ANALISI 2	Ve 29/5/20

Esercizi

1. Le targhe delle automobili italiane sono fatte da due blocchi di 2 lettere ciascuno (escluse I, O, Q, U) e un blocco centrale di 3 cifre (fra 0 e 9).

(i) Qual'è la probabilità che una targa abbia 4 lettere distinte e 3 cifre uguali?

(ii) Sapendo che una targa ha 4 lettere distinte, qual'è la probabilità che esse siano in ordine crescente?

2. Sia X una v.a. gaussiana con legge $N(0,1)$. Posto $Y=X^3$, si calcolino $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}[Y]$ e si determini $c \in \mathbb{R}$ in modo che $P(Y \geq c) \leq \frac{3}{4}$.

3. Sia f_θ la densità

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \theta - \frac{1}{2} \leq x \leq \theta + \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

ove $\theta \in \mathbb{R}$.

(i) Si calcoli la funzione di ripartizione F_θ.

(ii) Sia $(X_1, \dots, X_N)$ un campione statistico secondo la f_θ. Posto $Y = \min X_i$, $Z = \max X_i$, si calcoli $P(Y \leq \theta \leq Z)$ e si determini $N \in \mathbb{N}^+$ tale che $]Y, Z[$ sia un intervallo di fiducia per θ a livello 0.95.

Soluzione

1 (i) Ci sono 22 lettere distinte. Se ne possono scegliere 4 diverse fra loro in $22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19$ modi; la cifra che si ripete tre volte si può scegliere in 10 modi. Dunque la probabilità richiesta è

$$\frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{22^4} \cdot \frac{10}{10^3} = \frac{7980}{22^3\, 10^2} \simeq 0.00749.$$

(ii) Una targa ha 4 lettere distinte con probabilità $\frac{7980}{22^4} \simeq 0.74944$. Dei $4! = 24$ modi di metterle in fila, uno solo è quello in cui esse sono in ordine crescente. Perciò la probabilità richiesta è $\frac{7980}{22^4 \cdot 24} \simeq 0.03123$.

2. Si ha

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \text{ per disparità},$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[X^6] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^6 e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\left(-x^5 - 5x^3 - 15x\right) e^{-x^2/2} \Big]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{15}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 15.$$

Inoltre si ha

$$\frac{3}{4} \geq P(Y \geq c) = 1 - P(Y \leq c) = 1 - P(X \leq c^{1/3})$$

se e solo se

$$P(X \le c^{1/3}) \ge \frac{1}{4},$$

ossia

$$c^{1/3} \ge \phi_{0.25} = -\phi_{0.75} = -0.7734,$$

vale a dire

$$c \ge (-0.7734)^3 = -0.4626.$$

3.(i) Si ha

$$F_\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\theta(t)\,dt = \int_{\theta-\frac{1}{2}}^{x} 1\,dt = x-\theta+\frac{1}{2} \quad \forall x \in \left[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}\right],$$

mentre $F_\theta(x)=0$ per $x \le \theta-\frac{1}{2}$ e $F_\theta(x)=1$ per $x \ge \theta+\frac{1}{2}$.

(ii) Risulta

$$\begin{aligned}
P(Y\le\theta\le Z) &= 1 - P(\{Y\le\theta\le Z\}^c) = \\
&= 1 - P(\theta\le Y) - P(Z\le\theta) = \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{N} P(\theta\le X_i) - \prod_{i=1}^{N} P(X_i\le\theta) = \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{N} \left(1-P(X_i\le\theta)\right) - \prod_{i=1}^{N} P(X_i\le\theta) = \\
&= 1-(1-F_\theta(\theta))^N - [F_\theta(\theta)]^N = 1-\frac{2}{2^N} = 1-\frac{1}{2^{N-1}}.
\end{aligned}$$

Quindi (Y,Z) è un intervallo di fiducia per θ al livello 0.95 se $\frac{1}{2^{N-1}} \le 0.05$, ossia $N \ge 1 + \ln_2\left(\frac{1}{0.05}\right) = 1 + \frac{\ln 20}{\ln 2}$.