Corso di laurea in Ingegneria civile - ambientale - edile
Compitini di Analisi 2

Primo compitino - 26 febbraio 2016

Esercizio 1 Si consideri la successione

$$g_n(x,y) = \frac{n}{e^{-n(x-y)} + nx}, \qquad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

(i) Determinare l'insieme dei punti (x,y) nei quali la successione $\{g_n\}$ converge puntualmente, e trovarne il limite puntuale $g(x,y)$.

(ii) Individuare i sottoinsiemi D di $([0,\infty[\,)^2$ tali che $g_n \to g$ uniformemente in D.

Esercizio 2 Dato l'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 - y^2 - (x-y)^2 = 1\},$$

si consideri la funzione

$$f(x,y) = (x-3y)^2.$$

(i) Si provi che

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \to \infty \\ (x,y) \in E}} f(x,y) = +\infty.$$

(ii) Si calcoli il valore minimo di f su E.

Esercizio 3 Si consideri la curva Γ data da

$$\begin{cases} x = \sin t \sin 2t \\ y = \sin t \cos 2t \\ z = 2t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(i) Si calcoli l'integrale

$$\int_\Gamma \sqrt{5 + 3(x^2+y^2)}\, ds.$$

(ii) Si calcoli il lavoro compiuto lungo Γ, orientata nel verso delle t crescenti, dal campo

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}, 2 \right).$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Per $x \geq 0$ e $y \geq 0$ le g_n sono ben definite. Analizziamo la convergenza puntuale: conviene scrivere

$$g_n(x,y) = \frac{1}{\frac{e^{-n(x-y)}}{n} + x}$$

ed osservare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nt}}{n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0; \end{cases}$$

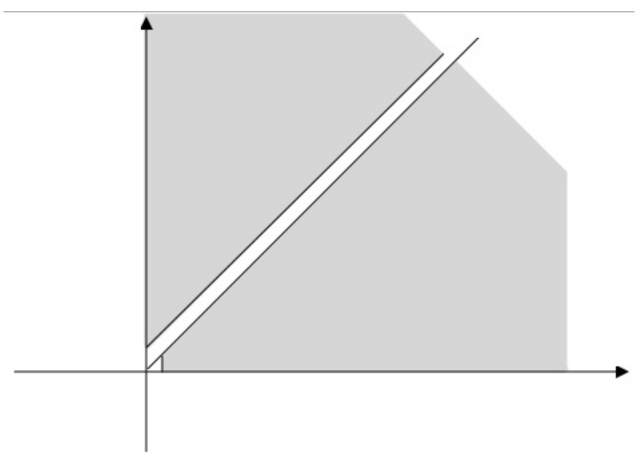
si vede subito allora che per ogni (x,y) con $x \geq 0$ e $y \geq 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \geq y,\ x > 0 \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < y \\ +\infty & \text{se } 0 = x = y. \end{cases}$$

(ii) La funzione g è discontinua in tutti i punti (x_0,x_0) con $x_0 > 0$: tuttavia, g è discontinua solo quando $(x,y) \to (x_0,x_0)$ "dall'alto", ossia mantenendo $y > x$, perché in tal caso $g(x,y) = 0$ mentre $g(x_0,x_0) = \frac{1}{x_0}$. E allora, se per $\delta > 0$ consideriamo gli insiemi

$$D_\delta = \{(x,y) \in ([0,\infty[\,)^2 :\ 0 \leq x \leq y - \delta\}, \quad E_\delta = \{(x,y) \in ([0,\infty[\,)^2 :\ x \geq \max\{y,\delta\}\},$$

si può dimostrare che $g_n \to g$ uniformemente in $D_\delta \cup E_\delta$. Infatti:



$$\begin{aligned} \sup_{(x,y)\in D_\delta} |g_n(x,y) - g(x,y)| &= \sup_{(x,y)\in D_\delta} g_n(x,y) = \sup_{0\leq x\leq y-\delta} \frac{1}{\frac{e^{-n(x-y)}}{n} + x} \leq \\ &\leq \sup_{0\leq x\leq y-\delta} \frac{1}{\frac{e^{-n(x-y)}}{n}} = \sup_{0\leq x\leq y-\delta} \frac{n}{e^{n(y-x)}} \leq \frac{n}{e^{n\delta}} \end{aligned}$$

e similmente

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y)\in E_\delta} |g_n(x,y) - g(x,y)| &= \sup_{x\geq\max\{y,\delta\}} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{e^{-n(x-y)}}{n} + x}\right] = \\ &= \sup_{x\geq\max\{y,\delta\}} \frac{\frac{e^{-n(x-y)}}{n}}{x\left(\frac{e^{-n(x-y)}}{n} + x\right)} \leq \sup_{x\geq\max\{y,\delta\}} \frac{1}{nx^2} = \frac{1}{n\delta^2}, \end{aligned}$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in D_\delta} |g_n(x,y)-g(x,y)| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in E_\delta} |g_n(x,y)-g(x,y)| = 0,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in D_\delta\cup E_\delta} |g_n(x,y)-g(x,y)| = 0.$$

Esercizio 2 (i) Possiamo riscrivere la condizione di appartenenza al vincolo E nel modo seguente:

$$1 = x^2 - y^2 - (x-y)^2 = -2y^2 + 2xy.$$

Allora, utilizzando l'equazione del vincolo,

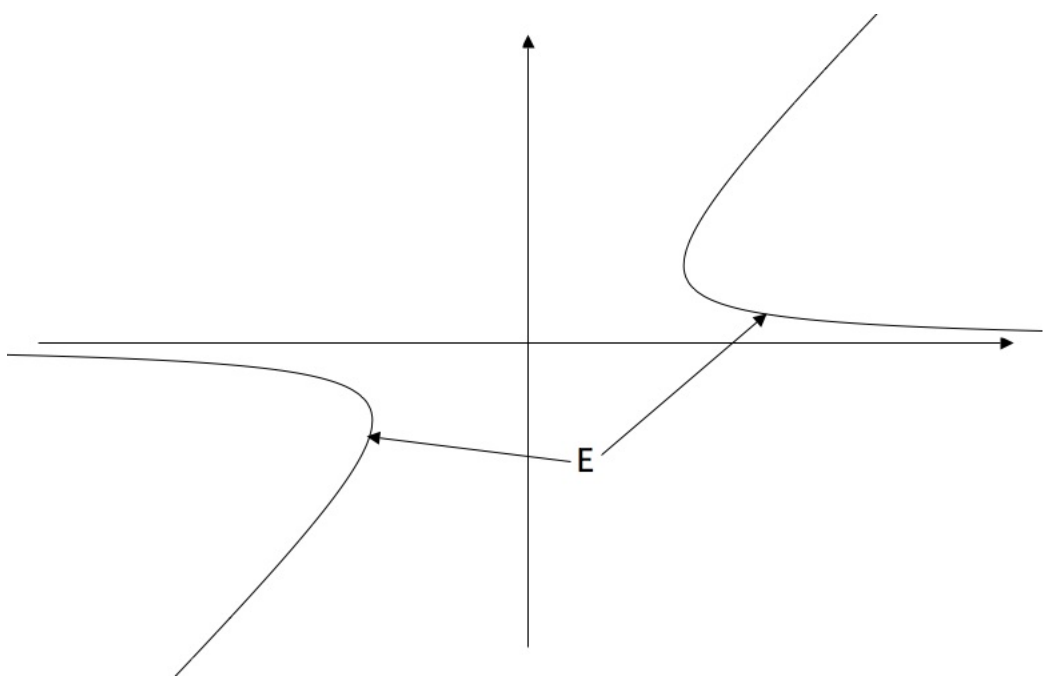
$$f(x,y) = (x-3y)^2 = x^2 + 9y^2 - 6xy = x^2 + 3y^2 - 3.$$

Da qui segue che E non è limitato: infatti

$$(x,y)\in E \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1 = \frac{1+2y^2}{2y},$$

da cui $x\to\infty$ se $y\to\infty$. Dalla scrittura di f precedente si deduce anche, immediatamente,

$$\lim_{\substack{x^2+y^2\to\infty \\ (x,y)\in E}} f(x,y) = +\infty.$$



(ii) Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori. Cerchiamo quindi i punti stazionari (x,y,λ) della funzione

$$L(x,y,\lambda) = (x-3y)^2 - \lambda(-2y^2+2xy-1).$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2(x-3y) - 2\lambda y = 0 \\ -6(x-3y) + 4\lambda y - 2\lambda x = 0 \\ -2y^2 + 2xy = 1. \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x - (3+\lambda)y = 0 \\ -(3+\lambda)x + (8+2\lambda)y = 0 \\ -2y^2 + 2xy = 1. \end{cases}$$

Poiché l'origine non appartiene al vincolo, dobbiamo imporre che λ sia un autovalore della matrice dei coefficienti, ossia che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -3-\lambda \\ -3-\lambda & 9+2\lambda \end{pmatrix} = (8+2\lambda) - (3+\lambda)^2 = -\lambda^2 - 4\lambda = 0,$$

e le radici sono chiaramente $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$.
Per $\lambda = \lambda_1 = 0$ il sistema fornisce $x - 3y = 0$, ossia $x = 3y$, e inserendo nella terza equazione si ha $4y^2 = 1$: troviamo quindi i due punti

$$(x,y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad (x,y) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

I valori di f in questi due punti sono uguali:

$$f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0, \qquad f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 0.$$

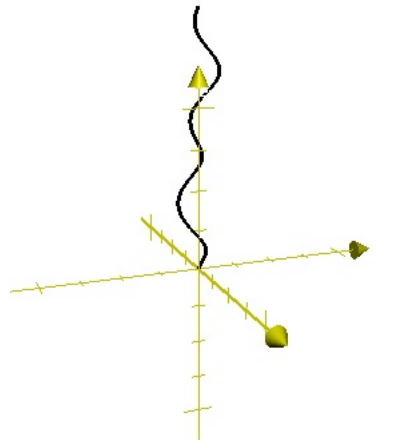
Per $\lambda = \lambda_2 = -4$ il sistema dà $x + y = 0$, ossia $x = -y$: questa uguaglianza, inserita nella terza equazione, porta a $1 = -4y^2$, che non ha soluzione.
I due punti trovati sono necessariamente punti di minimo assoluto di f in E; invece f non ha massimo in E, essendo, come abbiamo visto, illimitata in E.

Esercizio 3 (i) Si ha

$$x'(t) = \cos t \sin 2t + 2 \sin t \cos 2t,$$
$$y'(t) = \cos t \cos 2t - 2 \sin t \sin 2t,$$
$$z'(t) = 2,$$

quindi si ottiene facilmente $ds = \sqrt{cos^2 t + 4\sin^2 t + 4}\, dt = \sqrt{5 + 3\sin^2 t}\, dt$. Perciò

$$\int_\Gamma \sqrt{5 + 3(x^2+y^2)}\, ds = \int_0^{2\pi} (5 + 3\sin^2 t)\, dt = 10\pi + 3\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = 13\pi.$$



(ii) Dobbiamo calcolare

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{V}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds,$$

ove $\boldsymbol{\tau}$ è il versore tangente a Γ, orientato nel verso delle t crescenti. Si ha dunque, per la cancellazione del fattore di normalizzazione $\sqrt{5 + 3\sin^2 t}$ con il fattore contenuto in ds,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \langle \mathbf{V}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos 2t}{\sin t} (\cos t \sin 2t + 2 \sin t \cos 2t) - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\sin 2t}{\sin t} (\cos t \cos 2t - 2 \sin t \sin 2t) + 4 \right] dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left[2\cos^2 t \cos 2t + 2\cos^2 2t - 2\sin^2 t \cos 2t + 2\cos^2 2t + 4 \right] d = \\
&= \int_0^{2\pi} 6 \, dt = 12\pi.
\end{aligned}$$

Secondo compitino - 24 maggio 2016

Esercizio 1 Si trovi, se esiste, il valore del limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_E e^{n(x+y) - n^2(x^2+y^2+1)} \, dx dy,$$

ove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq y\}$.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_D z^2(x + y^2) \, dx dy dz,$$

ove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Esercizio 3 Si determini il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2yz + 2x, xy^2z - 3y, xyz^2 + 4z)$$

lungo la curva bS, bordo della superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2(1 + z^2) + y^2(1 - z^2) = 1 - z^2, \ z \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq 1\};$$

l'orientazione di bS è quella coerente con l'orientazione di S per la quale la terza componente di $\mathbf{n}$ è positiva.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione integranda può essere scritta nella forma

$$e^{-n^2(x^2+y^2+1-(x+y)/n)},$$

da cui segue che

$$\lim_{n\to\infty} e^{n(x+y)-n^2(x^2+y^2+1)} = 0 \qquad \forall (x, y) \in E.$$

Vediamo se c'è convergenza dominata. Dato che $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} n(x + y) - n^2(x^2 + y^2 + 1) &\leq \frac{1}{2}(n^2 + x^2) + \frac{1}{2}(n^2 + y^2) - n^2(x^2 + y^2 + 1) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - n^2\right)(x^2 + y^2) \leq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad \forall n \geq 1, \quad \forall (x, y) \in E, \end{aligned}$$

e dunque

$$e^{n(x+y)-n^2(x^2+y^2+1)} \leq e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall (x, y) \in E.$$

Pertanto, per il teorema di Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E e^{n(x+y)-n^2(x^2+y^2+1)}\, dxdy = 0.$$

Esercizio 2 Utilizzando le coordinate cilindriche, l'insieme D è descritto dalle relazioni

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad r^2 \leq z \leq 2 - r, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi;$$

la prima condizione implica $r^2 \leq 2 - r$, ossia $r^2 + r - 2 \leq 0$, il che significa $-2 \leq r \leq 1$; ma r è sempre non negativo, quindi si ha $0 \leq r \leq 1$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_D z^2(x + y^2)\, dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{2-r} z^2(r\cos\vartheta + r^2\sin^2\vartheta)\, r\, dzdrd\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi}\cos\vartheta\int_0^1 r^2\int_{r^2}^{2-r} z^2\, dzdrd\vartheta + \int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta\int_0^1 r^3\int_{r^2}^{2-r} z^2\, dzdrd\vartheta. \end{aligned}$$

Il primo integrale all'ultimo membro è nullo. Ne segue

$$\int_D z^2(x + y^2)\, dxdydz = \int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta\int_0^1 r^3\int_{r^2}^{2-r} z^2\, dzdrd\vartheta = \frac{\pi}{3}\int_0^1 \left(r^3(2 - r)^3 - r^9\right) dr.$$

Possiamo sviluppare il cubo, oppure integrare per parti. Scegliendo la seconda opzione si ha

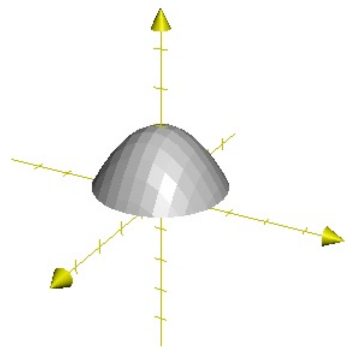
$$\frac{\pi}{3}\int_0^1 \left(r^3(2-r)^3 - r^9\right) dr = \frac{\pi}{3}\left\{\left[-\frac{1}{10}r^{10} - \frac{1}{4}r^3(2-r)^4\right]_0^1 + \frac{3}{4}\int_0^1 r^2(2-r)^4\, dr\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left\{\left[-\frac{1}{10}r^{10} - \frac{1}{4}r^3(2-r)^4 - \frac{3}{20}r^2(2-r)^5\right]_0^1 + \frac{3}{10}\int_0^1 r(2-r)^5\, dr\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[-\frac{1}{10}r^{10} - \frac{1}{4}r^3(2-r)^4 - \frac{3}{20}r^2(2-r)^5 - \frac{1}{20}r(2-r)^6 - \frac{1}{140}(2-r)^7\right]_0^1 = \frac{5\pi}{42}\,.$$

Esercizio 3 Dobbiazmo calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{bS} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3\, ds,$$



con $\boldsymbol{\tau}$ vettore tangente convenientemente orientato. La superficie S è cartesiana: infatti si ha

$$x^2(1+z^2) + y^2(1-z^2) = 1 - z^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z^2(1+y^2-x^2) = 1 - x^2 - y^2,$$

e ricordando che deve essere $x^2+y^2 \le 1$ si trova

$$x^2(1+z^2) + y^2(1-z^2) = 1 - z^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2-y^2}}\,.$$

Inoltre

$$bS = \{(x,y,z):\ z = 0,\ x^2+y^2 = 1\},$$

ossia bS è la circonferenza unitaria del piano xy. Poiché su S la normale che ha terza componente positiva è quella esterna, l'orientazione coerente di bS è quella antioraria del piano xy.

Allora per il nostro calcolo possiamo utilizzare il teorema di Stokes, scegliendo come superfiucie Σ una *qualsiasi* superficie regolare che abbia come bordo la circonferenza unitaria del piano xy: ad esempio, il disco $D = \{(x,y,0):\ x^2+y^2 \le 1\}$. Con questa scelta si ottiene

$$\int_{bS} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3\, ds = \int_D \langle \mathrm{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3\, d\sigma.$$

Notiamo ora che, con facili calcoli,

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = \big(x(z^2-y^2), y(x^2-z^2), z(y^2-x^2)\big);$$

inoltre risulta $\mathbf{n} = (0,0,1)$ su D. Dunque si conclude, essendo $z = 0$ su D, che

$$\int_{bS} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3\, ds = \int_D \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3\, d\sigma = 0.$$

Primo compitino - 20 novembre 2017

Esercizio 1 Data la funzione

$$F(x,y) = x^2y^2 + y^3 + 2y,$$

si analizzi l'insieme

$$Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ F(x,y) = 0\}$$

verificando che in ogni punto $(x_0, y_0) \in Z$ è applicabile il teorema delle funzioni implicite. Scelto $(x_0, y_0) = (\sqrt{3}, -1)$, scrivere inoltre:

(i) l'equazione della retta tangente a Z nel punto $(\sqrt{3}, -1)$;

(ii) il polinomio di Taylor di centro $\sqrt{3}$ e grado 2 della funzione implicita.

Esercizio 2 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = (y - x^2)^2$$

nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + 2 \le y \le \sqrt{4 - x^2}\}.$$

Esercizio 3 Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^n + x^{5n}}{1 + x^{2n}}, \qquad x \in [-1, 1].$$

(i) Determinare il limite puntuale $f(x)$ della successione $\{f_n\}$ per $n \to \infty$, nei punti di $[-1, 1]$ in cui esso esiste;

(ii) Stabilire in quali sottointervalli di $[-1, 1]$ la convergenza delle f_n verso f è uniforme.

Risoluzione

Esercizio 1 La F è di classe C^∞ e si ha

$$\nabla F(x,y) = (2xy^2, 2x^2y + 3y^2 + 2);$$

se in un punto (x, y) il gradiente di F si annulla, allora dal sistema

$$\begin{cases} F_x(x,y) = 2xy^2 = 0 \\ F_y(x,y) = 2x^2y + 3y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

segue subito che x, oppure y, è nulla. Ma da $x = 0$ segue $3y^2 + 2 = 0$, assurdo, mentre da $y = 0$ ricaviamo $2 = 0$, assurdo. Dunque

$$\nabla F(x,y) \neq \mathbf{0} \qquad \forall (x.y) \in \mathbb{R}^2.$$

In particolare, in ogni punto $(x_0, y_0) \in Z$ vale il teorema del Dini, ossia esiste un intorno U di (x_0, y_0), tale che $Z \cap U$ è grafico di una funzione di classe C^∞.

(i) Scelto $(x_0, y_0) = (\sqrt{3}, -1)$, si ha $\nabla F(\sqrt{3}, -1) = (2\sqrt{3}, -1)$; quindi esiste una funzione g di classe C^∞, invertibile, definita in un intorno V di $\sqrt{5}$, a valori in un intorno W di -1, tale che $(x, y) \in Z \cap (W \times V)$ se e solo se $y = g(x)$. La retta tangente a Z in $(\sqrt{3}, -1)$ ha equazione

$$F_x(\sqrt{3}, -1)(x - \sqrt{3}) + F_y(\sqrt{3}, -1)(y + 1) = 0,$$

ossia

$$2\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) - (y + 1) = 0.$$

(ii) Poiché si richiede di scrivere un polinomio di Taylor che ha centro in $\sqrt{3}$, la funzione implicita da considerare è proprio $g(x)$ (e non $g^{-1}(y)$). Dalla relazione

$$F(x, g(x)) = x^2 g(x)^2 + g(x)^3 + 2g(x) = 0$$

segue, derivando due volte,

$$2xg(x)^2 + 2x^2 g(x)g'(x) + 3g(x)^2 g'(x) + 2g'(x) = 0,$$
$$2g(x)^2 + 8xg(x)g'(x) + 2x^2 g'(x)^2 + 6g(x)g'(x)^2 + [2x^2 g(x) + 3g(x)^2 + 2]g''(x) = 0;$$

Calcolando in $x = \sqrt{3}$, essendo $g(\sqrt{3}) = -1$, la prima equazione fornisce

$$2\sqrt{3} - 6g'(\sqrt{3}) + 3g'(\sqrt{3}) + 2g'(\sqrt{3}) = 0, \quad \text{ossia} \quad g'(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3},$$

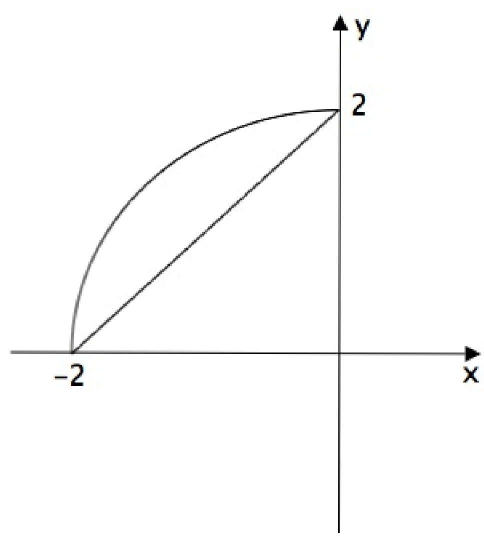
mentre dalla seconda si ricava

$$2 - 48 + 72 - 72 + (-6 + 3 + 2)g''(\sqrt{3}) = 0, \quad \text{ossia} \quad g''(\sqrt{3}) = -46.$$

Pertanto il polinomio cercato è

$$p(x) = -1 + 2\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) - 23(x - \sqrt{3})^2.$$

Esercizio 2 L'insieme E è disegnato in figura. Cerchiamo i punti stazionari interni ad E: il sistema



$$\begin{cases} 4x(y - x^2) = 0 \\ 2(y - x^2) = 0 \end{cases}$$

ha come soluzioni i punti della parabola di equazione $y = x^2$ che giacciono all'interno di E: si tratta dei punti (x, x^2) tali che $x + 2 < x^2 < \sqrt{4 - x^2}$, ossia tali che

$$-1.2496 \simeq -\sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}} < x < -1.$$

In questi punti comunque la f vale 0, e questo è sicuramente il valore minimo di f in

E. Inoltre i punti del bordo

$$\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}, \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right), \qquad (-1,1)$$

sono certamente punti stazionari vincolati con moltiplicatore $\lambda = 0$, nei quali il valore di f è nullo.
Sul bordo vi sono poi due punti singolari (in cui non vi è retta tangente), cioè i vertici $(-2,0)$ e $(0,2)$ ove

$$f(-2,0) = 16, \qquad f(0,2) = 4.$$

Vediamo cosa succede sul segmento $y = x+2$, $-2 < x < 0$: si ha $f(x, x+2) = (x+2-x^2)^2$, la derivata vale $2(x+2-x^2)(1-2x)$ e nell'intervallo $]-2,0[$ il secondo fattore non si annulla mai, mentre il primo è nullo per $x^2-x-2=0$, ossia per $x=-1$, da cui $y=1$, e per $x=2$, esterno all'intervallo. Dunque su questo segmento troviamo solo il punto stazionario vincolato $(-1,1)$ già individuato in precedenza.
Infine vediamo cosa accade lungo l'arco di circonferenza $(x, \sqrt{4-x^2})$, $-2 < x < 0$. Scrivendo $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, otteniamo

$$f(2\cos t, 2\sin t) = (2\sin t - 4\cos^2 t)^2,$$

e la derivata vale $2(2\sin t - 4\cos^2 t)(2\cos t + 8\cos t \sin t)$. Tale derivata nell'intervallo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ si annulla solo quando $\sin t = 2\cos^2 t$; scrivendo $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, si ottiene il punto di ordinata $y = 2\sin t = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$ già trovato in precedenza.
Pertanto su ∂E non ci sono altri punti stazionari vincolati oltre a quelli già identificati.
Confrontando tutti i valori trovati si conclude che

$$\min_E f = f(x,x^2) = 0 \quad \forall x \in \left[-\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}, -1\right], \qquad \max_E f = f(-2,0) = 16.$$

Esercizio 3 Analizziamo la convergenza puntuale: si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

Dunque la funzione limite $f(x)$ è definita per $x \in]-1,1]$ e vale

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in]-1,1[\\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

La convergenza non può essere uniforme in $]-1,1]$, a causa della discontinuità della f nel punto 1, e nemmeno in $]-1, 1-\delta]$, con $\delta > 0$, a causa della non convergenza puntuale in -1. Invece in $[-1+\delta, 1-\delta]$ la convergenza è uniforme in quanto

$$|f_n(x)| \le \frac{|x|^n + |x|^{5n}}{1+x^{2n}} \le |x|^n + |x|^{5n} \le (1-\delta)^n + (1-\delta)^{5n} \qquad \forall x \in [-1+\delta, 1-\delta],$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1+\delta,1-\delta]} |f_n(x)| \le \lim_{n\to\infty} \left[(1-\delta)^n + (1-\delta)^{5n}\right] = 0.$$

Secondo compitino - 27 marzo 2018

Esercizio 1 Sia E il dominio che si ottiene ruotando intorno all'asse z l'insieme del piano xz

$$D = \{(x, z) :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2 - x\};$$

si calcoli l'integrale

$$\int_E \frac{z}{4 - x^2 - y^2}\, dxdydz.$$

Esercizio 2 Sia Γ la curva definita da

$$y = \cosh x, \qquad |x| \leq \ln 3.$$

(i) Si determini la retta normale a Γ nel punto $\left(\ln 2, \frac{5}{4}\right)$.

(ii) Si calcoli la lunghezza di Γ.

Esercizio 3 Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(e^x \left[\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x}{x^2 + y^2}\right],\ \frac{2y\, e^x}{x^2 + y^2}\right), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

(i) Stablire se $\mathbf{F}$ è conservativo e, in tal caso, trovarne un potenziale.

(ii) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva descritta in coordinate polari dall'equazione

$$r = \frac{1}{(\vartheta + 1)^2}\,, \qquad 0 \leq \vartheta \leq 4\pi.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Il dominio E è descritto dalla relazioni

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2},$$

e quindi, utilizzando le coordinate cilindriche,

$$0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq 2 - r, \qquad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{z}{4-x^2-y^2}\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2-r} \frac{z}{4-r^2}\,r\,dzdrd\vartheta = \\
&= 2\pi\int_0^1\int_0^{2-r} \frac{z}{4-r^2}\,r\,dzdr = \\
&= \pi\int_0^1 \left[z^2\right]_0^{2-r} \frac{r}{4-r^2}\,dzdr = \\
&= \pi\int_0^1 \frac{r(2-r)^2}{4-r^2}\,dzdr = \pi\int_0^1 \frac{r(2-r)}{2+r}\,dzdr = \\
&= \pi\int_0^1 \left(-r+4-\frac{8}{r+2}\right)\,dr = \\
&= \pi\left[-\frac{r^2}{2}+4r-8\ln(r+2)\right]_0^1 = \pi\left(\frac{7}{2}-8\ln\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (i) Ricordiamo che

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad x\in\mathbb{R}.$$

La curva si parametrizza come

$$x = x, \qquad y = \cosh x, \qquad -\ln 3 \le x \le \ln 3.$$

Quindi il vettore tangente a Γ è

$$\mathbf{T} = (1, \sinh x),$$

e dunque il vettore normale è

$$\mathbf{N} = \pm(\sinh x, -1).$$

La retta normale a Γ nel punto $\left(\ln 2, \frac{5}{4}\right)$ è quindi, in forma parametrica,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 2 \\ 5/4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \sinh\ln 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t\in\mathbb{R},$$

ossia, essendo $\sinh\ln 2 = \frac{2-1/2}{2} = \frac{3}{4}$,

$$\begin{cases} x = \ln 2 + \dfrac{3}{4}\,t, \\ \\ y = \dfrac{5}{4} - t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R};$$

altrimenti, volendo scrivere la retta in forma cartesiana,

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ln 2 \\ 5/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} \right\rangle_2 = 0,$$

ossia

$$y = -\frac{4}{3}(x - \ln 2) + \frac{5}{4}.$$

(ii) Essendo Γ una curva cartesiana, la sua lunghezza è data dalla formula

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &= \int_{-\ln 3}^{\ln 3} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\cosh x\right)^2}\, dx = \\ &= \int_{-\ln 3}^{\ln 3} \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = 2\int_0^{\ln 3} \cosh x\, dx = 2\sinh \ln 3 = \frac{8}{3}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3 (i) Vediamo se il campo è conservativo: risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2}\right]\right) = e^x\left[\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y\,e^x}{x^2+y^2}\right) = e^x\left(\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\right);$$

dunque le derivate incrociate sono uguali. Però il dominio dove è definito il campo vettoriale non è semplicemente connesso, perché vi è il "buco" $\{(0,0)\}$; dunque occorre verificare che sia nullo il lavoro di $\mathbf{F}$ su una fissata curva chiusa C che circondi l'origine. Per nostra comodità, scegliamo come C la circonferenza unitaria

$$x = \cos\vartheta, \quad y = \sin\vartheta, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi]:$$

risulta allora

$$\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{dx} = \int_0^{2\pi} \left[e^{\cos\vartheta}(-2\cos\vartheta\sin\vartheta) + 2\sin\vartheta\cos\vartheta\right] d\vartheta = \int_0^{2\pi} 0\, dx = 0.$$

Dunque il campo $\mathbf{F}$ è conservativo. Un suo potenziale f deve soddisfare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x\left[\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x}{x^2+y^2}\right] \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y\,e^x}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Integrando rispetto a y la seconda equazione si trova

$$f(x,y) = e^x \ln(x^2+y^2) + c(x).$$

Utilizzando la prima equazione e derivando questa espressione si ottiene

$$e^x\left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2}\right] = \frac{\partial f}{\partial x} = e^x\left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2}\right] + c'(x),$$

da cui $c'(x) = 0$ e dunque $c(x) =$ costante. Quindi un potenziale di $\mathbf{F}$ è

$$f(x,y) = e^x \ln(x^2+y^2).$$

Consideriamo infine l'integrale curvilineo proposto. La curva ha come primo estremo il punto corrispondente a $\vartheta = 0$, che è $(1,0)$, mentre il secondo estremo si ottiene per $\vartheta = 4\pi$, ed è $\left(\frac{1}{(4\pi+1)^2}, 0\right)$. Pertanto

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \bullet \mathbf{dx} = f\left(\frac{1}{(4\pi+1)^2}\,, 0\right) - f(1,0) = e^{1/(4\pi+1)^2} \ln\frac{1}{(4\pi+1)^4}.$$

Terzo compitino - 29 maggio 2018

Esercizio 1 Le targhe delle automobili italiane, come si sa, sono formate da due blocchi di 2 lettere (le usuali 26, tranne I, O, Q, U) e da un blocco intermedio di 3 cifre (fra 0 e 9).

(i) Quante targhe distinte, teoricamente, esistono?

(ii) Scelta a caso una targa, determinare la probabilità:

- **(a)** che la targa sia simmetrica, ossia non cambi se letta da destra verso sinistra;
- **(b)** che la targa contenga 3 lettere distinte, delle quali una ripetuta due volte;
- **(c)** cha la targa abbia le 3 cifre distinte e in ordine crescente.

(iii) Sapendo che la targa ha 3 lettere distinte, delle quali una ripetuta due volte, qual è la probabilità che le 2 lettere uguali siano entrambe nel primo blocco?

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria con legge gaussiana $\mathcal{N}(0,1)$. Posto $Y = e^X$, calcolare la speranza e la varianza di Y, e determinare per quali $c \in \mathbb{R}$ risulta

$$P(Y \leq c) \geq \frac{1}{4}.$$

Esercizio 3 Sia X una variabile aleatoria con densità

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^2} & \text{se } x > a, \\ 0 & \text{se } 0 < x \leq a, \end{cases}$$

ove a è un numero compreso fra 0 e 1.

(i) Si calcoli $P^a(X \geq 1)$.

(ii) Sia $X_1, \ldots, X_N$ un campione statistico di taglia N secondo le P^a. Posto

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i \leq 1, \\ 0 & \text{se } X_i > 1, \end{cases}$$

si determini la legge di Y_i e quella di $Y = \sum_{i=1}^N Y_i$ secondo P^a.

(iii) Si provi che $Z = 1 - \frac{Y}{N}$ è uno stimatore corretto del parametro a e se ne calcoli il rischio quadratico.

(iv) Sia $N = 20$. In presenza delle 20 osservazioni $x_1, \ldots, x_{20}$ della statistica $X_1, \ldots, X_{20}$, date da

0.31	1.10	1.04	0.85	1.17	0.69	1.08	0.75	0.91	0.60
1.22	0.80	0.77	0.90	1.02	0.68	0.49	0.81	0.94	1.26,

si stimi esplicitamente il parametro a mediante Z.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Dato che ogni lettera può scegliersi liberamente fra 22, e ogni numero può scegliersi liberamente fra 10, le targhe distinte sono $22^4 \cdot 10^3 = 234\,256\,000$.

(ii) (a) Affinché la targa sia simmetrica, le prime 2 lettere e i primi 2 numeri sono scelti arbitrariamente, mentre il terzo numero e le altre 2 lettere sono obbligate. Pertanto, esasendo ciascuna scelta equi-probabile, la probabilità di avere una targa simmetrica è

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{22^2} = \frac{1}{4840} \simeq 0.0002066.$$

(ii) (b) I casi favorevoli si ottengono osservando che le 3 lettere si scelgono in $\binom{22}{3}$ modi, i posti dove inserire 2 lettere uguali si scelgono in $\binom{4}{2}$ modi, e le lettere si possono permutare in 3! modi; i casi possibili sono 22^4. Perciò la probabilità ricbiesta è

$$\frac{\binom{22}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 3!}{22^4} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 6}{22^3} = \frac{2\,520}{10\,648} = \frac{315}{1331} = \simeq 0.2367.$$

(ii) (c) Dobbiamo scegliere tre numeri distinti: ciò si può fare in $9 \cdot 8$ modi su 100. Per ciascuno di questi modi, la scelta che dà i numeri in ordine crescente è una su 6. Perciò avremo una probabilità pari a

$$\frac{9 \cdot 8}{6 \cdot 100} = \frac{3}{25} = 0.12\,.$$

(iii) Siano

$$B = \{2 \text{ lettere uguali nel primo blocco}\},$$
$$L = \{3 \text{ lettere distinte, delle quali una ripetuta 2 volte}\}.$$

Dobbiamo calcolare $P(B|L)$: dalla formula di Bayes si ha

$$P(B|L) = \frac{P(L|B)P(B)}{P(L)}\,.$$

D'altra parte, $P(B) = \frac{1}{22}$, perché avere due lettere uguali significa che la prima è arbitraria mentre la seconda deve essere uguale alla prima; inoltre, $P(L|B) = \frac{21 \cdot 20}{22^2}$, perché se vi sono due lettere uguali nel primo blocco, per averne tre distinte occorre che nel secondo blocco ci siano 2 lettere distinte da quella del primo blocco e distinte fra loro (dunque 21 possibilità su 22 per la prima e 20 possibilità su 22 per la seconda); infine $P(L) = \frac{21 \cdot 20 \cdot 6}{22^3}$, come abbiamo visto. Ne segue subito

$$P(B|L) = \frac{1}{6}\,.$$

Si poteva anche ragionare direttamente così: se vi sono 2 lettere uguali e altre 2 lettere distinte dalle precedenti, le due uguali si possono collocare in $\binom{4}{2} = 6$ posizioni differenti: quella che le vede entrambe nel primo blocco è una su 6. Dunque la probabilità che si verifichi proprio quella collocazione è $\frac{1}{6}$.

Esercizio 2 Calcoliamo la speranza di Y:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[e^X] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^x\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}\, dx = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds = e^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Calcoliamo la varianza di Y:

$$\mathbf{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{2x}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx - e;$$

ma il primo integrale vale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2x}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{e^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^2} dx = \frac{e^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\, dx = \frac{e^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = e^2,$$

cosicché

$$\mathbf{Var}[Y] = e^2 - e.$$

Infine si ha $P(Y \le c) \ge \frac{1}{4}$ se e solo se $P(X \le \ln c) \ge \frac{1}{4}$, ovvero se e solo se $\ln c \ge \phi_{0.25}$. Dato che il quantile $\phi_{0.25}$ è negativo, non lo troviamo sulla tabella: occorre notare che dalla relazione $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ segue, con $x = -\phi_\alpha$, che

$$-\phi_\alpha = \phi_{1-\alpha}.$$

Dunque si ha $\phi_{0.25} = -\phi_{0.75} \simeq -0.68$, e pertanto

$$P(Y \le c) \ge \frac{1}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ln c \ge -0.68,$$

vale a dire $P(Y \le c) \ge \frac{1}{4}$ se e solo se $c \ge e^{-0.68} \simeq 0.5066$.

Esercizio 3 (i) Risulta

$$P^a(X \ge 1) = 1 - P^a(X \le 1) = 1 - \int_{-\infty}^{1} f_a(t)\, dt = 1 - \int_a^1 \frac{a}{t^2}\, dt = 1 - \left[-\frac{a}{t}\right]_a^1 = a.$$

(ii) Per ciascun indice $i = 1, \ldots, N$, la variabile aleatoria Y_i è bernoulliana di parametro $1-a$, dato che $P^a(Y_i = 1) = P^a(X_i \le 1) = 1 - a$ e $P^a(Y_i = 0) = P^a(X_i \ge 1) = a$. Di conseguenza la variabile aleatoria Y ha legge binomiale $\mathcal{B}(N, 1-a)$.

(iii) Dobbiamo mostrare che la speranza di Z è uguale ad a. Ed infatti

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[1 - Y/N] = \mathbb{E}[1] - \frac{1}{N}\mathbb{E}[Y] = 1 - \frac{1}{N}\, N(1-a) = a.$$

Calcoliamo il rischio quadratico di Z: essendo Z uno stimatore corretto, tale rischio coincide con la varianza di Z. Pertanto, posto $\overline{Y} = \frac{Y}{N}$, ed osservato che

$$\mathbb{E}[\overline{Y}] = 1 - a, \qquad \mathbf{Var}[\overline{Y}] = \frac{a(1-a)}{N}\,,$$

si ha

$$\mathcal{R}_Z(a) = \mathbf{Var}[Z] = \mathbf{Var}[1-\overline{Y}] = \mathbf{Var}[\overline{Y}] = \frac{a(1-a)}{N}.$$

(iv) Sia $N = 20$. Dobbiamo calcolare Z sulle osservazioni date: poiché $Y_i = 1$ se e solo se $X_i \leq 1$, per calcolare Y dobbiamo sommare una unità in corrispondenza delle osservazioni non superiori a 1, trascurando le altre. Si ha dunque, essendovi 13 osservazioni non superiori a 1,

$$Y = 13, \qquad Z = 1 - \frac{Y}{20} = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20} = 0.35.$$

Il parametro a è dunque stimato come 0.35, con un rischio quadratico pari a

$$\frac{a-a^2}{20} \simeq \frac{(0.35)(0.65)}{20} = 0.011375.$$

Compitino di recupero - 8 giugno 2018

Esercizio 1.1 Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ definita da

$$f_n(x) = \sqrt{|1-x^{2n}|}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Si calcoli, dove esiste, il limite puntuale della successione.

(ii) Si determinino gli intervalli dove la convergenza è uniforme.

(iii) Si stabilisca, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n(x).$$

Esercizio 1.2 Si trovi la soluzione del sistema differenziale

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) + 2 \\ v'(t) = 2u(t) - v(t) - 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

che verifica la condizione iniziale $u(0) = 1$, $v(0) = -2$.

Esercizio 1.3 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = e^{-x}(x^2+y)$$

nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Esercizio 2.1 Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme ottenuto dalla rotazione attorno all'asse z del chiuso E del piano xz, definito da

$$E = \{(x,z) : \ x^2 - 1 \leq z \leq (x-1)^2, \ 0 \leq x \leq 1\}.$$

Si determini il volume di A e si calcolino le coordinate del baricentro di A.

Esercizio 2.2 Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^3, z^3, x^3), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, \ z \leq 0 \right\},$$

orientata secondo il versore nornale $\mathbf{n}$ che ha terza componente $n_3 \leq 0$. **Esercizio 3.1** Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6 - x - y) & \text{se } (x, y) \in]0, 2[\times]2, 4[, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Si scrivano le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

(ii) Si calcolino la speranza e la varianza di X e di Y.

(iii) Si stabilisca se le due variabili aleatorie X e Y sono indipendenti.

Esercizio 3.2 Per un determinato canale di trasmissione, il tempo (misurato in secondi) necessario a ricevere un impulso è una variabile aleatoria X con densità $\mathcal{N}(\mu, 2.25)$, ove μ non è nota.

(i) In presenza di N osservazioni indipendenti di X, con media empirica $\overline{x} = 3.2$, si calcoli un intervallo di fiducia per μ di livello 0.99.

(ii) Nelle ipotesi precedenti, si stabilisca quante devono essere le osservazioni affinché l'intervallo di fiducia abbia ampiezza minore di 1.

Risoluzione

Esercizio 1.1 (i) Per calcolare il limite della successione è necessario distinguere i casi $|x| > 1$, $|x| = 1$ e $|x| > 1$. Per $|x| < 1$ si ha, essendo $x^{2n} \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - x^{2n}} = 1;$$

per $|x| = 1$ risulta direttamente $f_n(\pm 1) = \sqrt{1 - 1} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$; infine per $|x| > 1$ otteniamo, essendo $x^{-2n} \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} |x|^n \sqrt{1 - x^{-2n}} = +\infty.$$

In definitiva

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| = 1 \\ +\infty & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

(ii) La convergenza non può essere uniforme in $[-1,1]$, perché la funzione limite f è discontinua in ± 1. Fuori da $[-1,1]$, la f vale $+\infty$ e dunque la convergenza uniforme è fuori discussione. In $]-1,1[$ non vi è convergenza uniforme, visto che

$$\sup_{|x|<1} |f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{x\to 1^-} |f_n(x) - 1| = \lim_{x\to 1^-} \left|\sqrt{1-x^{2n}} - 1\right| = |0-1| = 1.$$

Tuttavia in ogni intervallo della forma $[-1+\delta, 1-\delta]$, con $0 < \delta < 1$, la convergenza è uniforme, poiché

$$\sup_{|x|\leq\delta} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{|x|\leq\delta} \left[1 - \sqrt{1-x^{2n}}\right] = \left[1 - \sqrt{1-\delta^{2n}}\right],$$

e d'altra parte

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 - \sqrt{1-\delta^{2n}}\right] = \left[1 - \sqrt{1}\right] = 0.$$

(iii) La serie data converge totalmente per $|x| \leq 1$: infatti

$$\sup_{|x|\leq 1} \frac{1}{n^2} f_n(x) = \frac{1}{n^2} f_n(0) = \frac{1}{n^2};$$

ne segue immediatamente la tesi per confronto con la serie convergente $\Sigma \frac{1}{n^2}$. Invece per $|x| > 1$ la serie diverge a $+\infty$, visto che, essendo $\frac{|x|^n}{n^2} \to +\infty$, risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^2} \sqrt{1 - x^{-2n}} = +\infty \qquad \forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\,.$$

In definitiva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n(x) \begin{cases} \text{converge totalmente in } [-1,1] \\ \text{diverge positivamente in }]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\,. \end{cases}$$

Esercizio 1.2 Consideriamo dapprima il sistema omogeneo. Gli autovalori della matrice dei coefficienti $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ si trovano risolvendo l'equazione

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = \lambda(1+\lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0:$$

le soluzioni sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$. Gli autovettori corrispondenti si trovano facilmente e sono $\binom{u_1}{v_1} = \binom{1}{-2}$, $\binom{u_2}{v_2} = \binom{1}{1}$. Si ha quindi la matrice

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^t \\ -2\,e^{-2t} & e^t \end{pmatrix},$$

le cui colonne costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni. L'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo è dunque

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} c_1\, e^{-2t} + c_2\, e^t \\ -2c_1\, e^{-2t} + c_2\, e^t \end{pmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Cerchiamo adesso una soluzione particolare del sistema non omogeneo: il termine noto è $\mathbf{f}(t) = \binom{2}{-1}$, e possiamo scegliere la soluzione $\mathbf{v_f}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}(t)$ con

$$\mathbf{c}(t) = \int_0^t \mathbf{W}(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\, ds.$$

Si ha, con calcoli facili,

$$\mathbf{W}(t)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ 2\, e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{W}(t)^{-1}\mathbf{f}(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \end{pmatrix},$$

e dunque

$$\mathbf{c}(t) = \frac{1}{3}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{2s} \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(e^{2t}-1) \\ \frac{1}{3}(1-e^{-t}) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{W}(t)\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(1-e^{-2t}) + e^t - 1 \\ -\,(1-e^{-2t}) + e^t - 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni del sistema non omogeneo è

$$V_{\mathbf{f}} = \left\{ \begin{pmatrix} c_1\, e^{-2t} + c_2\, e^t + \frac{1}{2}\,(1-e^{-2t}) + e^t - 1 \\ -2c_1\, e^{-2t} + c_2\, e^t - (1-e^{-2t}) + e^t - 1 \end{pmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Imponamo infine le condizioni di Cauchy: si trova

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 + c_2 = -2, \end{cases}$$

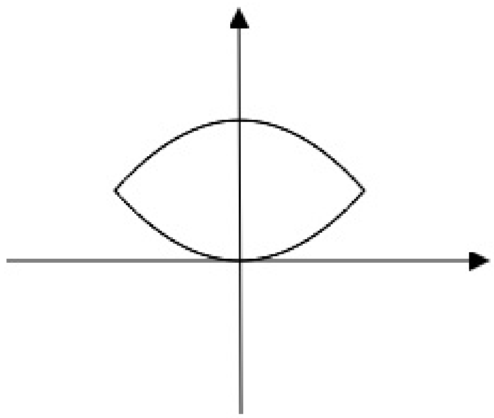
da cui, immediatamente, $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$. Dunque la soluzione richiesta è

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} + \frac{1}{2}\,(1-e^{-2t}) + e^t - 1 \\ -2\, e^{-2t} - (1-e^{-2t}) + e^t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\, e^{-2t} + e^t - \frac{1}{2} \\ -e^{-2t} + e^t - 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.3 La funzione f è di classe C^1 in D, cerchiamo i punti stazionari interni di f annullandone il gradiente: si ha $\boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{0}$ se e solo se

$$\begin{cases} -e^{-x}(x^2+y) + 2x\, e^{-x} = 0 \\ e^{-x} = 0, \end{cases}$$

e questo sistema non ha soluzioni.



Vediamo la situazione sul bordo ∂D: ci sono due punti dove non esiste la retta tangente, e sono i punti ove $x^2 = 1 - x^2$, vale a dire $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{2}$. In questi punti si ha

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Sulla parte inferiore del bordo, cioè la curva $y = x^2$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, si ha

$$f(x, x^2) = 2x^2\, e^{-x},$$

e la sua derivata è $4x\, e^{-x} - 2x^2\, e^{-x}$: essa si annulla per $x = 0$ e per $x = 2$, ma quest'ultimo punto è fuori dall'intervallo che ci interessa. Risulta

$$f(0, 0) = 0.$$

Sulla parte superiore del bordo, cioè la curva $y = 1 - x^2$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, si ha

$$f(x, 1 - x^2) = e^{-x},$$

quindi la derivata non si annulla mai.
In conclusione, confrontando i valori di f nei punti trovati, concludiamo che

$$\max_D f = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \qquad \min_D f = f(0, 0) = 0.$$

Esercizio 2.1 Calcoliamo il volume di A: trattandosi di un insieme di rotazione intorno all'asse z, possiamo integrare per circonferenze, usando la ben nota formula

$$m_3(A) = 2\pi \int_E x\, dxdz.$$

Dunque

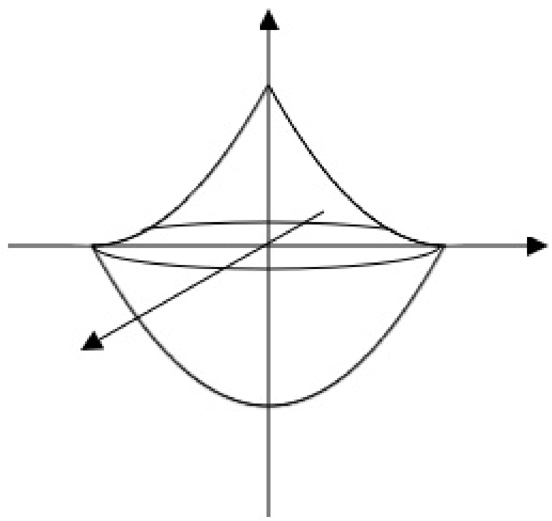
$$\begin{aligned} m_3(A) &= 2\pi \int_0^1 x \int_{x^2-1}^{(x-1)^2} dzdx = 2\pi \int_0^1 x\big((x-1)^2 - x^2 + 1\big)\, dx = \\ &= 2\pi \int_0^1 x(2 - 2x)\, dx = 4\pi \int_0^1 (x - x^2)\, dx = 4\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi. \end{aligned}$$

Calcoliamo il baricentro $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ di A. Per ragioni di simmetria, si ha $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Quanto a $\overline{z}$, si ha

$$\overline{z} = \frac{1}{m_3(A)} \int_A z\, dxdydz;$$

descrivendo A in coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \\ z = z, \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi, \quad r^2 - 1 \le z \le (r-1)^2,$$



otteniamo

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \frac{3}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2-1}^{(r-1)^2} zr\, dzd\vartheta dr = 3 \int_0^1 r \left[\frac{z^2}{2}\right]_{r^2-1}^{(r-1)^2} dr = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 r\big((r-1)^4 - (r^2-1)^2\big)\, dr = \frac{3}{2} \int_0^1 (-4r^4 + 6r^3 - 4r^2)\, dr = \\ &= \frac{3}{2}\left(-\frac{4}{5} + \frac{8}{4} - \frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2 - \frac{32}{15}\right) = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

In definitiva, il baricentro di A è il punto $\big(0, 0, -\frac{1}{5}\big)$.

Esercizio 2.2 Dobbiamo calcolare

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{rotF}, \mathbf{n} \rangle_3\, d\sigma,$$

ove $\mathbf{n}$ è il versore normale a Σ che ha $n_3 \le 0$. Dato che il bordo $b\Sigma$ di Σ è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ del piano $z = 0$, conviene utilizzare la formula di Stokes:

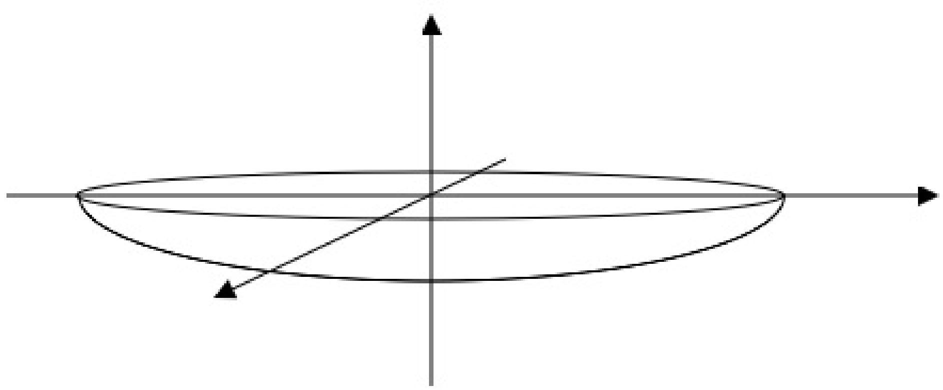
$$\int_\Sigma \langle \mathbf{rotF}, \mathbf{n} \rangle_3\, d\sigma = \int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{t} \rangle_3\, ds,$$

ove $\mathbf{t}$ è il versore tangente a $b\Sigma$ orientato in modo coerente a $\mathbf{n}$: dunque, in verso orario rispetto al piano $z = 0$. Possiamo comunque utilizzare per la circonferenza $b\Sigma$ la consueta parametrizzazione

$$x = 2\cos\vartheta, \quad y = 2\sin\vartheta, \qquad 0 \le \vartheta \le \pi,$$

a condizione di cambiare il segno dell'integrale curvilineo. In definitiva, con tale parametrizzazione si ha $\mathbf{t} = (-2\sin\vartheta, 2\cos\vartheta, 0)$ e quindi, essendo $\mathbf{F} = (y^3, z^3, x^3)$, troviamo

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \langle \mathbf{rotF}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\sigma &= -\int_0^{2pi} \left[(2\sin\vartheta)^3(-2\sin\vartheta) + 0\cdot(2\cos\vartheta) + (2\cos\vartheta)^3\cdot 0\right] \, d\vartheta = \\ &= 16\int_0^{2\pi} \sin^4\vartheta \, d\vartheta = 16\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta(1-\cos^2\vartheta)\, d\vartheta = \\ &= 16\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta d\vartheta - 4\int_0^{2\pi} \sin^2 2\vartheta \, d\vartheta = 12\pi.\end{aligned}$$



Esercizio 3.1 Le densità marginali si calcolano mediante le formule

$$h_X(x) = \int_{\mathbb{R}} h_{XY}(x,y)\, dy, \qquad h_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} h_{XY}(x,y)\, dx.$$

Nel nostro caso, essendo h_{XY} concentrata nel quadrato $]0,2[\times]2,4[$, si ha:

$$h_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)\, dy & \text{se } x \in]0,2[, \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

poiché

$$\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)\, dy = \frac{3}{2} - \frac{x}{4} - \left[\frac{y^2}{16}\right]_2^4 = \frac{3-x}{4},$$

si ricava

$$h_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{4} & \text{se } x \in]0,2[, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Similmente,

$$h_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{8}(6-x-y)\,dx & \text{se } y \in \,]2,4[\,, \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

essendo

$$\int_0^2 \frac{1}{8}(6-x-y)\,dx = \frac{3}{2} - \frac{y}{4} - \left[\frac{x^2}{16}\right]_0^2 = \frac{5-y}{4},$$

si ottiene

$$h_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{5-y}{4} & \text{se } y \in \,]2,4[\,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcoliamo $\mathbb{E}[X]$ ed $\mathbb{E}[Y]$: si ha

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^2 x\,h_X(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x(3-x)\,dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6},$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_2^4 y\,h_Y(y)\,dy = \frac{1}{4}\int_2^4 y(5-y)\,dy = \frac{5}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_2^4 - \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_2^4 = \frac{15}{2} - \frac{14}{3} = \frac{17}{6}.$$

Calcoliamo $\mathbf{Var}[X]$ e $\mathbf{Var}[Y]$: si ha

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^2 x^2\,h_X(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^2(3-x)\,dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2-1 = 1,$$

e dunque

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36};$$

analogamente

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_2^4 y^2\,h_Y(y)\,dy = \frac{1}{4}\int_2^4 y^2(5-y)\,dy = \frac{5}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_2^4 - \frac{1}{4}\left[\frac{y^4}{4}\right]_2^4 = \frac{70}{3} - 15 = \frac{25}{3},$$

e pertanto

$$\mathbf{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{25}{3} - \frac{289}{36} = \frac{11}{36}.$$

Stabiliamo infine se X e Y sono indipendenti o no: si ha, per $(x,y) \in \,]0,2[\, \times \,]2,4[\,$,

$$h_{XY}(x,y) = \frac{1}{8}(6-x-y), \qquad h_X(x)h_Y(y) = \frac{1}{16}(3-x)(5-y) = \frac{1}{16}(15-5x-3y+xy),$$

e queste funzioni sono diverse fra loro, essendo polinomi di grado differente. Se X e Y fossero indipendenti, esse dovrebbero coincidere: pertanto le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti.

Esercizio 3.2 (i) Come si sa, la media empirica $\overline{X}$ è uno stimatore corretto della media sconosciuta μ. Cerchiamo allora $\delta > 0$ tale che

$$P(|\overline{X} - \mu| \le \delta) \ge 1 - \alpha,$$

ove nel nostro caso $\alpha = 0.01$, ossia $1 - \alpha = 0.99$. Poiché $\overline{X}$ ha densità $\mathcal{N}(\mu, 2.25/N)$, la variabile aleatoria $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{2.25}}\sqrt{N}$ ha densità $\mathcal{N}(0,1)$. Osservato che $\sqrt{2.25} = 1.5$, risulta

$$P(|\overline{X} - \mu| \leq \delta) = P\left(|Z| \leq \frac{\delta\sqrt{N}}{1.5}\right) = \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{N}}{1.5}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta\sqrt{N}}{1.5}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{N}}{1.5}\right) - 1,$$

Dunque $P(|\overline{X} - \mu| \leq \delta) \geq 1 - \alpha = 0.99$ se e solo se

$$\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{N}}{1.5}\right) \geq 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995,$$

cioè se e solo se

$$\delta \geq \phi_{0.995} \cdot \frac{1.5}{\sqrt{N}} \simeq \frac{2.58 \cdot 1.5}{\sqrt{N}} = \frac{3.87}{\sqrt{N}}.$$

Un intervallo di fiducia di livello 0.99 per la media μ sarà dunque, sostituendo a $\overline{X}$ la media $\overline{x} = 3.2$ del campione e scegliendo $\delta = \frac{3.87}{\sqrt{N}}$,

$$\left[3.2 - \frac{3.87}{\sqrt{N}}, 3.2 + \frac{3.87}{\sqrt{N}}\right].$$

(ii) L'ampiezza dell'intervallo di fiducia è

$$2 \cdot \frac{3.87}{\sqrt{N}}, \quad \text{cioè} \quad \frac{7.74}{\sqrt{N}};$$

affinché tale ampiezza sia minore di 1, occorre che

$$\frac{7.74}{\sqrt{N}} < 1, \qquad \text{ossia} \qquad N > 59.91.$$

Pertanto dobbiamo scegliere $N \geq 60$.