Corso di Matematica per Scienze geologiche - compitini

Compitino del 6 novembre 2003

Esercizio 1 Determinare i numeri $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} 3x - 2 > -5x + \frac{3}{2} \\ 2x - \frac{1}{3} \geq 5x - 4. \end{cases}$$

Esercizio 2 Trovare le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$|x^2 - 1| - |x^2 - 5| = 3.$$

Esercizio 3 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore, stabilendo se si tratti di massimo o di minimo, dell'insieme

$$\left\{ \frac{n^2 + 3n + 3}{n^3 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esercizio 4 Dimostrare che se $a \in]0, 1[$ allora, posto

$$x_0 = a; \quad x_{n+1} = x_n - x_n^3 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

risulta $x_n \in]0, 1[$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 5 La funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

è iniettiva? Qual'è la sua immagine Y? Provare che la restrizione di f alla semiretta $[0, \infty[$ è iniettiva e scriverne l'inversa $f^{-1} : Y \to [0, \infty[$.

Esercizio 6 Verificare che

$$\frac{1}{4} < \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} < \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Esercizio 7 Determinare l'immagine della retta $r \subset \mathbb{R}^2$ di equazione $3x - y + 1 = 0$ rispetto alla rotazione di $\frac{\pi}{4}$ attorno all'origine.

Esercizio 8 Calcolare l'area del triangolo di vertici $(1,1)$, $(2,5)$ e $(-1,4)$.

Esercizio 9 Determinare la retta $r \subset \mathbb{R}^3$ passante per $(1,0,-1)$ e parallela al piano π di equazione $3x+2y+z=6$.

Esercizio 10 Data l'iperbole di equazione $x^2-4y^2=16$, se ne trovino i fuochi e le intersezioni con gli assi.

Compitino del 17 dicembre 2003

Esercizio 1 Determinare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)$.

Esercizio 2 Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2^n}$ è convergente?

Esercizio 3 Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(3^{4/x}+1)$.

Esercizio 4 Quante soluzioni reali ha l'equazione $e^{67x}+x^{67}=0$?

Esercizio 5 Posto $f(x)=2^x+x^3$, verificare che f è bigettiva su $\mathbb{R}$, con inversa derivabile, e scrivere $(f^{-1})'(1)$.

Esercizio 6 Stabilire se la funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+3}$ ha un asintoto obliquo per $x\to-\infty$, oppure no.

Esercizio 7 Determinare, se esistono, i massimi e i minimi relativi della funzione $f(x)=e^{2\cos x-|x|}$.

Esercizio 8 Determinare $a,b\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\arctan x & \text{se } x\le 1\\ a\cos\pi x+b\sin\pi x & \text{se } x>1\end{cases}$$

sia derivabile con derivata continua su $\mathbb{R}$.

Esercizio 9 In quali intervalli di $\mathbb{R}$ la funzione $f(x)=|x^2-x-2|$ è crescente e convessa?

Esercizio 10 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\sin t\,dt$.

Compitino del 25 novembre 2004

Si risponda alle seguenti domande senza fornire giustificazioni.

1. Si trovino le soluzioni della diseguaglianza $|2x^5 - 33| > 31$.

2. L'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^3-1}{x^3-2} > 1\right\}$ è limitato?

3. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di $\frac{x^2}{1+x^2}$ quando $x \in \mathbb{R}$, e stabilire se sono rispettivamente valori di massimo o di minimo.

4. Determinare le soluzioni dell'equazione $\cos x \sin x + (\cos x)^2 = 1$.

5. Si tracci schematicamente il grafico della funzione $x \mapsto 3 - \sin(x-2)$.

6. Consideriamo la retta r di equazione $y = 2x - 1$ e l'iperbole h di equazione $x^2 - 4y^2 = 1$; si scrivano le equazioni delle trasformate di r e di h rispetto alla simmetria che scambia fra loro gli assi x e y.

7. Determinare le rette del piano che distano 3 dall'origine e che passano dal punto $(2,3)$.

8. Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente i punti $(1,2,3)$, $(1,5,1)$ e $(1,2,2)$.

9. Stabilire per quali valori del parametro reale α è risolubile il sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = \alpha \\ 7x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Compitino del 21 dicembre 2004

Si risponda alle seguenti domande senza fornire giustificazioni.

1. Determinare i numeri complessi z tali che $z^2 + z + 1 = 0$.

2. Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{n\to\infty} n! \cdot 2^{-n^2}$.

3. Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{-x} - 1}{\ln(3^x + \sin x)}$.

4. Stabilire in quali punti $x_0 \in \mathbb{R}$ è discontinua la funzione $f(x) = [\sin x] + [\cos x]$, ove con $[a]$ si denota la parte intera del numero a.

5. Determinare, se esiste, l'asintoto obliquo per $x \to -\infty$ relativo alla funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2x+3}$.

6. Determinare, se esiste, l'inversa della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (2^x + 1)^3$ e scriverne la derivata.

7. Determinare, se esistono, i punti di massimo relativo e i massimi relativi della funzione $f(x) = e^{-x+2\cos x}$.

8. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = x^3 - y^3$ nel punto $(-1, 2)$.

9. Scrivere il polinomio di Taylor di centro $x_0 = 0$ e grado 2 per la funzione $f(x) = \sqrt{1 + e^{2x}}$.