Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Equazioni differenziali in spazi di Banach

20 luglio 2012

Tesi di Laurea Triennale

Candidata
Anna Pasqualina Candeloro

Relatore
Prof. Paolo Acquistapace
Università di Pisa

Anno Accademico 2011/2012

Indice

Introduzione

Le equazioni differenziali lineari in spazi di Banach costituiscono il primo tassello di una teoria vastissima che trova innumerevoli applicazioni. Questo tipo di equazioni comprende in sé sia le equazioni differenziali ordinarie, sia le equazioni alle derivate parziali, e quindi fornisce metodi astratti per lo studio di svariatissimi problemi provenienti dalla fisica, dall'ingegneria, dalla biologia, dalla medicina, dall'economia e da altre discipline ancora.
E poiché i modelli non lineari si fondano essenzialmente sul caso lineare, è importante avere una teoria lineare il più possibile completa e soddisfacente. L'oggetto di questa tesi si limita allo studio delle equazioni differenziali lineari in spazi di Banach B nel caso più semplice, cioè quello di equazioni del tipo

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

dove $A : B \to B$ è un operatore lineare limitato e $f : \mathbb{R} \to B$ è una funzione continua e limitata. Questa era l'unica scelta possibile per una tesi triennale, ma l'argomento richiede ugualmente una serie di prerequisiti: proprietà degli operatori lineari, teoria spettrale, principio di uniforme limitatezza, integrazione secondo Bochner in spazi di Banach.
La trattazione riguarda l'esistenza e l'unicità di soluzioni di classe C^1 dell'equazione (1) sull'intera retta reale o su semirette, e lo studio di specifiche proprietà di tali soluzioni: anzitutto la limitatezza e successivamente, sotto adeguate ipotesi per il secondo membro f, la periodicità e la quasi periodicità. Tutte queste proprietà sono legate anche a specifiche restrizioni sulla posizione dello spettro di A nel piano complesso.
La tesi è composta da tre capitoli. Il primo è dedicato ai prerequisiti già citati.
Nel secondo si analizza l'equazione omogenea $x'(t) = Ax(t)$; si introduce il gruppo $\{e^{At}\}_{t\in\mathbb{R}}$ generato da A, e tramite esso si scrive la soluzione uscente da un dato iniziale $x_0 \in B$. Si studia poi in dettaglio il comportamento asintotico della soluzione, che dipende strettamente dalla natura dello spettro di A.
Infine, il terzo capitolo tratta dell'equazione non omogenea. Fissato un dato iniziale, la soluzione viene rappresentata tramite l'uso di una opportuna funzione di Green, a sua volta costruita a partire dal gruppo $\{e^{At}\}$; si pro-

va l'esistenza di un'unica soluzione limitata e, come accennato sopra, se ne dimostra, sotto adeguate ipotesi su f, la periodicità e la quasi periodicità.

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Spazi di Banach e operatori lineari

In questa breve trattazione si lavorerà principalmente con operatori lineari in spazi di Banach. Per questo è opportuno richiamare e enunciare alcune proprietà e alcuni teoremi che ne faciliteranno la comprensione.

Definizione 1.1. Uno *spazio vettoriale* reale (o complesso) è un insieme X dotato della seguente struttura:

- è definita su $X \times X$, a valori in X, l'operazione somma, per la quale:
    1. vale la proprietà associativa,
    2. vale la proprietà commutativa,
    3. esiste un unico elemento neutro 0, che verifica $u + 0 = u$ per ogni $u \in X$,
    4. ogni elemento $u \in X$ ha un unico opposto $-u$ che verifica $u + (-u) = 0$;
- è definita su $\mathbb{R} \times X$(o su $\mathbb{C} \times X$), a valori in X, l'operazione prodotto per scalari, per la quale valgono, per ogni λ, μ reali (o complessi) e per ogni $u, v \in X$, le relazioni:
    1. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$,
    2. $1 \cdot u = u$,
    3. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$,
    4. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

Esempi banali di spazi vettoriali sono, oltre a $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{C}^m$, la famiglia delle funzioni reali limitate definite su un insieme A, l'insieme delle funzioni continue su un intervallo $[a, b]$.

Definizione 1.2. Sia X uno spazio vettoriale reale o complesso. Un *prodotto scalare* su X è un'applicazione da $X \times X$ in $\mathbb{R}$ (o da $X \times X$ in $\mathbb{C}$), che denotiamo con

$$(u, v) \to \langle u, v \rangle_X$$

dotata delle seguenti proprietá:

- $\langle u, u \rangle_X \geq 0$ per ogni $u \in X$, e $\langle u, u \rangle_X = 0$ se e solo se $u = 0$;
- $\langle u, v \rangle_X = \overline{\langle v, u \rangle_X}$ per ogni $u, v \in X$;
- $\langle \lambda u + \mu z, v \rangle_X = \lambda \langle u, v \rangle_X + \mu \langle z, v \rangle_X$ per ogni $u, z, v \in X$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (o per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$).

La coppia $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ si chiama *spazio con prodotto scalare.*

Ricordiamo il noto teorema di Cauchy-Schwarz, di cui si omette la dimostrazione.

Teorema 1.3. Se X è uno spazio con prodotto scalare, allora si ha

$$|\langle x, y \rangle_X| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle_X} \sqrt{\langle y, y \rangle_X} \qquad \forall x, y \in X.$$

Negli spazi con prodotto scalare si può introdurre la *norma* di un elemento x, che ne misura la distanza dall'origine: essa si denota con $\|x\|$ ed è data da:

$$\sqrt{\langle x, x \rangle_X}.$$

Dalle proprietà del prodotto scalare segue subito che

$$\|x\| \geq 0, \text{ e } \|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in X,$$

mentre la subadditività

$$\|x + x'\| \leq \|x\| + \|x'\| \qquad \forall x, x' \in X$$

segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
Le proprietà della norma sopra scritte non sono legate alla struttura indotta dai prodotti scalari: in altre parole, vi sono esempi di funzioni $\| \cdot \|$ da uno spazio vettoriale X a valori in $[0; \infty[$ che sono dotate di tali proprietà, senza però essere indotte da alcun prodotto scalare.

Definizione 1.4. Sia X uno spazio vettoriale. Una *norma* su X è una funzione $\| \cdot \| : X \to [0, \infty[$, tale che :

1. $\|x\| \geq 0,$ e $\|x\| = 0$ se solo se $x = 0$;

2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e per ogni $x \in X$;

3. $\|x + x'\| \leq \|x\| + \|x'\|$ per ogni $x, x' \in X$.

Se su X è definita una norma, la coppia $(X, \|\cdot\|)$ è detta *spazio normato.*

Ad esempio lo spazio vettoriale

$$\ell^\infty = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

è uno spazio normato con la norma

$$\|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

In uno spazio normato la quantità $\|x - y\|$ misura la distanza tra due punti arbitrari x e y. Più generalmente diamo la definizione astratta di distanza e conseguentemente di spazio metrico.

Definizione 1.5. Sia X un insieme non vuoto. Una *distanza* su X è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che:

1. $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$;

2. $d(x, y) = 0$ se e solo se x = y;

3. $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$;

4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$.

Se su X è definita una distanza d, la coppia (X, d) si dice *spazio metrico.*

Infine prima di dare la definizione di spazio di Banach ricordiamo la nozione di successione di Cauchy.

Definizione 1.6. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia x_n una successione contenuta in X. Essa è *di Cauchy* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall n, m \geq \nu.$$

Si vede facilmente che in uno spazio metrico ogni successione convergente è necessariamente una successione di Cauchy. Sia infatti $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $x_n \to x \in X$ per $n \to \infty$: allora, fissato $\epsilon > 0$, per definizione di limite esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x) < \epsilon$ per ogni $n \geq \nu$. Dunque dalla disuguaglianza triangolare si ha

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\epsilon \quad \forall n, m \geq \nu.$$

Non è vero però, in generale, il viceversa, cioè il fatto che le successioni di Cauchy siano convergenti: se consideriamo ad esempio lo spazio normato $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, la successione $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{Q}$, ma non è convergente in tale spazio, visto che il suo limite in $\mathbb{R}$ è il numero irrazionale e.

Definizione 1.7. Uno spazio metrico (X, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy in X è convergente ad un elemento di X. Uno spazio normato completo si dice *spazio di Banach*; se, in più, la norma è indotta da un prodotto scalare, esso si dice *spazio di Hilbert*.

Un esempio banale di spazio di Banach è $\mathbb{R}^N$ con $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i|^2}$ o con $\|x\| = \sum_{i=1}^N |x_i|$ oppure con $\|x\| = \max_{1\leq i\leq N} |x_i|$.
Altri esempi sono: lo spazio $C[a, b]$ delle funzioni continue su $[a, b]$, con la norma $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$; lo spazio $C^1[a, b]$ delle funzioni derivabili in $[a, b]$ con derivata continua, con la norma $\|f\|_{(1)} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$; lo spazio $L^p(\mathbb{R})$ delle classi di equivalenza di funzioni misurabili secondo Lebesgue e potenza p-sima sommabile su $\mathbb{R}$, con la norma $\|f\|_p = \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$.
Due spazi di Banach sono detti *isomorfi* se esiste un isomorfismo tra di essi, cioè una mappa biunivoca e continua di uno dei due nell'altro.
Siano X, Y due spazi di Banach.

Definizione 1.8. Un'applicazione $A : X \to Y$ è detta *operatore lineare* se si ha $A(\alpha x + \beta z) = \alpha A(x) + \beta A(z)$ per ogni $x, z \in X$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (oppure per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$).

Notiamo che per gli operatori lineari si è soliti usare la notazione Ax in luogo di $A(x)$.

Definizione 1.9. L'*immagine* di A è l'insieme $\mathcal{I}(A) = \{Ax : x \in X\}$; questo insieme è un sottospazio lineare di Y. Il *nucleo* di A è il sottospazio lineare di X definito da $\ker A = \{x \in X : Ax = 0\}$.

Definizione 1.10. Un operatore $A : X \to Y$ si dice *limitato* se esiste $M \geq 0$ tale che $\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X$ per ogni $x \in X$.

Esempi 1.11.

1. Consideriamo l'intervallo $I = [0, 1]$. In $L^2(I)$ fissiamo $g \in C(I)$, e consideriamo l'operatore T_g, definito da

$$T_g f = gf \qquad \forall f \in L^2(I),$$

Esso è limitato. Infatti

$$\|T_g f\|^2 = \int_0^1 |gf|^2\, dx \leq \max_{x\in[0,1]} |g(x)|^2 \int_0^1 |f|^2 dx,$$

da cui la tesi con $\|T\| \leq \|g\|_\infty$.

2. Sia $Q : C[a, b] \to \mathbb{R}$ l'operatore così definito : $Qf = f(a)$ per ogni $f \in C[a, b]$. Esso è limitato: infatti

$$|Qf| = |f(a)| \leq \|f\|_\infty \qquad \forall f \in C[a, b].$$

per cui $\|Q\| \leq 1$.

Quindi se $A : X \to Y$ è un operatore lineare e limitato, risulta:

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty$$

e, a causa dell'omogeneità, possiamo scrivere

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|u\|_X = 1} \|Au\|_Y = \sup_{\|u\|_X \leq 1} \|Au\|_Y;$$

quindi un operatore lineare è limitato se e solo se esso è una funzione limitata (in norma) sulla palla unitaria di X

$$B = \{u \in X : \|u\|_X \leq 1\}.$$

L'insieme degli operatori lineari limitati da X a Y ha una struttura di spazio vettoriale e si indica con $\mathcal{L}(X, Y)$: se $X = Y$ si scrive $\mathcal{L}(X)$ anziché $\mathcal{L}(X, X)$. Lo spazio $\mathcal{L}(X, Y)$ diventa uno spazio normato con la norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|u\|_X = 1} \|Au\|_Y.$$

Proposizione 1.12. Siano X, Y spazi normati e sia $A : X \to Y$ un operatore lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. A è un operatore limitato;
2. esiste $x_0 \in X$ tale che A è continuo in x_0;
3. la funzione $A : X \to Y$ è lipschitziana, cioè esiste $K \geq 0$ tale che

$$\|Ax - Az\|_Y \leq K\|x - z\|_X \qquad \forall x, z \in X.$$

Dimostrazione.
(1. $\Rightarrow$ 3.) Per ipotesi esiste $M \geq 0$ tale che $\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X$. Grazie alla linearità si deduce che per ogni $x, z \in X$:

$$\|Ax - Az\|_Y \leq \|A(x - z)\|_Y \leq M\|x - z\|_X.$$

(3. $\Rightarrow$ 2.) Ovvio.
(2. $\Rightarrow$ 1.) Per ipotesi, per ogni ϵ esiste δ tale che

$$\|x - x_0\|_X \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|Ax - Ax_0\|_Y \leq \epsilon.$$

Sia $z \in X \setminus \{0\}$ (si noti che se $X = \{0\}$, allora per linearità deve essere $A = 0$ e quindi la tesi è ovvia). Posto $w = \frac{\delta z}{\|z\|_X}$, si ha

$$\frac{\delta}{\|z\|_X} Az = Aw = A(w + x_0) - A(x_0)$$

e poiché $\|(w+x_0)-x_0\|_X = \|w\|_X = \delta$, si ha $\|Aw\|_Y \leq \epsilon$. Pertanto

$$\|Az\|_Y = \frac{\|z\|_X}{\delta}\|Aw\|_Y \leq \frac{\epsilon}{\delta}\|z\|_X, \ \ \forall z \in X \setminus \{0\}.$$

Dato che per $z = 0$ la stima precedente è ovvia, si conclude che A è limitato. Vale, inoltre, il seguente enunciato.

Teorema 1.13. Siano X, Y spazi normati. Se Y è uno spazio di Banach allora $\mathcal{L}(X,Y)$ è uno spazio di Banach.

Dimostrazione.
Sia $\{F_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X,Y)$: ciò significa che per ogni ϵ esiste ν tale che $\|F_n - F_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \epsilon$ per ogni $n, m \geq \nu$; quindi

$$\|F_n x - F_m x\|_Y < \epsilon\|x\|_X, \ \ \forall x \in X, \quad \forall n, m \geq \nu.$$

In particolare per ogni fissato $x \in X$ la successione $\{F_n x\}$ è di Cauchy in Y; poiché Y è completo essa ha limite nella norma di Y. Chiamiamo $F(x)$ tale limite; è immediato verificare che l'applicazione F così definita è lineare da X in Y. Inoltre per ogni $x \in X$ si ha:

$$\begin{aligned}\|Fx\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|F_n x\|_Y &\leq \liminf_{n\to\infty}[\|F_n - F_\nu\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x\|_X + \|F_\nu x\|_Y] \\ &\leq [\epsilon + \|F_\nu\|_{\mathcal{L}(X,Y)}]\|x\|_X\end{aligned}$$

cosicché F è un operatore limitato. Infine se $x \in X$ con $\|x\|_X = 1$ si ha

$$\|F_n x - Fx\|_Y = \lim_{m\to\infty}\|F_n x - F_m x\|_Y \leq \liminf_{m\to\infty}\|F_n - F_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \epsilon \ \ \forall n \geq \nu,$$

e dunque $F_n \to F$ in $\mathcal{L}(X,Y)$.
Sono riportati ora alcuni risultati, di cui è omessa la dimostrazione, che potranno tornare utili in seguito.

Teorema 1.14 (dell'applicazione aperta). Sia A un operatore in $\mathcal{L}(X,Y)$ che mappa in modo biunivoco X in Y; allora il suo inverso appartiene a $\mathcal{L}(Y,X)$.

Teorema 1.15. Sia X uno spazio di Banach e sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Allora A è invertibile se $\|I - A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. In tal caso:

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(I-A)^k,$$

dove $(I-A)^0 = I$ e la serie è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$.

Teorema 1.16. Siano X, Y spazi di Banach. L'insieme degli operatori invertibili in $\mathcal{L}(X,Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X,Y)$.

Teorema 1.17 (Principio di uniforme limitatezza). Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia una famiglia di operatori in $\mathcal{L}(X, Y)$ tale che

$$\sup\{\|Ax\|_Y : \ A \in \mathcal{A}\} < \infty \qquad \forall x \in X;$$

allora $\mathcal{A}$ è limitato, cioè

$$\sup\{\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} : \ A \in \mathcal{A}\} < \infty.$$

Nei prossimi paragrafi ci occuperemo delle proprietà spettrali degli operatori lineari in spazi di Banach.

1.1.1 Proiezioni

Definizione 1.18. Uno spazio di Banach $(B, \|\cdot\|_B)$ è decomposto nella somma diretta di due suoi sottospazi chiusi, X e Y, e si scrive

$$B = X + Y,$$

se ogni elemento $b \in B$ ammette un'unica rappresentazione nella forma

$$b = x + y$$

dove $x \in X$ e $y \in Y$.

Tale decomposizione di B definisce due operatori lineari $P_X : B \to X$ e $P_Y : B \to Y$ tali che $P_X(b) = x$ e $P_Y(b) = y$, dove x e y sono le componenti di b nella sua unica rappresentazione in $X + Y$.
Gli operatori P_X e P_Y hanno le seguenti proprietà:

- $P_X^2 = P_X, \ P_Y^2 = P_Y$;
- $P_X + P_Y = I$;
- $P_X P_Y = P_Y P_X = 0$.

Essi sono anche continui, ossia appartengono a $\mathcal{L}(B)$.
Infatti definiamo su B la nuova norma

$$\|b\|_1 = \|x\|_B + \|y\|_B, \ \ b \in B.$$

Lo spazio $(B, \|\cdot\|_1)$ è completo perché X e Y sono chiusi, quindi a loro volta spazi di Banach. L'identità $i : (B, \|\cdot\|_1) \to (B, \|\cdot\|_B)$ è bigettiva e continua, essendo ovviamente $\|b\|_B \leq \|b\|_1$. Per il teorema dell'applicazione aperta anche $i : (B, \|\cdot\|_B) \to (B, \|\cdot\|_1)$ è continua: quindi esiste $c \geq 0$ tale che

$$\|b\|_1 = \|P_X b\|_B + \|P_Y b\|_X \leq c\|b\|_B \qquad \forall b \in B,$$

e ciò implica P_X e $P_Y \in \mathcal{L}(B)$.
Un operatore $P \in \mathcal{L}(B)$ tale che $P^2 = P$ si chiama *proiezione*.
Se un operatore P_1 è una proiezione, allora anche l'operatore $P_2 = I - P_1$ è una proiezione e si definisce *proiezione complementare* di P_1.
Definizioni analoghe si hanno se B è decomposto in una somma diretta di più di due sottospazi chiusi. In particolare, se $B_1, ..., B_n$ sono spazi di Banach con le norme $\|\cdot\|_1, ..., \|\cdot\|_n$, possiamo vedere questi spazi come sottospazi di uno spazio di Banach B tale che

$$B = B_1 + ... + B_n.$$

Sia infatti B lo spazio prodotto $B_1 \times ... \times B_n$, con la naturale definizione di somma di due vettori e di moltiplicazione per scalare. Rendiamo B uno spazio di Banach, definendo la norma

$$\|x\|_B = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_k.$$

Possiamo allora immergere gli spazi B_k in B identificando ogni elemento $x_k \in B_k$ con il vettore $(0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0)$, e quindi otteniamo facilmente la decomposizione iniziale.
Particolare rilievo nello studio delle soluzioni di equazioni differenziali con operatori lineari assume il contenuto dei prossimi due paragrafi.

1.1.2 Risolvente

Definizione 1.19. Sia B uno spazio di Banach complesso e sia $A \in \mathcal{L}(B)$. Un numero $\lambda \in \mathbb{C}$ è *punto regolare* per A se $A - \lambda I$ è invertibile con inversa in $\mathcal{L}(B)$.

L' insieme $\rho(A)$ di tutti i punti regolari di A si dice *insieme risolvente* di A. Il suo complementare è chiamato *spettro* di A e si denota con $\sigma(A)$; ad esso è dedicato il paragrafo successivo.
Studiamo il comportamento di $A-\lambda I$ al variare di $\lambda \in \mathbb{C}$. Il numero λ si dice *autovalore* di A se esiste x non nullo in B tale che $(A-\lambda I)x = 0$. Il vettore x si chiama *autovettore* relativo all'autovalore λ. In tal caso $\ker(A-\lambda I) = \{x \in B : (A - \lambda I)x = 0\}$ è l'insieme di tutti gli autovettori relativi all'autovalore, più il vettore nullo. Tali definizioni generalizzano quelle ben note relative alle matrici quadrate.
Il numero complesso λ appartiene allo spettro di A se $A-\lambda I$ non ha inversa continua. Quindi tutti gli autovalori di A appartengono allo spettro di A, ma in genere non lo esauriscono.

Teorema 1.20. Sia $A \in \mathcal{L}(B)$. Valgono le seguenti affermazioni:

1. $\rho(A)$ è un sottoinsieme aperto del piano complesso.

2. La funzione da $\rho(A)$ in $\mathcal{L}(B)$ che manda λ in $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$, detta *operatore risolvente* di A, è una funzione analitica in ogni componente connessa di $\rho(A)$.

3. Per ogni $\lambda, \mu \in \rho(A)$, gli operatori $R_\lambda(A) e R_\mu(A)$ commutano e vale la relazione (*equazione risolvente*):

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\lambda(A) R_\mu(A)$$

Dimostrazione.
(1.) Fissiamo $\lambda_0 \in \rho(A)$ e consideriamo la serie di elementi di $\mathcal{L}(B)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n [R_{\lambda_0}(A)]^n.$$

Per le sue somme parziali S_n si ha:

$$\begin{aligned} \|S_{n+p} - S_n\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} (\lambda - \lambda_0)^k [R_{\lambda_0}(A)]^k \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |\lambda - \lambda_0|^k \|[R_{\lambda_0}(A)]^k\| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |\lambda - \lambda_0|^k \|[R_{\lambda_0}(A)]\|^k. \end{aligned}$$

Se $|\lambda - \lambda_0| < \|[R_{\lambda_0}(A)]\|^{-1}$, le somme soddisfano la condizione del criterio di Cauchy rispetto alla norma di $\mathcal{L}(B)$ e la serie è quindi convergente. Poniamo, allora

$$X(\lambda, A) = R_{\lambda_0}(A) \cdot \left\{ I + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n [R_{\lambda_0}(A)]^n \right\}.$$

Calcoliamo $X(\lambda, A)(A - \lambda I)$. Tenendo conto della continuità della moltiplicazione rispetto alla norma di $\mathcal{L}(B)$ si ha:

$$\begin{aligned} X(\lambda, A)(A - \lambda I) &= R_{\lambda_0}(A) \cdot \left\{ I + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n [R_{\lambda_0}(A)]^n \right\} (A - \lambda I) = \\ &= \left\{ R_{\lambda_0}(A) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n [R_{\lambda_0}(A)]^{n+1} \right\} [(A - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0) I] = \\ &= \left\{ I + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n [R_{\lambda_0}(A)]^n - R_{\lambda_0}(A)(\lambda - \lambda_0) - \right. \\ &\qquad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{n+1} [R_{\lambda_0}(A)]^{n+1} \right\} = \\ &= I + (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}(A) - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}(A) = I. \end{aligned}$$

Similmente si verifica che $(A - \lambda I)X(\lambda, A) = I$.
Quindi $(A-\lambda I)^{-1}$ esiste e coincide con $X(\lambda, A)$. In conclusione, se $\lambda_0 \in \rho(A)$, tutti i λ tali che $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$ appartengono all'insieme risolvente. Dunque $\rho(A)$ è aperto.
(2.) Come dimostrato nel punto precedente la funzione $\lambda \to R_\lambda(A)$ si può esprimere in un intorno di un punto $\lambda_0 \in \rho(A)$ mediante una serie di potenze in $\lambda - \lambda_0$. Essa è, quindi, analitica.
(3.) Si ha per $\lambda, \mu \in \rho(A)$ che

$$\begin{aligned}
&R_\lambda(A) - R_\mu(A) = \\
&\quad = R_\lambda(A)(A - \mu I)R_\mu(A) - R_\lambda(A)(A - \lambda I)R_\mu(A) = \\
&\quad = R_\lambda(A)(A - \mu I - A + \lambda I)R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A).
\end{aligned}$$

Questa stessa uguaglianza mostra che $R_\lambda(A)$ e $R_\mu(A)$ commutano.

Lemma 1.21. Se $|\lambda| > \|A\|$, allora $\lambda \in \rho(A)$ e vale il seguente sviluppo in serie, detto *di Neumann*:

$$R_\lambda(A) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n.$$

Dimostrazione.
Si ha:

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{A^k}{\lambda^k}\right)\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p}\left\|\left(\frac{A^k}{\lambda^k}\right)\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\|A\|^k}{|\lambda|^k}.$$

Dall'ipotesi $|\lambda| > \|A\|$ segue che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n}$$

soddisfa la condizione del criterio di Cauchy ed è, perciò, convergente in $\mathcal{L}(B)$. Sia S la sua somma. Si ha, allora

$$-(A - \lambda I)\frac{1}{\lambda}S = -\frac{1}{\lambda}(A - \lambda I)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{n+1}}{\lambda^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n} = I,$$

e analogamente $-S[\frac{1}{\lambda}(A - \lambda I)] = I$.

Lo sviluppo di $R_\lambda(A)$ in serie di Neumann permette di avere informazioni abbastanza precise sullo spettro di A. Infatti, applicando il criterio della radice, risulta che la serie ha raggio di convergenza r pari a

$$r = \limsup_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|, \tag{1.1}$$

per cui $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}$ e possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 1.22. Sia $A \in \mathcal{L}(B)$. Il *raggio spettrale* $r(A)$ di A è definito da

$$r(A) = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(A)|\}.$$

Vale la seguente caratterizzazione:

Proposizione 1.23. Sia $A \in \mathcal{L}(B)$. Allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = r(A),$$

ove $r(A)$ è il raggio spettrale di A.

Dimostrazione.
Poniamo $r = \liminf \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ e sia $\epsilon > 0$. Allora esiste $m = m_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$r - \epsilon < \|A^m\|^{\frac{1}{m}} < r + \epsilon.$$

Per ogni $n > m$ esiste un unico $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$mk < n \leq (k+1)m.$$

Quindi vale

$$\begin{aligned}
\|A^n\|^{\frac{1}{n}} &= \|A^{mk+n-mk}\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A^{mk}\|^{\frac{1}{n}} \|A^{n-mk}\|^{\frac{1}{n}} \leq \\
&\leq \|A^m\|^{\frac{k}{n}} \|A\|^{\frac{n-mk}{n}} = [\|A^m\|^{\frac{1}{m}}]^{\frac{mk}{n}} \|A\|^{\frac{n-mk}{n}}.
\end{aligned}$$

Il k scelto è tale che

$$\frac{1}{n} \leq \frac{n-mk}{n} \leq \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad \frac{n-m}{n} \leq \frac{mk}{n} < 1$$

e se mandiamo n all'infinito, si ha $\frac{n-mk}{n} \to 0$ e $\frac{mk}{n} \to 1$. Quindi abbiamo che

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\|A^m\|^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{mk}{n}} \|A\|^{\frac{n-mk}{n}} \leq \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} (r+\epsilon)^{\frac{mk}{n}} \|A\|^{\frac{n-mk}{n}} = r + \epsilon.
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ϵ, risulta che r è sia il massimo limite, sia il minimo limite e quindi concludiamo che $r = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.
Proviamo adesso che r coincide col raggio spettrale $r(A)$. Dalla (1.1) segue subito che se $|\lambda| > r$ allora $\lambda \in \rho(A)$; per definizione di raggio spettrale si ricava $r \geq r(A)$. Viceversa, sia $|\lambda| > r(A)$: allora per definizione si ha $\lambda \in \rho(A)$. La funzione $R_\lambda(A)$ è olomorfa in $\rho(A)$: esa ha dunque uno sviluppo in serie di Laurent che converge nella norma di $\mathcal{L}(B)$ in ogni punto $\lambda \in \rho(A)$. Per unicità, deve essere

$$R_\lambda(A) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

laddove entrambe le funzioni sono ben definite, ossia per $|\lambda| > r(A)$; ne segue

$$\lim_{n\to\infty} \|A\|^n |\lambda|^{-n-1} = 0 \qquad \text{per } |\lambda| > r(A).$$

Fissato $\epsilon > 0$, e scelto λ tale che $\lambda| = r(A) + \epsilon$, si ha allora, per n grande,

$$\|A\|^n < |\lambda|^{n+1} = [\epsilon + r(A)]^{n+1},$$

e dunque

$$r = \lim_{n\to\infty} \|A\|^{\frac{1}{n}} \leq r(A) + \epsilon,$$

con ϵ arbitrario. Ne segue la tesi. Inoltre, vale il seguente risultato.

Corollario 1.24. Sia $A \in \mathcal{L}(B)$. Risulta $\lim_{|\lambda|\to\infty} R_\lambda(A) = 0$.

Dimostrazione.
Se $|\lambda| > \eta > \|A\|$ dalla dimostrazione del lemma 1.21 segue che

$$\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{\eta^n} = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{\eta}{\eta - \|A\|} \to 0 \quad \text{per } |\lambda| \to \infty.$$

1.1.3 Spettro

Proposizione 1.25. Sia $A \in \mathcal{L}(B)$. Lo spettro di A non è vuoto.

Dimostrazione.
Se $\sigma(A)$ fosse vuoto, la funzione risolvente $\lambda \to R_\lambda(A)$ sarebbe analitica sull'intero piano complesso. In particolare, esisterebbe A^{-1} in $\mathcal{L}(B)$. Per il corollario 1.24, la funzione risolvente sarebbe anche limitata sull'intero piano. Per il teorema di Liouville, allora, essa dovrebbe essere costantemente nulla. Questo è impossibile perché $R_0(A) = A^{-1} \neq 0$.

Sia $A \in \mathcal{L}(B)$. La formula $\mathbb{C} = \sigma(A) \cup \rho(A)$ rappresenta una partizione del piano complesso in due insiemi disgiunti.
Adesso discutiamo un'ulteriore suddivisione di $\mathbb{C}$ in quattro insiemi a due a due disgiunti. Infatti a sua volta $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$, dove questi insiemi sono disgiunti e caratterizzati dalle seguenti proprietà.

1. $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)$ non è invertibile$\}$ è lo *spettro puntuale* ed i suoi elementi sono gli autovalori di A;

2. $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)$ ha inversa discontinua definita su un denso di $X\}$ è lo *spettro continuo*;

3. $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)$ ha inversa definita su un dominio non denso in $X\}$ è lo *spettro residuo.*

Esempi 1.26. 1.) Sia $X = C[a,b]$, e sia A un operatore lineare con dominio X tale che $(Af)(t) = tf(t)$ per ogni $t \in [a,b]$. Allora A è in $\mathcal{L}(X)$ e $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \max\{|a|,|b|\}$. Poiché

$$[(\lambda I - A)f](t) \equiv 0 \Longleftrightarrow (\lambda - t)f(t) \equiv 0 \Longleftrightarrow f(t) \equiv 0,$$

si ha che $\lambda I - A$ è iniettivo per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, e quindi $\sigma_p(A) = \emptyset$. Poi, se $\lambda \notin [a,b]$, allora per ogni $g \in X$ la funzione $f(t) = \frac{g(t)}{\lambda - t}$ appartiene a X e verifica la relazione $f = (\lambda I - A)^{-1}g$. Inoltre

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{t\in[a,b]} \frac{1}{|\lambda - t|}\|g\|_\infty,$$

cosicché $[a,b] \supseteq \sigma(A)$. Viceversa, se $\lambda \in [a,b]$ si ha

$$R(\lambda I - A) = \{g \in X : g(\lambda) = 0 \text{ e } g \text{ è derivabile nel punto } \lambda\},$$

e questo insieme non è denso in X. Pertanto $\sigma_c(A) = \emptyset$ e $\sigma_r(A) = \sigma(A) = [a,b]$.
2.) Sia $X = l^2$ e $A \in \mathcal{L}\ (l^2)$ definito da $(Ax)_n = x_{n+1}$. Lo spettro puntuale è $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, mentre lo spettro continuo è $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ e lo spettro residuo è vuoto.

Vediamo ora come si comportano spettro e risolvente di un operatore A sotto piccole perturbazioni di A.
Sia G un aperto ricoprente lo spettro di un operatore $A \in \mathcal{L}(B)$. Allora in ogni caso $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ è continuo sul chiuso $G^c = F$ del piano complesso. Dato che $\|R_\lambda(A)\| \to 0$ in $\mathcal{L}(B)$ per $\lambda \to \infty$, esiste $M = \max\{\|R_\lambda(A)\| : \lambda \notin G\} < \infty$.
Consideriamo un intorno $U_\delta(A) = \{X : \|A - X\| < \delta\}$ di A in $\mathcal{L}(B)$.
Per $X \in U_\delta(A)$ si ha

$$X - \lambda I = (A - \lambda I) + (X - A) = (A - \lambda I)[I - R_\lambda(A)(A - X)],$$

dunque $X - \lambda I$ sarà invertibile se $\|R_\lambda(A)(A - X)\| < 1$.
Quindi se $\delta < \frac{1}{M}$, ogni operatore $X \in U_\delta(A)$ avrà risolvente $R_\lambda(X)$ per ogni $\lambda \notin G$.
Quindi, sotto la scelta indicata di δ, avremo $\sigma(X) \subset G$ per ogni X in $U_\delta(A)$.
Stimiamo la differenza $R_\lambda(A) - R_\lambda(X)$ per ogni $\lambda \notin G$. Da come abbiamo scritto $X - \lambda I$ segue che

$$R_\lambda(X) = [I - R_\lambda(A)(A - X)]^{-1}R_\lambda(A).$$

Poiché risulta

$$\|R_\lambda(A)(A - X)\| < M\delta < 1,$$

deduciamo che

$$\|R_\lambda(X) - R_\lambda(A)\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} [R_\lambda(A)]^{k+1}(A - \lambda I)^k \right\| \leq \frac{M^2\delta}{1 - M\delta}.$$

Quindi si ottiene il seguente enunciato.

Teorema 1.27. Sia $A \in \mathcal{L}(B)$ e sia G un aperto che ricopre lo spettro $\sigma(A)$. Allora esiste un intorno $U_\delta(A)$ di A tale che $\sigma(X) \subset G$ per ogni $X \in U_\delta(A)$. Inoltre per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $\|R_\lambda(X) - R_\lambda(A)\| < \epsilon$ per ogni $X \in U_\delta(A)$ e $\lambda \notin G$.

1.1.4 Integrale di funzioni a valori in uno spazio di Banach

Sia $(B, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach. Consideriamo funzioni vettoriali $f : [a, b] \to B$.

Definizione 1.28. Indichiamo con $\mathcal{S}(B)$ lo spazio vettoriale delle *funzioni semplici*, ossia delle funzioni $\phi : [a, b] \to B$ della forma

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{k} b_i \chi_{A_i}(t) \quad t \in [a, b];\ k \in \mathbb{N};\ b_i \in B.$$

Gli A_i sono sottoinsiemi di $[a, b]$ misurabili (secondo Lebesgue) e fra loro disgiunti.

Definizione 1.29. Se $\phi \in \mathcal{S}(B)$, $\phi = \sum_{i=1}^{k} b_i \chi_{A_i}$, l'*integrale* di ϕ su $[a, b]$ è l'elemento di B

$$\int_a^b \phi(t)dt = \sum_{i=1}^{k} b_i m(A_i).$$

Elenchiamo le proprietà dell'integrale su $\mathcal{S}(B)$:

1. è lineare;
2. si ha
$$\left\| \int_a^b \phi(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|\phi(t)\|dt \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(B).$$

Si noti che $\|\phi(\cdot)\|$ è una funzione semplice su $[a, b]$ a valori reali.

Definizione 1.30. Una funzione $f : [a, b] \to B$ è detta *fortemente misurabile* se esiste una successione $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(B)$ tale che

$$\phi_n(t) \to f(t) \text{ in } B \qquad \forall t \in [a, b].$$

Definizione 1.31. Sia $f : [a, b] \to B$ fortemente misurabile. Diciamo che f è *sommabile* su $[a, b]$ se si ha

$$\int_a^b \|f(t)\|dt < +\infty.$$

Notiamo che ogni funzione semplice è sommabile.

Proposizione 1.32. Sia $f : [a, b] \to B$ fortemente misurabile. Sono fatti equivalenti:

1. f è sommabile;

2. esiste una successione $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(B)$ tale che

$$\int_a^b \|f(t) - \psi_n(t)\|dt \to 0 \text{ per } n \to +\infty.$$

Definizione 1.33. Sia B uno spazio di Banach, sia $f : [a, b] \to B$ sommabile. Si chiama *integrale di Bochner* di f in $[a, b]$ il seguente elemento di B:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt,$$

ove il limite è fatto nella norma di B e $\{\psi_n\}$ è una qualunque successione di funzioni semplici tale che $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \|f(t) - \psi_n(t)\|dt = 0$.

Notiamo che la definizione non dipende dalla scelta delle funzioni semplici approssimanti.
Elenchiamo di seguito alcune proprietà dell'integrale appena introdotto.

1. $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$;

2. $\int_p^q f(t)dt = \int_p^r f(t)dt + \int_r^q f(t)dt \quad \forall p, q, r \in [a, b]$;

3. $\| \int_a^b f(t)dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$.

Similmente se $A(t)$ $(a \leq t \leq b)$ è una funzione operatoriale continua a valori in $\mathcal{L}(B)$, esiste $\int_a^b A(t)dt$ che è un elemento di $\mathcal{L}(B)$; in particolare vale la stima:

$$\left\| \int_a^b A(t)dt \right\|_{\mathcal{L}(B)} \leq \int_a^b \|A(t)\|_{\mathcal{L}(B)}dt.$$

In modo analogo altre proprietà dell'integrale di funzioni vettoriali passano all'integrale di funzioni operatoriali lungo le curve del piano complesso.

1.1.5 Funzioni analitiche operatoriali

Sia K_A la classe di tutte le funzioni $\phi(\lambda)$ di una variabile complessa che sono analitiche a tratti su un aperto dello spettro di A. Questo significa che una funzione ϕ di K_A ha le seguenti proprietà.

- Il dominio di definizione D_ϕ di $\phi(\lambda)$ è un numero finito di componenti connesse aperte, la cui unione contiene lo spettro di A e ogni componente contiene almeno un punto dello spettro.
- La funzione $\phi(\lambda)$ è olomorfa a tratti, cioè olomorfa in ogni componente del suo dominio di definizione D_ϕ.

La classe K_A è un'algebra introducendo in modo naturale le operazioni di addizione, moltiplicazione e moltiplicazione per scalare.
Mostriamo che esiste un isomorfismo tra tale algebra e una certa algebra commutativa di operatori, sottoinsieme di $\mathcal{L}(B)$. Consideriamo il caso in cui $\sigma(A)$ sia connesso e sia Γ una curva chiusa che circonda un aperto $\Omega \supset \sigma(A)$. Sia ϕ una funzione di K_A olomorfa su Ω. L'*integrale di Dunford* relativo a ϕ è la quantità:

$$\phi(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \phi(\lambda)R_\lambda(A)d\lambda.$$

Poiché $\phi(\lambda)R_\lambda(A)$ è olomorfa in Ω, segue dal teorema di Cauchy che tale integrale non dipende dalla curva Γ nella classe delle curve che circondano Ω.

Teorema 1.34. L'integrale di Dunford induce un isomorfismo lineare da K_A in un'algebra commutativa di operatori contenuta in $\mathcal{L}(B)$, mandando ϕ nell'operatore $\phi(A)$ sopra definito; tale isomorfismo verifica:

1. se $\phi(\lambda) = 1$, allora $\phi(A) = I$;
2. se $\phi(\lambda) = \lambda$, allora $\phi(A) = A$;
3. se $\phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda^n$, doev la serie è assolutamente convergente in Ω, allora $\phi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nA^n$.

Dimostrazione.
1. Valutiamo la quantità $\phi(A)-I$, ricordando che $\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{\lambda}d\lambda = 1$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\phi(A) - I &= \frac{1}{2\pi i}\left(-\oint_\Gamma R_\lambda(A)d\lambda - \oint_\Gamma \frac{I}{\lambda}d\lambda\right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \left(R_\lambda(A) + \frac{I}{\lambda}\right)d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \left[\lambda(A-\lambda I)^{-1} + I\right]\frac{d\lambda}{\lambda}.\end{aligned}$$

Ora usiamo il fatto che $\lambda = \lambda I - A + A$: si ottiene

$$\begin{aligned}\phi(A) - I &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \left[\lambda(A-\lambda I)^{-1} + I\right]\frac{d\lambda}{\lambda} = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \left[-I + A(A-\lambda I)^{-1} + I\right]\frac{d\lambda}{\lambda} = \\ &= -\frac{A}{2\pi i}\oint_\Gamma (A-\lambda I)^{-1}\frac{d\lambda}{\lambda}.\end{aligned}$$

Scegliamo come Γ la circonferenza S_n di centro 0 e raggio n, che per n grande, diciamo $n \geq n_0$, certamente circonda Ω: passando alle norme e ricordando che $\|R_\lambda(A)\| \to 0$ per $|\lambda| \to \infty$, si ottiene

$$\|\phi(A) - I\| \leq \|A\| \sup_{|\lambda|=n} \|(A-\lambda I)^{-1}\| \frac{1}{2\pi}\oint_{S_n} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|} \to 0 \qquad \forall n \geq n_0,$$

e quindi $\|\phi(A) - I\| = 0$.

2. Come sopra, consideriamo $\phi(A) - A$:

$$\begin{aligned}\phi(A) - A &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \left[\lambda(A-\lambda I)^{-1} + \frac{A}{\lambda}\right] d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \left[(\lambda I - A + A)(A-\lambda I)^{-1} + \frac{A}{\lambda}\right] d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (-1)d\lambda - \frac{A}{2\pi i}\oint_\Gamma \left[\lambda(A-\lambda I)^{-1} + I\right]\frac{d\lambda}{\lambda}.\end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo per olomorfia, mentre il secondo è nullo in virtù del primo punto. Quindi si ha la tesi.

3. La dimostrazione di questo punto necessita della conoscenza del risultato seguente.

Lemma 1.35. Siano $F_1(\lambda)$ e $F_2(\lambda)$ funzioni operatoriali analitiche a tratti definite su un aperto Ω contenente lo spettro di A, a valori nello spazio $\mathcal{L}(B)$. Allora se Γ è una qualunque curva chiusa che circonda Ω, si ha

$$\begin{aligned}&\left\{-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma F_1(\lambda)R_\lambda(A)d\lambda\right\}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma F_2(\lambda)R_\lambda(A)d\lambda\right\} = \\ &\qquad\qquad = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma F_1(\lambda)F_2(\lambda)R_\lambda(A)d\lambda.\end{aligned}$$

Dimostrazione.
Siano Γ_1 e Γ_2 due curve che circondano l'aperto Ω, e supponiamo che Γ_1

circondi Γ_2. Dall'equazione del risolvente segue che

$$\begin{aligned}
&\left\{-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} F_1(\lambda)R_\lambda(A)d\lambda\right\}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} F_2(\lambda)R_\lambda(A)d\lambda\}\right\} = \\
&\quad = -\frac{1}{4\pi^2}\oint_{\Gamma_1}\oint_{\Gamma_2} F_1(\lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)F_2(\mu)d\lambda d\mu = \\
&\quad = -\frac{1}{4\pi^2}\oint_{\Gamma_1}\oint_{\Gamma_2} F_1(\lambda)\frac{R_\lambda(A)}{\lambda-\mu}F_2(\mu)d\lambda d\mu + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{4\pi^2}\oint_{\Gamma_1}\oint_{\Gamma_2} F_1(\lambda)\frac{R_\mu(A)}{\lambda-\mu}F_2(\mu)d\lambda d\mu = \\
&\quad = -\frac{1}{4\pi^2}\oint_{\Gamma_1} F_1(\lambda)R_\lambda(A)\oint_{\Gamma_2}\frac{F_2(\mu)}{\lambda-\mu}d\mu d\lambda + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{4\pi^2}\oint_{\Gamma_1}\left\{\oint_{\Gamma_2}\frac{F_1(\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda\right\}R_\mu(A)F_2(\mu)d\mu.
\end{aligned}$$

Poiché

$$\oint_{\Gamma_2}\frac{F_2(\mu)}{\lambda-\mu}d\mu = 0 \qquad \forall\lambda\in\Gamma_1,$$

mentre

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{F_1(\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda = F_1(\mu) \qquad \forall\mu\in\Gamma_2,$$

il lemma è provato.

Sostituendo $\phi_1(\lambda)I$ a $F_1(\lambda)$ e $\phi_2(\lambda)I$ a $F_2(\lambda)$, otteniamo che se $\phi(\lambda) = \phi_1(\lambda)\phi_2(\lambda)$ allora $\phi(A) = \phi_1(A)\phi_2(A)$.
Ora torniamo alla dimostrazione del punto 3. Consideriamo le funzioni $\phi(\lambda) = \lambda^n$ e $\psi(\lambda) = \lambda$. Allora

$$\begin{aligned}
\phi(A) &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^n R_\lambda d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \psi(\lambda)^n R_\lambda(A)d\lambda = \\
&= \left(-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \psi(\lambda)R_\lambda(A)d\lambda\right)^n = A^n.
\end{aligned}$$

Ora per ipotesi $\phi(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty c_n\lambda^n$, quindi per linearità e per quanto appena scritto

$$\begin{aligned}
\phi(A) &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\sum_{n=0}^\infty c_n\lambda^n R_\lambda(A)d\lambda = \\
&= \sum_{n=0}^\infty c_n\left[-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \psi(\lambda)^n R_\lambda d\lambda\right] = \sum_{n=0}^\infty c_n A^n,
\end{aligned}$$

e ciò conclude la dimostrazione del teorema 1.34.

È interessante studiare il legame tra lo spettro di un operatore A e quello dell'operatore $\phi(A)$, dove ϕ è una funzione in K_A; a tal fine contribuiscono i risultati seguenti.

Teorema 1.36. (della mappa spettrale) Sia $A \in \mathcal{L}(B)$, sia $f \in K_A$ con $f : U \to \mathbb{C}$ ove U è un aperto contenente $\sigma(A)$. Allora

$$f(\sigma(A)) = \sigma(f(A)).$$

Dimostrazione.
Mostriamo l'inclusione $\subseteq$. Sia $\lambda \in \sigma(A)$, e definiamo la funzione

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\lambda)-f(\xi)}{\lambda-\xi} & \text{se } \xi \in U \setminus \{\lambda\} \\ f'(\lambda) & \text{se } \xi = \lambda. \end{cases}$$

Notiamo che $g \in K_A$. Poiché

$$f(\lambda) - f(\xi) = (\lambda - \xi)g(\xi)$$

allora vale

$$f(\lambda)I - f(A) = (\lambda I - A)g(A).$$

Se per assurdo $f(\lambda)$ non fosse in $\sigma(f(A))$, allora $f(\lambda)$ apparterrebbe a $\rho(f(A))$, e quindi l'operatore $f(A)$ avrebbe un'inverso G continuo, definito su B, tale che

$$I = [f(\lambda)I - f(A)]G = (\lambda I - A)g(A)G.$$

Analogamente, dal fatto che

$$f(\lambda)I - f(A) = g(A)(\lambda I - A)$$

si avrebbe che

$$I = G[f(\lambda)I - f(A)] = Gg(A)(\lambda I - A) = g(A)G(\lambda I - A)$$

e dunque $g(A)G$ risulterebbe l'inverso di $\lambda I - A$, il che è assurdo in quanto λ è in $\sigma(A)$.
Proviamo l'inclusione $\supseteq$. Sia $\mu \in \sigma(f(A))$. Supponiamo che μ non sia in $f(\sigma(A))$. Consideriamo la funzione

$$h(\xi) = (f(\xi) - \mu)^{-1} :$$

essa appartiene a K_A. Infatti $f(\sigma(A))$ è compatto e μ non vi appartiene, quindi esiste un intorno W di $f(\sigma(A))$ che non contiene μ. Dunque h è ben definita e olomorfa su W.
Ancora una volta da

$$(f(\xi) - \mu)h(\xi) = 1$$

si deduce che

$$(f(A) - \mu I)h(A) = I$$

e per commutatività delle funzioni in K_A

$$h(A)(f(A) - \mu I) = I,$$

dunque μ apparterrebbe a $\rho(f(A))$, contraddicendo la nostra ipotesi.

Usiamo il risultato appena ottenuto per provare la seguente asserzione.

Lemma 1.37. Se $\|e^A\| \leq q$, lo spettro $\sigma(A)$ è nel piano $Re\lambda \leq \ln q$.

Dimostrazione.
Supponiamo che $\|e^A\| \leq q$. Allora per le proprietà del risolvente e dello spettro, ogni μ in $\mathbb{C}$ tale che $|\mu| > q$ è in $\rho(e^A)$, mentre ogni μ in $\sigma(e^A)$ è tale che $|\mu| \leq q$. Per il teorema della mappa spettrale, $\sigma(e^A) = e^{\sigma(A)}$, quindi $\sigma(e^A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = e^\lambda,\ \lambda \in \sigma(A)\}$.
Perciò, se $\lambda \in \sigma(A)$, allora $e^\lambda \in e^{\sigma(A)}$, da cui $|e^\lambda| \leq q$, cioè

$$|e^{Re\lambda + iIm\lambda}| = e^{Re\lambda} \leq q$$

ed infine $Re\lambda \leq \ln q$.

Con il lemma dimostrato si è data una prima caratterizzazione dello spettro di un operatore A soddisfacente determinate condizioni. Continuiamo a indagare sulla natura di questo insieme.

Definizione 1.38. Sia A in $\mathcal{L}(B)$. Un insieme $\sigma_1 \subset \sigma(A)$ si dice *insieme spettrale* se i due sottoinsiemi σ_1 e $\sigma(A) \setminus \sigma_1$ sono chiusi.

Consideriamo un operatore A in $\mathcal{L}(B)$ il cui spettro sia della forma

$$\sigma(A) = \bigcup_{k=1}^{m} \sigma_k(A),$$

ove i $\sigma_k(A)$ sono insiemi spettrali. Poiché $\sigma(A)$ è compatto, lo sono anche i $\sigma_k(A)$; dunque esistono degli aperti limitati e disgiunti G_k, tali che $\sigma_k(A) \subset G_k$ e $\overline{G_k} \cap \overline{G_h} = \emptyset$ per ogni $h \neq k$. Possiamo supporre che ∂G_k sia sostegno di una curva regolare semplice e chiusa γ_k. Definiamo allora gli operatori $P_k \in \mathcal{L}(B)$ nel modo seguente:

$$P_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} R_z(A) dz, \quad k = 1, ...m.$$

Proposizione 1.39. Nelle ipotesi sopra elencate, valgono le seguenti affermazioni:

1. gli operatori P_k sono proiezioni, ovvero $P_k^2 = P_k, P_k P_h = 0$ per ogni $h \neq k$, $\sum_{k=1}^m P_k = I$;

2. $P_k A = A P_k$ per $k = 1, ..., m$;

3. posto $B_k = P_k(B)$, si ha $B = B_1 + ... + B_m$;

4. posto $A_k = P_k A$, si ha $A_k \in \mathcal{L}(B_k)$ e $\sigma(A_k) = \sigma_k(A)$, $R_\lambda(A_k) = R_\lambda(A)|_{B_k}$; inoltre se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_k(A)$ e G_k è un aperto contenente $\sigma_k(A)$ con bordo regolare γ_k, tale che $\lambda \notin \overline{G_k}$, si ha:

$$R_\lambda(A_k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} R_z(A)(\lambda - z)^{-1} dz.$$

Dimostrazione.
1. Sia G'_k un aperto contenente $\overline{G_k}$, disgiunto dagli altri G_h, con bordo γ'_k; allora si ha

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'_k} (\lambda - z)^{-1} dz = 1 \qquad \forall \lambda \in \gamma_k,$$

e

$$\int_{\gamma_k} (\lambda - z)^{-1} dz = 0 \qquad \forall \lambda \in \gamma'_k.$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
P_k^2 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma'_k} R_z(A) dz \int_{\gamma_k} R_\xi(A) d\xi = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma'_k \times \gamma_k} [R_z(A) - R_\xi(A)](z - \xi)^{-1} dz d\xi = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_k} R_z(A) \left(\int_{\gamma'_k} (z - \xi)^{-1} d\xi \right) dz - \\
&\qquad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma'_k} R_\xi(A) \left(\int_{\gamma_k} (z - \xi)^{-1} dz \right) d\xi = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} R_z(A) dz = P_k.
\end{aligned}$$

Per provare che $P_k P_h = 0$ per $h \neq k$, basta osservare che

$$\frac{1}{(2\pi i)} \int_{\gamma_k} (\lambda - z)^{-1} dz = 0 \qquad \forall \lambda \in \gamma_h$$

e

$$\frac{1}{(2\pi i)} \int_{\gamma_h} (\lambda - z)^{-1} dz = 0 \qquad \forall \lambda \in \gamma_k,$$

e si conclude procedendo in modo analogo alla prima dimostrazione. Infine se γ è una curva che circonda $\sigma(A)$, possiamo sempre decomporre $\int_\gamma$ nella somma $\int_{\gamma_1} + ... + \int_{\gamma_m}$, in cui $\gamma_k \supset \sigma_k(A)$ ed è esterna a $\sigma_j(A)$ per $j \neq k$. Allora

$$x = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_z(A) x dz = \sum_{k=1}^m \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} R_z(A) x dz \right) = \sum_{k=1}^m P_k x.$$

2. Sia $x \in B$. Allora si ha

$$P_k A x = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} R_z(A)Axdz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} AR_z(A)xdz = AP_k x.$$

3. Dimostriamo la tesi per induzione su m. Tenuto conto che $x = \sum_{k=1}^m P_k x$, basta provare che la decomposizione è unica. Se $m = 2$, e se $x = P_1x + P_2x = y_1 + y_2$ con $y_1 \in B_1$ e $y_2 \in B_2$, allora

$$P_1x - y_1 = y_2 - P_2x$$

e il primo termine di quest'uguaglianza è in B_1, mentre il secondo è in B_2; siccome $B_1 \cap B_2 = \{0\}$, si ha $y_1 = P_1x$ e $y_2 = P_2x$.
Se vale la tesi per $m-1$, considero il caso m: se $x = \sum_{k=1}^m P_k x = \sum_{k=1}^m y_k$, con $y_k \in B_k$, allora

$$\sum_{k=1}^{m-1}(P_k x - y_k) = y_m - P_m x;$$

il primo termine è in $\bigcup_{k=1}^{m-1} B_k$, mentre il secondo è in B_m. Quindi, come nel caso precedente, $y_m = P_m x$ e $\sum_{k=1}^{m-1}[y_k - P_k x] = 0$; per ipotesi induttiva, segue che $y_k = P_k x \in B_k$ per ogni $k \leq m$.

4. Dapprima mostriamo che A_k è in $\mathcal{L}(B)$. Notiamo che $\|P_k\|_{\mathcal{L}(B_k)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(B)}\|P_k\|_{\mathcal{L}(B)}$. Osserviamo che quest'ultimo prodotto è maggiorato da una costante: infatti $\|A\|_{\mathcal{L}(B)}$ è limitata per ipotesi, mentre $\|P_k\|_{\mathcal{L}(B_k)} \leq c \cdot \ell(\gamma_k) \leq C$ per $k = 1, ..., m$, in quanto $\|R_z(A)\|_{\mathcal{L}(B)} \leq \frac{1}{dist(z,\sigma(A))}$.
Per provare che $\sigma_k(A) = \sigma(A_k)$, basta mostrare le due asserzioni seguenti.

1. $\mathbb{C} \setminus \sigma_k(A) \subseteq \rho(A_k)$, $\forall k = 1, ..., m.$;
2. $\bigcap_{k=1}^m \rho(A_k) \subseteq \rho(A)$.

Infatti dalla prima abbiamo che $\sigma(A_k) \subseteq \sigma_k(A)$ $\forall k = 1, ..., m$; e se esiste un λ in $\sigma_k(A) \setminus \sigma(A_k)$, allora $\lambda \notin \sigma_j(A)$ per $j \neq k$, e quindi, sempre per la prima asserzione, $\lambda \notin \sigma(A_j)$ $\forall j = 1, ..., m$. Ma allora $\lambda \in \bigcap_{j=1}^m \rho(A_j)$ e quindi $\lambda \in \rho(A)$ per la seconda affermazione; ma questo è assurdo perché $\lambda \in \sigma_k(A) \subseteq \sigma(A)$. Da qui si conclude che $\sigma_k(A) = \sigma(A_k)$.
Ora, però, dobbiamo dimostrare i due punti precedenti.
Sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_k(A)$. Posto

$$F_k(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} R_z(A)(z-\lambda)^{-1}dz,$$

si ha

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)F_k(\lambda) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}[A - zI + (z-\lambda)I]R_z(A)(z-\lambda)^{-1}dz = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}(z-\lambda)^{-1}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} R_z(A)dz = P_k\end{aligned}$$

e similmente

$$F_k(\lambda)(A-\lambda I) = P_k.$$

Dunque, $\lambda \in \rho(A_k)$ e $F_k(\lambda)|_{B_k} = [(A-\lambda I)|_{B_k}]^{-1}$ e quindi il primo punto è dimostrato.
Ora, sia $\lambda \in \bigcap_{k=1}^m \rho(A_k)$. Allora si ha $\lambda \in \rho(A)$ e $R_\lambda(A) = \sum_{k=1}^m R_\lambda(A_k)$, poiché

$$\begin{aligned}
&(A-\lambda I)\sum_{k=1}^m F_k(\lambda) = \\
&= \sum_{k=1}^m \left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}[A - zI + (z-\lambda)I]R_z(A)(z-\lambda)^{-1}dz\right\} = \\
&= \sum_{k=1}^m \left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}(z-\lambda)^{-1}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}R_z(A)dz\right) = \sum_{k=1}^m P_k = I.
\end{aligned}$$

Analgamente, $\sum_{k=1}^m F_k(\lambda)(A-\lambda I) = I$.
Concludiamo così la dimostrazione della proposizione 1.39.

Le proiezioni P_k si dicono *proiezioni spettrali*. Nel seguito si prenderà in considerazione un operatore A in $\mathcal{L}(B)$, il cui spettro non interseca l'asse immaginario ed è quindi costituito da due parti, $\sigma_+(A)$ e $\sigma_-(A)$ che giacciono nella parte sinistra e destra del piano complesso: si avranno dunque due proiezioni spettrali P_+, relativa a $\sigma_+(A)$, e P_-, relativa a $\sigma_-(A)$.

1.1.6 Esponenziale di un operatore

Nella teoria delle equazioni differenziali ha un importante ruolo la *funzione esponenziale* e^{At} di un operatore $A \in \mathcal{L}(B)$, che è definita dalle due relazioni equivalenti

$$e^{At} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A} e^{\lambda t}(A-\lambda I)^{-1}d\lambda,$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k t^k}{k!}.$$

Dalla moltiplicatività della corrispondenza $\phi(\lambda) \leftrightarrow \phi(A)$ segue che gli operatori e^{At} formano un gruppo ad un parametro:

$$\begin{cases} e^{At}e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)} & \forall \tau, t \in \mathbb{R}, \\ e^{At}|_{t=0} = I. \end{cases}$$

Notiamo che generalmente $e^{A+B} \neq e^A e^B$. L'uguaglianza vale solo se $AB = BA$. Inoltre, vale

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} \text{ in } \mathcal{L}(B).$$

Lo si vede usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{At+Ah}-e^{At}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{At}e^{Ah}-e^{At}}{h} = e^{At}\lim_{h\to 0}\frac{e^{Ah}-I}{h}$$

$$= e^{At}\lim_{h\to 0}\frac{I+Ah+O(h^2)-I}{h} = e^{At}A.$$

Nel penultimo passaggio abbiamo usato la serie esponenziale per sviluppare in potenze dell'incremento h. Osserviamo che A commuta con e^{At} perché A commuta con A^r, quindi con ogni addendo della serie esponenziale, e poiché la moltiplicazione di operatori è un'operazione continua, la relazione passa al limite. Non è difficile ottenere la stima:

$$\|e^{At}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\|A^k\|t^k}{k!} = e^{\|A\|t} \qquad \forall t\in\mathbb{R}.$$

1.1.7 Stima della crescita della funzione esponenziale

La funzione esponenziale ha importanti proprietà utili nello studio del comportamento delle soluzioni di equazioni differenziali; ne consideriamo alcune qui di seguito.
Sia $\phi : [0,\infty[\to\mathbb{R}$ una funzione positiva. Chiamiamo *esponente di Lyapunov* di ϕ la quantità:

$$k = \limsup_{t\to+\infty}\frac{\ln\phi(t)}{t},$$

se questa è finita.

Proposizione 1.40. Sia $\phi : [0,\infty[\to\mathbb{R}$ una funzione positiva, e supponiamo che ϕ abbia esponente di Lyapunov k. Allora

$$k = \inf\{\rho\in\mathbb{R} :\ \exists N_\rho \geq 0 :\ \phi(t)\leq N_\rho\, e^{\rho t}\ \forall t\geq 0\}.$$

Dimostrazione.
Sia $H = \{\rho\in\mathbb{R} :\ \exists N_\rho\geq 0 :\ \phi(t)\leq N_\rho\, e^{\rho t}\ \forall t\geq 0\}$; è evidente che H è una semiretta illimitata a destra. Sia $h = \inf H$; dobbiamo mostrare che $k = h$. Per la prima proprietà del massimo limite, per ogni $\epsilon > 0$ esiste τ_ϵ per cui si ha

$$\frac{\ln\phi(t)}{t} < k+\epsilon \qquad \forall t\geq\tau_\epsilon.$$

Dunque

$$\phi(t)\geq e^{(k+\epsilon)t} \qquad \forall t\geq\tau_\epsilon.$$

D'altronde ϕ è limitata in $[0,\tau_\epsilon]$: ad esempio, $\phi(t)\leq N_{h+1}\, e^{(h+1)\tau_\epsilon}$. Perciò esiste una costante positiva M_ϵ tale che

$$\phi(t)\leq M_\epsilon \qquad \forall t\in[0,\tau_\epsilon].$$

Dunque
$$\phi(t) \leq (1 \vee M_\epsilon)e^{(k+\epsilon)t} \qquad \forall t \geq 0,$$
e ciò mostra che $h \leq k + \epsilon$. Poiché ϵ è arbitrario, si ha $h \leq k$.
Ora, se fosse $h < k$, esisterebbe $\delta > 0$ tale che $h < k - \delta < k$, e dunque

$$\phi(t) \leq N_{k-\delta}e^{(k-\delta)t} \;\; \forall t \geq 0;$$

d'altra parte, scelto $\epsilon \in]0, \delta[$, per la seconda proprietà del massimo limite esisterebbe $\{t_n\} \subseteq]0, \infty[$, tale che $t_n \to \infty$ e $\frac{\ln \phi(t_n)}{t_n} > k - \epsilon > k - \delta$, per ogni $n \in \mathbb{N}$; dunque per $t = t_1$

$$N_{k-\delta}\, e^{(k-\delta)t_n} \geq \phi(t_n) \geq e^{(k-\epsilon)t_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e questo equivale a dire che

$$e^{(\delta-\epsilon)t_n} \leq N_{k-\delta} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ma questo è assurdo perché $\delta - \epsilon > 0$ e $t_n \to \infty$. Quindi $h = k$.

Proposizione 1.41. Sia $\phi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ una funzione positiva e supponiamo che ϕ abbia esponente di Lyapunov stretto k. Allora

$$k = \sup\{\eta \in \mathbb{R} : \; \exists \tau_\eta > 0 : \; \phi(t) \geq e^{\eta t} \; \forall t \geq \tau_\eta\}.$$

Dimostrazione.
Sia $H = \{\eta \in \mathbb{R} : \; \exists \tau_n > 0 : \; \phi(t) \geq e^{\eta t} \; \forall t \geq \tau_n\}$; è evidente che H è una semiretta illimitata a sinistra. Sia $h = \sup H$. Dobbiamo provare che $k = h$.
Per definizione di limite, per ogni ϵ positivo esiste τ_ϵ tale che

$$k - \epsilon < \frac{\ln \phi(t)}{t} < k + \epsilon \qquad \forall t \geq t_\epsilon,$$

quindi
$$e^{(k-\epsilon)t} \leq \phi(t) \leq e^{(k+\epsilon)t} \qquad \forall t \geq t_\epsilon.$$

Ne segue che:

1. $k - \epsilon \in H$, da cui $k - \epsilon \leq h$, per ogni $\epsilon > 0$, e dunque $k \leq h$;

2. $k + \epsilon \notin H$, da cui $h \leq k + \epsilon$, per ogni $\epsilon > 0$, e dunque $h \leq k$.

Ne segue la tesi.

Teorema 1.42. Per ogni $A \in \mathcal{L}(B)$ la funzione $\|e^{At}\|$ ha un esponente di Lyapunov stretto k, dato da

$$k = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t} = \max\{\text{Re}\lambda | \; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Dimostrazione.
Poniamo $\phi(t) = \|e^{At}\|$. Chiaramente, $\phi(t+s) \leq \phi(t)\phi(s)$, cioè

$$\ln \phi(t+s) \leq \ln \phi(t) + \ln \phi(s).$$

Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un h_ϵ tale che

$$\frac{\ln \phi(h)}{h} \leq \limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln \phi(t)}{t} + \epsilon \qquad \forall h \geq h_\epsilon. \tag{1.2}$$

Per ogni $t > 0$ esiste un intero $n \geq 0$ tale che $t = nh + r$, ove $0 \leq r < h$. Allora

$$\frac{\ln \phi(t)}{t} \leq \frac{n \ln \phi(h) + \ln \phi(r)}{nh + r} \leq \frac{n \ln \phi(h) + c}{nh + r},$$

ove $c = \max_{0\leq r\leq h} \phi(r)$, e quindi

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln \phi(t)}{t} \leq \frac{\ln \phi(h)}{h}.$$

Dalla stima (1.2) concludiamo che il limite

$$k = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln \phi(t)}{t}$$

esiste.
Adesso proviamo che $k = \max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$. Per provare la tesi, notiamo che essa è equivalente alla seguente asserzione: affinché ad un numero reale ρ corrisponda un numero positivo N_ρ tale che

$$\|e^{At}\| \leq N_\rho \, e^{\rho t} \qquad \forall t \geq 0,$$

è necessario che $\mathrm{Re}\lambda \leq \rho$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ ed è sufficiente che $\mathrm{Re}\lambda < \rho$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$.
Supponiamo infatti che sia soddisfatta l'ipotesi di tale asserzione (e lo è nel nostro caso avendo mostrato l'esistenza di un esponente di Lyapunov stretto). Allora per il lemma 1.37 lo spettro $\sigma(At)$ (che coincide con $t\sigma(A)$) è nel semipiano $\mathrm{Re}\lambda \leq \ln N_\rho + \rho t$. Perciò per ogni $t > 0$ lo spettro $\sigma(A)$ è nel semipiano

$$\mathrm{Re}\lambda \leq \frac{\ln N_\rho}{t} + \rho.$$

Per l'arbitrarietà di $t > 0$ questo implica la prima parte dell'asserzione. Per provare la seconda parte scriviamo e^{At} nella forma

$$e^{At} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_A} e^{\lambda t}(A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

assumendo che la curva Γ_A sia completamente contenuta nel semipiano $\mathrm{Re}\lambda < \rho$. Allora

$$\|e^{At}\| \leq -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_A} |e^{\lambda t}| \|R_\lambda(A)\| |d\lambda| \leq \frac{\ell(\Gamma_A)}{2\pi} \max_{\lambda\in\Gamma_A} \|R_\lambda(A)\| e^{\rho t}.$$

Posto $N_\rho = \frac{\ell(\Gamma_A)}{2\pi} \max_{\lambda\in\Gamma_A} \|R_\lambda(A)\|$, otteniamo la seconda parte dell'asserzione. Il teorema è così provato.

Applicando all'operatore $-A$ l'uguaglianza stabilita nel teorema appena visto, otteniamo

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t} = \min\{\text{Re}\lambda|\ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Corollario 1.43. Sia $A \in \mathcal{L}(B)$. Posto

$$\eta_0 = \min\{\text{Re}\lambda|\ \lambda \in \sigma(A)\}, \qquad \omega_0 = \max\{\text{Re}\lambda|\ \lambda \in \sigma(A)\},$$

per ogni $\epsilon > 0$ esistono $N_\epsilon, M_\epsilon > 0$ tali che

$$M_\epsilon\, e^{-(\eta_0+\epsilon)t} \le \|e^{tA}\| \le N_\epsilon\, e^{(\omega_0+\epsilon)t} \qquad \forall t \ge 0.$$

Dimostrazione.
Per il teorema 1.42, ω_0 è esponente di Lyapunov stretto per $\|e^{At}\|$; dunque, per definizione di limite, fissato $\epsilon > 0$ esiste $\tau_\epsilon > 0$ tale che

$$\|e^{At}\| \le e^{(\omega_0+\epsilon)t} \qquad \forall t \ge \tau_\epsilon.$$

D'altra parte la funzione $e^{-(\omega_0+\epsilon)t}\|e^{At}\|$ è continua in $[0, \tau_\epsilon]$ e dunque limitata: perciò esiste $N_\epsilon \ge 1$ tale che

$$\|e^{At}\| \le N_\epsilon\, e^{(\omega_0+\epsilon)t} \qquad \forall t \in [0, \tau_\epsilon].$$

la stessa relazione vale dunque per ogni $t \ge 0$.
Similmente, η_0 è esponente di Lyapunov stretto per $\|e^{(-A)t}\|$; dunque, dato $\epsilon > 0$, esiste $\tau_\epsilon > 0$ tale che

$$\|e^{-At}\| \le e^{(\eta_0+\epsilon)t} \qquad \forall t \ge \tau_\epsilon,$$

e un analogo ragonamento prove che esiste $P_\epsilon \ge 1$ tale che

$$\|e^{-At}\| \le P_\epsilon\, e^{(\eta_0+\epsilon)t} \qquad \forall t \ge 0.$$

Dato che $1 = \|e^{At}e^{-At}\| \le \|e^{At}\| \cdot \|e^{-At}\|$, si deduce

$$\|e^{At}\| \ge \frac{1}{\|e^{-At}\|} \ge \frac{1}{P_\epsilon}\, e^{-(\eta_0+\epsilon)t} \qquad \forall t \ge 0,$$

e dunque la tesi segue con $M_\epsilon = 1/P_\epsilon$.

Corollario 1.44. Se $\|e^{At}\| \le c$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, lo spettro $\sigma(A)$ è contenuto nell'asse immaginario.

Osservazione 1.45. Il viceversa di tale corollario è falso: Sia $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

allora si ha

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e dunque $\|e^{At}\| \geq \sqrt{1+t^2}$ e $\|e^{-At}\| \geq \sqrt{1+t^2}$, ma $\sigma(A) = \{0\}$.

Capitolo 2

L'equazione omogenea

2.1 Considerazioni generali

Consideriamo l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

in uno spazio di Banach B, con un operatore costante $A \in \mathcal{L}(B)$ e una funzione vettoriale $f(t)$, che supponiamo continua; in realtà comunque i risultati che otterremo saranno validi per una classe più ampia di funzioni.
Dapprima prendiamo in esame l'equazione omogenea

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

La soluzione del problema di Cauchy per questa equazione con condizione iniziale

$$x(t_0) = x_0$$

si ottiene immediatamente usando la funzione esponenziale e^{At}. Infatti, per quanto visto, la funzione vettoriale

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$$

ha derivata continua ed è soluzione dell'equazione omogenea. Inoltre, questa soluzione è unica. Infatti, poiché A è un operatore lineare, per verificare l'unicità basta mostrare che partendo dalla condizione iniziale $x(t_0) = 0$ si ottiene $x(t) \equiv 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
In effetti, dall'equazione omogenea, integrando tra t e t_0 abbiamo

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} Ax(s)\, ds,$$

per cui

$$\|x(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} Ax(s)\, ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|A\| \sup_{|s-t_0|\leq\delta} \|x(s)\| ds \leq \delta \|A\| \sup_{|s-t_0|\leq\delta} \|x(s)\|$$

per ogni t tale che $|t - t_0| \leq \delta$.
Passando all'estremo superiore, si ha

$$\sup_{|t-t_0|\leq\delta} \|x(t)\| \leq \delta \|A\| \sup_{|t-t_0|\leq\delta} \|x(s)\|$$

e se ipotizziamo che $\delta\|A\|$ sia minore di 1, dalla disuguaglianza appena scritta otteniamo che $x(t) = 0$ per ogni t nell'intervallo $[t - t_0, t + t_0]$.
Reiterando tale procedimento, con un numero finito di passi si dimostra che $x(t) \equiv 0$ nell'intervallo $[t - nt_0, t + nt_0]$ e poiché n è arbitrario otteniamo la tesi sull'intera retta reale.
Nel caso non omogeneo, applicando il metodo della variazione delle costanti, cerchiamo una soluzione del problema di Cauchy del tipo

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} y(t).$$

Sostituendo nell'equazione (2.1), si trova

$$e^{A(t-t_0)} y'(t) = f(t),$$

da cui otteniamo

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s-t_0)} f(s) ds,$$

e, infine,

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(s) ds.$$

Tale espressione è chiaramente una funzione differenziabile. L'unicità della soluzione di quest'ultimo problema di Cauchy segue dall'unicità di quello con equazione omogenea.

2.2 Comportamento all'infinito

Il comportamento all'infinito delle soluzioni dei problemi di Cauchy visto pocanzi è strettamente legato alla conformazione dello spettro di A. Distinguiamo principalmente tre casi.
Supponiamo che lo spettro sia nella parte interna della metà sinistra del piano, ossia $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$. Allora esistono N e ν positive tali che $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(B)} \leq Ne^{-\nu t}$ per ogni $t \geq 0$.
Quindi, per ogni $x_0 \in B$, la soluzione del problema

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), & t > 0, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

vale a dire la funzione $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$, decade esponenzialmente. Infatti,

$$\|x(t)\|_B \leq Ne^{-\nu(t-t_0)}\|x_0\|_B \qquad \forall t \geq 0.$$

Viceversa, se esistono N, ν positive tali che per ogni x_0 in B e per ogni soluzione $x(t)$ dell'equzione (2.2) vale

$$\|x(t)\|_B \leq Ne^{-\nu(t-t_0)}\|x_0\|_B \qquad \forall t \geq t_0,$$

allora

$$\|e^{A(t-t_0)}x_0\|_B \leq Ne^{-\nu(t-t_0)}\|x_0\|_B \qquad \forall x_0 \in B, \quad \forall t \geq t_0,$$

da cui

$$\|e^{As}\|_{\mathcal{L}(B)} \leq Ne^{-\nu s} \qquad \forall s > 0,$$

e, per il teorema 1.42, si conclude che

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda \leq -\nu\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda < 0\}.$$

Ora passiamo al caso in cui $\sigma(A) = \sigma_+(A) \cup \sigma_-(A)$, supponendo entrambi non vuoti. Ricordiamo che $\sigma_+(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > 0\}$ e $\sigma_-(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda < 0\}$. Allora esistono le proiezioni spettrali P_+ e P_- su B_+ e B_-, che sono sottospazi chiusi di B, invarianti per A, tali che $B = B_+ \oplus B_-$; gli spazi $(B_-, \|P_- \cdot\|_B)$ e $(B_+, \|P_+ \cdot\|_B)$ sono spazi di Banach inclusi con continuità in B.
Allora la soluzione di (2.2) si decompone come

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 = e^{A(t-t_0)}P_+x_0 + e^{A(t-t_0)}P_-x_0.$$

Siccome $AP_- = P_-A \in \mathcal{L}(B_-)$ e $\sigma(AP_-) = \sigma_-(A)$, esistono N, ν positivi tali che

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_{B_-} &= \|P_-e^{A(t-t_0)}x_0\|_B = \\ &= \|e^{A(t-t_0)}P_-x_0\|_{B_-} \leq Ne^{-\nu(t-t_0)}\|x_0\|_{B_-} \qquad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Invece, $\sigma_+(A) = \sigma(AP_+) = -\sigma(-AP_+) = -\sigma(-P_+A)$; quindi $(-A)P_+$ ha spettro contenuto in $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda < 0\}$ e dunque esistono M e μ positivi tali che

$$\|e^{-At}P_+x_0\|_{B_+} = \|P_+e^{-At}x_0\|_B \leq Me^{-\mu t}\|x_0\|_{B_+} \qquad \forall t \geq 0.$$

Poiché, dalla decomposizione di $x(t)$, abbiamo $P_+x_0 = e^{-A(t-t_0)}P_+x(t)$, ricaviamo

$$\|x_0\|_{B_+} = \|P_+x_0\|_B \leq \|e^{-A(t-t_0)}P_+x(t)\|_B \leq Me^{-\mu(t-t_0)}\|x(t)\|_{B_+} \quad \forall t \geq t_0,$$

e dunque
$$\|x(t)\|_{B_+} \geq \frac{1}{M} e^{\mu(t-t_0)} \|x_0\|_{B_+} \qquad \forall t \geq t_0.$$
Perciò se $P_+ x_0 \neq 0$ la soluzione $x(t)$ ha una parte $P_- x(t)$ infinitesima e una parte $P_+ x(t)$ che diverge. Quindi
$$\begin{aligned} \|x(t)\|_B &\geq \|P_+ x(t)\|_B - \|P_- x(t)\|_B \geq \\ &\geq \frac{1}{M} e^{\mu(t-t_0)} \|P_+ x_0\|_B - N e^{-\nu(t-t_0)} \|P_- x_0\|_B \end{aligned}$$
tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$.
Infine affrontiamo il caso in cui $\sigma(A) \subseteq i\mathbb{R}$. L'esponenziale e^{At} può non essere limitato, come mostrato nel controesempio al corollario 1.44, dove si aveva $B = \mathbb{C}^2$ e
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
con $\sigma(A) = \{0\}$ e $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)} \geq \sqrt{1+t^2}$, e $\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)} \geq \sqrt{1+t^2}$. In particolare, scelto $x_0 = (0, 1)$, si ha
$$e^{tA} x_0 = (t, 1), \qquad \|e^{tA} x_0\| = \sqrt{1+t^2} \to \pm\infty \text{ per } \ t \to \infty,$$
mentre con $x_0 = (1, 0)$ risulta $e^{tA} x_0 = x_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Al contrario, se $\|e^{At}\| \leq C$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ allora tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono limitate in $\mathbb{R}$ ed il corollario 1.44 ci assicura che siamo nel caso $\sigma(A) \subseteq i\mathbb{R}$.

2.3 Limitatezza delle soluzioni

Cerchiamo ora condizioni sotto le quali le soluzioni dell'equazione omogenea (2.2) sono limitate sull'asse reale. Poiché le soluzioni di questa equazione sono date da $x(t) = e^{At} x_0$, ove $x_0 = x(0)$, affinché le soluzioni siano limitate basta che
$$\|e^{At} x_0\| \leq c_{x_0} \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$
dove la costante c_{x_0} dipende solo da x_0. Allora l'insieme degli operatori e^{At}, per $t \in \mathbb{R}$, è limitato per ogni elemento $x_0 \in B$. Per il principio di uniforme limitatezza (teorema 1.17), questi operatori sono uniformemente limitati:
$$\|e^{At}\| \leq c \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$
L'ultima affermazione, come mostra il corollario 1.44, implica che lo spettro di A è contenuto nell'asse immaginario. Però questa condizione, come sappiamo, è soltanto necessaria.

2.4 Equazioni del secondo ordine

Passiamo ora ad analizzare l'equazione del secondo ordine

$$y'' + Ty = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

dove $T \in \mathcal{L}(B)$ è un operatore non nullo.
Lo studio di questa equazione si può ricondurre a quello di un'equazione del primo ordine nello spazio $B^2 = B \times B$, i cui elementi sono della forma $x = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in B$, e la cui norma è data da $\|x\|_2^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$. Ponendo $y = x_1$ e $y' = x_2$, l'equazione si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -Tx_1 \end{cases}$$

ovvero nell'equazione in B^2

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

dove l'operatore $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(B^2)$ è definito in forma matriciale da

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -T & 0 \end{bmatrix}$$

Le potenze di $\mathbf{A}$ sono date da

$$\mathbf{A}^{2k} = (-1)^k \begin{bmatrix} T^k & 0 \\ 0 & T^k \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}^{2k+1} = (-1)^k \begin{bmatrix} 0 & T^k \\ -T^{k+1} & 0 \end{bmatrix}.$$

La funzione operatoriale $e^{\mathbf{A}t}$ che definisce le soluzioni dell'equazione è della forma

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} \frac{\mathbf{A}^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k+1} \frac{\mathbf{A}^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

da cui

$$e^{\mathbf{A}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k} T^k}{(2k)!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1} T^k}{(2k+1)!} \\ \displaystyle -T\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1} T^k}{(2k+1)!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k} T^k}{(2k)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}.$$

Le serie sopra scritte ricordano gli sviluppi in serie delle funzioni scalari

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!} = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \cosh\sqrt{|x|} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(2k+1)!} = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{\sinh\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Poniamo allora per definizione

$$C_T(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{T^k t^{2k}}{(2k)!}, \qquad S_T(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{T^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

In questa notazione,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} C_T(t) & S_T(t) \\ -T\,S_T(t) & C_T(t) \end{pmatrix}.$$

Quindi l'espressione $x(t) = e^{\mathbf{A}t}x_0$, dove $x_0 = (y_0, y_0')$, ci dà una rappresentazione della soluzione relativa alle condizioni iniziali

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_0',$$

nella forma

$$y(t) = C_T(t)y_0 + S_T(t)y_0'.$$

Con una semplice sostituzione si verifica che la funzione appena scritta soddisfa l'equazione (2.3) con le condizioni iniziali poste; perciò la limitatezza di ogni soluzione per $t \in \mathbb{R}$ è equivalente alla limitatezza delle funzioni operatoriali $C_T(t)$ e $S_T(t)$.
Dimostriamo che in realtà basta avere la limitatezza della funzione operatoriale $S_T(t)$ in $\mathbb{R}$. Infatti, supposto ciò, analizziamo la funzione

$$z(t) = S_T(t)y_0 :$$

si verifica facilmente che le sue derivate sono

$$z'(t) = C_T(t)y_0, \qquad z''(t) = -T\,S_T(t)y_0 = -Tz(t).$$

Per ipotesi, per ogni $y_0 \in B$ fissato, la funzione $z(t)$, e quindi anche $z''(t) = -Tz(t)$, è limitata. Proviamo che anche $z'(t)$ è limitata: così possiamo concludere che l'insieme degli operatori $C_T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, è puntualmente limitato in ogni $y_0 \in B$, e quindi (in base al principio di uniforme limitatezza) è limitato in norma. Poniamo

$$f(t) = z''(t) - z(t).$$

La funzione f è limitata sull'asse reale, come le funzioni z e z''. L'espressione appena scritta è un'equazione differenziale la cui soluzione, limitata sull'asse reale, è

$$z(t) = -\frac{1}{2}\int_t^{\infty} e^{t-s} f(s)ds - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)} f(s)ds = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|} f(s)ds.$$

Come si vede dalla prima espressione di $z(t)$, essa risulta differenziabile in t e si verifica direttamente che

$$\sup \|z'(t)\| \leq \sup \|f(t)\| < +\infty.$$

Si può così concludere che la limitatezza sull'asse reale di ogni soluzione dell'equazione al secondo ordine si riconduce alla limitatezza della funzione operatoriale $S_T(t)$.

Capitolo 3

L'equazione non omogenea

3.1 Soluzioni limitate

Dopo aver analizzato il caso omogeneo, viene spontaneo chiedersi se ci sono condizioni che permettano di avere soluzioni limitate anche nel caso non omogeneo. A tal fine introduciamo delle funzioni particolari funzioni, dette funzioni di Green.

3.1.1 Funzioni di Green

Sia data l'equazione differenziale non omogenea

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

con f funzione continua. Supponiamo che lo spettro dell'operatore A si decomponga in due insiemi spettrali: $\sigma(A) = \sigma_1(A) \cup \sigma_2(A)$. Siano B_1 e B_2 i due sottospazi invarianti di A corrispondenti a questi insiemi e P_1 e P_2 le rispettive proiezioni spettrali.
Ricordiamo che

$$P_k = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} R_\lambda d\lambda, \qquad k = 1, 2.$$

A questo punto definiamo la *funzione operatoriale di Green*

$$G(t) = \begin{cases} e^{At}P_1 = -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{\Gamma_1} e^{\lambda t} R_\lambda d\lambda & \text{se } t > 0, \\ -e^{At}P_2 = -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{\Gamma_2} e^{\lambda t} R_\lambda d\lambda & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Per saperne di più, si elencano qui di seguito le sue proprietà.

1. Quando $t \neq 0$, $G(t)$ è differenziabile con continuità e soddisfa l'equazione omogenea

$$G'(t) = AG(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

e questo segue direttamente dal modo in cui è stata definita.

2. La funzione $G(t)$ presenta una discontinuità nell'origine, con "salto" pari all'operatore identità: infatti

$$G(+0) = P_1, \;\; G(-0) = -P_2,$$

e quindi

$$G(+0) - G(-0) = P_1 + P_2 = I.$$

3. La funzione vettoriale

$$x(t) = \int_a^b G(t-s)f(s)ds, \qquad t \in [a,b],$$

soddisfa l'equazione (3.1) nell'intervallo $[a,b]$; infatti, scrivendo

$$x(t) = \int_t^b G(t-s)f(s)ds + \int_a^t G(t-s)f(s)ds$$

e derivando, si ottiene

$$\begin{aligned} x'(t) = -G(-0)f(t) + \int_t^b G'(t-s)f(s)ds + \\ +G(+0)f(t) + \int_a^t G'(t-s)f(s)ds = \\ = \int_a^b AG(t-s)f(s)ds + [G(+0) - G(-0)]f(t) = Ax + f(t). \end{aligned}$$

D'ora in poi supponiamo che lo spettro di A non intersechi l'asse immaginario, in particolare che $\sigma(A) = \sigma_+(A) \cup \sigma_-(A)$. La funzione di Green è:

$$G_A(t) = \begin{cases} e^{At}P_- & \text{se } t > 0 \\ -e^{At}P_+ & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

ed è chiamata *funzione principale di Green*.
Osserviamo che non è necessario assumere che entrambi gli insiemi spettrali siano non vuoti; infatti si può avere $P_+ = I$ e $P_- = 0$ quando $\sigma(A) = \sigma_+(A)$ e $P_+ = 0$, $P_- = I$ quando $\sigma(A) = \sigma_-(A)$. Poiché lo spettro di A non interseca l'asse immaginario, esistono $\nu > 0$ e $N > 0$ per cui

$$\|G_A(t)\| \leq Ne^{-\nu|t|}. \tag{3.2}$$

Ciò è chiaro se $t > 0$, poiché $\|e^{At}P_-\|$ decade esponenzialmente; per $t < 0$ invece basta osservare che $\|e^{At}P_+\| = \|e^{-A|t|}P_+\|$ decade esponenzialmente, in quanto P_+ proietta sulla parte dello spettro di $-A$ che ha parte reale negativa.

3.1.2 Soluzioni limitate in $\mathbb{R}$

La funzione principale di Green gioca un ruolo importante nel determinare condizioni di esistenza delle soluzioni dell'equazione (3.1) che sono limitate sull'asse reale.
vale infatti il seguente enunciato.

Teorema 3.1. Per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to B$ continua e limitata esiste una e una sola soluzione dell'equazione (3.1) limitata su $\mathbb{R}$ se e solo se lo spettro di A non interseca l'asse immaginario. In tal caso, questa soluzione è data da

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s)f(s)ds, \tag{3.3}$$

dove $G_A(t)$ è la funzione principale di Green.

Dimostrazione.
Supponiamo che esista un'unica soluzione limitata per ogni f continua e limitata. Scegliamo $f(t) = y$, dove $y \in B$ è un vettore costante, e sia $x(t)$ l'unica (per ipotesi) soluzione dell'equazione

$$x'(t) = Ax(t) + y, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Il vettore $x(t+\tau)$ è anch'esso soluzione dell'equazione per ogni $\tau \in \mathbb{R}$; per unicità si ha $x(t+\tau) = x(t)$ e quindi $x(t) = x$ costante. Ciò implica che $Ax = -y$. Dall'arbitrarietà di y segue che l'operatore lineare continuo A è una bigezione su B; dunque, dal teorema dell'applicazione aperta, esiste l'inversa continua A^{-1}, cioè $\lambda = 0$ è un punto regolare di A.
Sia ora ρi un numero immaginario puro. Consideriamo l'equazione

$$x'(t) = Ax(t) + ye^{\rho it}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

che per ipotesi ha soluzione unica $x(t)$. Posto $\xi(t) = x(t)e^{-\rho it}$, si ottiene

$$\xi'(t) = x'(t)e^{-\rho it} - x(t)\rho i\, e^{-\rho it} = Ax(t)e^{-\rho it} + ye^{-\rho it} - x(t)\rho i\, e^{-\rho it},$$

per cui ξ risolve l'equazione

$$\xi'(t) = (A - \rho i I)\xi(t) + y.$$

Come si è visto, questa equazione ha soluzione unica, data da $\xi(t) = \xi$ costante, con $(A - \rho i)\xi = y$. Quindi, ripercorrendo il ragionamento appena fatto, si dimostra che $A - \rho i$ ha un inverso continuo, cioè ρi è un punto regolare e quindi $\rho i \notin \sigma(A)$.
Viceversa, se $\sigma(A)$ non interseca l'asse immaginario, vale la stima del precedente paragrafo $||G_A(t)|| \leq Ne^{-\nu|t|}$. La funzione $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s)f(s)ds$

soddisfa l'equazione (3.1) grazie alla terza proprietà della funzione di Green e si ha

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|G_A(t-s)\|\|f(s)\|ds \leq N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu|t-s|}\|f(s)\|ds \\ &\leq \frac{2N}{\nu} \sup_{-\infty<t<+\infty} \|f(s)\|.\end{aligned}$$

Resta da provare l'unicità della soluzione limitata. A tal fine è sufficiente verificare che per l'equazione omogenea (2.2) l'unica soluzione limitata su $\mathbb{R}$ è quella banale. Supponiamo che una tale soluzione $x(t) = e^{At}x_0$ esista. Se $A_- = P_-A$ e $A_+ = P_+A$, allora possiamo scrivere

$$x(t) = e^{A_-t}P_-x_0 + e^{A_+t}P_+x_0.$$

Poiché lo spettro dell'operatore A_-, in B_-, è l'insieme $\sigma_-(A)$ che è all'interno della metà sinistra del piano, il primo termine, e quindi anche il secondo (dato che $x(t)$ è limitata per ipotesi), è limitato per $t > 0$:

$$\|e^{A_+t}P_+x_0\| \leq c.$$

Ora, considerando che lo spettro dell'operatore A_+, in B_+, è l'insieme $\sigma_+(A)$ che (se non vuoto) è nella metà destra del piano, si ha:

$$\|P_+x_0\| = \|e^{-A_+t}(e^{A_+t}P_+x_0)\| = \|e^{-A_+t}P_+(e^{A_+t}P_+x_0)\| \leq Ne^{-\nu t}c \quad (t > 0).$$

per l'arbitrarietà di $t > 0$, si ricava $P_+x_0 = 0$.
Analogamente si dimostra che $P_-x_0 = 0$.

3.1.3 Soluzioni limitate su una semiretta

Ipotizziamo che lo spettro di A non intersechi l'asse immaginario e che $\sigma(A) = \sigma_-(A) \cup \sigma_+(A)$; allora, come mostra il teorema seguente, è possibile descrivere completamente le soluzioni dell'equazione (3.1) che sono limitate su una semiretta $[t_0, +\infty)$.

Teorema 3.2. Supponiamo che lo spettro di A non intersechi l'asse immaginario e che $f : [t_0, +\infty) \to B$ sia una funzione continua e limitata. Per ogni elemento $x_0^- \in B_-$ vi è un'unica soluzione x dell'equazione (3.1) che è limitata su $[t_0, +\infty)$ e soddisfa la condizione $P_-x(t_0) = x(0)^-$. Tale soluzione è data da:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0^- + \int_{t_0}^{+\infty} G_A(t-s)f(s)ds.$$

Dimostrazione. L'equazione (3.1) è equivalente al sistema di due equazioni indipendenti

$$\begin{cases} x'_+(t) = A_+ x_+(t) + f_+(t) \\ x'_-(t) = A_- x_-(t) + f_-(t), \end{cases} \qquad t \geq t_0,$$

dove si è posto $x_\pm = P_\pm x$, $f_\pm = P_\pm f$, $A_\pm = P_\pm A$. La prima equazione è a valori nel sottospazio $B_+ = P_+ B$, e la seconda nel sottospazio $B_- = P_- B$. Lo spettro di A_+ è l'insieme $\sigma_+(A)$ che è contenuto nella parte destra del piano, mentre quello di A_- è l'insieme $\sigma_-(A)$ che è contenuto nella parte sinistra.
La seconda equazione, accoppiata con la condizione iniziale $x_-(t_0) = x_0^-$ costituisce il problema di Cauchy in B_-

$$\begin{cases} x'_-(t) = A_- x_-(t) + f_-(t), \qquad t \geq t_0, \\ x_-(t_0) = x_0^-, \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione

$$\begin{aligned} x_-(t) &= e^{A_-(t-t_0)} P_- x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_-(t-s)} f_-(s) ds = \\ &= e^{A(t-t_0)} P_- x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} P_- f(s) ds. \end{aligned} \tag{3.4}$$

La prima equazione può avere al più una soluzione che è limitata per $t \geq t_0$, perché la corrispondente equazione omogenea non ha alcuna soluzione limitata non banale. Si verifica immediatamente che una soluzione, dunque l'unica, è

$$x_+(t) = -\int_t^{+\infty} e^{A_+(t-s)} f_+(s) ds = -\int_t^{+\infty} e^{A(t-s)} P_+ f(s) ds.$$

Unendo le due soluzioni ottenute si ha l'espressione richiesta.

Osservazione 3.3. Ogni soluzione limitata su $[t_0, +\infty)$ è unicamente determinata dall'elemento $x_0^- = P_- x(t_0)$. Notiamo che tutte queste traiettorie si avvicinano indefinitamente tra loro al tendere di t all'infinito. Infatti per ogni coppia di traiettorie, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, vale

$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\| &\leq \|e^{A(t-t_0)} P_-[x_2(t_0) - x_1(t_0)]\| \leq \\ &\leq N e^{-\nu(t-t_0)} \|x_2(t_0) - x_1(t_0)\|. \end{aligned}$$

In particolare, se f è limitata su $\mathbb{R}$ tutte queste traiettorie per $t \to +\infty$ approssimano l'unica traiettoria limitata sull'intero asse reale. Ciò si verifica confrontando per $t > t_0$ la soluzione x_-, data da (3.4), con la soluzione x, data da (3.3).
Infatti

$$\lim_{t \to \infty} \|x_-(t) - x(t)\| = 0.$$

Se in particolare l'insieme $\sigma_-(A)$ è vuoto, ossia $\sigma(A) = \sigma_+(A)$, allora esiste una sola traiettoria che è limitata su $[t_0, +\infty)$ e quindi $x_0^- = 0$.
Un'analoga situazione si ha per le traiettorie che sono limitate su $(-\infty, t_0]$. Esse sono

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0^+ + \int_{-\infty}^{t_0} G_A(t-s)f(s)ds.$$

3.2 Soluzioni periodiche

Dopo l'analisi dei casi precedenti, consideriamo ora l'equazione

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

assumendo che $f(t)$ sia una funzione continua e periodica, ossia:

$$f(t+T) = f(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Richiamiamo alcune conoscenze relative alle funzioni periodiche, che ci saranno utili a dare condizioni per l'esistenza di soluzioni periodiche e a trovarle.
Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier di f:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k e^{\frac{2k\pi it}{T}}, \qquad t \in [0,T].$$

Cerchiamo una soluzione periodica e con uno sviluppo in serie di Fourier della forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{\frac{2k\pi it}{T}}.$$

Sostituendo formalmente i due sviluppi in serie nell'equazione (3.5) e uguagliando i coefficienti di $e^{\frac{2k\pi it}{T}}$, otteniamo il sistema di equazioni

$$\left(A - \frac{2k\pi i}{T}I\right)x_k = -f_k.$$

Supponiamo dapprima che sia soddisfatta la condizione

$$\frac{2k\pi i}{T} \in \rho(A) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{3.6}$$

cioè che tali punti dell'asse immaginario non appartengano allo spettro di A. Questo implica

$$x_k = -\left(A - \frac{2k\pi i}{T}I\right)^{-1} f_k,$$

cosicché

$$x(t) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(A - \frac{2k\pi i}{T} I\right)^{-1} f_k \, e^{\frac{2k\pi i t}{T}}.$$

Sostituendo le espressioni dei coefficienti di Fourier

$$f_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) e^{-\frac{k\pi i s}{T}} ds$$

otteniamo la relazione

$$x(t) = -\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(A - \frac{2k\pi i}{T} I\right)^{-1} f_k \, e^{\frac{2k\pi i t}{T}} = \int_0^T \Gamma_T(t-s) f(s) ds,$$

dove

$$\Gamma_T(t) = -\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(A - \frac{2k\pi i}{T} I\right)^{-1} e^{\frac{2k\pi i t}{T}}.$$

Se sottraiamo da entrambi i lati dell'uguaglianza la funzione T-periodica

$$\chi(t) I = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} e^{\frac{2k\pi i t}{T}} I = \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right) I, \qquad 0 < t < T,$$

otteniamo la rappresentazione

$$\begin{aligned}
\Gamma_T(t) &= \chi(t) I - \frac{1}{T} \sum_{k \neq 0} \left[\left(A - \frac{2k\pi i}{T} I\right)^{-1} + \frac{T}{2k\pi i} I \right] e^{\frac{2k\pi i t}{T}} - \frac{1}{T} A^{-1} = \\
&= \chi(t) I + \frac{1}{T} \sum_{k \neq 0} \left[-\frac{T}{2k\pi i} - \left(A - \frac{2k\pi i}{T} I\right)^{-1} \right] e^{\frac{2k\pi i t}{T}} - \frac{1}{T} A^{-1} = \\
&= \chi(t) I - \frac{1}{T} \sum_{k \neq 0} \left[\frac{T}{2k\pi i} A \left(A - \frac{2k\pi i}{T} I\right)^{-1} \right] e^{\frac{2k\pi i t}{T}} - \frac{1}{T} A^{-1} = \\
&= \chi(t) I - \frac{1}{T} A^{-1} + A \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2k\pi i} e^{\frac{2k\pi i t}{T}} \left(\frac{2k\pi i}{T} I - A\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Notiamo che per k sufficientemente grande in valore assoluto, vale

$$\left\| \left(\frac{2k\pi i}{T} I - A\right)^{-1} \right\| \leq \frac{c}{|k|}.$$

Perciò la serie presente nell'espressione di $\Gamma_T(t)$ converge assolutamente e uniformemente, e quindi la sua somma è una funzione periodica continua. Dunque la funzione operatoriale $\Gamma_T(t)$ è ben definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Questa funzione prende il nome di *funzione T-periodica di Green.* Essa ha le seguenti proprietà:

1. è una funzione periodica: $\Gamma_T(t+T) = \Gamma_T(t)$;

2. è continua nella norma operatoriale per ogni $t \in \mathbb{R}$ ad eccezione dei punti $t = Tk$, $k \in \mathbb{Z}$, dove $\Gamma_T(+kT) - \Gamma_T(-kT) = I$;

3. nei punti dove è continua essa è derivabile in norma e soddisfa l'equazione differenziale
$$\Gamma_T'(t) = A\Gamma_T(t).$$

Dimostriamo quest'ultima proprietà. Abbiamo

$$\Gamma_T(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right) I - \frac{1}{T}A^{-1} + A\sum_{k\neq 0} \frac{1}{2k\pi i}\left(A - \frac{2k\pi i}{T} I\right)^{-1} e^{\frac{2k\pi i t}{T}}$$

e quindi
$$\Gamma_T'(t) = -\frac{I}{T} + \frac{A}{T}\sum_{k\neq 0}\left(\frac{2k\pi i}{T} I - A\right)^{-1} e^{\frac{2k\pi i t}{T}}.$$

Mostriamo che $\Gamma_T'(t)$ è ben definita e quindi che la serie che compare nella sua espressione è convergente. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2k\pi i I}{T} - A\right)^{-1} &= \left(\frac{2k\pi i}{T} I - A\right)^{-1} - \frac{T}{2k\pi i} I + \frac{T}{2k\pi i} I = \\
&= \left(\frac{2k\pi i}{T} I - A\right)^{-1}\left[I - \frac{(\frac{2k\pi i}{T} I - A)T}{2k\pi i}\right] + \frac{T}{2k\pi i} = \\
&= \frac{T(\frac{2k\pi i}{T} I - A)^{-1}A}{2k\pi i} + \frac{T}{2k\pi i} I,
\end{aligned}$$

ed il primo termine di questa espressione si comporta come $\frac{c}{k^2}$, con c costante opportuna. Per concludere che $\Gamma_T'(t)$ è ben definita, richiamiamo un teorema di analisi relativo alla convergenza delle serie trigonometriche:

Teorema 3.4. Se a_n è una successione reale, decrescente e infinitesima, allora le serie $\sum a_n \cos nx$ e $\sum a_n \sin nx$ convergono puntualmente in $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ (la seconda anche in 0) e uniformemente in $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ per ogni $\delta \in (0, \pi)$.

Decomponiamo allora la serie in due parti:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\neq 0} e^{\frac{2k\pi i t}{T}}\left(A - \frac{2k\pi i}{T} I\right)^{-1} = \\
&\quad = \sum_{k\neq 0} e^{\frac{2k\pi i t}{T}}\left[\left(A - \frac{2k\pi i}{T} I\right)^{-1} - \frac{T}{2k\pi i} I\right] + \sum_{k\neq 0} e^{\frac{2k\pi i t}{T}}\frac{T}{2k\pi i} I.
\end{aligned}$$

Entrambe queste serie, considerando la stima precedente e il teorema 3.4, convergono in norma. D'altra parte,

$$\begin{aligned} A\Gamma_T(t) &= -\frac{A}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(A-\frac{2k\pi iI}{T}\right)^{-1}e^{\frac{2k\pi it}{T}} = \\ &= -\frac{I}{T}-\frac{A}{T}\sum_{k\neq 0}\left(A-\frac{2k\pi iI}{T}\right)^{-1}e^{\frac{2k\pi it}{T}} = \Gamma_T'(t), \end{aligned}$$

e la tesi è così verificata.
Le proprietà elencate determinano unicamente la funzione $\Gamma_T(t)$; poiché una soluzione continua dell'equazione del punto 3 è della forma $e^{At}C$, con C operatore costante, si vede facilmente che deve essere

$$\Gamma_T(t) = e^{At}(I-e^{AT})^{-1}, \qquad 0<t<T.$$

D'altronde l'operatore $(I-e^{AT})^{-1}$ esiste; infatti se così non fosse dal teorema della mappa spettrale lo spettro $\sigma(A)$ conterrebbe almeno uno dei punti $\frac{2k\pi i}{T}$. Resta da estendere l'espressione periodica a tutta la retta reale. Usando la funzione periodica di Green, abbiamo il seguente risultato.

Teorema 3.5. Se lo spettro $\sigma(A)$ non contiene i punti $\frac{2k\pi i}{T}$, $k\imath\mathbb{Z}$, per ogni f continua e T-periodica l'equazione (3.5) ha una e una sola soluzione T-periodica x. Tale soluzione è:

$$x(t) = \int_0^T \Gamma_T(t-s)f(s)ds. \tag{3.7}$$

Dimostrazione.
Iniziamo con l'osservare che l'integrale (3.7) esiste in quanto l'integrando è continuo a tratti. La periodicità di Γ_T implica anche quella di x. Riscriviamo $x(t)$ come

$$x(t) = \int_0^t \Gamma_T(t-s)f(s)ds + \int_t^T \Gamma_T(t-s)f(s)ds.$$

Derivando rispetto a t, abbiamo

$$\begin{gathered} x'(t) = \int_0^t A\Gamma_T(t-s)f(s)ds + \int_t^T A\Gamma_T(t-s)f(s)ds \\ +[\Gamma_T(+0)-\Gamma_T(-0)]f(t) = Ax(t)+f(t). \end{gathered}$$

La soluzione è unica in quanto, sotto le ipotesi del teorema, l'equazione omogenea non può avere soluzioni continue e T-periodiche non banali. Infatti, supponiamo che esista una tale soluzione $x(t) = e^{At}x_0$. Allora si avrebbe $e^{TA}x_0 = x_0$, il che contraddice l'esistenza dell'operatore $(I-e^{AT})^{-1}$. Il teorema è così provato.

Eliminiamo ora la condizione (3.6) e consideriamo il caso generale. Sia $K_{A,T}$ l'insieme di quegli indici k per cui $\frac{2k\pi i}{t} \in \sigma(A)$. Poiché lo spettro di A è limitato, l'insieme $K_{A,T}$ è finito. Affinché l'equazione (3.5) abbia una soluzione T-periodica è necessario e sufficiente che ognuna delle equazioni

$$(A - \frac{2k\pi i}{T} I)x_k = -f_k, \qquad k \in K_{A,T}, \tag{3.8}$$

abbia almeno una soluzione x_k in B. La condizione è necessaria perché se l'equazione (3.5) ha una soluzione T-periodica x, i suoi coefficienti di Fourier x_k soddisfano la condizione (3.8). Supponiamo ora che x_k^0, $k \in K_{A,T}$, sia una soluzione dell'equazione (3.8). Poniamo

$$y(t) = x(t) - \sum_{k \in K_{A,T}} x_k^0 \, e^{\frac{2k\pi i t}{T}t}.$$

Si ottiene allora che y risolve l'equazione

$$y'(t) = Ay(t) + \phi(t), \tag{3.9}$$

dove $\phi(t) = f(t) - \sum_{k \in K_{A,T}} f_k \, e^{\frac{2k\pi i t}{T}t}$; questa funzione ha i coefficienti di Fourier con indici in $K_{A,T}$ tutti nulli:

$$\phi_k = 0 \qquad \forall k \in K_{A,T}.$$

Ora notiamo che la soluzione dell'equazione (3.9) con tale condizione può essere ottenuta usando la formula del teorema precedente, poiché i termini corrispondenti agli indici in $K_{A,T}$ non ci sono. Se introduciamo la funzione incompleta di Green

$$\overline{\Gamma}_T(t) = -\frac{1}{T} \sum_{k \notin K_{A,T}} \left(A - \frac{2k\pi i}{T} I \right)^{-1} e^{\frac{2k\pi i t}{T}t}$$

possiamo scrivere un'arbitraria soluzione T-periodica dell'equazione (3.5) nella forma

$$x(t) = \int_0^T \overline{\Gamma}_T(t-s) f(s) ds + \sum_{k \in K_{A,T}} x_k^0 \, e^{\frac{2k\pi i t}{T}t},$$

dove gli x_k^0, $k \in K_{A,T}$, risolvono l'equazione (3.5).

3.3 Soluzioni quasi periodiche

Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

con f continua e quasi periodica.
Ricordiamo che una funzione continua sulla retta reale a valori in uno spazio di Banach è detta *quasi periodica* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $L_\epsilon > 0$ tale che ogni intervallo della retta reale di lunghezza non nferiore a L_ϵ contenga un punto $\tau = \tau(\epsilon)$ (una ϵ-transizione o un ϵ-quasi periodo) per cui

$$\|f(t) - f(t+\tau)\| < \epsilon \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

Per queste funzioni vale il risultato seguente.

Teorema 3.6 (di Bochner). Sia B uno spazio di Banach. Una condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione uniformemente continua $f : \mathbb{R} \to B$ sia quasi periodica è che la famiglia $\{f_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$, dove $f_\tau(t) = f(t+\tau)$, sia precompatta nello spazio di Banach $C(\mathbb{R}, B) \cap L^\infty(\mathbb{R}, B)$, dotato della norma $\|f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|_B$.

Per la dimostrazione si rimanda al libro di Corduneanu [6]. Ricordiamo che un sottoinsieme di uno spazio normato si dice precompatto se da ogni successione infinita di suoi elementi è possibile estrarre una sottosuccessione di Cauchy.
Supponiamo che lo spettro di A non intersechi l'asse immaginario, cioè $\sigma(A) = \sigma_-(A) \cup \sigma_+(A)$. Allora, come segue dal teorema 3.1, l'equazione (3.10) ha l'unica soluzione limitata

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s) f(s) ds,$$

dove $G_A(t)$ è la funzione principale di Green.

Teorema 3.7. Se lo spettro $\sigma(A)$ non interseca l'asse immaginario, e se $f : \mathbb{R} \to B$ è una funzione quasi periodica, allora l'equazione differenziale (3.10) ha una e una sola soluzione quasi periodica x, data da:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s) f(s) ds.$$

Dimostrazione.
Sappiamo che esiste una sola soluzione limitata; ora dobbiamo mostrare che è anche quasi periodica. A questo scopo è sufficiente mostrare che la famiglia delle funzioni $\{x_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$, ove $x_\tau(t) = x(t+\tau)$ per ogni $\tau \in \mathbb{R}$, è un insieme precompatto nella topologia della convergenza uniforme. Consideriamo una sottosuccessione x_{τ_k}. Per la quasi periodicità di f possiamo estrarre dalla successione delle funzioni $\{f_{\tau_k}\}$ una sottosuccessione $\{f_{\tau_{k_j}}\}$. Quindi

$$\begin{aligned} x_{\tau_{k_j}}(t) &= x(t+\tau_{k_j}) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t+\tau_{k_j} - s) f(s) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s) f(s-\tau_{k_j}) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s) f_{-\tau_{k_j}}(s) ds. \end{aligned}$$

Questa relazione implica che $x_{\tau_{k_j}}(t)$ è una successione di Cauchy. Infatti

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x_{\tau_{k_j}}(t) - x_{\tau_{k_l}}(t)\| &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} \|G_A(t-s)\| \|f_{-\tau_{k_j}}(s) - f_{-\tau_{k_l}}(s)\| ds \leq \\
&\leq \sup_{s} \|f_{-\tau_{k_j}}(s) - f_{-\tau_{k_l}}(s)\| \int_{-\infty}^{+\infty} \|G_A(s)\| ds.
\end{aligned}$$

Abbiamo così provato la precompattezza dell'insieme delle funzioni $x_\tau(t) = x(t+\tau)$, e quindi la quasi periodicità di $x(t)$.

Osservazione 3.8. Se f è periodica abbiamo un'unica soluzione periodica x data da (3.7). Si può ottenere una funzione di Green periodica $\Gamma_T(t)$ in termini della funzione principale di Green. Infatti se f è una funzione T-periodica, si ha

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)T} G_A(t-s) f(s) ds \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} G_A(t-s-kT) f(s) ds \\
&= \int_0^T \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_A(t-s-kT) \right] f(s) ds
\end{aligned}$$

Uguagliando questa espressione con (3.7), abbiamo

$$\Gamma_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_A(t+kT).$$

L'ultima serie converge uniformemente in quanto i suoi termini decrescono esponenzialmente.

3.4 Generalizzazioni

In questo paragrafo accenniamo a possibili estensioni della teoria svolta. Partendo ancora una volta dal problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), & t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

si considera il caso più generale di un operatore $A : D(A) \subseteq X \to X$ lineare, chiuso (ma non continuo), con dominio $D(A)$ denso in X, sotto opportune ipotesi relative allo spettro $\sigma(A)$.
Il prototipo di questo tipo di operatori è certamente il Laplaciano $\Delta =$

$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, definito su uno spazio opportuno di funzioni di n variabili. Consideriamo dunque, ad esempio, lo spazio di Hilbert $B = L^2(\Omega)$, dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ con frontiera regolare. Risulta allora

$$D(\Delta) = \{v \in H^{2,2}(\Omega) : v = 0 \text{ su } \partial\Omega\},$$

dove $H^{2,2}(\Omega)$ è lo spazio di Sobolev delle funzioni $v \in L^2(\Omega)$ tali che tutte le derivate prime e seconde appartengono a $L^2(\Omega)$ (si veda ad esempio [1]). È noto che il risolvente di questo operatore è contenuto nella semiretta negativa $(-\infty, 0)$ del piano complesso, e che per ogni settore $\mathbb{C}$ della forma

$$\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \rho e^{i\alpha},\ \rho \geq 0,\ |\alpha| \leq \theta\}, \qquad \theta \in (\pi/2, \pi),$$

vale una maggiorazione della forma

$$\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{M_\theta}{1 + |\lambda|} \qquad \forall \lambda \in \Sigma_\theta.$$

Questa stima permette di dimostrare che il semigruppo $\{e^{At}\}_{t>0}$ è ben definito e vale

$$\|e^{At}\| \leq M e^{-\omega t},$$

per opportuni $M > 0$ e $\omega > 0$.
La teoria svolta nel caso in cui $A \in \mathcal{L}(B)$ si può estendere ad operatori di questo tipo sotto ipotesi in realtà ancora più blande. L'equazione astratta $x' = Ax + f$ quando A è il Laplaciano equivale allo studio dell'equazione alle derivate parziali parabolica

$$\begin{cases} x_t(t,\xi) = \Delta x(t,\xi) + f(t,\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad t > 0, \\ x(t,\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ x(0,\xi) = x_0(\xi), \quad \xi \in \Omega. \end{cases}$$

Per approfondimenti si rimanda al libro di Engel e Nagel [3].

Bibliografia

[1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, Sobolev Spaces, Academic Press, 2003.

[2] Ju. L. Daleckii and M. G. Krein, Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Spaces, American Mathematical Society, 1974.

[3] K.-J. Engel, R. Nagel, One Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer, 1999.

[4] K. Yosida, Functional Analysis, Springer, 1980.

[5] A. Lunardi, Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser, 1995.

[6] C. Corduneanu, Almost periodic function, Chelsea Publishing Company, 1989.

Ringraziamenti

Il mio primo grazie lo rivolgo al mio relatore,nonché mio professore di analisi, Paolo Acquistapace, che mi ha seguito benissimo nella stesura di questa tesi. Non ci sono parole per ringraziare la sua disponibilità e per descrivere quanto mi sia stato di sostegno, non solo in qualità di relatore, ma anche come persona.

Ringrazio Colui che mi ha teso la mano ad ogni mia caduta, che ha accompagnato ogni mio passo, sorridendomi nei momenti di stabilità e sorreggendomi in quelli di fragilità e che mi ha insegnato a condividere con chi amo e con chi mi è accanto le cose belle e brutte, quella quotidianità fatta di successi e insuccessi che accomuna ogni uomo.

Subito dopo, mi sento di dire un grazie speciale alla mia fantastica famiglia, per avermi dato (e per darmi tuttora) la possibilità di realizzare i miei sogni e le mie ambizioni, per essermi stata accanto in questi studi ogni giorno, sollecitandomi continuamente a non arrendermi, a non perdere di vista, tra i mille scoraggiamenti e le numerose difficoltà, la meta per cui ho iniziato questa facoltà. Non basterebbe un libro intero per dire quanto ognuno di loro (mamma, papà, Francesco e Filippo) mi ha dato in questo periodo qui a Pisa, nonostante la lontananza. E con loro ringrazio tutta la mia famiglia giù, Mariarosaria e le amiche che, pur distanti, mi sono state vicine. In particolare ricordo Gianna, che mi ha spesso ascoltata e incoraggiata e Giusi, una persona il cui sostegno non mi è mai mancato.

Mi muovo ora col pensiero dal mio piccolo paesino della Puglia a questa cittadina, in cui ho conosciuto persone magnifiche e che non posso assolutamente non citare, perché è con loro che oggi condivido la fine di una parte (spero la più difficile) del mio percorso di studi. Ringrazio Flavia, Marianna e Lucianna, con cui ho condiviso la maggior parte delle ansie "universitarie" (e non solo), da cui ho sempre avuto una spalla su cui piangere e un cuore sempre aperto a gioire dei miei "successi". In particolare, ringrazio Flavia e Marianna della loro amicizia sincera e della loro bellissima, costante e arricchente presenza nella mia vita. Un grazie speciale è per Valeria, che è un'amica eccezionale, nonché una collega bravissima e sempre disponibile. Grazie per il suo sostegno ("pratico" e psicologico) in questi studi e per la sua vicinanza nella preparazione di questa tesi e in ogni circostanza della mia vita degli ultimi tre anni.

Ringrazio i miei coinquilini, Mariassunta, Ilaria e Salvo, perché ogni giorno riscopro la bellezza di condividere con loro la maggiorparte della mia vita, e in particolare Salvo, per avermi dato un forte appoggio soprattutto nell'ultimo periodo, in cui ho avuto molte difficoltà a terminare i tre esami (soprattutto i due di fisica) che mi allontanavano da questo giorno. Grazie di cuore a Rosaelma e Francesca, le sorelle che ho avuto e sentito sempre

al mio fianco, per le chiacchierate, allegre e seriose, per la condivisione di momenti intensi, per i loro sorrisi che mi hanno sempre caricata. Un pensiero di ringraziamento va a Maria Pina, Tommaso e Salvatore per i numerosi momenti condivisi insieme, in cui le loro battute mi hanno fatto sorridere anche quando l'amarezza delle preoccupazioni pesava sul mio cuore. Calorosamente ringrazio Mary e Tommy, per il loro affetto, soprattutto durante la stesura di questo lavoro, e per la loro presenza nella mia vita. Ringrazio ancora Melania, per i suoi dolci sorrisi, da cui mi sono sentita sempre incoraggiata e appoggiata. Grazie alle mie "famiglie del Nord": la famiglia De Mattei, quella Benvenuti e quella Bredice, perché mi hanno appoggiato e seguito quasi come una figlia nelle numerose vicissitudini della mia vita qui a Pisa.
Grazie a Alessandra, Tosca, Maria Luisa, Donatella,S. Anna, P. Cristoforo e D. Claudio, punti di riferimento per me, la cui vicinanza e il cui esempio sono stati (e lo sono tuttora) essenziali.
Grazie a queste persone per il loro supporto e per le parole di incoraggiamento, preziose nei momenti più critici e nauseanti in cui la stanchezza e la delusione l'avrebbero sicuramente avuta vinta; mentre se a volte sono riuscita a "mettere la marcia giusta", a "passare dalla terza alla quarta" lo devo a loro.
Grazie a tante persone che non nomino ma che, pur magari condividendo con me pochi istanti(o forse qualcosina in più), hanno lasciato, e tuttora lasciano, in me il segno della loro presenza.
So di aver elencato tante persone (e per questo potrei essere giudicata facile e superficiale nelle relazioni), ma non ho deciso di farlo per dare un tocco poetico alla mia tesi, per aggiungervi una pagina in più o per darle chissà quale spessore, ma semplicemente perchè" spessore" sono loro a darlo a me quotidianamente.
Infine ringrazio lei, che è arrivato a leggere quest'ultima pagina, o che"per caso" ha letto solo questa, saltando la cinquantina di pagine che la precedono, per il suo coraggio a arrivare fino in fondo in questo poema. Grazie!