Analisi 3

Prove in itinere dal novembre 2011

Prova in itinere dell'8 novembre 2011

Esercizio 1 Risolvere i problemi di Cauchy

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} y' = \dfrac{y \ln y}{\cos x} \\ y(0) = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \begin{cases} y'' - 6y' + 10y = 5x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 2 Sia $\mathbf{P} = (1, 4, 3)$. Determinare un piano Π passante per $\mathbf{P}$, tale che:

(i) Π intersechi gli assi cartesiani in punti $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ di coordinata positiva,

(ii) il parallelepipedo generato dai vettori $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ abbia volume minimo.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) L'equazione è a variabili separabili. Essa è risolta dalla due funzioni costanti $y = 0$ e $y = 1$, che non verificano però la condizione $y(0) = \frac{1}{2}$. Dunque la soluzione che cerchiamo sarà sempre diversa da 0 e da 1. Dividiamo allora l'equazione per $y \ln y$, ottenendo via via:

$$\frac{y'}{y \ln y} = \frac{1}{\cos x},$$

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t) \ln y(t)} dt = \int_0^x \frac{dt}{\cos t} = \int_0^x \frac{\cos t \, dt}{1 - \sin^2 t} = \int_0^{\sin x} \frac{du}{1 - u^2},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{y(x)} \frac{dv}{v \ln v} = \frac{1}{2} \int_0^{\sin x} \left[\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right] du,$$

$$\ln|\ln y(x)| - \ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left[\ln(1+u) - \ln|1-u|\right]_0^{\sin x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x},$$

ed infine, tenuto conto che per $x = 0$ si ha $y(0) = 1/2$,

$$-\ln y(x) = (\ln 2)\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}},$$

ossia

$$y(x) = 2^{-\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}} = 2^{-\frac{1+\sin x}{\cos x}}.$$

Essa è definita nell'intervallo massimale $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(ii) L'equazione è del secondo ordine, non omogenea, a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$, e le radici sono $\lambda = 3 \pm i$. Quindi l'insieme delle soluzioni reali dell'equazione omogenea è dato da

$$V_0 = \{c_1 e^{3x}\cos x + c_2 e^{3x}\sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Poiché il termine noto dell'equazione non omogenea è un polinomio di primo grado, cerchiamo una soluzione particolare della forma $v(x) = ax + b$. È immediato verificare che deve essere $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{10}$, ossia $v(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{10}$. Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione assegnata è

$$V_f = \left\{c_1 e^{3x}\cos x + c_2 e^{3x}\sin x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{10},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Imponiamo infine le condizioni iniziali: deve essere

$$1 = y(0) = c_1 + \frac{3}{10}$$

da cui $c_1 = \frac{7}{10}$; inoltre, essendo

$$y'(x) = 3c_1 e^{3x}\cos x - c_1 e^{3x}\sin x + 3c_2 e^{3x}\sin x + c_2 e^{3x}\cos x,$$

deve essere

$$2 = y'(0) = 3c_1 + c_2,$$

da cui $c_2 = -\frac{1}{20}$. In definitiva la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{7}{10}e^{3x}\cos x - \frac{1}{20}e^{3x}\sin x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{10}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2 Il generico piano passante per $\mathbf{P}$ ha equazione

$$a(x-1)+b(y-4)+c(z-3)=0,$$

ove i coefficienti a, b, c sono tutti non nulli, se vogliamo che esso non sia parallelo ad uno degli assi cartesiani. Cerchiamo i punti di intersezione di tale piano con gli assi: per $\mathbf{P}_1$ dobbiamo imporre $y=z=0$, per cui l'ascissa x_1 di $\mathbf{P}_1$ deve soddisfare

$$a(x_1-1)-4b-3c=0.$$

Analogamente per l'ordinata x_2 di $\mathbf{P}_2$ e per la quota x_3 di $\mathbf{P}_3$ si ha

$$b(x_2-4)-a-3c=0, \qquad c(x_3-3)-a-4b=0.$$

Dunque si ha il sistema

$$\begin{cases} ax_1 = a+4b+3c \\ bx_2 = a+4b+3c \\ cx_3 = a+4b+3c. \end{cases}$$

dato che i tre coefficienti a, b, c sono non nulli, si ottiene

$$x_1 = \frac{a+4b+3c}{a}, \quad x_2 = \frac{a+4b+3c}{b}, \quad x_3 = \frac{a+4b+3c}{c}.$$

Per ipotesi, i tre numeri $x_1, x_2.x_3$ devono essere positivi: dunque a, b, c devono essere concordi in segno e pertanto li possiamo supporre positivi.
Dunque, il volume del parallelepipedo generato da $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ è dato in funzione dei parametri a, b, c da

$$V = x_1x_2x_3 = \frac{(a+4b+3c)^3}{abc} =: V(a,b,c),$$

ed occorre minimizzare questa funzione sull'aperto

$$\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a,b,c > 0\}.$$

Imponendo che il gradiente di V si annulli, e trascurando i denominatori, si trova il sistema

$$\begin{cases} bc(a+4b+3c)^2(3a-a-4b-3c)=0 \\ ac(a+4b+3c)^2(12b-a-4b-3c)=0 \\ ab(a+4b+3c)^2(9c-a-4b-3c)=0 \end{cases}$$

dal quale, essendo $a, b, c > 0$, è facile ricavare $a = 3c$ e $b = \frac{3}{4}c$. Il volume minimo si ottiene dunque con il piano

$$3c(x-1) + \frac{3}{4}c(y-4) + c(z-3) = 0,$$

in cui, come è giusto, la costante (non nulla) c è arbitraria. Possiamo ad esempio scegliere $c = 4$, ottenendo il piano di equazione

$$12(x-1) + 3(y-4) + 4(z-3) = 0.$$

Prova in itinere del 13 dicembre 2011

Esercizio 1 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = 2y^3 - 6x^2y + 3x$$

sull'insieme T delimitato dal triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,2)$ e $(1,-2)$.
Esercizio 2 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_D \frac{n^2xy}{n^2(y-x)+nx+y} \sqrt{\frac{n(y+x)^2 - 4nxy + 2}{n+y+3}}\, e^{-\frac{n(x^2+y^2)}{n-x-y}}\, dxdy,$$

ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le y\}$.

Risoluzione

Esercizio 1 Cominciamo a cercare i punti stazionari interni a T: il sistema $\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = \mathbf{0}$ diventa

$$\begin{cases} 3 - 12xy = 0 \\ 6y^2 - 6x^2 = 0, \end{cases}$$

e facili calcoli portano all'unica soluzione $x = y = 1/2$, che è interna al dominio; inoltre

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Analizziamo ora il comportamento di f su ∂T, iniziando dai vertici di T, nei quali si ha

$$f(0,0) = 0, \qquad f(1,2) = 7, \qquad f(1,-2) = -1.$$

Sul lato di equazione $x = 1$, $y \in]-2, 2[$, risulta

$$f(1, y) = 2y^3 - 6y + 3, \qquad \frac{d}{dy} f(1, y) = 6y^2 - 6 < 0 \text{ in }]-1, 1[:$$

Quindi ci sono due punti stazionari vincolati di ordinate $y = \pm 1$, ossia $(1, 1)$ e $(1, -1)$, nei quali

$$f(1, 1) = -1, \qquad f(1, -1) = 7.$$

Sul lato di equazione $y = 2x$, $x \in]0, 1[$, si trova

$$f(x, 2x) = 4x^3 + 3x, \qquad \frac{d}{dx} f(x, 2x) = 12x^2 + 3 > 0 \text{ in }]0, 1[.$$

Infine, sul lato di equazione $y = -2x$, $x \in]0, 1[$, abbiamo

$$f(x, -2x) = -4x^3 + 3x, \qquad \frac{d}{dx} f(x, -2x) = -12x^2 + 3 > 0 \text{ in } \left[0, \frac{1}{2}\right[:$$

quindi c'è un punto stazionario vincolato di ascissa $\frac{1}{2}$, ed è $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, con $f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = 1$. Confrontando i valori trovati si conclude che

$$\max_T f = f(1, 2) = f(1, -1) = 7, \qquad \min_T f = f(1, -2) = -1.$$

Esercizio 2 Le funzioni da integrare sono tutte misurabili, perché continue; l'unica singolarità si ha nell'origine. Si noti che l'integrando può essere riscritto nella forma

$$\frac{n^2 xy}{n^2(y - x) + nx + y} \sqrt{\frac{n(y - x)^2 + 2}{n + y + 3}}\, e^{-\frac{n(x^2+y^2)}{n-x-y}},$$

ed anche

$$\frac{xy(y - x)}{y - x + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{y+3}{n}}}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{1-\frac{x+y}{n}}},$$

e da ciò si deduce facilmente che in effetti la singolarità in $(0, 0)$ non c'è ed inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 xy}{n^2(y - x) + nx + y} \sqrt{\frac{n(y - x)^2 + 2}{n + y + 3}}\, e^{-\frac{n(x^2+y^2)}{n-x-y}} = xy\, e^{-x^2-y^2}.$$

Non è evidente che la convergenza di queste funzioni sia monotona crescente: quindi non possiamo applicare il teorema di B. Levi. Tuttavia queste funzioni verificano la stima

$$0 \le \frac{xy(y-x)}{y-x+\frac{x}{n}+\frac{y}{n^2}}\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{y+3}{n}}}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{1-\frac{x+y}{n}}} \le xy\, e^{-x^2-y^2},$$

ove la funzione a destra è certamente sommabile a causa dell'esponenziale negativa: il teorema di convergenza dominata di Lebesgue è dunque applicablie. Pertanto il limite proposto è uguale a

$$\int_D xy\, e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Calcoliamo questo integrale utilizzando le coordinate polari $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$. Si ha facilmente

$$\begin{aligned}
\int_D xy\, e^{-x^2-y^2} dxdy &= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\, e^{-r^2} d\vartheta dr = \\
&= \int_0^\infty r^3\ e^{-r^2} dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty t\, e^{-t}\, dt \left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\,.
\end{aligned}$$

Prova in itinere del 20 novembre 2013

Esercizio 1 Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'''(x) + 3y''(x) - 4y(x) = e^{ax}.$$

Esercizio 2 Posto

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3\ \ln xy^3}{xy^3-1} & \text{se } \ 0 < xy^3 \neq 1 \\ 1 & \text{se } \ xy^3 = 1, \end{cases}$$

si determini l'insieme A dove g è definita, si scrivano le derivate parziali prime di g e si provi che g è differenziabile in A. Si determini infine l'equazione del

piano tangente al grafico di g nel punto $(1,1,1)$.
Esercizio 3 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = (10 - x - y)x^3y^2$$

sull'insieme

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 3\right\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale omogenea è

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0,$$

e le sua soluzioni sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono dunque

$$c_1e^t + c_2e^{-2t} + c_3t\,e^{-2t}.$$

Cerchiamo adesso una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Se $a \neq 1$ e $a \neq -2$, basta cercare $u(t) = k\,e^{at}$ e si trova

$$ka^3 + 3ka^2 - 4k = 1,$$

da cui

$$k = \frac{1}{a^3 + 3a^2 - 4},$$

valore che certamente ha senso perché a non annulla il denominatore.
Se $a = 1$, essendo 1 un autovalore con molteplicità 1, si può scegliere $u(t) = kt\,e^t$; dato che

$$u'(t) = k(1+t)e^t, \quad u''(t) = k(2+t)e^t, \quad u'''(t) = k(3+t)e^t,$$

si trova

$$k(3+t) + 3k(2+t) - 4kt = 9k = 1,$$

da cui

$$k = \frac{1}{9}.$$

Se $a = -2$, essendo -2 un autovalore con molteplicità 2, si può scegliere $u(t) = kt^2\, e^{-2t}$; dato che

$$\begin{aligned} u'(t) &= 2k(t-t^2)e^{-2t}, \\ u''(t) &= 2k(1-4t+2t^2)e^{-2t}, \\ u'''(t) &= 4k(-3+6t-2t^2)e^{-2t}, \end{aligned}$$

si trova

$$k(-12+24t-8t^2) + 3k(2-8t+4t^2) - 4kt^2 = -6k = 1,$$

da cui

$$k = -\frac{1}{6}\,.$$

Si conclude così che l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 t\, e^{-2t} + \begin{cases} \frac{1}{a^3+3a^2-4}\, e^{at} & \text{se } a \neq 1 \text{ e } a \neq -2 \\ \frac{1}{9}\, t\, e^t & \text{se } a = 1 \\ -\frac{1}{6}\, t^2 e^{-2t} & \text{se } a = -2. \end{cases}$$

Esercizio 2 La funzione g è definita nell'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^3 > 0\} = \Big[\,]-\infty,0[\,\times\,]-\infty,0[\,\Big] \cup \Big[\,]0,\infty[\,\times\,]0,\infty[\,\Big].$$

Essa si può esprimere nella forma

$$g(x,y) = h(xy^3), \qquad \text{ove} \quad h(t) = \begin{cases} \dfrac{t\,\ln t}{t-1} & \text{se} \quad 0 < t \neq 1 \\ 1 & \text{se} \quad t = 1. \end{cases}$$

Pertanto, per verificare che g è differenziabile in un generico punto (x_0, y_0) è sufficiente mostrare che h è derivabile nel punto $t_0 = x_0 y_0^3$. Ovviamente, per $t \neq 1$ si ha

$$h'(t) = \frac{(\ln t + 1)(t-1) - t\ln t}{(t-1)^2};$$

Invece per $t = 1$ si ha

$$h'(1) = \lim_{s\to 0} \frac{h(1+s)-1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{\frac{(1+s)\,\ln(1+s)}{s} - 1}{s},$$

e ricordando lo sviluppo del logaritmo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) \quad \text{per } x \to 0,$$

otteniamo

$$h'(1) = \lim_{s\to 0} \frac{(1+s)\,\ln(1+s) - s}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{(1+s)(s - \frac{s^2}{2}) - s}{s^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Si noti che

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1} h'(t) &= \lim_{t\to 1} \frac{(\ln t + 1)(t-1) - t\ln t}{(t-1)^2} = \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{(\ln(1+s)+1)s - (1+s)\ln(1+s)}{s^2} = \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{(1+s-\frac{s^2}{2})s - (1+s)(s - \frac{s^2}{2} + \mathrm{o}(s^2))}{s^2} = \\
&= \frac{1}{2} = h'(1),
\end{aligned}$$

cioè h' è continua in $t = 1$.
Dalla relazione $g(x, y) = h(xy^3)$ segue

$$g_x(x, y) = h'(xy^3)y^3, \quad g_y(x, y) = 3h'(xy^3)xy^2 \qquad \forall (x, y) \in A,$$

ossia

$$g_x(x, y) = \begin{cases} y^3\, \dfrac{(\ln xy^3 + 1)(xy^3 - 1) - xy^3 \ln xy^3}{(xy^3 - 1)^2} & \text{se } 0 < xy^3 \neq 1 \\ \dfrac{y^3}{2} & \text{se } xy^3 = 1, \end{cases}$$

mentre

$$g_y(x, y) = \begin{cases} 3xy^2\, \dfrac{(\ln xy^3 + 1)(xy^3 - 1) - xy^3 \ln xy^3}{(xy^3 - 1)^2} & \text{se } 0 < xy^3 \neq 1 \\ \dfrac{3xy^2}{2} & \text{se } xy^3 = 1. \end{cases}$$

Poiché h' è continua, anche le derivate g_x e g_y sono continue; quindi la g è differenziabile in ogni punto $(x_0, y_0) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$. Il piano tangente al grafico di g nel punto $(1, 1, 1)$ ha equazione

$$z = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{2}(y-1),$$

ovvero

$$z = \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2}\,y - 1.$$

Esercizio 3 Cerchiamo anzitutto gli eventuali punti stazionari interni al dominio K, che è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$. Si ha

$$f_x(x,y) = -x^3y^2 + 3(10-x-y)x^2y^2, \quad f_y(x,y) = -x^3y^2 + 2(10-x-y)x^3y,$$

quindi il gradiente di f si annulla se e solo se

$$\begin{cases} -x^3y^2 + 3(10-x-y)x^2y^2 = 0, \\ -x^3y^2 + 2(10-x-y)x^3y = 0, \end{cases}$$

e di questo sistema cerchiamo soluzioni con $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 3$. Se $x, y \neq 0$, il sistema diventa

$$\begin{cases} -x + 3(10-x-y) = 0, \\ -y + 2(10-x-y) = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 4x + 3y = 30, \\ 2x + 3y = 20. \end{cases}$$

Vi è l'unica soluzione $(x,y) = (5, \frac{10}{3})$, ma questo punto non appartiene a K. In definitiva f non ha punti stazionari interni.
Analizziamo la situazione sulla frontiera del triangolo rettangolo K. Lungo i cateti $x = 0$ e $y = 0$ la funzione f è nulla. Sull'ipotenusa $x + y = 3$ la f diventa $h(x) := f(x, 3-x) = 7x^3(3-x)^2$ e x varia fra 0 e 3. Negli estremi h è nulla; all'interno si ha

$$h'(x) = 21x^2(3-x)^2 - 14x^3(3-x) = 7x^2(3-x)(9-5x),$$

Dunque $h' > 0$ in $]0, \frac{9}{5}[$ e $h' < 0$ in $]\frac{9}{5}, 3[$. Pertanto il punto $(\frac{9}{5}, \frac{6}{5})$ è un punto di massimo vincolato.
In conclusione, ovviamente f ha minimo uguale a 0, raggiunto nei punti di K situati sugli assi, mentre l'unico punto candidato ad essere punto di massimo assoluto è il punto $(\frac{9}{5}, \frac{6}{5})$, nel quale

$$f\left(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}\right) = \frac{7 \cdot 9^3 \cdot 6^2}{5^5} = \frac{183708}{3125}.$$

Dunque

$$\max_K f = \frac{183708}{3125} = 58.78656, \qquad \min_K f = 0.$$

Prova in itinere del 18 dicembre 2013

Esercizio 1 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{(2x)^n\,2^{-x}}{1+(2x)^n}\,dx.$$

Esercizio 2 Si calcoli il volume dell'insieme

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le z\le 1-x^2-y^2,\ 2x\le 1\}.$$

Esercizio 3 Sia Γ l'arco di cicloide

$$\begin{cases} x=t-\sin t\\ y=1-\cos t, \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi];$$

si determini l'area della superficie Σ ottenuta ruotando Γ intorno all'asse x.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione integranda

$$f_n(x)=\frac{(2x)^n\,2^{-x}}{1+(2x)^n}\,,\qquad x\ge 0,$$

è continua e quindi misurabile; essendo non negativa, è certamente integrabile. Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\in[0,1/2[\\ 2^{-3/2} & \text{se } x=1/2\\ 2^{-x} & \text{se } x\in]1/2,\infty[\,. \end{cases}$$

Abbiamo anche

$$0\le f_n(x)\le 2^{-x}\qquad \forall x\ge 0,\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

ed essendo

$$\int_0^\infty 2^{-x}\,dx=\frac{1}{\ln 2}<\infty,$$

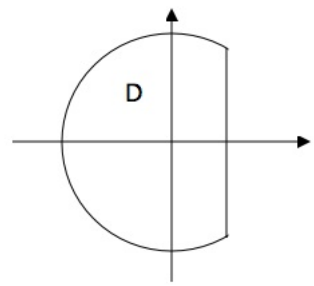
la convergenza delle f_n è dominata. Pertanto il teorema di Lebesgue è applicabile e si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{(2x)^n\,2^{-x}}{1+(2x)^n}\,dx=\int_0^{1/2}0\,dx+\int_{1/2}^\infty 2^{-x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}\,\ln 2}\,.$$

Esercizio 2 L'insieme E è delimitato dal grafico della funzione

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2, \qquad (x,y) \in D,$$

ove



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x \leq 1/2\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-1, 1/2], \ |y| \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

Si ha dunque

$$m_3(E) = \int_D f(x,y)\, dxdy = \int_{-1}^{1/2} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx,$$

ed anche, grazie alla parità dell'integrando rispetto a y,

$$\begin{aligned} m_3(E) &= 2\int_{-1}^{1/2} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)dy \right] dx = \\ &= 2\int_{-1}^{1/2} \left((1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3}\left[y^3\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1/2} (1-x^2)^{3/2}\, dx. \end{aligned}$$

Ponendo $x = \sin t$, si ottiene

$$\begin{aligned} m_3(E) &= \frac{4}{3}\int_{-1}^{1/2} (1-x^2)^{3/2}\, dx = \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (1-\sin^2 t)^{3/2} \cos t\, dt = \\ &= \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t (1 - \sin^2 t)\, dt = \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\, dt - \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2t\, dt = \\ &= \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\, dt - \frac{1}{6}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 s\, ds = \\ &= \frac{4}{3}\left[\frac{t + \sin t \cos t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{6}\left[\frac{s - \sin s \cos s}{2}\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \frac{4}{3}\left[\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{4}\right] - \frac{1}{6}\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\,. \end{aligned}$$

Si potevano anche utilizzare le coordinate polari: in tal caso, l'insieme D si decompone nelle due parti

$$D_1 = \left\{ (r, \vartheta) : \ \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right], \ r \in \left[0, \frac{1}{2 \cos \vartheta} \right] \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (r, \vartheta) : |\vartheta| \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right], \ r \in [0, 1] \right\},$$

e si può scrivere

$$\begin{aligned} m_3(E) &= \int_{D_1} (1 - r^2)\, r \, dr d\vartheta + \int_{D_2} (1 - r^2)\, r \, dr d\vartheta = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_0^{\frac{1}{2\cos\vartheta}} (r - r^3)\, dr \right] d\vartheta + 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[\int_0^1 (r - r^3)\, dr \right] d\vartheta = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{1}{8 \cos^2 \vartheta} - \frac{1}{64 \cos^4 \vartheta} \right] d\vartheta + \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \tan \frac{\pi}{3} - \frac{1}{32} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 \vartheta} \, d\vartheta + \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{32} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 \vartheta} \, d\vartheta. \end{aligned}$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 \vartheta} \, d\vartheta &= \left[\frac{\tan \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan \vartheta \sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} \, d\vartheta = \\ &= \left[\frac{\tan \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \, d\vartheta = \\ &= \left[\frac{\tan \vartheta}{\cos^2 \vartheta} - \frac{2}{3} \tan^3 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}; \end{aligned}$$

dunque si conclude che

$$m_3(E) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Esercizio 3 La superficie Σ che si ottiene ruotando la cicloide attorno all'asse x si parametrizza così:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = (1 - \cos t) \cos \varphi \qquad\qquad t \in [0, 2\pi], \ \varphi \in [0, 2\pi]. \\ z = (1 - \cos t) \sin \varphi, \end{cases}$$

La matrice delle derivate è quindi

$$\begin{pmatrix} 1-\cos t & 0 \\ \sin t\cos\varphi & -(1-\cos t)\sin\varphi \\ \sin t\sin\varphi & (1-\cos t)\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$E=(1-\cos t)^2+\sin^2 t, \quad G=(1-\cos t)^2, \quad F=0,$$

e dunque

$$\begin{aligned} a(\Sigma) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,(1-\cos t)\,dt d\varphi = \\ &= 2\pi\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,dt = 2\pi\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\cos t)\sqrt{1-\cos^2 t}}{\sqrt{1+\cos t}}\,dt = \\ &= 2\pi\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin t|\frac{1-\cos t}{\sqrt{1+\cos t}}\,dt = 4\pi\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin t\,\frac{1-\cos t}{\sqrt{1+\cos t}}\,dt. \end{aligned}$$

Posto $\cos t=u$, otteniamo infine

$$\begin{aligned} a(\Sigma) &= 4\pi\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin t\,\frac{1-\cos t}{\sqrt{1+\cos t}}\,dt = 4\pi\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{1-u}{\sqrt{1+u}}\,du = \\ &= 4\pi\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{2-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\,du = 4\pi\sqrt{2}\left[4\sqrt{1+u}-\frac{2}{3}(1+u)^{3/2}\right]_{-1}^{1} = \\ &= 4\pi\sqrt{2}\left(4\sqrt{2}-\frac{2}{3}\,2^{3/2}\right) = 32\pi-\frac{32}{3}\pi=\frac{64}{3}\pi. \end{aligned}$$

Prova in itinere del 25 novembre 2014

Esercizio 1 Determinare le soluzioni del sistema differenziale

$$\begin{cases} u' = -u-2v+e^{-t} \\ v' = 8u+7v-e^{-t} \\ w' = u+w+2e^{-t}. \end{cases}$$

Esercizio 2 Si considerino l'ellisse $E\subset\mathbb{R}^2$ di equazione $4x^2+y^2=4$ e la retta r di equazione $2x+y+10=0$. Si trovino la distanza massima e la distanza minima dei punti di E da r.

Risoluzione

Esercizio 1 Risolviamo anzitutto il sistema omogeneo

$$\begin{cases} u' = -u - 2v \\ v' = 8u + 7v \\ w' = u + w. \end{cases}$$

Per la matrice associata

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

l'equazione $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, sviluppata rispetto alla terza colonna, diventa

$$(1-\lambda)[(-1-\lambda)(7-\lambda)+16)] = (1-\lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + 9] = (1-\lambda)(\lambda-3)^2 = 0,$$

e gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ (doppio). Cerchiamo un autovettore relativo a λ_1: il sistema

$$\begin{cases} -u - 2v = u \\ 8u + 7v = v \\ u + w = w \end{cases}$$

ha le soluzioni $(0, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$: scegliamo $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1)$.
Cerchiamo un autovettore (o forse due) relativo a λ_2: il sistema

$$\begin{cases} -u - 2v = 3u \\ 8u + 7v = 3v \\ u + w = 3w \end{cases}$$

ha le soluzioni $(2t, -4t, t)$: scegliamo $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 1)$. L'autospazio ha dimensione 1, quindi non troviamo un altro autovettore linearmente indipendente. Accanto alle due soluzioni del sistema omogeneo

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1\, e^t, \qquad \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{v}_2\, e^{3t},$$

cerchiamo una terza soluzione

$$\mathbf{u}_3(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t)\, e^{3t}.$$

Sostituendo nel sistema omogeneo troviamo, eliminando il fattore e^{3t}:

$$\begin{cases} b_1 + 3a_1 + 3b_1 t = -a_1 - b_1 t - 2a_2 - 2b_2 t \\ b_2 + 3a_2 + 3b_2 t = 8a_1 + 8b_1 t + 7a_2 + 7b_2 t \\ b_3 + 3a_3 + 3b_3 t = a_1 + b_1 t + a_3 + b_3 t, \end{cases}$$

che si scinde nelle 6 equazioni

$$\begin{cases} b_1 + 3a_1 = -a_1 - 2a_2 \\ 3b_1 = -b_1 - 2b_2 \\ b_2 + 3a_2 = 8a_1 + 7a_2 \\ 3b_2 = 8b_1 + 7b_2 \\ b_3 + 3a_3 = a_1 + a_3 \\ 3b_3 = b_1 + b_3, \end{cases}$$

dalle quali segue facilmente che si può scegliere

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = -2, \quad a_3 = -\frac{1}{4}, \quad b_3 = \frac{1}{2};$$

quindi

$$\mathbf{u}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2} - 2t \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Pertanto

$$V_0 = \{c_1\mathbf{u}_1(t) + c_2\mathbf{u}_2(t) + c_3\mathbf{u}_3(t) : \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Cerchiamo adesso una soluzione particolare $\mathbf{u}$ del sistema non omogeneo. Il secondo membro è il vettore $(1, -1, 2)$ moltiplicato e^{-t}, e l'esponente -1 non è autovalore di $\mathbf{A}$. Quindi possiamo cercare $\mathbf{u}$ della forma

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{-t};$$

sostituendo nel sistema non omogeneo si ottiene, eliminando il fattore e^{-t},

$$\begin{cases} -a = -a - 2b + 1 \\ -b = 8a + 7b - 1 \\ -c = a + c + 2, \end{cases}$$

da cui

$$b = \frac{1}{2}, \qquad a = -\frac{3}{8}, \qquad c = -\frac{13}{16}.$$

In conclusione, posto

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{13}{16} \end{pmatrix} e^{-t},$$

l'insieme delle soluzioni del sistema non omogeneo è

$$V = \{c_1\mathbf{u}_1(t) + c_2\mathbf{u}_2(t) + c_3\mathbf{u}_3(t) + \mathbf{u}(t) : \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 2 La distanza di un punto (x_0, y_0) da una retta generica di equazione $ax + by + c = 0$ è data dalla nota formula

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Quindi dobbiamo trovare il massimo ed il minimo su E della funzione

$$f_1(x, y) = \frac{|2x + y + 10|}{\sqrt{5}},$$

ovvero, equivalentemente, della funzione

$$f(x, y) = (2x + y + 10)^2.$$

Consideriamo dunque la Lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = (2x + y + 10)^2 - \lambda(4x^2 + y^2 - 4),$$

e cerchiamone i punti stazionari. Il sistema $\boldsymbol{\nabla} L(x, y) = \mathbf{0}$ è

$$\begin{cases} 4(2x + y + 10) - 8\lambda x = 0 \\ 2(2x + y + 10) - 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 4; \end{cases}$$

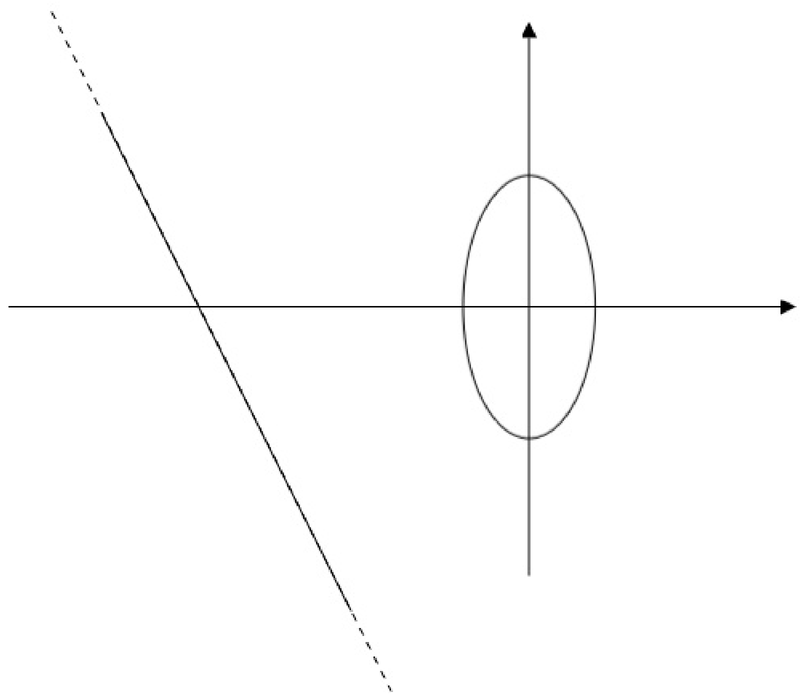
Moltiplichiamo la prima equazione per y, la seconda per $4x$ e sottraiamo: il risultato è

$$(4y - 8x)(2x + y + 10) = 0.$$

Ne segue

$$2x + y + 10 = 0 \quad \text{oppure} \quad y = 2x.$$

La prima condizione, insieme alla terza equazione del sistema, ci direbbe che la retta interseca l'ellisse: ma in effetti ciò non accade, come si verifica facilmente tentando di risolvere il corrispondente sistema. Resta dunque la seconda condizione, $y = 2x$, che inserita nella terza equazione del sistema ci dà, con facili calcoli,



$$x^2 = \frac{1}{2}\,, \qquad y^2 = 2\,.$$

Dato che x e y hanno lo stesso segno, si ottengono i due punti

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), \qquad (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right).$$

Il valore di f in questi punti è

$$f(x_1, y_1) = (2\sqrt{2} + 10)^2, \qquad f(x_2, y_2) = (-2\sqrt{2} + 10)^2.$$

Se ne conclude che la minima distanza di E da r è

$$d = f_1(x_2, y_2) = \frac{10 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}},$$

mentre la massima è

$$D = f_1(x_1, y_1) = \frac{10 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\,.$$

Osservazione Si poteva anche parametrizzare l'ellisse nel modo standard

$$x = \cos\vartheta, \quad y = 2\sin\vartheta, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

sostituire i valori di x e y nella formula della distanza da r, e considerare

$$f_1(\vartheta) = \frac{|2\cos\vartheta + 2\sin\vartheta + 10|}{\sqrt{5}}\,,$$

ovvero, equivalentemente,

$$f(\vartheta) = (2\cos\vartheta + 2\sin\vartheta + 10)^2,$$

o ancora più semplicemente, essendo $2\cos\vartheta + 2\sin\vartheta + 10 > 0$, utilizzare la funzione

$$g(\vartheta) = 2\cos\vartheta + 2\sin\vartheta + 10, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

La derivata è nulla per $-\sin\vartheta + \cos\vartheta = 0$, ossia per $\sin\vartheta = \cos\vartheta$. Dunque $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ oppure $\vartheta = \frac{5\pi}{4}$, il che corrisponde ai valori già trovati

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), \qquad (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right).$$

Prova in itinere del 16 dicembre 2014

Esercizio 1 Determinare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 \frac{nx + 3\sqrt{n}\,x^2}{(nx + 2)\sqrt{|x - 1|}}\,dx.$$

Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_E y^2 \, e^{z+\sqrt{x^2+y^2}} \, dxdydz,$$

ove E è l'insieme che si ottiene ruotando attorno all'asse z l'insieme D seguente:

$$D = \{(x, z) : \ 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq z \leq \min\{1, 2-x\}\} .$$

Risoluzione

Esercizio 1 Le funzioni integrande

$$f_n(x) = \frac{nx + 3\sqrt{n}\, x^2}{(nx+2)\sqrt{|x-1|}}$$

sono non negative e continue in $[0, 2] \setminus \{1\}$, cioè q.o. in $[0, 2]$, quindi sono integrabili in $[0, 2]$. Inoltre

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} \qquad \text{q.o. in } [0, 2].$$

Non è evidente che la successione sia monotona crescente, perché il secondo termine, quello contenente $\sqrt{n}$, è decrescente rispetto a n. Quindi cerchiamo di dominare le f_n: in effetti, essendo $nx + 3\sqrt{n}\, x^2 \leq nx + 3nx^2$, si ha

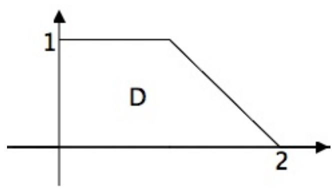
$$f_n(x) \leq \frac{1+3x}{\sqrt{|x-1|}} =: g(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \text{q.o. in } [0, 2],$$

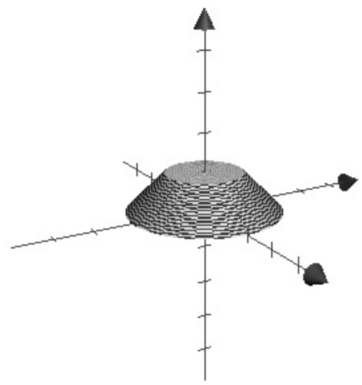
e la funzione g è evidentemente sommabile in $[0, 2]$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 \frac{nx + 3\sqrt{n}\, x^2}{(nx+2)\sqrt{|x-1|}} \, dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} \, dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt = 4.$$

Esercizio 2 Possiamo descrivere D nel modo seguente:

$$D = \{(x, z) : \ 0 \leq z \leq 1, \ 0 \leq x \leq 2-z\}.$$





Dunque

$$E = \{(x, y, z) : \ 0 \leq z \leq 1, \ 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 - z\},$$

e passando alle coordinate cilindriche otteniamo l'insieme

$$\tilde{E} = \{(r, \vartheta, z) : \ 0 \leq z \leq 1, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \ 0 \leq r \leq 2 - z\}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_E y^2\, e^{z+\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz &= \int_{\tilde{E}} r^2 \, \sin^2\vartheta \, e^{z+r}\, r\, drd\vartheta dz = \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-z} r^3 \, \sin^2\vartheta \, e^{z+r}\, drd\vartheta dz.
\end{aligned}$$

Otteniamo pertanto

$$\begin{aligned}
\int_E y^2\, e^{z+\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz &= \int_0^1 e^z \int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta \int_0^{2-z} r^3\, e^r\, drd\vartheta dz = \\
&= \pi \int_0^1 e^z \int_0^{2-z} r^3\, e^r\, dr = \pi \int_0^1 e^z \left[(r^3 - 3r^2 + 6r - 6)e^r\right]_0^{2-z} dz = \\
&= \pi \int_0^1 [(2-z)^3 - 3(2-z)^2 + 6(2-z) - 6)e^2 + 6e^z]\, dz = \\
&= \pi \int_0^1 [e^2(2 - 6z + 3z^2 - z^3) + 6e^z]\, dz = \\
&= \pi \left(-\frac{e^2}{4} + 6e - 6\right).
\end{aligned}$$