Esercizi vari

1. Gli oggetti fabbricati in una linea di produzione devono avere dimensioni compresi fra 2.4 mm e 2.6 mm. Esaminandone 25, si trovano una media empirica $\bar{x} = 2.54$ mm e una deviazione standard empirica $s = 1$ mm. Stimare la frazione di oggetti le cui dimensioni sono al di fuori di quelle accettabili.

Risposta

Prendiamo 25 v.a. indipendenti e gaussiane di legge $N(2.54, 1)$. Dato che la media empirica ha legge $N(2.54, 1/5) = N(2.54, 0.2)$, si ha

$$P(\bar{X} > 2.6) + P(\bar{X} < 2.4) = 1 - P(\bar{X} \le 2.6) + P(\bar{X} \le 2.4) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - 2.54}{0.2} \le \frac{2.6 - 2.54}{0.2}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - 2.54}{0.2} \le \frac{2.4 - 2.54}{0.2}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(0.3) + \Phi(-0.7) = 2 - \Phi(0.3) - \Phi(0.7) = 0.62.$$

Dunque la fabbrica deve buttar via il 62% dei pezzi e quindi è destinata a fallire.

I prossimi tre esercizi avrebbero potuto costituire il secondo compitino, se non ci fosse stato il coronavirus.

Esercizio 1 Calcolare l'integrale

$$\int_E z(x^2-2y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

ove

$$E=\left\{(x,y,z):\ \frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}\,x,\ 1-x^2-y^2\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}.$$

Esercizio 2 Sia Γ la curva descritta in coordinate polari da

$$r=1+\sin\theta,\qquad 0\le\theta\le 2\pi.$$

(i) Determinare la retta tangente a Γ nel punto dove Γ interseca la semiretta $y=x\ge 0$.

ii) Calcolare la lunghezza di Γ.

iii) Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{+\Gamma}(y^2dx+x^2dy)$ (verso $\theta\uparrow$).

iv) Determinare l'area della regione E delimitata da Γ.

Esercizio 3 Determinare una funzione $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(0)=0$ e il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y)=\big(2x+\varphi(y),\ x(y+\varphi(y))\big)$$

sia conservativo. Calcolare inoltre

$$\int_{+\Gamma}\underline{F}\cdot d\underline{x},\quad\text{ove}\quad \Gamma=\{(x,y):\ y=\sin\pi x,\ 0\le x\le 2\}\ (\text{verso } x\uparrow)$$

Risoluzione

Esercizio 1 Usando le coordinate cilindriche $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$, si ha:

$$x^2+y^2 \le 1 \implies 0 \le r \le 1,$$

$$1-x^2-y^2 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \implies 1-r^2 \le z \le \sqrt{1-r^2},$$

$$\frac{x}{\sqrt3} \le y \le x\sqrt3 \implies \frac{r\cos\theta}{\sqrt3} \le r\sin\theta \le r\sqrt3\cos\theta \implies \frac{1}{\sqrt3} \le \operatorname{tg}\theta \le \sqrt3$$

$$\implies \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}.$$

Perciò

$$\int_E z(x^2-2y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_0^1 \left[\int_{1-r^2}^{\sqrt{1-r^2}} z\,r^2[\cos^2\theta - 2\sin^2\theta]\,dz\right] r\,dr\right] d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2\theta - 2\sin^2\theta)\,d\theta \cdot \int_0^1 r^3 \left[\frac{1-r^2}{2} - \frac{(1-r^2)^2}{2}\right] dr =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} [1-3\sin^2\theta]\,d\theta \cdot \frac12 \int_0^1 [\cancel{r^3} - r^5 - \cancel{r^3} + 2r^5 - r^7]\,dr =$$

$$= \left(\frac{\pi}{6} - 3\left[\frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\right) \frac12 \left[\frac{r^6}{6} - \frac{r^8}{8}\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{\pi}{6} - \frac32\frac{\pi}{6} + \frac32\left(\cancel{\frac{\sqrt3}{4} - \frac{\sqrt3}{4}}\right)\right] \frac12\left(\frac16 - \frac18\right) = -\frac{\pi}{24}\cdot\frac{1}{24} = -\frac{\pi}{526}.$$

Esercizio 2 Si ha su Γ

$$\begin{cases} x = (1+\sin\theta)\cos\theta \\ y = (1+\sin\theta)\sin\theta \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = \cos^2\theta - (1+\sin\theta)\sin\theta \\ y' = \cos\theta\sin\theta + (1+\sin\theta)\cos\theta \end{cases},$$

quindi, per $\theta = \frac{\pi}{4}$ si ha

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2},$$

$$x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Perciò la retta tangente cercata è

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{t}{\sqrt{2}}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + t\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo la lunghezza di Γ:

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\sin\theta)^2 + \left[\frac{d}{d\theta}(1+\sin\theta)\right]^2}\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\sin\theta}\, d\theta =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\, d\theta =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1+\cos t}\, dt = \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos t}\, dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 2\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\cos^2\frac{t}{2}}\, dt =$$

$$= 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{t}{2}\, dt = 4\left[\sin\frac{t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 8.$$

Calcoliamo l'integrale curvilineo:

$$\int_{+\Gamma} (y^2 dx + x^2 dy) = \int_0^{2\pi} \Big[(1+\sin\theta)^2 \sin^2\theta \left(\cos^2\theta - (1+\sin\theta)\sin\theta\right) +$$

$$+ (1+\sin\theta)^2 \cos^2\theta \left(\cos\theta\sin\theta + (1+\sin\theta)\cos\theta\right)\Big]\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big[(1+\sin\theta)^2 [\sin^2\theta \cos^2\theta + \cos^3\theta \sin\theta] + $$
$$+ (1+\sin\theta)^3 [-\sin^3\theta + \cos^3\theta] \Big] d\theta .$$

Gli integrali degli addendi che contengono potenze dispari di $\sin\theta$ o di $\cos\theta$ sono nulli, per disparità e per periodicità. Resta

$$\int_\Gamma (y^2 dx + x^2 dy) = \int_0^{2\pi} \Big[(1+\sin^2\theta) \sin^2\theta \cos^2\theta + (3\sin\theta + \sin^3\theta)(-\sin^3\theta) \Big] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} [\sin^2\theta \cos^2\theta + \sin^4\theta \cos^2\theta - 3\sin^4\theta - \sin^6\theta] \, d\theta$$

Notiamo adesso che

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta \, d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4\theta \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} (1-\cos^2\theta)^2 \cos^2\theta \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right]^2 \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1-\cos 2\theta)^2 (1+\cos 2\theta) \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1-\cos 2\theta)(1-\cos^2 2\theta) \, d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1-\cos 2\theta) \sin^2 2\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta \, d\theta - \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \sin^2 2\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^{4\pi} \sin^2 t \, dt + 0 = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{\pi}{8},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta (1-\cos^2\theta) \, d\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^6\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} (1-\cos^2\theta)\sin^4\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{8} = \frac{5}{8}\pi.$$

Dunque

$$\int_{+\Gamma} (y^2 dx + x^2 dy) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{9}{4}\pi - \frac{5}{8}\pi = -\frac{5}{2}\pi.$$

Calcoliamo l'area di E. Per le formule di Gauss-Green,

$$m_2(E) = \frac{1}{2}\int_{+\Gamma} (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\sin\theta)^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\, d\theta = \pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

<u>Esercizio 3</u> Il campo $\underline{F}$ è definito su $\mathbb{R}^2$. Sarà conservativo se e solo se

$$\varphi'(y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x + \varphi(y)) = \frac{\partial}{\partial x}(x(y+\varphi(y))) = y + \varphi(y),$$

cioè se e solo se φ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \varphi'(y) - \varphi(y) = y \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

La soluzione è

$$\varphi(y) = e^y - y - 1;$$

quindi il campo

$$\underline{F}(x,y) = \left(2x + e^y - y - 1,\ x(e^y - 1)\right)$$

è conservativo. Un potenziale f deve soddisfare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + e^y - y - 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x(e^y - 1) ; \end{cases}$$

dalla 1ª equazione,

$$f(x,y) = x^2 + x(e^y - y - 1) + c(y)$$

e dalla 2ª

$$x(e^y - 1) = \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y - x + c'(y)$$

ovvero

$$c'(y) = 0 .$$

Perciò

$$f(x,y) = x^2 + x(e^y - y - 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Il lavoro compiuto da $\underline{F}$ sulla curva Γ è dunque

$$\int_{+\Gamma} \underline{F} \cdot d\underline{x} = f(2,0) - f(0,0) = 4 .$$

Esercizio finale

Calcolare

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{x}{x^2 + 4y^2}\, dx + \frac{4y}{x^2 + 4y^2}\, dy \right), \quad \Gamma = \{(1-t^2, t^3),\ t \in [0,1]\},$$

verso: t crescenti.

Si riconosce subito che

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+4y^2)$$

è un potenziale del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+4y^2} , \frac{4y}{x^2+4y^2} \right).$$

Se non si riesce a trovare il potenziale a occhio, si può osservare che:

(a) $\frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2+4y^2} = -\frac{8xy}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{4y}{x^2+4y^2}$,

(b) Scelta la curva $\Gamma_0 = \{x^2+4y^2=1\}$, che circonda l'origine ("buco" del dominio di $\underline{F}$), si ha

$$\Gamma_0 = \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \frac{1}{4}\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

$$\int_{+\Gamma_0} \underline{F} \cdot d\underline{x} = \int_0^{2\pi} \left[\cos\theta\,(-\sin\theta) + \sin\theta\,(\cos\theta)\right] d\theta = 0;$$

quindi $\underline{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Un potenziale f deve soddisfare $f_x = \frac{x}{x^2+4y^2}$, $f_y = \frac{4y}{x^2+4y^2}$, e dalla 1ª equazione

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+4y^2) + c(y);$$

dalla 2ª segue infine $c'(y) = 0$. Perciò $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+4y^2) + c$.

L'integrale curvilineo vale $f(0,1) - f(1,0) = \ln 2$.

Altri esercizi

1. Calcolare $\int_{\partial D^+} \left[(x-y^3)\,dx + (y^3+x^3)\,dy\right]$, ∂D^+ = verso antiorario,

ove $D = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 9,\ x,y \geq 0\}$.

2. Si calcoli

$$\int_{\Gamma} \sqrt{x(y-1)}\,ds, \quad \Gamma = \{y = 1+x^5,\ |x| \leq 1\}.$$

3. Sia D il sottografico della funzione $g(x) = x^3(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$. Detto E l'insieme ottenuto ruotando D attorno all'asse x, calcolare il volume di E.

4. Data la curva $\Gamma = \{r = 2\theta^2,\ |\theta| \leq \pi\}$, determinare la retta tangente a Γ in $P = \left(\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}, \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}\right)$ e calcolare la lunghezza di Γ.

5. Stabilire se il campo

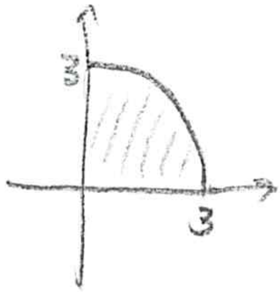
$$\underline{F} = \left(e^{x+z}(y^2-x+z-1),\ 2e^{x+z}y,\ e^{x+z}(y^2-x+z+1)\right)$$

è conservativo, e calcolare $\int_{+\Gamma} \underline{F}\cdot d\underline{x}$, ove

$\Gamma = \{(\cos t, \sin t, t): t \in [0, 4\pi]\}$ e $+\Gamma$ è il verso delle t crescenti.

Risoluzione

1. Utilizzando le formule di Gauss-Green si ha



$$\int_{+\partial D} \left[(x-y^3)\,dx + (y^3+x^3)\,dy \right] =$$

$$= \int_D \left[-\frac{\partial}{\partial y}(x-y^3) + \frac{\partial}{\partial x}(y^3+x^3) \right] dx\,dy =$$

$$= \int_D (3y^2+3x^2)\,dx\,dy = 3\int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\,\rho\,d\theta\,d\rho =$$

$$= \frac{3\pi}{2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 = \frac{243}{8}\pi.$$

2. Scelto x come parametro si ha, lungo Γ, $\begin{cases} x = x \\ y = 1+x^5, \end{cases}$ da cui

$$ds = \sqrt{1+25x^8},$$

e quindi

$$\int_\Gamma \sqrt[3]{x(y-1)}\,ds = \int_{-1}^1 |x|^3 \sqrt{1+25x^8}\,dx = 2\int_0^1 x^3 \sqrt{1+25x^4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+25t^2}\,dt = \frac{1}{10}\int_0^{1/5} \sqrt{1+s^2}\,ds =$$

$$= \frac{1}{20}\left[s\sqrt{1+s^2} - \ln\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)\right]_0^{\frac{1}{5}} =$$

$$= \frac{1}{20}\left[\frac{1}{5}\sqrt{1+\frac{1}{25}} - \ln\left(\frac{1}{5}+\sqrt{1+\frac{1}{25}}\right)\right].$$

3. Si ha

$$E = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\ \ y^2+z^2 \le [x^3(1-x)]^2\},$$

e usando le coordinate cilindriche con asse l'asse x,

$$\begin{cases} x = x & x \in [0,1] \\ y = r\cos\theta & r \in [0, x^3(1-x)] \\ z = r\sin\theta & \theta \in [0,2\pi], \end{cases}$$

si ottiene

$$m_3(E) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{x^3(1-x)} r\, dr\, d\theta\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{x^3(1-x)} dx = \pi \int_0^1 x^6(1-x)^2\, dx =$$

$$= \pi \int_0^1 (x^6 - 2x^7 + x^8)\, dx = \pi\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) = \frac{\pi}{251}.$$

4. Il punto P corrisponde a $\theta = \frac{\pi}{4}$. Essendo

$$\begin{cases} x = 2\theta^2\cos\theta \\ y = 2\theta^2\sin\theta \end{cases}$$

si ha

$$x' = 4\theta\cos\theta - 2\theta^2\sin\theta$$
$$y' = 4\theta\sin\theta + 2\theta^2\cos\theta$$

e quindi, per $\theta = \pi/4$, $x' = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$, $y' = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$. La retta tangente è

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi^2}{8\sqrt{2}} + t\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} - \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{2}}\right) \\ y = \dfrac{\pi^2}{8\sqrt{2}} + t\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} - \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{2}}\right) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La lunghezza di Γ è

$$\ell(\Gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4\theta^4 + 16\theta^2}\, d\theta = 4\int_0^{\pi} \theta\sqrt{4+\theta^2}\, d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{4+t}\, dt = \frac{4}{3}\left[(4+t)^{3/2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{3}\left((4+\pi)^{3/2} - 8\right).$$

5. Poiché, posto $\underline{F} = (A, B, C)$,

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2e^{x+z}y = \frac{\partial B}{\partial x},$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = e^{x+z}\left(y^2 - x + z\right) = \frac{\partial C}{\partial x},$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = 2y\, e^{x+z} = \frac{\partial C}{\partial y},$$

il campo $\underline{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo un potenziale G di $\underline{F}$: deve essere

$$\begin{cases} G_x = e^{x+z}\left(y^2 - x + z - 1\right) \\ G_y = 2e^{x+z}y \\ G_z = e^{x+z}\left(y^2 - x + z + 1\right); \end{cases}$$

integrando la 2^a equazione rispetto a y si trova

$$G(x,y,z) = y^2 e^{x+z} + \varphi(x,z),$$

e sostituendo nella 1^a

$$y^2 e^{x+z} + \varphi_x(x,z) = y^2 e^{x+z} + e^{x+z}(-x+z-1),$$

da cui

$$\varphi_x(x,z) = e^{x+z}(-x+z-1).$$

Integrando questa relazione rispetto a x (per parti il 1^o pezzo)

$$\varphi(x,z) = -x e^{x+z} + e^{x+z} + (z-1)e^{x+z} + \psi(z) =$$
$$= e^{x+z}(z-x) + \psi(z).$$

Sostituendo $G(x,y,z) = e^{x+z}(y^2+z-x) + \psi(z)$ nella 3^a equazione, si ha

$$e^{x+z}(y^2-x+z+1) = e^{x+z}(y^2+z-x) + e^{x+z} + \psi'(z),$$

ovvero

$$\psi'(z) = 0.$$

Perciò, scelta ad esempio $\psi(z) \equiv 0$, un potenziale di $\underline{F}$ è

$$G(x,y,z) = e^{x+z}(y^2+z-x).$$

Calcoliamo allora il lavoro del campo lungo Γ: risulta

$$\int_{+\Gamma} \underline{F} \cdot d\underline{x} = G(\cos 4\pi, \sin 4\pi, 4\pi) - G(1,0,0) =$$
$$= G(1,0,4\pi) - G(1,0,0) = e^{1+4\pi}(4\pi-1) + e =$$
$$= e(4\pi-1)(e^{4\pi}-1).$$