Dipendenza continua dai dati

Le soluzioni di un problema di Cauchy relativo ad un sistema differenziale lineare dipendono con continuità dai dati, vale a dire dal secondo membro, dai coefficienti e dal dato iniziale. Per verificare questa asserzione, iniziamo con il seguente risultato:

Lemma 0.1 *Sia $\mathbf{W}_{\mathbf{A}}(t,s)$ la matrice di transizione relativa al sistema differenziale lineare $\mathbf{u}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, ove $\mathbf{A}(\cdot)$ è una matrice $n \times n$ con coefficienti $a_{ij} \in C(J,\mathbb{C})$ e J è un intervallo di $\mathbb{R}$. Allora per ogni sottointervallo chiuso e limitato $I \subseteq J$ e per ogni matrice $n \times n$ $\mathbf{B}(\cdot)$, con coefficienti $b_{ij} \in C(J,\mathbb{C})$, tale che $\sup_{t\in I} \|\mathbf{B}(t) - \mathbf{A}(t)\|_{\mathcal{M}_n} < 1$, si ha*

$$\sup_{t,s\in I} \|\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t,s)\|_{\mathcal{M}_n} \leq M,$$

ove M è una costante che dipende solamente da I e da $\|\mathbf{A}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)}$.

Dimostrazione Dalle proprietà della matrice di transizione $\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t,r)$ segue che

$$\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t,r) = \mathbf{I} + \int_r^t \mathbf{B}(s)\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(s,r)\,ds, \qquad t,r \in I.$$

Poniamo $A = \|\mathbf{A}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)}$, $B = \|\mathbf{B}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)}$ ed osserviamo che $B \leq A+1$; quindi, scelto $\delta \in \left]0, \frac{1}{A+1}\right[$, otteniamo per $|t-r| \leq \delta$

$$\|\mathbf{W}(t,r)_{\mathbf{B}}\|_{\mathcal{M}_n} \leq 1 + \delta(A+1) \sup_{|s-r|\leq\delta} \|\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(s,r)\|_{\mathcal{M}_n},$$

da cui

$$\sup_{|t-r|\leq\delta} \|\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t,r)\|_{\mathcal{M}_n} \leq \frac{1}{1-\delta(A+1)}\,.$$

D'altronde, se $t,r \in I$ e $|t-r| > \delta$ possiamo scrivere, definendo $k = [|t-\tau|/\delta]$ e supposto ad esempio $t > r$,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t,r)\|_{\mathcal{M}_n} &= \left\| \mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t, r+k\delta) \prod_{h=1}^{k} \mathbf{W}_{\mathbf{B}}(r+h\delta, r+(h-1)\delta) \right\|_{\mathcal{M}_n} \leq \\
&\leq \frac{1}{(1-\delta(A+1))^{k+1}},
\end{aligned}$$

cosicché, detto $K = [\ell(I)/\delta]$, avremo

$$\sup_{r,t\in I} \|\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t,r)\|_{\mathcal{M}_n} \leq \frac{1}{(1-\delta(A+1))^{K+1}}\,.$$

Posto ad esempio $\delta = \frac{1}{2(A+1)}$ si ha allora

$$\sup_{t,s \in I} \|\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t,s)\|_{\mathcal{M}_n} \le M = 2^{1+2(A+1)\ell(I)}. \quad \square$$

Siano adesso $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), & t \in J, \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{v}'(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{v}(t) = \mathbf{g}(t), & t \in J, \\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{y}, \end{cases}$$

ove $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono matrici $n \times n$ di funzioni continue su J a valori in $\mathbb{C}$, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ sono funzioni continue su J a valori in $\mathbb{C}^n$, e $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ appartengono a $\mathbb{C}^n$. Fissiamo un sottointervallo chiuso e limitato $I \subseteq J$ tale che $t_0 \in I$, e supponiamo che $\mathbf{A}$, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{x}$ siano fissati, mentre $\mathbf{B}$, $\mathbf{g}$ e $\mathbf{y}$ si muovono verso $\mathbf{A}$, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{x}$ rispettivamente; supponiamo in particolare che si abbia

$$\|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)} < 1, \quad \|\mathbf{g} - \mathbf{f}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} < 1, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n < 1.$$

Si ha allora questo enunciato:

Teorema 0.2 *Nelle ipotesi sopra scritte, esiste una costante C, dipendente solamente da $\ell(I)$ e dai dati $\|\mathbf{A}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)}$, $\|\mathbf{f}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)}$, $|\mathbf{x}|_n$, tale che*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{C^1(I,\mathbb{C}^n)} \le C \left[|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n + \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)} + \|\mathbf{g} - \mathbf{f}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} \right].$$

Dimostrazione La funzione $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ è soluzione in I del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{w}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{w}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)]\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{x} - \mathbf{y} \end{cases}$$

Dunque si ha

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{W}_{\mathbf{A}}(t,t_0)[\mathbf{x} - \mathbf{y}] + \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}_{\mathbf{A}}(t,s)\big[[\mathbf{A}(s) - \mathbf{B}(s)]\mathbf{v}(s) + \mathbf{f}(s) - \mathbf{g}(s)\big]\,ds.$$

Dal lemma 0.1 segue allora

$$|\mathbf{w}(t)|_n \le M|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n + \int_{t_0}^{t} M\big[\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)}|\mathbf{v}(s)|_n + \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)}\big]\,ds.$$

D'altra parte, si ha

$$\mathbf{v}(s) = \mathbf{W_B}(s,t_0)\mathbf{y} + \int_{t_0}^{s} \mathbf{W_B}(s,\sigma)\mathbf{g}(\sigma)\,ds;$$

quindi ancora dal lemma 0.1 ricaviamo la stima

$$|\mathbf{v}(s)|_n \le M|\mathbf{y}|_n + M\ell(I)\|\mathbf{g}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)}\,.$$

Inserendo questa disuguaglianza nella precedente si deduce facilmente

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}(t)|_n &\le M|\mathbf{x}-\mathbf{y}|_n + M\ell(I)\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} + \\ &+ M\ell(I)\big[M|\mathbf{y}|_n + M\ell(I)\|\mathbf{g}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)}\big]\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)} \le \\ &\le M|\mathbf{x}-\mathbf{y}|_n + M\ell(I)\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} + \\ &+ M\ell(I)\big[M|\mathbf{x}|_n + 1 + M\ell(I)[\|\mathbf{f}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} + 1]\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)}\big], \end{aligned}$$

e da qui segue facilmente, ricordando la definizione di M fornita nel lemma 0.1,

$$\|\mathbf{w}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} \le C\big[|\mathbf{x}-\mathbf{y}|_N + \|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} + \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)}\big]$$

con C dipendente da $\ell(I)$, $\|\mathbf{A}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)}$, $|\mathbf{x}|_N$ e $\|\mathbf{f}\|_{C(I,\mathbb{C}^N)}$.
Infine, dal sistema differenziale risolto da $\mathbf{w}$ si ricava immediatamente

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{w}'\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} \le \\ &\quad \le \|\mathbf{A}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)}\|\mathbf{w}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} + \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)}\|\mathbf{v}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} + \|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)}\,, \end{aligned}$$

e tenendo conto delle stime precedenti si deduce facilmente la tesi. □

Il caso delle equazioni di ordine n

Proviamo che le soluzioni di equazioni di ordine n, al pari di quelle dei sistemi, dipendono con continuità dai coefficienti, dal secondo membro e dai valori iniziali. Siano u e v le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)u^{(k)}(t) + f(t) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \dots \\ u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} v^{(n)}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k(t)v^{(k)}(t) + g(t) \\ v(t_0) = v_0 \\ v'(t_0) = v_1 \\ \dots \\ v^{(n-1)}(t_0) = v_{n-1}\,, \end{cases}$$

ove $t \in J$, $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{n-1})$ e $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_{n-1})$ sono elementi di $C(J, \mathbb{C}^n)$, f e g sono funzioni di $C(J, \mathbb{C})$ e $\mathbf{x} = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ e $\mathbf{y} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ sono vettori di $\mathbb{C}^n$. Fissiamo un sottointervallo chiuso e limitato $I \subseteq J$ tale che $t_0 \in I$, e supponiamo che $\mathbf{a}$, f e $\mathbf{x}$ siano fissati, mentre $\mathbf{b}$, g e $\mathbf{y}$ si muovono verso $\mathbf{a}$, f e $\mathbf{x}$ rispettivamente; supponiamo in particolare che si abbia

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} < 1, \quad \|g - f\|_{C(I,\mathbb{C})} < 1, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n < 1.$$

Si ha allora

Teorema 0.3 *Nelle ipotesi precedenti esiste una costante C, dipendente solamente da $\ell(I)$, dall'ordine dell'equazione n e dai dati $\|\mathbf{a}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)}$, $\|f\|_{C(I,\mathbb{C})}$, $|\mathbf{x}|_n$, tale che*

$$\|u - v\|_{C^n(I,\mathbb{C})} \le C \left[|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n + \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} + \|g - f\|_{C(I,\mathbb{C})} \right].$$

Dimostrazione Le funzioni $\mathbf{u} = (u, u', \dots, u^{(n-1)})$ e $\mathbf{v} = (v, v', \dots, v^{(n-1)})$ risolvono i sistemi differenziali lineari

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t), \quad t \in J, \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{v}'(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{v}(t) = \mathbf{G}(t), \quad t \in J, \\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{y}, \end{cases}$$

ove

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ b_0(t) & b_1(t) & b_2(t) & \dots & b_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Alla funzione $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ è applicabile il teorema 0.2, e il risultato è la stima

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{C^1(I,\mathbb{C}^n)} \le C \left[|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n + \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)} + \|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} \right]$$

con C dipendente da $\ell(I)$, $\|\mathbf{A}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)}$ e $\|\mathbf{F}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)}$. Poiché

$$\|\mathbf{A}\|_{C(I,\mathcal{M}_n)} = \sqrt{n - 1 + \|\mathbf{a}\|^2_{C(I,\mathbb{C}^n)}}, \qquad \|\mathbf{F}\|_{C(I,\mathbb{C}^n)} = \|f\|_{C(I,\mathbb{C})},$$

mentre $\|u\|_{C^n(I,\mathbb{C})} = \|\mathbf{u}\|_{C^1(I,\mathbb{C}^n)}$, ed analogamente per $\mathbf{B}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{v}$, si deduce facilmente la tesi. $\square$