.8, 4.4.