Modelli matematici ambientali

Lista di esercizi n. 1

1. Determinare la distanza fra il punto $\mathbf{P}$ e il piano Π, ove

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Pi = \{3x - 2y - z = 1\}.$$

2. Determinare l'equazione del piano passante per i punti

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Trovare la distanza tra il punto $\mathbf{P}$ e la retta r, ove $\mathbf{P}$ è l'intersezione fra l'asse z e la retta s determinata dal sistema

$$\begin{cases} x - 3z = -3 \\ x + y + z = 1, \end{cases}$$

mentre r è la retta passante per $(2, 2, 2)$, ortogonale al piano $x - y = 0$.

4. Trovare la distanza fra le rette r e s, ove r è la retta passante per $(0, 1, 0)$ perpendicolare al piano $2x + y - z = 0$, mentre s è la retta passante per $(1, 2, 3)$ e per $(3, 2, 1)$.

5. Determinare il volume del parallelepipedo generato dai tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R},\ y \le 0 \\ y(1 - e^{-x^2 y}) & \text{se } x \in \mathbb{R},\ y > 0, \end{cases}$$

si scriva il gradiente di f nel generico punto (x_0, y_0), se ne deduca che f è differenziabile in ogni punto di R^2 e si determini l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1)$.

7. **(i)** Data la funzione $f(x, y) = x^2\, e^y$, se ne calcoli la derivata secondo la direzione $(1, -2)$ nel punto $(1, \ln 1/2)$.
(ii) Si scriva la retta ortogonale al piano tangente al grafico della funzione f nel generico punto (x_0, y_0), e dire in quali punti essa ha la direzione $(1, -2, 1)$.

8. Si trovino i punti stazionari di $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x^2y$, stabilendo quali di essi siano punti di massimo relativo o di minimo relativo.

9. Si consideri la funzione $f(x, y) = -3x^2 + 8xy - 9y^2 + 22x - 11y$.
(i) Si scriva il gradiente di f.
(ii) Si determinino i punti stazionari di f, stabilendo per ciascuno di essi se si tratta di un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.
(iii) Si calcolino il massimo assoluto e il minimo assoluto di f, se esistono.

10. Si consideri la funzione $f(x, y) = xy\, e^{-(x^2+2y^2)}$.
(i) Si calcoli la derivata di f nel punto $(1, 1)$ secondo la direzione $\mathbf{v} = (-1, -1)$.
(ii) Si determinino, se esistono, i punti di massimo e minimo relativo di f.

11. Si consideri la funzione $f(x, y) = \arctan[y(1 - x)]$.
(i) Si calcoli la derivata di f nel generico punto (x, y) secondo la direzione $\mathbf{v} = (-1, -1)$.
(ii) Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0, 1, \pi)$.
(iii) Si trovino i punti stazionari di f, stabilendo se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

12. Si consideri la funzione $f(x, y) = 5x^2 + y^2 + 3xy$.
(i) Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto di $\mathbb{R}^3$ di coordinate $(-1, 1, f(-1, 1))$.
(ii) Si trovino i punti stazionari di f, stabilendo se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

13. Si determini un punto $\mathbf{M}$ nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ tale che sia minima la somma dei quadrati delle distanze di $\mathbf{M}$ dalle rette di equazioni $x = 0$, $y = 0$, $y + x - 2 = 0$.

14. È data la funzione $f(x, y) = 2x^4 - x^2\, e^y + e^{4y}$.
(i) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 0, 2)$.
(ii) Trovare i punti stazionari di f e stabilire se si tratta di punti di massimo, di minimo o di sella.

15. Si consideri la funzione $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{1}{y}8 + 1 + 27xy$.
(i) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, 36)$.
(ii) Determinare i punti stazionari di f appartenenti al primo quadrante, stabilendo se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

16. Si consideri la funzione $f(x, y) = e^{xy} - x\, e^y$.
(i) Scrivere la derivata di f secondo la direzione $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nel punto $(-1, 1)$.
(ii) Determinare i punti stazionari di f, stabilendo se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

17. È data la funzione $f(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2 - x^4 - 4y^4$.
(i) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, f(1, 1))$.
(ii) Trovare i punti stazionari di f e stabilire, quando possibile, se si tratta di punti di massimo, di minimo o di sella.

18. È data la funzione $f(x,y) = e^{-x^2}(2xy + y^2)$.
(i) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0,3,\, f(0,3))$.
(ii) Trovare i punti stazionari di f e stabilire se si tratta di punti di massimo, di minimo o di sella.

19. Siano $\mathbf{P} = (0,3)$ e $\mathbf{Q} = (-1,3)$.
(i) Si calcoli il prodotto scalare $\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle$.
(ii) Si trovi l'ampiezza dell'angolo ϑ fra i due vettori.
(iii) Si determini l'area del triangolo **POQ**, ove **O** è l'origine.
(iv) Si scriva la distanza del punto $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ dalla retta r di equazione $3x-4y+5\sqrt{3} = 0$.

20. In quali punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la funzione $f(x,y) = |x-y|$ *non* è differenziabile?

21. È data la funzione $f(x,y) = 3xy^2 - 4xy - 4x - 2x^2$.
(i) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,-1,\, f(1,-1))$.
(ii) Trovare i punti stazionari di f e stabilire se si tratta di punti di massimo, di minimo o di sella.

22. Trovare tutti i numeri complessi z tali che

$$\begin{cases} z^2 + \overline{z}^2 + |z|^2 = 11 \\ z + \overline{z} = 6. \end{cases}$$

23. **(i)** Determinare un versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che:
(a) $\mathbf{v}$ sia ortogonale alla retta di equazione $4y - 3x - 5 = 0$;
(b) l'angolo fra $\mathbf{v}$ ed il vettore $\mathbf{e} = (0,1)$ sia ottuso.
(ii) Scrivere l'equazione della retta r passante per $\mathbf{u} = (3,4)$ e parallela a $\mathbf{v}$.
(iii) Calcolare la distanza della retta r dall'origine.

24. Determinare gli autovalori, nonché i corrispondenti autovettori, della matrice $\mathbf{AB}$, ove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

25. Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = \frac{3-4x}{1+x^2+y^2}$$

sull'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

26. Calcolare il prodotto scalare fra i due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ così individuati:

- $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;
- $\mathbf{w}$ è determinato dalle seguenti condizioni:
  (a) ha modulo uguale a 1,
  (b) forma un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse x,
  (c) è parallelo al piano di equazione $x + y + \frac{1}{2}\,z = 1$,
  (d) è perpendicolare alla retta di equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

27. Determinare i numeri complessi z che risolvono l'equazione

$$z^6 - (1+i)z^3 + i = 0.$$

28. Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y) = e^{x-y}$ sulla circonferenza K di centro $(0,0)$ e raggio 1.

29. Sia Q il quadrato di $\mathbb{R}^2$ di centro l'origine e spigolo 2. Calcolare il massimo e il minimo di $f(x,y) = (x^2-1)y^2$ su Q.

30. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. Determinare il massimo ed il minimo della funzione $f(x,y) = ax + by$ sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

31. Sia $\alpha > 0$. Determinare il massimo ed il minimo della funzione $f(x,y) = xy$ sull'insieme

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0, \ x^\alpha + y^\alpha = 1\}.$$

32. Determinare il massimo ed il minimo delle funzioni seguenti sui vincoli indicati:

$$\begin{array}{ll} \text{(i) } f(x,y) = (x+2y)^2, & K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1\}; \\ \text{(ii) } f(x,y) = (3x+2y)^2, & K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1\}. \end{array}$$

33. Fra tutti i rettangoli con lati paralleli agli assi cartesiani, inscritti in una ellisse della forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trovare quello di area massima.

34. Trovare il massimo ed il minimo di $f(x,y) = xy$ sul vincolo $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.