

UNIVERSITÀ DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Onde d'acqua: studio analitico e simulazioni numeriche

Candidato
Giulia Riffaldi

Relatori
Prof. Paolo Acquistapace
Dott. Mattia De'Michieli Vitturi

A.A. 2017/ 2018

Indice

Introduzione	i
1 Nozioni preliminari	1
1.1 Equazioni della meccanica dei fluidi	1
1.2 Equazioni di conservazione della massa	4
1.3 Conservazione del momento	5
1.4 Equazione dell'energia	7
1.4.1 Nuovi concetti	7
1.4.2 Equazione di Bernoulli	8
1.5 Condizioni al bordo	10
1.5.1 Condizione cinematica	10
1.5.2 Condizioni dinamiche	11
1.5.3 Condizione sul fondo	11
1.6 Flusso di energia	12
1.7 Adimensionalizzazione	13
1.8 Ridimensionamento delle variabili	15
1.9 Propagazione delle onde	17
1.10 Espansione asintotica	19
2 Problemi lineari	25
2.1 Profondità costante	25
2.1.1 Traiettoria delle particelle	29
2.1.2 Velocità di gruppo	32
2.2 Profondità variabile	38
2.2.1 Onde gravitazionali di qualsiasi numero d'onda che si propagano su una pendenza costante	43
3 Onde solitarie	50
3.1 Problemi non lineari	52
3.2 Il solitone	53
3.2.1 L'approssimazione sech^2	58

3.2.2	Relazioni integrali	61
4	OpenFOAM e l'approccio numerico	65
4.1	La fluidodinamica computazionale	65
4.1.1	Risoluzione tramite metodi numerici	66
4.2	OpenFOAM	67
4.3	Metodo di discretizzazione ai volumi finiti	68
4.3.1	Il metodo Volume Of Fluid	72
4.4	Il solutore interFoam	75
5	Struttura del case e analisi dei dati	81
5.1	Simulazioni in due dimensioni	86
5.1.1	Propagazione di un'onda solitaria su fondo piatto	86
5.1.2	Propagazione di un'onda solitaria su un fondo a pen-	
	denza costante	93
5.2	Simulazioni tridimensionali	99
A	File del solutore interFoam	104
A.1	interFoam.C	104
A.2	UEqn.H	110
A.3	pEqn.H	111
B	Struttura di un tutorial	113

Introduzione

Lo studio delle onde marine, con particolare attenzione ai maremoti (detti anche "tsunami"), ha trovato sempre più spazio negli studi di fluidodinamica. Gli tsunami rappresentano infatti uno dei fenomeni più devastanti riscontrabili in natura e queste onde, generate dall'impulsivo spostamento di una grande massa d'acqua a causa di terremoti o grandi frane sottomarine possono raggiungere altezze molto elevate e coprire distanze notevolissime (da centinaia a migliaia di chilometri).

Il termine giapponese tsunami ("tsu"=porto e "nami"=onda) deriva proprio dalla capacità di queste onde di provocare danni devastanti lungo le coste, rimanendo praticamente invisibili in alto mare.

Dividiamo la loro esistenza in tre fasi: generazione, propagazione e inondazione; la maggior ampiezza e velocità si rilevano nel momento di contatto con la costa e di run up.

Queste onde, a differenza delle comuni onde marine che, essendo prodotte dal vento, muovono solo gli strati superficiali dell'acqua senza provocare movimenti in profondità, muovono l'intera colonna, dal fondale fino alla superficie, e si spostano a velocità più elevate. Per questo motivo le onde di maremoto hanno forte energia e riescono a penetrare nell'entroterra per parecchie centinaia di metri.

La necessità di prevedere le tempistiche e gli eventuali danni che possono causare infrangendosi sulla costa ha portato alla ricerca di modelli sempre più accurati per descriverle, al fine di garantire una più efficace protezione delle popolazioni costiere. Già a partire dagli anni '70, per descrivere gli tsunami è stato utilizzato un modello di onde solitarie, considerato il più adatto per la modellizzazione fisico-matematica di quello specifico tipo di onda.

Questa tesi prende in considerazione il solitone, con un approccio sia analitico che numerico, utilizzando gli strumenti della fluidodinamica computazionale (CFD). Attraverso l'utilizzo di un modello al computer, è possibile utilizzare i metodi di discretizzazione propri della CFD per risolvere numericamente equazioni alle derivate parziali difficilmente risolvibili in via analitica. Que-

st'ultimo approccio infatti si dimostra praticabile solamente in alcuni casi, caratterizzati da flussi laminari e geometrie semplici, ma che, proprio per la loro semplicità, non sono sempre adatti a rappresentare eventi reali.

Con un approccio analitico è possibile trovare una soluzione per le equazioni lineari che descrivono il moto di un fluido non viscoso sia per i moti ondosi che si sviluppano su un fondo piatto, sia per quelli che si sviluppano su un fondo a pendenza costante.

Risulta tuttavia complesso, e non sempre è possibile, trovare una soluzione analitica in condizioni di non linearità. Considerando le equazioni non lineari che descrivono il moto di onde di gravità in assenza di tensione superficiale e per un fluido non viscoso, siamo in grado di trovare una soluzione analitica che descriva la propagazione di un'onda solitaria solo nel caso di fondo piatto. Si verifica che la soluzione ottenuta conferma i risultati sperimentali a cui è giunto per primo John Scott Russell nel 1834. Questi giunse alla conclusione che la velocità dell'onda solitaria è descritta dalla legge $c^2 = g(h + a)$. Questo risultato è stato utilizzato come validazione delle soluzioni di un modello numerico, analizzando in modo efficace vari aspetti di un'onda solitaria e della sua propagazione (in particolare, velocità e ampiezza).

Il modello numerico utilizzato per questo studio è basato sul software di CFD OpenFOAM (acronimo di *Open Source Field Operation And Manipulation*). Questo programma, gratuito e *open source*, permette di modificare i numerosi modelli e le funzioni di cui è corredato o di crearne di nuovi, specifici per la situazione che si vuole studiare.

Il solutore numerico è stato quindi applicato a problemi difficilmente risolvibili analiticamente, come nel caso della propagazione del solitone su un fondale non piatto, prendendo in considerazione fondali a pendenza costante simulati prima in due dimensioni e, in un secondo momento, tridimensionalmente.

I risultati numerici confermano le osservazioni fenomenologiche e rappresentano un ulteriore passo avanti della ricerca modellistica verso la simulazione dell'impatto di onde di tsunami su topografie reali.

Il primo capitolo presenta alcuni risultati alla base della teoria del moto ondoso. Si suppone che il fluido considerato sia ideale con flusso irrotazionale, si dimostra ad esempio che vale la legge di Bernoulli. Vengono inoltre introdotte le condizioni al contorno legate alla presenza di vincoli quali il fondale, vincolo fisso, e la superficie libera, vincolo mobile.

In seguito vengono introdotti due parametri adimensionali, ϵ e δ , legati rispettivamente all'ampiezza e alla lunghezza dell'onda. L'introduzione di variabili adimensionali risulta utile al fine di isolare parametri fondamentali per determinare le caratteristiche di un certo problema. Per rendere più semplice

la risoluzione di un dato problema si ricorre inoltre ad un ridimensionamento delle variabili.

Il primo capitolo si conclude con l'introduzione di alcune equazioni che descrivono la propagazione delle onde e della tecnica dello sviluppo asintotico che utilizzeremo in seguito nella risoluzione di alcuni problemi.

Il secondo capitolo è incentrato sullo studio delle equazioni lineari che descrivono il moto ondoso. Viene studiata la propagazione di onde lineari sia su un fondale piatto sia su un fondale a pendenza costante. Per quanto riguarda le prime ci si sofferma in particolare sullo studio delle traiettorie delle particelle, che si osserva essere caratterizzate da un moto circolare o ellittico intorno alla loro posizione iniziale, sulla velocità di gruppo, sulla propagazione dell'energia e sulle relazioni che legano queste ultime.

Nell'ambito delle onde lineari che si propagano su una pendenza costante cerchiamo di generalizzare i risultati ottenuti considerando anche onde di qualsiasi numero d'onda, cioè senza imporre che le onde considerate siano onde lunghe.

Il terzo capitolo tratta di un caso di propagazione di onde non lineari, ovvero il caso dell'onda solitaria. Analiticamente risolviamo solo il caso di propagazione su fondo piatto e osserviamo che dalla risoluzione analitica possiamo confermare le osservazioni di Russell non solo per quanto riguarda la relazione che lega velocità e ampiezza, ma anche relativamente all'onda di massima ampiezza.

Tramite l'utilizzo dell'approssimazione sech^2 siamo in grado di descrivere il comportamento di un'onda solitaria di piccola ampiezza; risulta necessario utilizzare approssimazioni poiché non siamo in grado di trovare un'espressione matematica che ci permetta di rappresentare onde solitarie per ampiezze arbitrarie.

Ricordiamo infine alcune relazioni che legano le proprietà integrali caratteristiche delle onde solitarie, ulteriori legami sono stati studiati da Longuet-Higgins e Fenton (si veda [17], [18]).

Nel quarto capitolo viene introdotto il solutore OpenFOAM, utilizzato per lo studio numerico delle onde e la fluidodinamica computazionale. Vedremo che per studiare fenomeni fisici risulta necessario descriverli tramite modelli matematici formati da equazioni differenziali alle derivate parziali che necessitano di un processo di discretizzazione per essere poi risolti tramite calcolatori. In questa ottica descriveremo brevemente il metodo ai volumi finiti ed in particolare il *volume of fluid*. Analizzeremo, poi, le equazioni risolte dal solutore `interFoam`, utilizzato per le simulazioni, del quale riportiamo alcuni file in appendice.

Nel quinto capitolo confronteremo i risultati analitici ottenuti nel caso di pro-

pagazione di un'onda solitaria su fondo piatto con i risultati ottenuti numericamente. Analizzeremo, poi, i risultati numerici ricavati dalle simulazioni di un'onda solitaria che si propaga su un fondo a pendenza costante, sia tramite simulazioni in due dimensioni, che tridimensionali.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo capitolo vogliamo ricavare le equazioni che descrivono il comportamento di un fluido.

Inizialmente considereremo le equazioni di conservazione della massa e l'equazione del moto. Analizzeremo poi le condizioni al contorno, necessarie per una completa descrizione del problema, che includono informazioni riguardanti la pressione, la tensione superficiale e di carattere cinematico.

Modificheremo queste equazioni tramite un processo di adimensionalizzazione introducendo apposite variabili.

Il primo capitolo si conclude con l'introduzione della teoria di propagazione delle onde e la descrizione del metodo di espansione asintotica che utilizzeremo in seguito.

1.1 Equazioni della meccanica dei fluidi

Un fluido è un mezzo continuo¹ caratterizzato dai suoi campi di velocità $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$, pressione $p = p(x, t)$ e densità $\rho = \rho(x, t)$.

In questo capitolo affronteremo il problema del moto dei fluidi considerando sia le forze applicate esternamente sia quelle generate all'interno del fluido.

Per descrivere il moto di un fluido è possibile ricorrere a due differenti approcci:

- **lagrangiano**: si considerano i singoli elementi materiali, cioè le particelle di fluido, e si studia come si muovono all'interno del fluido;

¹Un mezzo continuo è un mezzo in cui, preso un volume arbitrariamente piccolo, questo contiene un numero molto alto di molecole

- **euleriano**: si considera un volume di fluido fissato, detto volume di controllo, e si osservano le particelle che in ogni istante di tempo passano attraverso questo volume.

Consideriamo, ad esempio, il campo della velocità e un generico campo caratteristico di un fluido, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ e $a = a(x, t)$, questi sono campi euleriani poiché sono relativi alla posizione di x in un sistema di riferimento inerziale. Per descrivere la situazione da un punto di vista lagrangiano definiamo una particella di fluido come un punto che si muove con la velocità locale del fluido, in particolare abbiamo quindi che $X(x_0, t)$ indica la posizione al tempo t della particella di fluido che al tempo t_0 si trovava in $x = x_0$ ². Possiamo inoltre definire i campi lagrangiani in termini dei loro corrispondenti campi euleriani:

$$\begin{aligned} A(x, t) &\equiv a(X(x, t), t), \\ \mathbf{U}(x, t) &\equiv \mathbf{u}(X(x, t), t). \end{aligned}$$

Se consideriamo la derivata dA/dt che denota la velocità di cambiamento di A fissato x_0 abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A(x_0, t) &= \frac{d}{dt}a(X(x_0, t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}a(x, t) \Big|_{x=X(x_0, t)} + \nabla a(x, t) \Big|_{x=X(x_0, t)} \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}a(x, t) \Big|_{x=X(x_0, t)} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)a(x, t) \Big|_{x=X(x_0, t)} \\ &= \frac{D}{Dt}a(x, t) \Big|_{x=X(x_0, t)} \end{aligned}$$

queste uguaglianze ci permettono quindi di introdurre la *derivata materiale*, detta anche derivata sostanziale, che può essere considerata un collegamento tra la descrizione euleriana e quella lagrangiana ed è definita da:

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (1.1)$$

²La posizione della particella di fluido è definita dalla seguente equazione differenziale al primo ordine che esprime il fatto che una particella di fluido si muove con la velocità locale del fluido stesso:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(x, t) = \mathbf{u}(X(x, t), t) \\ X(x_0, t_0) = x_0 \end{cases}$$

Integrando questa equazione è possibile ottenere la posizione della particella $X(x_0, t)$ per ogni tempo t .

Un teorema che ci consente di passare dall'approccio lagrangiano a quello euleriano è il teorema del trasporto, detto anche *teorema di Reynolds*³. Data una qualsiasi proprietà del fluido valida per unità di volume, detta anche proprietà intensiva, vogliamo studiare la variazione subita nel tempo dalla proprietà estensiva⁴.

Teorema 1.1.1. *Sia V un generico volume materiale isolato all'interno di una massa fluida e sia ψ una generica proprietà intensiva del fluido, allora:*

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \psi dV = \int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{u}) \right\} dV \quad (1.2)$$

dove $\mathbf{u} \perp \partial V(t)$.

Introdurremo le equazioni che descrivono la meccanica dei fluidi partendo dalle leggi di bilanciamento e conservazione di quantità di moto, massa ed energia generiche e poi applicandole a fluidi ideali.

Un **fluido ideale** è un fluido che soddisfa le seguenti ipotesi:

- è incomprimibile, la sua densità non varia, cioè $\frac{D\rho}{Dt} = 0$;
- ha moto adiabatico, cioè in assenza di scambi di calore tra le diverse parti del fluido;
- è non viscoso, cioè non appare resistenza allo scorrimento in nessun punto;
- moto irrotazionale, cioè $\nabla \times \mathbf{u} = 0$.

³Questo teorema segue dal teorema della divergenza enunciato nella nota ⁷.

⁴Una *grandezza estensiva* B è una quantità il cui valore dipende dall'estensione del volume V considerato, un *grandezza intensiva* b è una quantità indipendente dal volume V .

In particolare, sia ρ la densità del fluido nel volume V , la relazione tra la grandezza intensiva e la grandezza estensiva coniugata ad essa è data da

$$B = \int_V \rho b dV$$

1.2 Equazioni di conservazione della massa

Dato un volume arbitrario V_0 del fluido, la massa di fluido contenuta in questo volume è

$$M = \int_{V_0} \rho dV^5.$$

La variazione nel tempo della massa nel volume V_0 è data da

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV.$$

Sia S_0 la superficie che racchiude il volume V_0 e sia \mathbf{n} il vettore unitario, uscente e normale alla superficie S_0 ; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ è la componente esterna della velocità del flusso attraverso S_0 .

Il flusso totale che fluisce attraverso S_0 è dato da

$$\int_{S_0} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS^6.$$

La velocità di variazione della massa in V_0 è data dalla velocità con cui la massa fluisce in V_0 attraverso S_0

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V_0} \rho dV \right) = - \int_{S_0} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Applicando il *Teorema della divergenza*⁷ l'equazione diventa:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V_0} \rho dV \right) + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = 0$$

Solo la densità dipende dal tempo, quindi abbiamo:

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right\} dV = 0 \quad (1.3)$$

che è detta *Equazione di conservazione della massa in forma integrale*.

Notiamo che V_0 è arbitrario, ma la relazione (1.3) deve valere per qualsiasi

⁵ \int_{V_0} rappresenta l'integrale triplo sul volume.

⁶ \int_{S_0} rappresenta l'integrale doppio sulla superficie.

⁷

Teorema 1.2.1. (*Teorema della divergenza*) Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un compatto delimitato da una superficie S ; sia \mathbf{B} un campo vettoriale differenziabile con continuità definito in un intorno di V . Vale che:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS.$$

volume di fluido considerato, quindi possiamo dire che l'uguaglianza è verificata per ogni V se e solo se la funzione integranda è identicamente nulla ⁸ cioè se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.4)$$

Abbiamo quindi ricavato la formulazione differenziale dell'*equazione di conservazione della massa*.

Riscriviamo l'equazione (1.4) espandendo il secondo addendo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho = 0$$

Utilizzando la derivata materiale introdotta precedentemente, (1.1), riscriviamo nuovamente l'equazione (1.4) e otteniamo la seguente equazione detta anche *equazione di continuità*:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Se consideriamo un fluido incomprimibile il primo addendo dell'equazione precedente è nullo e, di conseguenza, l'equazione di continuità si riduce alla forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.5)$$

1.3 Conservazione del momento

Sia $\mathbf{Q} = \int_{V_0} \rho \mathbf{u} dV$ la quantità di moto del fluido in un volume V_0 , la variazione della quantità di moto nel tempo è data da:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V_0} \rho \mathbf{u} \right) dV \quad (1.6)$$

e il flusso della quantità di moto attraverso S_0 in V_0 è:

$$- \int_{S_0} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (1.7)$$

La *Seconda Legge di Newton*, detta anche secondo principio della dinamica, ci assicura che la variazione nel tempo della quantità di moto di un volume

⁸In generale vale che:

- dato un intervalli I , se $\int_I f(x) dx = 0 \quad \forall I \subset [a, b] \Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{q.o in } [a, b]$;
- se f è continua e valgono le ipotesi precedenti $\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

materiale è pari alla risultante delle forze che agiscono su esso, cioè $\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}$, dove \mathbf{F} rappresenta tutte le forze che agiscono sul volume di fluido considerato. Andiamo quindi ad analizzare più approfonditamente le forze che agiscono sul fluido.

Nella meccanica dei fluidi le forze più rilevanti appartengono a due diverse tipologie:

- le *forze di volume* che sono tendenzialmente le stesse su ogni particella del fluido e hanno origine esternamente rispetto ad esso;
- le *forze superficiali*, o forze di contatto, sono le forze esercitate su un elemento di fluido dagli elementi vicini.

Indichiamo le forze di volume per unità di massa con F_V . Nello studio delle onde d'acqua la forza di volume quasi sempre presente è la gravità; se è l'unica componente presente F_V è del tipo $F_V = (0, 0, -g)$.

Le forze superficiali comprendono sia la pressione, sia le forze viscosse presenti; poiché stiamo considerando un fluido non viscoso andremo a considerare solo il contributo della pressione: $F_S = - \int_{S_0} P \mathbf{n} dS$.

Possiamo quindi affermare che la forza totale che agisce sul fluido nel volume V_0 è data da:

$$\int_{V_0} \rho F_V dV - \int_{S_0} P \mathbf{n} dS,$$

e applicando il teorema della divergenza diventa:

$$\int_{V_0} (\rho F_V - \nabla P) dV. \quad (1.8)$$

Utilizzando nuovamente la Seconda Legge di Newton possiamo affermare che la velocità di variazione della quantità di moto del fluido in V_0 è uguale alla somma della forza risultante che agisce sul fluido in V_0 più la velocità del flusso del momento in V_0 attraverso S_0 , da cui, facendo riferimento alle equazioni (1.6), (1.7) e (1.8), otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V_0} \rho \mathbf{u} dV \right) = \int_{V_0} (\rho F_V - \nabla P) dV - \int_{S_0} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS$$

che in modo più compatto diventa:

$$\int_{V_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho \mathbf{u} \right\} dV = \int_{V_0} (\rho F_V - \nabla P) dV. \quad (1.9)$$

⁹trasformiamo l'equazione precedente in questa forma portando la derivata sotto il segno di integrale, applicando il teorema della divergenza e riordinando gli addendi.

Espandendo il termine di sinistra dell'equazione precedente otteniamo:

$$\int_{V_0} \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right\} dV = \int_{V_0} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV \quad (1.10)$$

Sostituendo in (1.9) l'equazione (1.10) si ha:

$$\int_{V_0} \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho F_V + \nabla P \right) dV = 0, \quad (1.11)$$

dove

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + F_V. \quad (1.12)$$

L'equazione (1.12) è l'equazione di Eulero ricavata applicando la Seconda Legge di Newton ad un fluido non viscoso.

Andiamo ora a rivedere i risultati appena ottenuti in un sistema di coordinate cartesiane $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Siano $\mathbf{u} = (u, v, w)$ e $\mathbf{F} = (0, 0, -g)$, consideriamo che la densità sia costante e che il flusso sia incomprimibile ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$); sotto queste ipotesi riscriviamo le equazioni (1.12):

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.13)$$

dove

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.14)$$

1.4 Equazione dell'energia

1.4.1 Nuovi concetti

- **Vorticità.** La vorticità è il rotore del vettore velocità ed è indicata da $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$.

In generale la divergenza di un rotore è identicamente nulla¹⁰; possiamo

¹⁰Dato il rotore di un campo vettoriale C^2 su \mathbb{R}^3 la sua divergenza è nulla, in virtù del teorema di Schwarz.

quindi dire che la vorticità è solenoidale: $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$.

I fluidi a vorticità nulla si dicono *irrotazionali*, sono caratterizzati dal fatto che gli elementi di fluido non ruotano, ma traslano rigidamente o si deformano; se la vorticità non è nulla parliamo, invece, di flussi *rotazionali* in cui gli elementi di fluido ruotano su se stessi.

- **Linee di corrente.** Ogni particella di fluido in un dato istante t ha una determinata velocità \mathbf{u} con una direzione definita. Le linee di corrente sono una famiglia di curve tangenti in ogni punto al vettore velocità del fluido.

Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s; t)$ una curva, con s parametro che mappa la curva, le linee di corrente sono le soluzioni di $\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{u}(\mathbf{x}; t)$.

In coordinate cartesiane:

$$\frac{dx}{ds} = u; \quad \frac{dy}{ds} = v; \quad \frac{dz}{ds} = w$$

Nei flussi costanti le linee di corrente non cambiano nel tempo e coincidono con la traiettoria delle particelle del fluido; nei fluidi instabili il modello delle linee di flusso si modifica nel tempo.

1.4.2 Equazione di Bernoulli

Andiamo ora ad utilizzare i concetti appena introdotti per ricavare l'equazione di Bernoulli.

Per come abbiamo definito l'operatore $\frac{D}{Dt}$ abbiamo che:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

Quindi possiamo riscrivere l'equazione (1.12):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + F_V$$

Supponiamo che la densità ρ sia costante, e che le forze di volume siano rappresentate da un campo di forze conservativo $F_V = -\nabla\Omega$ dove $\Omega(\mathbf{x}, t)$ è una funzione potenziale.

Abbiamo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \Omega\right)$$

che diventa \square

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega\right) = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (1.15)$$

¹¹ $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\right) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$ e $\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}$

Consideriamo un flusso costante con \mathbf{u} , P e Ω indipendenti dal tempo; l'equazione (1.15) diventa:

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega \right) = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}.$$

In generale, il gradiente di una funzione è un vettore ortogonale alla superficie su cui la funzione è costante; in questa situazione possiamo quindi dire che $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ è ortogonale ai vettori \mathbf{u} e $\boldsymbol{\omega}$ e alle superfici

$$\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega = \text{cost.} \quad (1.16)$$

Quindi tali superfici devono contenere linee sempre parallele a \mathbf{u} e a $\boldsymbol{\omega}$, queste linee sono le linee di corrente introdotte precedentemente.

L'equazione (1.16) è detta *Equazione di Bernoulli*, se viene applicata alle linee di corrente descrive la conservazione dell'energia per un flusso costante con vorticità.

Consideriamo ora un flusso irrotazionale e non costante. Per un flusso irrotazionale vale che $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$, quindi la velocità, detta velocità potenziale, sarà della forma $\mathbf{u} = \nabla \phi$ con $\phi(\mathbf{x}, t)$ funzione potenziale¹². Lo studio di un flusso irrotazionale si riduce al problema di determinare ϕ .

Per i flussi irrotazionali e incomprimibili valgono le seguenti equazioni:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \text{ e } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

quindi ϕ soddisfa l'equazione di Laplace $\nabla^2 \phi = 0$.

Ponendo $\mathbf{u} = \nabla \phi$ e attuando le opportune sostituzioni in (1.15) otteniamo:

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega \right) = 0$$

da cui

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega = f(t) \quad (1.17)$$

con $f(t)$ arbitraria funzione di integrazione.

L'equazione (1.17) è detta *Equazione di Bernoulli per flussi non costanti*.

Supponendo che il flusso sia stabile a partire dall'equazione (1.17) otteniamo l'equazione (1.16). Queste due equazioni descrivono il flusso ovunque, indipendentemente dalle linee di corrente, e la costante rimane la stessa per tutto il fluido a differenza dell'equazione $\nabla^2 \phi = 0$ che associa ad ogni linea di corrente una differente costante.

¹²La regione in cui studiamo il flusso è semplicemente connessa.

1.5 Condizioni al bordo

Per descrivere in modo completo il moto di un fluido è necessario imporre opportune condizioni al bordo.

Vogliamo ora soffermarci a studiare le condizioni al contorno che definiscono i problemi di onde d'acqua.

La superficie di interfaccia tra liquido e aria, detta superficie libera, subisce uno stress da parte dell'atmosfera; in generale una componente è di tipo viscoso, ma se il fluido può essere considerato non viscoso si considera solo la componente della pressione.

Le altre condizioni da considerare sono le condizioni cinematiche e quelle dinamiche.

Per quanto riguarda il fondale, poiché lavoriamo con fluidi non viscosi, esso rappresenta una delle superfici del fluido e le particelle a contatto con questa superficie si muovono su di essa.

In molti problemi la superficie di fondo viene considerata fissata, rigida e impermeabile.

1.5.1 Condizione cinematica

Chiamiamo $z = h(\mathbf{x}_\perp, t)$ la superficie libera, dove \mathbf{x}_\perp rappresenta il vettore bidimensionale perpendicolare alla direzione z ¹³.

In generale una superficie $F(\mathbf{x}, t) = d$, con d costante, che si muove insieme al fluido, cioè che contiene sempre le stesse particelle di fluido, deve soddisfare la condizione $\frac{DF}{Dt} = 0$.

Portando tutto a primo membro nell'equazione della superficie otteniamo:

$$z - h(\mathbf{x}_\perp, t) = 0$$

per quanto appena osservato questa superficie deve verificare la seguente condizione:

$$\frac{D}{Dt} \{z - h(\mathbf{x}_\perp, t)\} = 0.$$

Siano ∇_\perp il gradiente perpendicolare alla direzione z e $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_\perp, w)$ il vettore velocità.

Per la condizione imposta sulla superficie libera e poiché

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp + w \frac{\partial}{\partial z}$$

si ottiene:

$$w - \{h_t + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp)h\} = 0.$$

¹³in coordinate cartesiane $\mathbf{x}_\perp = (x, y)$

Possiamo quindi concludere affermando che sulla superficie $z = h(\mathbf{x}_\perp, t)$ la condizione cinematica è:

$$w = h_t + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp)h. \quad (1.18)$$

1.5.2 Condizioni dinamiche

In assenza di forze viscosse la più semplice condizione dinamica considerata sulla superficie libera è la pressione P . Spesso si considera $P = P_a = \text{cost}$ con P_a pressione atmosferica.

Consideriamo il caso di un fluido incomprimibile, irrotazionale e non costante. Prendiamo l'equazione della pressione (1.17) ricavata precedentemente e poniamo $\Omega = gz$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + gz = f(t).$$

Imponiamo ora $P = P_a$ su $z = h$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P_a}{\rho} + gh = f(t);$$

supponendo poi che, da qualche parte, il fluido sia stazionario per $P = P_a$ e $h = h_0 = \text{cost}$, possiamo scrivere in modo esplicito la funzione $f(t)$ come

$$f(t) = \frac{P_a}{\rho} + gh_0,$$

da cui, sulla superficie $z = h$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + g(h - h_0) = 0. \quad (1.19)$$

L'equazione (1.19) descrive la condizione di pressione superficiale.

1.5.3 Condizione sul fondo

Per fluidi non viscosi il fondale costituisce un contorno definito come una superficie che si muove con il fluido.

Procedendo come per la superficie libera imponiamo che la superficie del fondo descritta da $z = b(\mathbf{x}_\perp, t)$ soddisfi:

$$\frac{D}{Dt} \{z - b(\mathbf{x}_\perp, t)\} = 0$$

da cui su $z = b$:

$$w = b_t + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp)b. \quad (1.20)$$

Considerando una condizione stazionaria sul fondale $z = b$ l'equazione (1.20) diventa:

$$w = (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp)b.$$

1.6 Flusso di energia

Vogliamo introdurre in modo piú generale l'equazione dell'energia, valida anche senza supporre che il fluido sia costante o irrotazionale.

Consideriamo un elemento di volume fisso nello spazio, vogliamo ricavare l'equazione che rappresenta il bilanciamento tra la variazione dell'energia totale nell'unità di volume e la quantità di energia che fluisce al di fuori di tale volume nell'unità di tempo.

Consideriamo l'equazione (1.15) per un fluido incomprimibile e con una forza di volume conservativa $F = -\nabla\Omega$.

Moltiplicando tutti i membri per \mathbf{u} tramite il prodotto scalare si ottiene¹⁴:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega \right) = 0$$

da cui¹⁵:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + \nabla \cdot \left\{ \mathbf{u} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega \right) \right\} = 0.$$

Aggiungendo il termine $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$ e moltiplicando tutti i termini per la densità ρ otteniamo l'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega \right) + \nabla \cdot \left\{ \mathbf{u} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + P + \rho \Omega \right) \right\} = 0.$$

Il termine nella prima parentesi rappresenta l'energia dell'unità di volume del fluido, in particolare il termine $\frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ rappresenta l'energia cinetica, $\rho \Omega$ l'energia interna. Calcolando la derivata parziale otteniamo informazioni relative alla variazione di energia.

Ricavata questa equazione vogliamo utilizzarla nello studio delle onde d'acqua, poniamo quindi $\Omega = gz$ e integriamo dal fondo $z = b(\mathbf{x}_\perp, t)$ alla superficie libera $z = h(\mathbf{x}_\perp, t)$:

$$\int_b^h \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \rho gz \right) + \nabla_\perp \cdot \left[\mathbf{u}_\perp \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + P + \rho gz \right) \right] \right. \\ \left. + \left[w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + P + \rho gz \right) \right] \right\} dz = 0$$

¹⁴ $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = 0$ poiché i vettori sono ortogonali.

¹⁵Stiamo considerando un fluido incomprimibile, cioè $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, quindi possiamo aggiungere all'equazione precedente il termine $\left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega \right) (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$.

In particolare $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega \right) + \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega \right) (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \cdot \left\{ \mathbf{u} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega \right) \right\}$.

dove P_s e P_b rappresentano rispettivamente la pressione superficiale e la pressione sul fondale, h_t e b_t rappresentano la derivata temporale della superficie e del fondo poiché sono due funzioni dipendenti dal tempo. Valutando l'integrale nei due estremi di integrazione e operando con le opportune semplificazioni otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_b^h \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \rho g z \right) dz \right\} + \nabla_{\perp} \cdot \int_b^h \mathbf{u}_{\perp} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + P + \rho g z \right) dz + P_s h_t - P_b b_t = 0. \quad (1.21)$$

Il primo termine $\mathcal{E} = \int_b^h \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \rho g z \right) dz$ rappresenta l'energia nel flusso per unità d'area orizzontale, il secondo termine $\mathcal{F} = \int_b^h \mathbf{u}_{\perp} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + P + \rho g z \right) dz$ è il vettore di flusso di energia orizzontale.

Posto $\mathcal{P} = P_s h_t - P_b b_t$, energia netta dovuta alle forze di pressione che agiscono al bordo superiore e inferiore del fluido, riscriviamo in forma più compatta l'equazione dell'energia:

$$\mathcal{E}_t + \nabla_{\perp} \cdot \mathcal{F} + \mathcal{P} = 0. \quad (1.22)$$

Supponiamo che il bordo inferiore sia stazionario, $b_t = 0$, e che la pressione superficiale sia costante, $P_s = 0$; allora $\mathcal{P} = 0$ e l'equazione precedente diventa:

$$\mathcal{E}_t + \nabla_{\perp} \cdot \mathcal{F} = 0.$$

Questa equazione può essere utilizzata per descrivere l'energia associata ad un movimento ondulatorio facendo una media sulla lunghezza d'onda.

1.7 Adimensionalizzazione

In fluidodinamica l'introduzione di variabili fisiche adimensionali risulta utile, ad esempio, per isolare parametri fondamentali per determinare le caratteristiche di un certo problema. Per formulare un problema in termini adimensionali è necessario in primo luogo definire le grandezze scala del problema, cioè le variabili di controllo che fissano le grandezze delle quantità a loro omogenee. Una volta individuate le grandezze scala è possibile definire le variabili adimensionali, queste sono ottenute dividendo la variabile dimensionale per la grandezza scala ad essa omogenea.

In particolare vogliamo introdurre due parametri adimensionali: uno per la lunghezza e uno per l'ampiezza dell'onda, chiameremo i due parametri rispettivamente δ e ϵ .

Introduciamo inizialmente le variabili nelle loro scale di lunghezza:

- h_0 profondità dell'acqua;
- λ lunghezza d'onda dell'onda di superficie;
- $\sqrt{gh_0}$ velocità di propagazione delle onde lunghe.

Per definire la scala per le componenti orizzontali della velocità consideriamo la lunghezza d'onda λ e la velocità di propagazione $\sqrt{gh_0}$, queste ci permettono di definire tempistiche standard associate alla propagazione orizzontale $\lambda/\sqrt{gh_0}$.

Per quanto riguarda la componente verticale prendiamo come scala $h_0\sqrt{gh_0}/\lambda$ affinché l'equazione di conservazione della massa abbia significato e le condizioni al contorno siano consistenti.

L'onda di superficie ci permette di introdurre il parametro ampiezza dell'onda.

Riscriviamo la superficie $z = h(\mathbf{x}_\perp, t)$:

$$h = h_0 + a\eta(\mathbf{x}_\perp, t)$$

con a ampiezza dell'onda e η funzione adimensionale.

Riportiamo sotto le variabili adimensionali da cui ogni variabile dimensionale è sostituita:

- $x \rightarrow \lambda x, y \rightarrow \lambda y, z \rightarrow h_0 z$;
- $t \rightarrow \left(\frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}\right)t$;
- $u \rightarrow \sqrt{gh_0}u, v \rightarrow \sqrt{gh_0}v, w \rightarrow \left(\frac{h_0\sqrt{gh_0}}{\lambda}\right)w$;

con $h = h_0 + a\eta$ e $b \rightarrow h_0 b$.

Possiamo inoltre riscrivere la pressione come

$$P = P_a + \rho g(h_0 - z) + \rho g h_0 p$$

dove P_a rappresenta la pressione atmosferica e $\rho g(h_0 - z)$ la pressione idrostatica. La scala di pressione $\rho g h_0$ dipende dalla pressione alla profondità $z = h_0$. La variabile p misura la deviazione dalla distribuzione della pressione idrostatica; durante il passaggio dell'onda p non è nulla.

Possiamo quindi riscrivere, utilizzando esclusivamente variabili adimensionali, l'equazione di Eulero (1.13) e l'equazione di conservazione della massa (1.14):

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \delta^2 \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.23)$$

dove

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

La variabile adimensionale $\delta = \frac{h_0}{\lambda}$ è detto parametro di lunga lunghezza d'onda (long wavelength) o parametro di superficialità (shallowness).

In modo analogo riscriviamo in dipendenza da variabili adimensionali le condizioni al bordo:

- **condizioni cinematiche:** su $z = 1 + \epsilon\eta$

$$w = \epsilon \{ \eta_t + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla) \eta \}$$

- **condizioni dinamiche:** posto $h = h(x, y, z)$

$$p - \epsilon\eta = -\epsilon \left(\frac{\Gamma}{\rho g \lambda^2} \right) \left\{ \frac{(1 + \epsilon^2 \delta^2 \eta_y^2) \eta_{xx} + (1 + \epsilon^2 \delta^2 \eta_x^2) \eta_{yy} - 2\epsilon^2 \delta^2 \eta_x \eta_y \eta_{xy}}{(1 + \epsilon^2 \delta^2 \eta_x^2 + \epsilon^2 \delta^2 \eta_y^2)^{\frac{2}{3}}} \right\}$$

su $z = 1 + \epsilon\eta$.

Poniamo $\frac{\Gamma}{\rho g \lambda^2} = \delta^2 W$ dove $W = \frac{\Gamma}{\rho g h_0^2}$ è il *numero di Weber*¹⁶.

- **condizioni sul fondo:** su $z = b$

$$w = b_t + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla) b.$$

1.8 Ridimensionamento delle variabili

Considerando le condizioni al bordo relative alla superficie possiamo notare che sia w che p sono proporzionali al parametro ϵ , cioè sono proporzionali all'ampiezza dell'onda.

Scegliamo un insieme di variabili ridimensionalizzate che devono essere coerenti con le condizioni al contorno e le equazioni che governano il moto.

Ponendo $p \rightarrow \epsilon p$; $w \rightarrow \epsilon w$; $(u, v) \rightarrow \epsilon(u, v)$, riscriviamo le equazioni (1.23):

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \delta^2 \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.24)$$

dove

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

¹⁶il numero di Weber è un numero adimensionale che mette in relazione la forza di tensione superficiale e la forza di inerzia.

Possiamo inoltre riscrivere le condizioni al contorno:
sulla superficie $z = 1 + \epsilon\eta$

$$\begin{cases} w = \eta_t + \epsilon(\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp)\eta \\ \rho = \eta - \delta^2 W \left\{ \frac{(1 + \epsilon^2 \delta^2 \eta_t^2)\eta_{xx} + (1 + \epsilon^2 \delta^2 \eta_x^2)\eta_{yy} - 2\epsilon^2 \delta^2 \eta_x \eta_y \eta_{xy}}{(1 + \epsilon^2 \delta^2 \eta_x^2 + \epsilon^2 \delta^2 \eta_y^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}, \end{cases}$$

sulla superficie $z = b$:

$$w = \epsilon^{-1} b_t + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) b.$$

Il modo in cui le variabili vengono riscalate dipende dalla situazione che vogliamo studiare.

Approssimazione delle equazioni

I parametri appena introdotti ci permettono di riscrivere le equazioni di governo e le condizioni al contorno operando differenti approssimazioni.

In particolare due delle approssimazioni più comuni sono :

- $\epsilon \rightarrow 0$ per i problemi linearizzati;
- $\delta \rightarrow 0$ per i problemi di tipo *shallow water*¹⁷

CASO I

Nel primo caso si richiede che l'ampiezza dell'onda di superficie sia piccola, questo porta ad equazioni lineari.

Consideriamo $b_t = 0$, δ e W come parametri fissati per $\epsilon \rightarrow 0$ otteniamo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \delta^2 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

dove su $z = 1$ abbiamo:

$$\begin{cases} w = \eta_t \\ p = \eta - \delta^2 W(\eta_{xx} + \eta_{yy}) \end{cases}$$

e su $z = b$ con $b < 1$:

$$w = (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) b.$$

¹⁷la teoria shallow water si occupa di studiare onde la cui lunghezza d'onda è molto maggiore della profondità dell'acqua della zona in cui si propaga.

Le equazioni linearizzate ci permettono di sostituire la valutazione della superficie libera, vista come una superficie sconosciuta, con la valutazione in $z = 1$.

CASO II

Se consideriamo onde con una lunga lunghezza d'onda o che si propagano su acque basse, cioè se la quantità $\delta = \frac{h_0}{\lambda}$ è piccola, fissiamo ϵ e W e facciamo tendere δ a zero.

Le equazioni diventano:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

dove

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Su $z = 1 + \eta$ abbiamo:

$$\begin{cases} w = \eta_t + \epsilon(\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp)\eta \\ p = \eta, \end{cases}$$

su $z = b$:

$$w = (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp)b.$$

CASO III

Per descrivere onde lunghe di piccola ampiezza, cioè quelle onde in cui entrambi i parametri ϵ e δ tendono a zero, possiamo utilizzare sia le equazioni ottenute nel primo caso, sia quelle ricavate nel secondo imponendo le opportune condizioni.

Se utilizziamo le prime equazioni è necessario supporre $\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$ e $\rho = \eta$ su $z = 1$; per quanto riguarda invece le seconde equazioni poniamo $\epsilon = 0$.

1.9 Propagazione delle onde

Studiando le onde è possibile ricavare differenti equazioni che ne descrivono il moto.

Se consideriamo onde unidimensionali il modello lineare è descritto dall'equazione

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (1.25)$$

dove $u(x, t)$ rappresenta l'ampiezza dell'onda e c è una costante.

La soluzione generale dell'equazione delle onde, detta *soluzione di D'Alembert*, è:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (1.26)$$

dove f e g sono due funzioni arbitrarie che rappresentano rispettivamente onde che si propagano a velocità costante verso destra e verso sinistra; per determinare esplicitamente f e g è necessario considerare i dati iniziali. Le onde rappresentate dalle due componenti mantengono la loro forma, non hanno interazioni né con se stesse né reciproche, ogni componente è un'onda lineare separata e indipendente.

Consideriamo onde che si propagano in una sola dimensione, per modificare il problema possiamo porre $g \equiv 0$ oppure considerare dall'inizio un'onda in una sola dimensione: $u_t + cu_x = 0$ che ha soluzione $u(x, t) = f(x - ct)$.

Se consideriamo modelli fisici più completi troviamo equazioni più complesse, limitandoci al caso di propagazione unidimensionale due possibili equazioni sono:

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.27)$$

o

$$u_t - u_x + u_{xx} = 0. \quad (1.28)$$

Per risolvere queste equazioni cerchiamo una soluzione armonica del tipo:

$$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.29)$$

con k parametro reale.

Svolgendo gli opportuni calcoli si ottiene che l'equazione (1.29) è soluzione dell'equazione (1.27) se e solo se $\omega = k - k^3$ ed è soluzione di (1.28) se e solo se $\omega = k - ik^2$.

L'equazione (1.27) è la più semplice equazione che rappresenta un'onda dispersiva e la relazione $\omega = k - k^3$ è detta *relazione di dispersione*.

Utilizzando questa relazione possiamo scrivere

$$kx - \omega t = k[x - (1 - k^2)t]$$

da cui otteniamo la velocità di propagazione come funzione di k :

$$\frac{\omega}{k} = 1 - k^2. \quad (1.30)$$

L'equazione appena ricavata ci permette di affermare che onde con diverso numero d'onda k viaggiano a velocità differenti. La soluzione è data dalla somma di due componenti ciascuna associata ad un determinato valore di k , quindi ogni componente si muove alla sua velocità. Se la soluzione si trova inizialmente su un supporto compatto le due componenti si separano e non cambiano forma.

La velocità $\frac{\omega}{k}$ è detta *velocità di fase* dell'onda ed è la velocità con cui si propaga la fase di un'onda, descrive quindi il moto di una singola componente. Nello studio di un'onda si considera anche un altro tipo di velocità, la *velocità di gruppo*, $\frac{d\omega}{dk}$ rappresenta la velocità a cui è propagata l'energia, descrive quindi il moto di un gruppo di onde.

Considerando l'equazione (1.28) e la relazione $\omega = k - ik^2$ otteniamo:

$$kx - \omega t = ik(x - t)k^2 t$$

La soluzione rappresenta quindi un'onda che decade per $t \rightarrow 0$ con $k \neq 0$, il fenomeno di decadimento di un'onda è chiamato *dissipazione* e si verifica in presenza di attrito, come ad esempio nel caso di fluidi viscosi.

Nello studio dell'equazione (1.28) bisogna considerare il segno dei termini u_t e u_{xx} poiché se cambiano per $t \rightarrow 0$ l'ampiezza dell'onda diventa sempre più grande.

Concludiamo l'introduzione di alcune possibili equazioni per descrivere le onde osservando che spesso queste sono non lineari come ad esempio:

$$u_t + (1 + u)u_x = 0.$$

Per risolvere queste equazioni si ricorre generalmente al *metodo delle caratteristiche*.

1.10 Espansione asintotica

Nella gestione delle equazioni che descrivono il moto delle onde d'acqua una delle tecniche utilizzate, che ora andremo a descrivere, si basa sulla costruzione dell'espansione asintotica.

Ricordiamo che date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ diciamo che:

- $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$, se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;
- $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$, se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è finito e diverso da zero;

- $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$;

estendiamo queste definizioni affermando che, se, per $N \in \mathbb{N}$ e $x \rightarrow x_0$, si ha

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} g_n(x) \sim g_N(x),$$

allora, mandando N ad infinito scriveremo che

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

che definisce l'espansione asintotica di $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$.

Si può definire l'espansione asintotica anche in dipendenza da un parametro: definiamo, per $\epsilon \rightarrow 0$ e x fissato,

$$f(x, \epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, \epsilon)$$

l'espansione asintotica di $f(x, \epsilon)$, supponendo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $f_{n+1}(x, \epsilon) = o(f_n(x, \epsilon))$ per $\epsilon \rightarrow 0$.

Se l'espansione asintotica è definita per tutte le x del dominio si dice che è uniformemente valida, se al contrario per qualche x e per qualche n

$$f_{n+1}(x, \epsilon) \neq o(f_n(x, \epsilon))$$

per $\epsilon \rightarrow 0$ l'espansione non è uniforme.

Studiando le onde d'acqua scriviamo le $f_n(x, \epsilon)$ in una forma più semplice: $f_n(x, \epsilon) = \epsilon^n a_n(x)$.

Vogliamo applicare il metodo dell'espansione asintotica alla ricerca di soluzioni di equazioni differenziali.

Per prima cosa assumiamo che esista una soluzione in forma asintotica dipendente da un parametro piccolo. La forma dell'espansione dipende dal modo in cui il parametro compare nell'equazione e nelle condizioni imposte.

Consideriamo, ad esempio, la seguente equazione alle derivate parziali:

$$u_{tt} - u_{xx} = \epsilon(u^2 + u_{xx})_{xx} \tag{1.31}$$

La forma di questa equazione ci suggerisce che l'espansione asintotica della soluzione per $\epsilon \rightarrow 0$ sia :

$$u(x, t; \epsilon) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n u_n(x, t)$$

con $x = O(1)$ e $t = O(1)$ per $\epsilon \rightarrow 0$.

Supponiamo inoltre che l'equazione (1.31), date opportune condizioni iniziali per $t = 0$, vada risolta per tempi positivi e per x che varia da $-\infty$ a $+\infty$. Quindi l'espansione riportata sopra è soluzione dell'equazione precedente solo se valgono le seguenti relazioni, ottenute formalmente risolvendo in (1.31) le singole potenze ϵ^n , $n = 0, 1, \dots$:

$$\begin{aligned} u_{0tt} - u_{0xx} &= 0 \\ u_{1tt} - u_{1xx} &= (u_0^2 + u_{0xx})_{xx} \\ \dots & \\ u_{ntt} - u_{nxx} &= \left(2 \sum_{i+j=n-1; i<j} u_i u_j + u_{(n-1)xx} \right)_{xx} \end{aligned} \tag{1.32}$$

La soluzione generica per u_0 è della forma:

$$u_0(x, t) = f(x - t) + g(x + t)$$

Poiché per tempi sufficientemente lunghi le due componenti si separano possiamo supporre che i dati iniziali siano tali da generare solo una delle due. Prendiamo, ad esempio, come condizioni iniziali:

$$\begin{cases} u(x, 0; \epsilon) = f(x) \\ u_t(x, 0; \epsilon) = -f'(x) \end{cases} \tag{1.33}$$

in questo modo consideriamo solo la componente che si muove verso destra. Posto $u_0 = f(x - t)$ possiamo sostituirlo nella seconda relazione di (1.32) e otteniamo:

$$u_{1tt} - u_{1xx} = (f^2(x - t) + f''(x - t))'' \tag{1.34}$$

Introducendo le variabili caratteristiche $\xi = x - t$ e $\zeta = x + t$ questa equazione diventa¹⁸

$$-4u_{1\xi\zeta} = (f^2(\xi) + f''(\xi))'',$$

¹⁸da queste due relazioni otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d\xi}{dx} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{d\zeta}{dx} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{d\xi}{dt} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{d\zeta}{dt} \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{cases}$$

da cui in questo caso specifico abbiamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{cases}$$

e operiamo il cambio di variabili all'equazione (1.34)

u_1 sarà quindi della forma:

$$u_1(\xi, \zeta) = -\frac{1}{4}\zeta(f^2(\xi) + f''(\xi))' + A(\xi) + B(\zeta) \quad (1.35)$$

con f funzione di ξ .

Per determinare A e B è necessario considerare le condizioni iniziali, facendo riferimento alle condizioni (1.33) abbiamo

$$\begin{cases} u_1(x, 0) = 0 \\ u_{1t}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

da cui, riscrivendo queste condizioni in modo esplicito, otteniamo le seguenti relazioni¹⁹:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}x(f^2(x) + f''(x))' + A(x) + B(x) &= 0; \\ \frac{1}{4}x(f^2(x) + f''(x))'' - A'(x) - \frac{1}{4}(f^2(x) + f''(x))' + B'(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ponendo

$$A(\xi) = \frac{1}{4}[\xi(f^2(\xi) + f''(\xi))' - f^2(\xi) - f''(\xi)]$$

e

$$B(\zeta) = \frac{1}{4}[f^2(\zeta) + f''(\zeta)]$$

è possibile verificare che A e B soddisfano (1.36).

Inserendo le equazioni appena trovate in (1.35) abbiamo:

$$u_1(\xi, \zeta) = \frac{1}{4}[(\xi - \zeta)(f^2(\xi) + f''(\xi))' + f^2(\zeta) + f''(\zeta) - f^2(\xi) - f''(\xi)]$$

o analogamente, ponendo $F = f^2 + f''$:

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2}tF'(x - t) + \frac{1}{4}[F(x + t) - F(x - t)].$$

Definiti u_0 e u_1 possiamo quindi riscrivere l'espansione asintotica introdotta precedentemente:

$$u(x, t; \epsilon) \sim f(x - t) - \frac{\epsilon}{4}[2tF'(x - t) + F(x - t) - F(x + t)].$$

¹⁹Per come abbiamo definito ξ e ζ il punto $(x, 0)$ corrisponde al punto (x, x) nelle nuove variabili.

Per calcolare la derivata temporale di u_1 ricordiamo che, per il cambiamento di variabili scelto, si ha $u_{1t} = -u_{1\xi} + u_{1\zeta}$.

Questa espansione asintotica non è uniformemente valida per $\epsilon \rightarrow 0$ se $f(x)$ è a supporto compatto o se $f(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$.

Per le condizioni imposte su $f(x)$ consideriamo solo il caso $\xi = x - t = O(1)$ e $\tau = t\epsilon = O(1)$ per $\epsilon \rightarrow 0$ e analizziamo la soluzione dell'equazione (1.31).

Queste trasformazioni ci permettono di ottenere le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}$$

ponendo $u(x, t; \epsilon) = U(\xi, \tau; \epsilon)$ e applicando il tutto all'equazione (1.31) otteniamo:

$$\epsilon U_{\tau\tau} - 2U_{\tau\xi} = (U^2 + U_{\xi\xi})_{\xi\xi}.$$

La soluzione asintotica che ricerchiamo per $\xi = O(1)$ e $\tau = O(1)$ per $\epsilon \rightarrow 0$ sarà della forma:

$$U(\xi, \tau; \epsilon) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n U_n(\xi, \tau).$$

Da cui, svolgendo i calcoli, vediamo che U_0 dovrà soddisfare:

$$2U_{0\tau\xi} + (U^2 + U_{0\xi\xi})_{\xi\xi} = 0$$

o, analogamente, richiamando la condizione di decadimento come $|\xi| \rightarrow +\infty$

$$2U_{0\tau} + 2U_0U_{0\xi} + U_{0\xi\xi\xi} = 0.$$

Questa equazione è un'equazione non lineare alle derivate parziali al terzo ordine, ed è una variante dell'equazione di Korteweg-de-Vries che analizzeremo successivamente nello studio delle soluzioni solitoniche.

Siamo quindi in grado di formulare una soluzione dell'equazione che soddisfi $U_0 \rightarrow f(\xi)$ per $\tau \rightarrow 0$.

Questa soluzione esiste purché $f(\xi)$ decada in modo sufficientemente veloce per $|\xi| \rightarrow +\infty$.

La soluzione ottenuta per U_0 è un'espansione asintotica ad un termine uniformemente valida per $\tau \leq 0$ e $\tau = O(1)$ al tendere di ϵ a zero.

Il termine U_1 in questa espansione deve soddisfare le due relazioni scritte sotto, ottenute in modo analogo a quelle per U_0 :

$$2U_{1\tau\xi}2(U_0U_1)_{\xi\xi} + U_{1\xi\xi\xi\xi} = U_{0\tau\tau}$$

o equivalentemente

$$2U_{1\tau} + 2(U_0U_1)_{\xi} + U_{1\xi\xi\xi} = -(U_0^2 + U_{0\xi\xi})_{\tau}.$$

La soluzione per U_1 sarà della forma $U_1 = U_{0\xi}V(\xi, \tau)$.

Per una trattazione completa dovremmo continuare e analizzare anche il termine generale U_n , per quanto riguarda lo studio che vogliamo fare ora ci basta affermare che presa $f(x)$ abbastanza regolare e che decade rapidamente all'infinito l'espansione su lunghi tempi o lunghe distanze risulta essere uniformemente valida.

Per la risoluzione di problemi relativi alle onde d'acqua viene anche utilizzato un altro metodo che si basa sul metodo di scale multiple. Poiché non lo utilizzeremo all'interno di questa trattazione, esso non verrà introdotto in modo più approfondito.

Capitolo 2

Problemi lineari

In questo capitolo approfondiremo la teoria delle equazioni lineari che descrivono un fluido non viscoso, già introdotte nel capitolo precedente.

Per prima cosa ci occuperemo di descrivere onde che si muovono su fondali con profondità costante focalizzandoci inoltre sulla traiettoria delle particelle, la velocità di gruppo e la propagazione dell'energia; nei paragrafi successivi andremo a studiare le onde che si muovono su fondali a profondità variabile e in particolare approfondiremo il caso di onde gravitazionali linearizzate senza l'ipotesi di onde lunghe.

2.1 Profondità costante

Consideriamo un'onda armonica piana¹, sia x la direzione lungo la quale si propaga, e supponiamo che la profondità b sia costante.

Riportiamo di seguito le equazioni lineari espresse in coordinate cartesiane in cui abbiamo posto per comodità $b = 0$:

$$u_t = -p_x; \quad \delta^2 w_t = -p_z; \quad u_x + w_z = 0 \quad (2.1)$$

con

$$\begin{cases} w = \eta_t & \text{e} & p = \eta - \delta^2 W_e \eta_{xx} & \text{su} & z = 1 \\ w = 0 & & & \text{su} & z = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

¹Un'onda *piana* è un'onda a frequenza costante i cui fronti d'onda sono infiniti piani ortogonali alla direzione di propagazione.

Un'onda è detta *armonica* quando la sua legge di vibrazione è di tipo sinusoidale. Sono onde armoniche, ad esempio, le onde sonore e le onde elastiche; ciò che differenzia queste onde è la grandezza che oscilla, nelle prime oscilla la pressione del mezzo, nelle seconde la posizione.

La superficie dell'onda è descritta dall'equazione:

$$\eta(x, t) = 2 \operatorname{Re}\left(Ae^{i(kx - \omega t)}\right)$$

che al tempo $t = 0$ diventa

$$\eta(x, t) = 2 \operatorname{Re}\left(Ae^{ikx}\right)$$

dove A è una costante complessa e k è il numero d'onda.

Per semplicità di scrittura definiamo $E := e^{i(kx - \omega t)}$, quindi la soluzione che cerchiamo sarà della forma:

$$u = U(z)E; \quad w = W(z)E; \quad p = P(z)E \quad (2.3)$$

Riscriviamo con questa notazione le equazioni (2.1):

$$\begin{aligned} u_t = -p_x \quad \text{con} \quad \begin{cases} u_t = -i\omega UE \\ p_x = ikPE \end{cases} &\Rightarrow -i\omega UE = -ikPE \Rightarrow \frac{\omega}{k}U = P \\ \delta^2 w_t = -p_z \quad \text{con} \quad \begin{cases} w_t = -i\omega WE \\ p_z = P'E \end{cases} &\Rightarrow -\delta^2 i\omega WE = -P'E \Rightarrow P' = \delta^2 i\omega W \\ u_x + w_z = 0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} u_x = ikUE \\ w_z = W'E \end{cases} &\Rightarrow ikUE + W'E = 0 \Rightarrow W' + ikU = 0 \end{aligned}$$

Le equazioni che vogliamo studiare sono quindi:

$$\frac{\omega}{k}U = P; \quad P' = \delta^2 i\omega W; \quad W' + ikU = 0 \quad (2.4)$$

Le condizioni al bordo riportate nelle equazioni (2.2) diventano:
sulla superficie $z = 1$

- $\omega = \eta_t$ con $\eta_t = -i\omega AE \Rightarrow WE = -i\omega AE \Rightarrow W(1) = -i\omega A;$
- $p = \eta - \delta^2 W_e \eta_{xx}$ con $\eta_{xx} = -k^2 AE \Rightarrow PE = AE + \delta^2 W_e k^2 AE \Rightarrow P(1) = (1 + \delta^2 k^2 W_e)A;$

sulla superficie $z = 0$

- $W(0) = 0.$

Dalle equazioni (2.4) otteniamo:

$$W'' = -ikU' = -\frac{k^2}{\omega}P' = \delta^2 k^2 W \quad (2.5)$$

quindi la soluzione generale per $W(z)$ è della forma:

$$W(z) = Be^{\delta kz} + Ce^{-\delta kz} \quad (2.6)$$

con B e C costanti arbitrarie.

Imponiamo in (2.6) le condizioni al bordo:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} W(1) = Be^{\delta k} + Ce^{-\delta k} = -i\omega A \\ W(0) = B + C = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} B = -C \\ C(e^{-\delta k} - e^{\delta k}) = -i\omega A \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} C = \frac{i\omega A}{e^{\delta k} - e^{-\delta k}} \\ B = -\frac{i\omega A}{e^{\delta k} - e^{-\delta k}} \end{cases} \end{aligned}$$

Otteniamo la soluzione:

$$W(z) = -\frac{i\omega A}{e^{\delta k} - e^{-\delta k}} e^{\delta kz} + \frac{i\omega A}{e^{\delta k} - e^{-\delta k}} e^{-\delta kz} = -i\omega A \left(\frac{e^{\delta kz} - e^{-\delta kz}}{e^{\delta k} - e^{-\delta k}} \right)$$

Da cui²:

$$W(z) = -i\omega A \frac{\sinh(\delta kz)}{\sinh(\delta k)} \quad (2.7)$$

Dalle condizioni al bordo su P (2.4) abbiamo inoltre che:

$$P(1) = \frac{\omega}{k}U(1) = \frac{i\omega}{k^2}W'(1)$$

e utilizzando la soluzione (2.7) possiamo scrivere la seguente relazione:

$$1 + \delta^2 k^2 W_e = \frac{\delta \omega^2 \cosh(\delta k)}{k \sinh(\delta k)}$$

da cui:

$$\left(\frac{\omega}{k} \right)^2 = c_p^2 = (1 + \delta^2 k^2 W_e) \frac{\tanh(\delta k)}{\delta k}. \quad (2.8)$$

² $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Quindi per qualsiasi valore di k , cioè per onde di qualsiasi numero d'onda, e tenendo conto del contributo apportato dalla tensione superficiale, possiamo trovare la velocità di fase c_p di queste onde, già introdotta nella sezione (1.9). Trovare l'equazione di c_p^2 ci assicura la possibilità di avere propagazione sia a destra che a sinistra.

La relazione di dispersione è una funzione di $\delta k = \frac{h_0}{\Lambda}$, con $\Lambda = \frac{\lambda}{k}$, che rappresenta la lunghezza d'onda, e h_0 , che rappresenta la profondità, entrambe all'istante iniziale.

Al variare di δk le onde che studiamo presentano differenti caratteristiche.

Caso $\delta k \rightarrow 0$

Prendendo in considerazione il caso in cui sia $\delta k \rightarrow 0$, ossia nel caso di onde lunghe, imponendo questo limite in (2.8) si ha³

$$\lim_{\delta k \rightarrow 0} (1 + \delta^2 k^2 W_e) \underbrace{\frac{\tanh(\delta k)}{\delta k}}_{\sim 1} = 1$$

troviamo quindi che $c_p^2 \sim 1$.

Tornando alle variabili fisiche introdotte nel primo capitolo la velocità di propagazione è data da $c_p \sim \pm\sqrt{gh_0}$, il risultato appena ottenuto conferma quindi la grandezza scala scelta per l'adimensionalizzazione della velocità nel paragrafo (1.7).

Queste relazioni ci permettono di fare alcune osservazioni riguardo la velocità delle onde che stiamo studiando; la velocità:

- non dipende dal numero d'onda, quindi parliamo di *onde non dispersive*;
- non dipende dal numero di Weber W_e ;
- dipende dall'accelerazione gravitazionale, per questo motivo chiamiamo le onde che viaggiano a questa velocità *onde di gravità*.

Caso $\delta k \rightarrow +\infty$

Analizzando ora il caso $\delta k \rightarrow +\infty$, ossia nel caso delle onde corte, o che si propagano in acque molto profonde, imponendo questo limite in (2.8) abbiamo che⁴ $c_p^2 \sim \delta k W_e$.

³ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh(x)}{x} = 1$
⁴ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x) = 1$

Le onde che viaggiano a questa velocità sono dette *onde capillari*.

I due casi appena esposti, presuppongono entrambi il contributo apportato dalla tensione superficiale. Supponiamo ora che gli effetti di quest'ultima siano invece trascurabili, W_e risulta quindi tanto piccolo da essere trascurabile, l'equazione (2.8) per onde gravitazionali di qualsiasi numero d'onda diventa:

$$c_p^2 = \frac{\tanh(\delta k)}{\delta k}$$

Consideriamo nuovamente il caso delle onde corte. Poiché queste sono caratterizzate da $\delta k \rightarrow \infty$ abbiamo che:

$$c_p \sim \pm \frac{1}{\sqrt{\delta k}}$$

possiamo quindi notare che, in questo caso, la velocità non dipende dalla profondità.

2.1.1 Traiettoria delle particelle

Nello studio del moto ondoso ci interessa conoscere il percorso delle particelle del fluido per poter descrivere il moto di queste al di sopra e al di sotto la superficie.

Vedremo che, quando un'onda marina si propaga, le particelle d'acqua si muovono attorno alla loro posizione iniziale, di moto circolare, nel caso di onde in acque profonde, o ellittico, nel caso di propagazione in acque poco profonde. Anche se l'onda percorre distanze molto lunghe si ha quindi che le particelle d'acqua in media non si spostano.

Nelle sezioni precedenti abbiamo determinato la componente verticale (vedi (2.3) e (2.7)) della velocità⁵:

$$w = -2 \operatorname{Re} \left(i\omega A \frac{\sinh(\delta k z)}{\sinh(\delta k)} E \right)$$

e dalle relazioni (2.3), (2.4) e (2.7) ricaviamo anche quella orizzontale⁶:

$$u = 2 \operatorname{Re} \left(\delta\omega A \frac{\cosh(\delta k z)}{\sinh(\delta k)} E \right)$$

⁵Come abbiamo già detto in precedenza poniamo $E := e^{i(kx - \omega t)}$.

⁶Dalle relazioni (2.4) si ha che $U = -\frac{1}{ik} W'$ ci basta quindi derivare (2.7) rispetto alla variabile z e fare le opportune sostituzioni.

grazie alle relazioni:

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon u, \quad \frac{dz}{dt} = \epsilon w \quad (2.9)$$

possiamo quindi andare a determinare i percorsi delle particelle. Utilizziamo il seguente cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} x = x_0 + \epsilon X \\ z = z_0 + \epsilon Z \end{cases}$$

con x_0 e z_0 fissati.

Applichiamo l'approssimazione vista precedentemente per le onde lineari, cioè $\epsilon \rightarrow 0$ e, facendo le opportune sostituzioni in (2.9), riscriviamo i percorsi delle particelle:

$$\frac{dX}{dt} \sim 2 \operatorname{Re} \left(\delta \omega A \frac{\cosh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)} E_0 \right)$$

e

$$\frac{dZ}{dt} \sim -2 \operatorname{Re} \left(i \omega A \frac{\sinh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)} E_0 \right)$$

con $E_0 = e^{i(kx_0 - \omega t)}$.

Integrando rispetto al tempo otteniamo:

$$X \sim 2 \operatorname{Re} \left(i \delta A \frac{\cosh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)} E_0 \right)$$

e

$$Z \sim 2 \operatorname{Re} \left(A \frac{\sinh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)} E_0 \right)$$

Per $\epsilon \rightarrow 0$ possiamo considerare lo spostamento delle particelle nelle due direzioni e riscriviamo il loro percorso come \square :

$$\left(\frac{X}{\delta \cosh(\delta k z_0)} \right)^2 + \left(\frac{Z}{\sinh(\delta k z_0)} \right)^2 = \frac{4|A|^2}{\sinh^2(\delta k)} \quad (2.11)$$

7

$$\begin{aligned} X^2 &= \left(i \delta A \frac{\cosh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)} e^{i(kx_0 - \omega t)} - i \delta A \frac{\cosh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)} e^{-i(kx_0 - \omega t)} \right)^2 = \\ &= -\delta^2 A^2 \frac{\cosh^2(\delta k z_0)}{\sinh^2(\delta k)} \left(e^{i(kx_0 - \omega t)} - e^{-i(kx_0 - \omega t)} \right)^2 = -\delta^2 A^2 \frac{\cosh^2(\delta k z_0)}{\sinh^2(\delta k)} 4 \sinh^2(i(kx_0 - \omega t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z^2 &= \left(A \frac{\sinh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)} e^{i(kx_0 - \omega t)} + A \frac{\sinh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)} e^{-i(kx_0 - \omega t)} \right)^2 = \\ &= A^2 \frac{\sinh^2(\delta k z_0)}{\sinh^2(\delta k)} \left(e^{i(kx_0 - \omega t)} + e^{-i(kx_0 - \omega t)} \right)^2 = A^2 \frac{\sinh^2(\delta k z_0)}{\sinh^2(\delta k)} 4 \cosh^2(i(kx_0 - \omega t)) \end{aligned}$$

con $0 < z_0 \leq 1$.

Questa equazione rappresenta un'ellisse nel piano xz , i cui semiassi misurano rispettivamente $\frac{4|A| \sinh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)}$ e $\frac{4|A| \delta \cosh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)}$.

In particolare possiamo dire che le particelle del fluido in un intorno del punto (x_0, z_0) si muovono su un'ellisse tale che⁸:

$$\frac{\text{semiasse maggiore}}{\text{semiasse minore}} = \delta \coth(\delta k z_0).$$

Se consideriamo onde lunghe, siamo cioè nel caso $\delta \rightarrow 0$, valgono i seguenti limiti⁹

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{4|A| \sinh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} 4|A| z_0 \underbrace{\frac{\sinh(\delta k z_0)}{\delta k z_0}}_{\sim 1} \underbrace{\frac{\delta k}{\sinh(\delta k)}}_{\sim 1} = 4|A| z_0$$

e

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{4|A| \delta \cosh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{4|A|}{k} \underbrace{\frac{\delta k}{\sinh(\delta k)}}_{\sim 1} \underbrace{\cosh(\delta k z_0)}_{=1} = \frac{4|A|}{k}$$

l'asse maggiore diventa $4 \frac{|A|}{k}$, quello minore $4|A| z_0$; quindi le particelle descrivono differenti ellissi a seconda della profondità, e in particolare si avvicinano

Da cui

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X}{\delta \cosh(\delta k z_0)} \right)^2 + \left(\frac{Z}{\sinh(\delta k z_0)} \right)^2 = \\ & = \frac{-\delta^2 A^2 \frac{\cosh^2(\delta k z_0)}{\sinh^2(\delta k)} 4 \sinh^2(i(kx_0 - \omega t))}{\delta^2 \cosh^2(\delta k z_0)} + \frac{A^2 \frac{\cosh^2(\delta k z_0)}{\sinh^2(\delta k)} 4 \cosh^2(i(kx_0 - \omega t))}{\sinh^2(\delta k z_0)} = \\ & = \frac{-4A^2 \sinh^2(i(kx_0 - \omega t))}{\sinh^2(\delta k)} + \frac{4A^2 \cosh^2(i(kx_0 - \omega t))}{\sinh^2(\delta k)} \stackrel{(1)}{=} \frac{4|A|^2}{\sinh^2(\delta k)} \end{aligned} \tag{2.10}$$

(1) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

⁸L'equazione generica di un'ellisse è data da $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dove a e b rappresentano la lunghezza dei due semiassi; in questo caso $a > b$.

Considerando l'equazione (2.11) chiamiamo m^2 il secondo membro e dividiamo tutto per questo, otteniamo $\left(\frac{X}{m\delta \cosh(\delta k z_0)} \right)^2 + \left(\frac{Z}{m \sinh(\delta k z_0)} \right)^2 = 1$ da cui l'asse maggiore è $2m\delta \cosh(\delta k z_0)$ e quello minore $2m \sinh(\delta k z_0)$ il rapporto tra i due risulta quindi $\delta \coth(\delta k z_0)$.

$$\stackrel{9}{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{x} = 1 \text{ e } \cosh(0) = 1$$

alla traiettoria orizzontale per $z_0 \rightarrow 0$.

Se prendiamo invece in considerazione le onde corte, cioè $\delta \rightarrow +\infty$ valgono i limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \frac{4|A| \sinh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)} &= \lim_{\delta \rightarrow +\infty} 4|A| \frac{e^{\delta k z_0} - e^{-\delta k z_0}}{e^{\delta k} - e^{-\delta k}} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +\infty} 4|A| \frac{e^{\delta k z_0} (1 - e^{-2\delta k z_0})}{e^{\delta k} (1 - e^{-2\delta k})} = 4|A| e^{\delta k (z_0 - 1)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \frac{4|A| \delta \cosh(\delta k z_0)}{\sinh(\delta k)} &= \lim_{\delta \rightarrow +\infty} 4|A| \delta \frac{e^{\delta k z_0} + e^{-\delta k z_0}}{e^{\delta k} - e^{-\delta k}} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +\infty} 4|A| \delta \frac{e^{\delta k z_0} (1 + e^{-2\delta k z_0})}{e^{\delta k} (1 - e^{-2\delta k})} = 4|A| \delta e^{\delta k (z_0 - 1)} \end{aligned}$$

i due assi sono quindi

$$4\delta|A|e^{-\delta k(1-z_0)} \text{ e } 4|A|e^{-\delta k(1-z_0)}$$

il cui rapporto non varia al variare di z_0 . Le ellissi percorse dalle particelle hanno tutte la medesima eccentricità, ma la loro grandezza diminuisce al diminuire di z_0 .

Tornando alle variabili fisiche, nel caso di onde corte, le traiettorie delle particelle sono dei cerchi il cui raggio decresce al decrescere di z_0 .

Siano \hat{x} e \hat{z} le variabili fisiche, la traiettoria delle particelle diventa:

$$\left(\frac{\hat{x}}{\cosh(\delta k z_0)} \right)^2 + \left(\frac{\hat{z}}{\sinh(\delta k z_0)} \right)^2 = K$$

con K costante.

Dai risultati ottenuti possiamo osservare che, mentre l'onda di piccola ampiezza si propaga lungo la superficie, le particelle seguono percorsi chiusi. Non si ha quindi un trasferimento di particelle dovuto al passaggio dell'onda. Inoltre, nel caso di onda lunga, vicino al fondo del flusso le particelle si muovono prevalentemente di moto oscillatorio orizzontale.

2.1.2 Velocità di gruppo

Torniamo al problema iniziale descritto dalle equazioni (2.1) e (2.2) e supponiamo che il profilo dell'onda all'istante iniziale sia della forma:

$$\eta(x, 0) = 2 \operatorname{Re}(A(\alpha x) e^{ikx})$$

con A funzione a valori complessi.

Se $\alpha \rightarrow 0$ si ha ancora un'onda pura armonica, ma la sua ampiezza varia lentamente. Vogliamo trovare una soluzione delle equazioni (2.1) e (2.2) che rimanga valida.

Consideriamo onde gravitazionali¹⁰ con δ fissato.

Cerchiamo un soluzione dipendente da grandezze che variano lentamente:

$$X = \alpha x; \quad T = \alpha t;$$

includiamo T poiché cerchiamo come soluzione un'onda che si propaghi nello spazio e nel tempo, associamo quindi ad una lenta variazione di spazio una lenta variazione del tempo.

La soluzione cercata dovrà essere della forma:

$$\begin{cases} u = U(z, X, T; \alpha)E \\ w = W(z, X, T; \alpha)E \\ p = P(z, X, T; \alpha)E \end{cases}$$

con $\eta = A(X, T; \alpha)E$.

Facendo le opportune sostituzioni¹¹ le equazioni (2.1) e (2.2) diventano:

$$\begin{cases} i\omega U - \alpha U_T = ikP + \alpha P_X \\ \delta^2(i\omega W - \alpha W_T) = P_z \\ ikU + \alpha U_X + W_z = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

con

$$\begin{cases} W(1, X, T; \alpha) = -i\omega A + \alpha A_T \\ P(1, X, T; \alpha) = A \\ W(0, X, T; \alpha) = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Dalle prime due equazioni del sistema (2.12) otteniamo le seguenti uguaglianze:

$$\left(i\omega - \alpha \frac{\partial}{\partial T}\right) U_z = \left(ik + \alpha \frac{\partial}{\partial X}\right) P_z = \delta^2 \left(ik + \alpha \frac{\partial}{\partial X}\right) \left(i\omega - \alpha \frac{\partial}{\partial T}\right) W$$

¹⁰Come abbiamo già visto nella prima sezione di questo capitolo nel caso di onde gravitazionali gli effetti della tensione superficiale sono trascurabili e poniamo quindi $W_e = 0$.

¹¹

- $u_t = (\alpha U_t - i\omega U)E$ e $p_x = (\alpha P_x + ikP)E$ da cui $u_t = -p_x$ diventa $i\omega U - \alpha U_T = ikP + \alpha P_X$;
- $w_t = (\alpha W_t - i\omega W)E$ e $p_z = P_z$ da cui $\delta^2 w_t = -p_z$ diventa $\delta^2(i\omega W - \alpha W_T) = P_z$;
- $u_x = (\alpha U_x - ikU)E$, $u_y = 0$ e $w_z = W_z E$ da cui $u_x + u_y + w_z = 0$ diventa $ikU + \alpha U_X + W_z = 0$.

da cui la soluzione deve soddisfare:

$$U_z = \delta^2 \left(ik + \alpha \frac{\partial}{\partial X} \right) W.$$

Prendendo in considerazione la relazione appena ottenuta e la terza equazione del sistema (2.12) si ha che W deve soddisfare:

$$W_{zz} + \delta^2 \left(ik + \alpha \frac{\partial}{\partial X} \right)^2 W = 0. \quad (2.14)$$

Per trovare una soluzione asintotica dei sistemi (2.12) e (2.13) utilizziamo il metodo degli sviluppi asintotici introdotto nel primo capitolo.

Poniamo quindi U , W , P e A della forma:

$$Q \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n Q_n \quad \text{con} \quad \alpha \rightarrow 0$$

considerando l'espansione asintotica per W e inserendola nell'equazione (2.14) otteniamo:

$$\begin{aligned} W_{0zz} - \delta^2 k^2 W_0 &= 0 \\ W_{1zz} - \delta^2 k^2 W_1 &= -2ik\delta^2 W_{0X} \\ &\text{e così via..} \end{aligned} \quad (2.15)$$

La prima di queste equazioni è esattamente equivalente all'equazione (2.5) risolta nella prima sezione del capitolo, senza dover fare i conti, abbiamo quindi che

$$W_0 = -i\omega A_0 \left(\frac{\sinh(\delta k z)}{\sinh(\delta k)} \right).$$

Deriviamo W_0 e riscriviamo la seconda equazione di (2.15):

$$W_{1zz} - \delta^2 k^2 W_1 = -2k\omega\delta^2 A_0 \left(\frac{z \cosh(\delta k z)}{\sinh(\delta k)} \right). \quad (2.16)$$

Una possibile soluzione per l'equazione precedente è data da¹²:

$$W_1 = B_1 \sinh(\delta k z) - \delta\omega A_{0X} \frac{z \cosh(\delta k z)}{\sinh(\delta k)}$$

con $B_1 = B_1(X, T)$.

Considerando le condizioni al bordo e le condizioni iniziali, e sostituendo i

¹²Derivando due volte W_1 rispetto alla variabile z ed inserendo W_{1zz} e W_1 in (2.16) vediamo che la relazione è soddisfatta.

termini U , W , P e A con il loro sviluppo asintotico, possiamo verificare che sulla superficie $z = 0$ è soddisfatta l'equazione $W_1 = 0$, mentre sulla superficie $z = 1$ valgono le seguenti relazioni:

$$W_1 = -i\omega A_1 + A_{0T} \quad \text{e} \quad P_1 = A_1.$$

Inserendo W_1 valutato in $z = 1$ nella prima di queste equazioni abbiamo:

$$-i\omega A_1 + A_{0T} = B_1 \sinh(\delta k) - \delta\omega A_{0X} \coth(\delta k) \quad (2.17)$$

Se consideriamo la seconda equazione in (2.12) che lega W , W_T e P_z , inserendo al posto dei vari termini il loro sviluppo asintotico, e consideriamo i coefficienti di α abbiamo che :

$$\delta^2 i\omega W_0 = P_{0z}.$$

Poiché conosciamo W_0 ci basta sostituirlo nell'equazione appena scritta e integrare rispetto a z per trovare P_0 :

$$P_0 = \frac{\delta\omega^2}{k} A_0 \left(\frac{\cosh(\delta k z)}{\sinh(\delta k)} \right)$$

da cui possiamo anche scrivere che

$$U_0 = \delta\omega A_0 \left(\frac{\cosh(\delta k z)}{\sinh(\delta k)} \right)$$

poiché vale la relazione $U_0 = \frac{k}{\omega} P_0$.

Se consideriamo le altre due equazioni in (2.12), sempre dallo sviluppo asintotico, otteniamo che:

$$\begin{aligned} ikP_1 + P_{0X} &= i\omega U_1 - U_{0T}; \\ ikU_1 + U_{0X} + W_{1z} &= 0 \end{aligned}$$

ricaviamo U_1 dalla seconda equazione

$$U_1 = -\frac{U_{0X} + W_{1z}}{ik};$$

e lo sostituiamo nella prima:

$$ikP_1 + P_{0X} = \frac{\omega}{k}(U_{0X} + W_{1z}) - U_{0T}.$$

Poiché conosciamo tutti i termini presenti nell'equazione appena scritta¹³, ne calcoliamo le derivate richieste e li sostituiamo:

$$ikA_1 + \delta\omega \left(2\frac{\omega}{k} A_{0X} + A_{0T} \right) \coth(\delta k) = -\delta\omega B_1 \cosh(\delta k) + \frac{\delta\omega^2}{k} A_{0X} (\delta k + \coth(\delta k));$$

¹³Abbiamo ricavato le equazioni di W_1 , U_0 e P_0 e sappiamo che $P_1 = A_1$.

ricavando B_1 da (2.17) e sostituendolo nell'equazione precedente, questa diventa:

$$(ik \tanh(\delta k) - i\delta\omega^2) \frac{A_1}{2\delta\omega} + A_{0T} + \frac{\omega}{2k} [1 + \delta k(\coth \delta k - \tanh \delta k)] A_{0X} = 0.$$

Se poniamo $\omega^2 = \frac{k}{\delta} \tanh(\delta k)$ il termine A_1 scompare e l'equazione si riduce a:

$$A_{0T} + \frac{\omega}{2k} [1 + \delta k(\coth(\delta k) - \tanh(\delta k))] A_{0X} = 0.$$

Una soluzione generale dell'equazione precedente è data da

$$A_0 = F(X - c_g T)$$

dove F è definita a partire dai dati iniziali e $c_g = \frac{\omega}{2k} [1 + \delta k(\coth(\delta k) - \tanh(\delta k))]$. Come già specificato nel primo capitolo c_g rappresenta la velocità di gruppo ed è definita come $d\omega/dk$, si verifica facilmente che il valore di ω scelto sopra soddisfa l'equazione appena trovata per la velocità di gruppo.

Propagazione dell'energia e velocità di gruppo

Grazie ai risultati ottenuti nella sezione precedente risulta evidente la relazione tra la propagazione del gruppo e la propagazione dell'energia. È un risultato noto che l'energia di un'onda in movimento è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda, in questo caso è dunque proporzionale a $|A_0|^2$. Poiché abbiamo visto che A_0 è una funzione di $X - c_g T$ segue che l'energia si propaga alla velocità di gruppo.

Come già analizzato nella sezione (1.6) del primo capitolo, l'energia totale del flusso è data da:

$$\mathcal{E} = \int_b^h \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \rho g z \right) dz$$

che, una volta adimensionalizzate e riscalate le variabili, diventa¹⁴

$$\mathcal{E} = \int_b^{1+\epsilon\eta} \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^2 (\mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp + \delta^2 w^2) + z \right\} dz.$$

Dato che ci stiamo occupando di onde unidimensionali possiamo ulteriormente semplificare l'equazione dell'energia:

$$\mathcal{E} = \int_0^{1+\epsilon\eta} \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^2 (u^2 + \delta^2 w^2) + z \right\} dz \quad (2.18)$$

¹⁴L'adimensionalizzazione di \mathcal{E} è data da $\mathcal{E} \rightarrow \rho g h_0^2 \mathcal{E}$.

dove u e w sono determinate grazie a U_0 e W_0 in base ai termini di ordine superiore al tendere di α a zero.

Per prima cosa ci occupiamo dell'energia relativa ad un solo periodo dell'onda, poniamo

$$\begin{aligned} u &\sim U_0 E + \overline{U_0} E^{-1}; \\ w &\sim W_0 E + \overline{W_0} E^{-1} \end{aligned}$$

con $E = e^{ik\xi}$, $\xi = x - c_p t$ e $\overline{U_0}$ e $\overline{W_0}$ i complessi coniugati rispettivamente di U_0 e W_0 .

L'energia di un solo periodo d'onda è quindi data da

$$\int_0^{2\pi/k} \mathcal{E} d\xi. \quad (2.19)$$

Sostituiamo (2.18) in (2.19):

$$\int_0^{2\pi/k} \mathcal{E} d\xi \sim \int_0^{2\pi/k} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^2 [(U_0 E + \overline{U_0} E^{-1})^2 + \delta^2 (W_0 E + \overline{W_0} E^{-1})^2 + z] \right\} dz d\xi$$

dove si "conservano" sia il contributo cinetico che quello potenziale dell'energia nonostante questi abbiano due diversi ordini di grandezza al tendere di ϵ a zero.

Sostituendo U_0 , W_0 e i relativi complessi coniugati e integrando il secondo termine rispetto alla variabile ξ si ha

$$\int_0^{2\pi/k} \mathcal{E} d\xi \sim \frac{2\pi}{k} \left\{ \frac{1}{2} + \epsilon^2 \delta^2 \omega^2 |A_0|^2 \int_0^1 \left[\left(\frac{\cosh(\delta k z)}{\sinh(\delta k)} \right)^2 + \left(\frac{\sinh(\delta k z)}{\sinh(\delta k)} \right)^2 \right] dz \right\}.$$

In particolare $\frac{\pi}{k}$ rappresenta l'energia potenziale del fluido indisturbato, mentre il secondo termine è associato al moto dell'onda, e grazie al riscaldamento effettuato è proporzionale a ϵ^2 e a $|A_0|^2$ come richiesto.

Vogliamo a questo punto concentrarci sulla forma assunta dalla velocità di gruppo nel caso di onde d'acqua e su come questa influisca sulla propagazione delle stesse.

Consideriamo nuovamente la relazione di dispersione (2.8) ricavata nella sezione (2.1)

$$\omega^2 = \left(\frac{k}{\delta} + \delta k^3 W_e \right) \tanh(\delta k)$$

da cui derivando ricaviamo la velocità di gruppo

$$\begin{aligned} c_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} \left[\frac{1 + 3\delta^2 k^2 W_e}{1 + \delta^2 k^2 W_e} + \frac{2\delta k}{\sinh(2\delta k)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} c_p \left[\frac{1 + 3\delta^2 k^2 W_e}{1 + \delta^2 k^2 W_e} + \frac{2\delta k}{\sinh(2\delta k)} \right]. \end{aligned}$$

Se ora consideriamo onde lunghe si ha che

$$\lim_{\delta k \rightarrow 0} \frac{1}{2} c_p \left(\underbrace{\frac{1 + 3\delta^2 k^2 W_e}{1 + \delta^2 k^2 W_e}}_{\sim 1} + \underbrace{\frac{2\delta k}{\sinh(2\delta k)}}_{\sim 1} \right) = c_p$$

quindi $c_p \sim c_g$.

Nel caso di onde corte invece

$$\lim_{\delta k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} c_p \left(\underbrace{\frac{1 + 3\delta^2 k^2 W_e}{1 + \delta^2 k^2 W_e}}_{\sim 3} + \underbrace{\frac{2\delta k}{\sinh(2\delta k)}}_{\sim 0} \right) = \frac{3}{2} c_p$$

quindi $c_g \sim \frac{3}{2} c_p$ e la velocità di gruppo supera la velocità di fase.

Nel caso di onde gravitazionali, ponendo $W_e = 0$, la relazione tra le due velocità diventa

$$c_g = \frac{1}{2} c_p (1 + 2\delta k \operatorname{csch}(2\delta k))$$

e quindi $\frac{1}{2} < \frac{c_g}{c_p} < 1$; mentre per onde che si propagano su acque di profondità infinita in presenza di tensioni superficiali otteniamo:

$$c_g = \frac{1}{2} c_p \left\{ \frac{1 + 3\delta^2 k^2 W_e}{1 + \delta^2 k^2 W_e} \right\}$$

da cui $\frac{1}{2} \leq \frac{c_g}{c_p} < \frac{3}{2}$.

2.2 Profondità variabile

Proviamo ora ad adattare le equazioni finora analizzate, e cerchiamo di rappresentare una situazione più simile alla realtà, prendendo in considerazione onde che si propagano su una profondità variabile.

Consideriamo un'onda piana che si propaga lungo la direzione x , con una profondità variabile sempre lungo la direzione x .

Modifichiamo le equazioni (2.1) e (2.2) ricordate ad inizio capitolo che diventano quindi:

$$u_t = -p_x; \quad \delta^2 w_t = -p_z; \quad u_x + w_z = 0$$

con

$$\begin{cases} w = \eta_t & \text{e } p = \eta - \delta^2 W \eta_{xx} & \text{su } z = 1 \\ w = ub'(x) & & \text{su } z = b(x) \end{cases}$$

Consideriamo onde lunghe ($\delta \rightarrow 0$) per semplificare ulteriormente le equazioni:

$$u_t = -p_x; \quad p_z = 0; \quad u_x + w_z = 0$$

con

$$\begin{cases} w = \eta_t & \text{e } p = \eta & \text{su } z = 1 \\ w = ub'(x) & & \text{su } z = b(x) \end{cases}$$

Queste equazioni ci portano ad avere $p = \eta$ e $b \leq z \leq 1$ così dato che u non è una funzione di z :

$$u_t + \eta_x = 0 \quad \text{con} \quad w = (1 - z)u_x + \eta_t.$$

Valutando w sulla superficie $z = b$ otteniamo le *equazioni di shallow water linearizzate*:

$$u_t + \eta_x = 0; \quad \eta_t + (du)_x = 0 \quad (2.20)$$

dove $d(x) = 1 - b(x)$ è la profondità locale.

In forma più compatta¹⁵:

$$\eta_{tt} - (d\eta_x)_x = 0 \quad (2.21)$$

Consideriamo un fondale con pendenza costante, con la riva posta in $x = x_0$, la profondità è data da:

$$d(x) = \alpha(x_0 - x); \quad \alpha > 0; \quad x \leq x_0 \quad (2.22)$$

Inserendo (2.22) in (2.21) il moto ondoso considerato è descritto da:

$$\eta_{tt} - \alpha(x_0 - x)\eta_{xx} + \alpha\eta_x = 0 \quad (2.23)$$

e cerchiamo una soluzione armonica in t :

$$\eta(x, t) = 2 \operatorname{Re} \left(A(x) e^{-i\omega t} \right) \quad (2.24)$$

¹⁵ $(\eta_t + (du)_x)_t = \eta_{tt} + (d_x u + du_x)_t = \eta_{tt} + d_{xt}u + d_x u_t + d_t u_x + du_{xt} = \eta_{tt} + (du_t)_x = 0$ sostituendo l'equazione $u_t + \eta_x = 0$ si ottiene l'equazione $\eta_{tt} - (d\eta_x)_x = 0$

¹⁶ Non possiamo aspettarci che i nostri calcoli saranno validi per $d \rightarrow 0$ e per $d \rightarrow +\infty$. In precedenza abbiamo ricavato che per onde lunghe di piccola ampiezza, la pendenza $d = (1 - b)$ è $O(1)$ e quindi incompatibile con $d \rightarrow +\infty$. In questo capitolo ci limiteremo a trattare il caso di approssimazioni lineari. Per studiare il comportamento dell'onda in prossimità della riva, cioè quando la profondità decresce a zero e, quindi, il rapporto tra ampiezza e profondità cresce, è necessario considerare anche i termini non lineari per $\delta \rightarrow 0$.

con ω costante reale e $A(x)$ funzione, solitamente complessa, che rappresenta un'ampiezza.

Da (2.24) possiamo scrivere le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}\eta_{tt} &= -2 \operatorname{Re}(i\omega A(x)e^{-i\omega t}); \\ \eta_x &= 2 \operatorname{Re}(A'(x)e^{-i\omega t}); \\ \eta_{xx} &= 2 \operatorname{Re}(A''(x)e^{-i\omega t});\end{aligned}$$

che inserite in (2.23) ci permettono di riscriverla come equazione differenziale per $A(x)$

$$\alpha(x_0 - x)A''(x) - \alpha A'(x) + \omega^2 A(x) = 0. \quad (2.25)$$

Operiamo un doppio cambio di variabile, per prima cosa poniamo $X = x_0 - x$ da cui:

$$\alpha X A''(X) + \alpha A'(X) + \omega^2 A(X) = 0$$

ponendo infine $\chi = 2\omega\sqrt{\frac{X}{\alpha}}$:

$$\chi A''(\chi) + A'(\chi) + \chi A(\chi) = 0.$$

La riva si trova in $\chi = 0$ e per $\chi > 0$ si ha acqua non perturbata.

Osserviamo che l'equazione appena scritta è un'equazione di Bessel¹⁷ e una sua soluzione generica per $\chi > 0$ è quindi data da:

$$A(\chi) = C J_n(\chi) + D Y_n(\chi);$$

poiché in questo caso l'equazione di Bessel considerata è di ordine zero ci interessa cercare la soluzione solo per $n = 0$.

In particolare J_0 è una funzione di Bessel del primo tipo ed è regolare in $\chi = 0$ poiché come serie di potenze contiene solo potenze di χ ; Y_0 è una funzione di Bessel del secondo tipo e da origine ad una singolarità logaritmica in $\chi = 0$, eliminabile solo ponendo $D = 0$.

La soluzione generale dell'equazione (2.23) è:

$$\eta(x, t) = \left\{ C J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0 - x}{\alpha}}\right) + D Y_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0 - x}{\alpha}}\right) \right\} e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (2.26)$$

¹⁷oppure appendice

Si può dimostrare che per $\chi \gg 1$ il comportamento di $J_n(\chi)$ e $Y_n(\chi)$ per $n \in \mathbb{N}$ è dato da

$$\begin{aligned} J_n(\chi) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} \cos\left(\chi - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right); \\ Y_n(\chi) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} \sin\left(\chi - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right); \end{aligned}$$

da cui per $n = 0$

$$\begin{aligned} J_0 &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} \cos\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right); \\ Y_0 &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} \sin\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Riscriviamo quindi l'equazione (2.26) per $\chi \rightarrow +\infty$, cioè per $x_0 - x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi\omega}} \sqrt[4]{\frac{\alpha}{x_0 - x}} \left\{ C \cos\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0 - x}{\alpha}} - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. + D \sin\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0 - x}{\alpha}} - \frac{\pi}{4}\right) \right\} e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \end{aligned}$$

Riscrivendo nuovamente l'equazione mettiamo in evidenza che questa descrive due onde, una che si sposta verso destra e una verso sinistra:

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}} \sqrt[4]{\frac{\alpha}{x_0 - x}} \left[(C + D) \exp\left\{i\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0 - x}{\alpha}} - \omega t - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \right. \\ &\quad \left. + (C - D) \exp\left\{-i\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0 - x}{\alpha}} - \omega t - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \right] + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Il primo termine esponenziale rappresenta l'onda che si avvicina alla riva, il secondo rappresenta, invece, la componente riflessa dalla riva che si muove verso sinistra.

Per determinare la velocità delle due componenti consideriamo le linee di fase costante definite da:

$$2\omega\sqrt{\frac{x_0 - x}{\alpha}} \pm \omega t = \text{costante},$$

lungo queste linee la velocità di propagazione è:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\alpha(x_0 - x)}.$$

quindi non è costante, ma dipende dalla radice della profondità locale¹⁸. Inoltre possiamo osservare che l'onda decade per $x_0 - x \rightarrow +\infty$ poiché l'ampiezza si comporta come $\sqrt[4]{\frac{1}{x_0 - x}}$ e che, avvicinandosi alla riva il numero d'onda aumenta e quindi le onde diventano più corte¹⁹.

Vicino alla riva, cioè per $\chi \ll 1$, $J_n(\chi)$ e $Y_n(\chi)$ sono dati da:

$$J_n(\chi) \sim \frac{1}{n!} \left(\frac{\chi}{2}\right)^n;$$

$$Y_n \sim \begin{cases} -\frac{2^n(n-1)!}{\pi} \chi^{-n} & n > 0; \\ \frac{2}{\pi} \ln \chi & n = 0 \end{cases};$$

quindi per $n = 0$:

$$J_0 \sim 1$$

$$Y_0 \sim \frac{2}{\pi} \ln \chi$$

L'equazione per il profilo dell'onda η riportata in (2.26) diventa quindi:

$$\eta(x, t) \sim \left\{ C + \frac{2D}{\pi} \ln \left(2\omega \sqrt{\frac{x_0 - x}{\alpha}} \right) \right\} e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad \text{per } x_0 - x \rightarrow 0^+.$$

Questa soluzione descrive un'onda che al tempo t oscilla a riva, dove presenta inoltre un comportamento logaritmico che può essere rimosso solo ponendo $D = 0$.

Analizzando la soluzione trovata possiamo evidenziarne alcune problematiche. Se supponiamo, ad esempio, di voler studiare un'onda che, muovendosi

¹⁸Si può dimostrare che questo è un risultato generale.

¹⁹Possiamo fare quest'ultima osservazione riscrivendo le linee di fase nella seguente forma:

$$\frac{2\omega}{\sqrt{\alpha(x_0 - x)}}(x_0 - x) \pm \omega t.$$

da una distanza infinita, si avvicina alla riva avremo che l'ampiezza di questa all'infinito è nulla al contrario di quanto ci aspetteremmo. Questo problema è probabilmente legato all'inadeguatezza di queste equazioni a descrivere gli effetti dovuti alla propagazione in acque profonde.

Inoltre, come già osservato studiando l'equazione (2.27), la soluzione trovata descrive anche un'onda riflessa. Per ovviare a questo problema dovremmo imporre $C = D \neq 0$, ma imporre $D \neq 0$ equivale ad avere una singolarità a riva²⁰. Risulta quindi evidente che, con le ipotesi considerate in questo paragrafo, la teoria lineare non è in grado di descrivere adeguatamente l'aumento dell'ampiezza di un'onda quando questa si avvicina alla costa e il suo infrangersi. Per eliminare la singolarità è necessario che D sia nullo, la riva diventa quindi un perfetto riflettente e ci troviamo a dover considerare sia l'onda che si avvicina sia quella riflessa per ogni valore di $\chi > 0$.

2.2.1 Onde gravitazionali di qualsiasi numero d'onda che si propagano su una pendenza costante

Vogliamo ora cercare di trattare in modo ancor più generale i risultati ottenuti nel paragrafo precedente.

Per fare ciò prendiamo in considerazione onde piane gravitazionali senza supporre che siano onde lunghe, senza imporre quindi che il parametro δ tenda a zero.

Consideriamo le equazioni (2.1) e (2.2) con $W_e = 0$, $\eta = \eta(x, t)$ e $b = b(x)$:

$$u_t = -p_x; \quad \delta^2 w_t = -p_z; \quad u_x + w_z = 0 \quad (2.28)$$

dove sulla superficie $z = 1$ si ha:

$$w = \eta_t \quad \text{e} \quad p = \eta;$$

mentre sulla superficie $z = b(x)$

$$w = ub'(x).$$

Analogamente al caso analizzato in precedenza, prendiamo in considerazione un fondo caratterizzato da una pendenza costante. Ciò comporta, come abbiamo visto, che la variazione di velocità sia lineare nelle x . Imponiamo inoltre, traslando le coordinate, che la riva si trovi in $x = 1/\alpha$.

L'equazione della profondità è quindi $d(x) = 1 - b(x)$ con $b(x) = \alpha x$, $\alpha > 0$ e

²⁰ D è il coefficiente di Y_0 che rappresenta la funzione di Bessel con singolarità in $\chi = 0$

$x \leq 1/\alpha$, uguagliando $d(x)$ con (2.22) si ha $\alpha x_0 = 1$ come richiesto. Cerchiamo ora soluzioni della forma:

$$u = U(x, z)e^{-i\omega t}; \quad p = P(x, z)e^{-i\omega t}; \quad w = W(x, z)e^{-i\omega t}$$

con

$$\eta(x, t) = 2 \operatorname{Re}(A(x)e^{-i\omega t})$$

Sia $E = e^{-i\omega t}$, riscriviamo le equazioni (2.28):

- $u_t = -i\omega U E$ e $p_x = P_x E \Rightarrow -i = -P_x E \Rightarrow i\omega U = P_x$;
- $w_t = -i\omega W E$ e $p_z = P_z E \Rightarrow -\delta^2 i\omega W E = -P_z E \Rightarrow i\omega \delta^2 W = P_z$;
- $4u_x = U_x E$ e $w_z = W_z E \Rightarrow U_x + W_z = 0$.

Ne consegue che le equazioni con cui lavoriamo sono

$$i\omega U = P_x; \quad i\omega \delta^2 W = P_z; \quad U_x + W_z = 0 \quad (2.29)$$

con le seguenti condizioni al bordo

$$\begin{aligned} W(x, 1) &= -i\omega A(x); \\ P(x, 1) &= A(x); \\ W(x, b(x)) &= \alpha U(x, b(x)) \text{ con } b(x) = \alpha x. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Possiamo notare che valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} W_{zz} + U_{xz} &= 0; \\ i\omega U_{xz} &= P_{xxz} = i\omega \delta^2 W_{xx} \end{aligned}$$

e quindi che $W(x, z)$ soddisfa l'equazione di Laplace:

$$W_{zz} + \delta^2 W_{xx} = 0 \quad (2.31)$$

che è equivalente alla formulazione del problema in termini della velocità potenziale ϕ .

Per trovare una soluzione utilizziamo il metodo di separazione delle variabili e cerchiamo quindi W della forma:

$$W(x, z) = \sum_n X_n(x) Z_n(z),$$

da (2.31) abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ deve valere:

$$X_n(x) Z_n''(z) + \delta^2 X_n''(x) Z_n(z) = 0$$

cioè per ogni valore di n valgono le seguenti equazioni:

$$Z_n''(z) - \lambda_n \delta^2 Z_n(z) = 0 \quad \text{e} \quad X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0 \quad (2.32)$$

con λ_n parametro che possiamo supporre uguale a k_n^2 .
Le soluzioni delle equazioni (2.32) risultano quindi:

$$\begin{aligned} X_n(x) &= A_n e^{ik_n x} + B_n e^{-ik_n x}; \\ Z_n(z) &= C_n e^{\delta k_n z} + D_z e^{-\delta k_n z} \end{aligned}$$

con A_n , B_n , C_n e D_n costanti arbitrarie.

Poiché la profondità aumenta all'infinito ne deriva che una soluzione limitata per Z_n è possibile solo se poniamo $D_n = 0$.

La soluzione per ogni n risulta quindi:

$$W_n(x, z) = (\hat{A}_n e^{ik_n x} + \hat{B}_n e^{-ik_n x}) e^{\delta k_n z}$$

dove $\hat{A}_n = A_n C_n$ e $\hat{B}_n = B_n C_n$.

Ricaviamo l'equazione di $P_n(x, z)$ dalla seconda equazione in (2.29) integrando rispetto a z

$$\begin{aligned} P_n(x, z) &= i\omega t \int_1^z W_n(x, z) dz \\ &= i\omega t \int_1^z (\hat{A}_n e^{ik_n x} + \hat{B}_n e^{-ik_n x}) e^{\delta k_n z} dz \\ &= \frac{\omega t}{k_n} (\hat{A}_n e^{ik_n x} - \hat{B}_n e^{-ik_n x}) (e^{\delta k_n z} - e^{\delta k_n}) + A(x). \end{aligned}$$

Siamo a questo punto in grado di riscrivere le condizioni al bordo riportate in (2.30), dalla prima si ha:

$$(\hat{A}_n e^{ik_n x} + \hat{B}_n e^{-ik_n x}) e^{\delta k_n} = -i\omega A(x)$$

dalla seconda²¹

$$(\hat{A}_n e^{ik_n x} + \hat{B}_n e^{-ik_n x}) e^{\alpha \delta k_n x} = -i\alpha \delta (\hat{A}_n e^{ik_n x} - \hat{B}_n e^{-ik_n x}) (e^{\alpha \delta k_n x} - e^{\delta k_n}) - \frac{i\alpha}{\omega} A'(x).$$

Derivando la prima equazione rispetto alla variabile x e sostituendo quindi $A'(x)$ nella seconda ricaviamo un'equazione che risulta soddisfatta solo se

²¹Dalla prima equazione in (2.29) abbiamo che $U_n = \frac{P_{nx}}{i\omega}$

valgono le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}\hat{A}_n(1 - i\alpha\delta) &= 0; \\ \hat{B}_n(1 + i\alpha\delta) &= 0; \\ i\alpha\hat{A}_n\left(\frac{1}{\omega^2} - \delta\right) &= 0; \\ i\alpha\hat{B}_n\left(\frac{1}{\omega^2} - \delta\right) &= 0;\end{aligned}$$

cioè se e solo se $\hat{A}_n = \hat{B}_n = 0$.

Ci troviamo quindi davanti ad una soluzione nulla.

Risulta dunque necessario affrontare il problema aggiungendo alcune ipotesi, cerchiamo una soluzione che soddisfi le condizioni al bordo imponendo determinate simmetrie per quanto riguarda la dipendenza dalle variabili x e z . In particolare supponiamo che la simmetria rispetto a queste due variabili sia essenzialmente la stessa sulla superficie di fondo $z = b(x) = \alpha x$. Anche in questo caso i risultati ottenuti non saranno sempre validi, la validità delle osservazioni è infatti legata solamente a determinati valori di α .

Analizziamo la situazione limitandoci ad $n = 1, 2$.

Sia $n = 1$, abbiamo

$$Z_1''(z) - \delta^2 k^2 Z_1(z) = 0 \quad \text{e} \quad X_1''(x) + k^2 X_1(x) = 0$$

da cui

$$W_1(x, z) = (A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}) e^{\delta kz}. \quad (2.33)$$

Sia ora $n = 2$,

$$Z_2''(z) + \delta^2 k^2 Z_2(z) = 0 \quad \text{e} \quad X_2''(x) - k^2 X_2(x) = 0$$

la soluzione è

$$W_2(x, z) = (A_2 e^{i\delta kz} + B_2 e^{-i\delta kz}) e^{kx}.$$

La prima soluzione è limitata per $z \rightarrow -\infty$, la seconda per $x \rightarrow -\infty$.

La soluzione generale è quindi data dalla somma delle due soluzioni trovate

$$W(x, z) = W_1(x, z) + W_2(x, z).$$

Possiamo quindi ricavare $P(x, z)$ allo stesso modo in cui abbiamo ricavato $P_n(x, z)$ per n generico

$$\begin{aligned}P(x, z) &= P_1(x, z) + P_2(x, z) \\ &= \frac{i\omega\delta}{k} (A_1 e^{ikx} + B_1^{-ikx}) e^{\delta kz} + \frac{\omega\delta}{k} (A_2 e^{i\delta kz} - B_2 e^{-i\delta kz}) e^{kx} + A(x)\end{aligned}$$

e riscrivere quindi le condizioni al bordo (2.30)

$$(A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}) e^{\delta k} + (A_2 e^{i\delta k} + B_2 e^{-i\delta k}) e^{kx} = -i\omega A(x); \quad (2.34)$$

e

$$\begin{aligned} & (A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}) e^{\alpha\delta kx} + (A_2 e^{i\alpha\delta kx} + B_2 e^{-i\alpha\delta kx}) e^{kx} \\ &= i\alpha\delta (A_1 e^{ikx} - B_1 e^{-ikx}) (e^{\alpha\delta kx} - e^{\delta k}) \\ & - i\alpha\delta \left[A_2 (e^{i\alpha\delta kx} - e^{i\delta k}) - B_2 (e^{-i\alpha\delta kx} - e^{-i\delta k}) \right] e^{kx} - \frac{i\alpha}{\omega} A'(x) \end{aligned}$$

da queste possiamo ricavare $A'(x)$ e scrivere la seguente equazione, ponendo $E = e^{ikx}$ per comodità di scrittura:

$$\begin{aligned} & (A_1 E + B_1 E^{-1}) e^{\alpha\delta kx} + (A_2 E^{\alpha\delta} + B_2 E^{-1} e^{-\alpha\delta}) e^{kx} \\ &= i\alpha\delta (A_1 E - B_1 E^{-1}) (e^{\alpha\delta kx} - e^{\delta k}) \\ & - i\alpha\delta \left[A_2 (E^{\alpha\delta} - e^{i\delta k}) - B_2 (E^{-\alpha\delta} - e^{-i\delta k}) \right] e^{kx} \\ & + \frac{i\alpha k}{\omega^2} (A_1 E - B_1 E^{-1}) e^{\delta k} + \frac{\alpha k}{\omega^2} (A_2 e^{ik\delta} + B_2 e^{-ik\delta}) e^{kx}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi osservare che l'uguaglianza è verificata anche per altri valori oltre che per $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$.

In particolare, se prendiamo α tale che valga $\alpha\delta = 1$, abbiamo che i quattro parametri devono soddisfare le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= i(A_1 - A_2); \\ B_1 + B_2 &= i(B_1 - B_2); \\ iA_1 \left(\frac{k}{\delta\omega^2} - 1 \right) e^{\delta k} &= 0; \\ iB_1 \left(\frac{k}{\delta\omega^2} - 1 \right) e^{\delta k} &= 0; \\ (1 + i)A_2 e^{i\delta k} &= -(1 - i)B_2 e^{-i\delta k} \end{aligned}$$

La soluzione del sistema è data da $\omega^2 = \frac{k}{\delta}$ da cui devono valere anche le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} A_2 &= iA_1; \\ B_2 &= -iB_1; \\ B_1 &= iA_1 e^{2i\delta k} \end{aligned}$$

La relazione $\omega^2 = \frac{k}{\delta}$ corrisponde alla relazione di dispersione ricavata per le onde corte che si propagano a velocità $c_p = \pm \frac{1}{\sqrt{\delta k}}$.

Grazie alle relazioni appena trovate e alla condizione al bordo (2.34) siamo in grado di scrivere esplicitamente $A(x)$ e possiamo scrivere la soluzione come segue:

$$\eta(x, t) = 2 \operatorname{Re} \left(A_0 \left[e^{i(kx - \omega t - \delta k)} + e^{-i(kx + \omega t - \delta k)} + (1 + i)e^{k(x - \delta) - i\omega t} \right] \right) \quad (2.35)$$

Analizzando l'equazione (2.35) possiamo notare che:

- per $x \leq 1/\alpha$ la soluzione è regolare, non presenta singolarità nemmeno a riva;
- a riva, cioè per $x = \delta = 1/\alpha$ abbiamo:

$$\eta(x, t) = 2 \operatorname{Re} \left((3 + i)A_0 e^{-i\omega t} \right);$$

- la riva riflette perfettamente l'onda, abbiamo quindi due onde che si muovono nella direzione opposta e che viaggiano a velocità fissata;
- all'infinito, cioè per $x \rightarrow -\infty$, le due componenti presentano un'ampiezza non nulla.

Le caratteristiche che rendono la soluzione appena trovata particolarmente importante sono il fatto che l'ampiezza non è nulla all'infinito e che nella soluzione compare il termine $e^{k(x - \delta) - i\omega t}$ che non rappresenta un'onda in movimento.

Osserviamo inoltre che è possibile individuare altri valori di α che ci portino ad ottenere risultati analoghi.

Ad esempio, possiamo riscrivere la condizione sul fondo $w = ub'(x)$ come:

$$w\delta \cos(\beta) - u \sin(\beta) = 0$$

supponendo che il fondo soddisfi $z\delta \cos(\beta) - x \sin(\beta) = 0$ con $\alpha\delta = \tan(\beta)$ ²².

Per quanto concerne la presente trattazione non è necessario approfondire ulteriormente le equazioni che descrivono la propagazione di onde lineari, sarà sufficiente ricordare che analizzando queste equazioni, anche senza imporre l'ipotesi di onde lunghe, è possibile giungere a soluzioni che descrivono un'onda che si propaga parallela rispetto alla riva. In particolare è possibile dimostrare che l'ampiezza di queste onde decade esponenzialmente man mano che si allontanano dalla riva, per questo motivo sono dette *onde intrappolate*.

²²Il caso che abbiamo trattato corrisponde a $\beta = \pi/4$.

Queste onde sono solitamente generate dal vento se questo si muove parallelamente alla riva. Il loro studio è di particolare importanza poiché queste raggiungono la loro massima ampiezza a riva, e per ciò contribuiscono al totale run-up, ovvero il punto più alto raggiunto dalla massa d'acqua nel momento in cui giunge alla costa,

Capitolo 3

Onde solitarie

Le onde solitoniche e le loro proprietà sono state oggetto di studio per la prima volta nel 1834 da John Scott Russel. Questi, un'ingegnere navale, durante gli studi che stava conducendo per determinare una progettazione più efficiente per le barche da canale, rimase colpito dall'onda generata dal movimento di una di queste nel canale di Edinburgh-Glasgow: al fermarsi improvviso della barca osservò che la massa d'acqua spostata continuava ad allontanarsi assumendo la forma di una singola onda ben definita e che si propagava lungo il canale senza modificare la propria forma e velocità.

Solo nel 1844 riportò le sue osservazioni al British Association for the Advancement of Science nel suo "Rapporto sulle onde" affermando che:

*"I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation."*¹

¹"Stavo osservando il moto di una barca che veniva rapidamente trainata attraverso uno stretto canale da una coppia di cavalli, quando la barca si fermò all'improvviso - ma non anche la massa d'acqua che questa aveva messo in moto nel canale; la massa

Russell, in seguito a questo episodio, eseguì vari esperimenti per investigare approfonditamente la natura di queste onde, ad esempio generando onde solitarie facendo cadere un peso all'estremità di un canale d'acqua.

Grazie a questi esperimenti riuscì a dedurre empiricamente che il volume d'acqua nell'onda è pari al volume d'acqua spostato e che la profondità dell'acqua h , la velocità c e l'ampiezza a dell'onda solitaria sono legate dalla relazione

$$c^2 = g(h + a)$$

dove g è l'accelerazione di gravità (l'onda solitaria è quindi un'onda di gravità).

Una prima osservazione che possiamo fare osservando la relazione trovata per la velocità d'onda è che: più alta è l'onda più velocemente essa viaggia.

Inizialmente l'esistenza di questo tipo di onde fu accolta in maniera controversa, le scoperte di Russell erano infatti in disaccordo con le teorie della fluidodinamica della sua epoca: accettare le teorie di Russell avrebbe significato affermare che un'onda completamente al di sopra dell'acqua potesse muoversi imperturbata. Alcuni suoi contemporanei come George Biddell Airy e George Stokes erano quindi dell'opinione che tali onde non potessero esistere.

Negli anni 70 dell'800 si occuparono dello studio delle onde solitarie anche Joseph Boussinesq (1871) e John William Strutt (1876), i quali confermarono i risultati di Russell: dall'equazione del moto per un fluido non viscoso e incompressibile derivarono la relazione per la velocità trovata da Russell.

Questi cercarono inoltre una descrizione matematica per l'onda solitaria giungendo, infine, alla seguente espressione per descrivere il profilo dell'onda:

$$\eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2(\beta(x - ct)) \quad (3.1)$$

d'acqua si accumulava attorno alla prua del vascello in uno stato di violenta agitazione poi improvvisamente lasciandosi questo alle spalle continuava ad avanzare con grande velocità assumendo la forma di una larga e solitaria elevazione, un cumulo di acqua, smussato, liscio e ben definito, che continuava il suo corso lungo il canale apparentemente senza cambiare forma o diminuire la velocità. Io lo seguii a cavallo e lo superai mentre ancora avanzava ad una velocità di 8 o 9 miglia orarie, preservando la sua conformazione originale circa con un'altezza di una trentina di centimetri e una lunghezza di circa dieci metri. La sua altezza diminuiva gradualmente e dopo averla inseguita per uno o due miglia la persi fra le anse del canale. Questo nel mese di agosto 1834 fu la mia prima possibilità di osservare quel singolare e affascinante fenomeno a cui ho dato nome di "Wave of Translation" John Scott Russell, "Report on waves", Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1844

dove $\beta^{-2} = \frac{4h^2(h+a)}{3a}$ per ogni valore di a positivo e per $\frac{a}{h} \ll 1$.

Furono, però, Diederik Korteweg e Gustav de Vries che nel 1895 trovarono un'equazione non lineare per $\eta(x, t)$ che descrivesse i fenomeni osservati da Russell e che ammettesse (3.1) come soluzione.

La forma originale dell'equazione di KdV era:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \quad (3.2)$$

dove α è una costante molto piccola relativa al moto uniforme del liquido e $\sigma = \frac{h^3}{3} - \frac{Th}{\rho g}$ con T tensione superficiale e ρ densità del fluido.

Lo studio dei solitoni proseguì anche nel secolo successivo e, in particolare, nel 1965 Norman Zabusky e Martin Kruskal utilizzarono uno schema alle differenze finite per studiare da un punto di vista numerico l'equazione di Korteweg-de Vries e mostrare il comportamento delle onde solitarie. A questi due fisici dobbiamo il nome di solitoni: onde solitarie che, in caso di iterazione, non modificano la loro forma e presentano solo una variazione di fase dopo essersi attraversate.

Alcuni anni dopo, nel 1967, alcuni scienziati utilizzando il metodo dell'inverse scattering transform ricavarono soluzioni analitiche dell'equazione di KdV per dati iniziali tendenti rapidamente ad una costante per $|x| \rightarrow +\infty$.

In questo capitolo, dopo aver ricordato la forma generale delle equazioni non lineari che descrivono onde gravitazionali, introdurremo il concetto di solitone e studieremo queste onde da un punto di vista analitico.

Poiché non è sempre possibile ricavare dalle equazioni di governo soluzioni che forniscano una descrizione matematica dell'onda solitaria vedremo che, sotto opportune ipotesi, il comportamento di un solitone è ben rappresentato dalla funzione sech^2 .

3.1 Problemi non lineari

Prima di addentrarci nello studio delle onde solitoniche e delle equazioni che le descrivono, per comodità espositiva riportiamo le equazioni non lineari per onde gravitazionali per un modello non viscoso già introdotte in (1.7) e in (1.8) supponendo che non ci sia tensione superficiale:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \delta^2 \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

dove

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

con

$$\begin{cases} w = \eta_t + \epsilon(u\eta_x + v\eta_y) & \text{e} \quad p = \eta \quad \text{su} \quad z = 1 + \epsilon\eta \\ w = ub_x + vb_y & \text{su} \quad z = b \end{cases}$$

Le equazioni di governo per flussi irrotazionali di fluidi non viscosi e incomprimibili, limitati sopra da una superficie libera e sotto da un piano rigido e orizzontale sono:

$$\phi_{zz} + \delta^2(\phi_{xx} + \phi_{yy}) = 0$$

dove sulla superficie $z = 1 + \epsilon\eta$ valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{cases} \phi_z = \delta^2[\eta_t + \epsilon(\phi_x\eta_x + \phi_y\eta_y)] \\ \phi_t + \eta + \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{1}{\delta^2}\phi_z^2 + \phi_x^2 + \phi_y^2\right) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

e sulla superficie $z = b$:

$$\phi_z = \delta^2(\phi_x b_x + \phi_y b_y)$$

dove ϕ è il potenziale².

Poiché stiamo considerando onde non lineari bisogna imporre $\epsilon \neq 0$.

3.2 Il solitone

I solitoni sono onde causate da effetti non lineari nel mezzo in cui si propagano.

In questa trattazione ci occuperemo dei solitoni nell'ambito delle onde marine di superficie, ma è importante ricordare che si sono osservati profili solitonici anche in settori differenti, ad esempio solitoni acustici e luminosi, nei plasmi e nei cristalli armonici, o solitoni atmosferici.

Inoltre, è stato osservato come "i solitoni non si manifestano unicamente come onde di superficie ma anche come onde interne, potendosi formare sotto il pelo dell'acqua, all'interfaccia tra stato superficiale e profondo, a causa di discontinuità di salinità e temperatura"³. Tra le equazioni non lineari che ammettono soluzioni solitoniche troviamo, ad esempio, l'equazione di KdV,

²Come già visto nel primo capitolo il potenziale ϕ è una grandezza scalare il cui gradiente rappresenta la velocità \mathbf{u} del flusso, cioè $\mathbf{u} = \nabla\phi$.

³Clara Dainese, Equazione di Korteweg-de Vries e sue soluzioni solitoniche, Università degli Studi di Padova, 2009/2010

l'equazione di Schrödinger e quella di Boussinesq.

I solitoni non sono descrivibili tramite equazioni lineari, si differenziano infatti dalle onde lineari per alcune loro caratteristiche:

- si mantengono costantemente al di sopra o al di sotto della superficie senza modificare la loro forma;
- si propagano con velocità costante dipendente dalla loro ampiezza;
- sono onde localizzate, cioè decadono ad una costante all'infinito. Una buona descrizione di queste onde, per piccole ampiezze, è data dalla secante iperbolica;
- due solitoni che si scontrano si attraversano e si separano senza modificare la loro forma, subendo solo uno sfasamento.

Consideriamo un flusso irrotazionale, bidimensionale, che si propaga nella direzione x . Supponiamo inoltre che il fondale sia orizzontale, e per comodità poniamo $b = 0$; questo flusso è descritto dalle equazioni (3.3) :

$$\phi_{zz} + \delta^2 \phi_{xx} = 0 \quad (3.4)$$

con, sulla superficie $z = 1 + \epsilon\eta$:

$$\begin{cases} \phi_z = \delta^2(\eta_t + \epsilon\phi_x\eta_x); \\ \phi_t + \eta + \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{1}{\delta^2}\phi_z^2\right) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

e sulla superficie $z = 0$

$$\phi_z = 0. \quad (3.6)$$

Le variabili utilizzate sono già state adimensionalizzate utilizzando la profondità non perturbata h_0 , una scala di lunghezza orizzontale λ , dove λ rappresenta la lunghezza dell'onda, e la velocità tipica $\sqrt{gh_0}$.

I parametri che compaiono nelle equazioni precedenti sono quelli introdotti nel paragrafo (1.7) cioè

$$\epsilon = \frac{a}{h_0} \quad \text{e} \quad \delta = \frac{h_0}{\lambda};$$

con a ampiezza dell'onda.

In un'onda solitaria ϵ e δ hanno valori arbitrari, non necessariamente piccoli, per comodità assumiamo $\epsilon = 1$.

Poiché la soluzione cercata è relativa ad un' onda in movimento prendiamo

$\phi = \phi(\xi, z)$ e $\eta = \eta(\xi)$ con $\xi = x - ct$ dove c è la velocità dell'onda adimensionalizzata.

Le equazioni diventano:

$$\phi_{zz} + \delta^2 \phi_{\xi\xi} = 0; \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \phi_z = \delta^2(\phi_\xi - c)\eta_\xi; \\ -c\phi_\xi + \eta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta^2}\phi_\xi^2\right) = 0 \end{cases} \quad \text{su } z = 1 + \eta \quad (3.8)$$

$$\phi_z = 0 \quad \text{su } z = 0$$

Per prima cosa ci chiediamo se l'equazione ammette una soluzione che rappresenta un profilo che decade esponenzialmente per $|\xi| \rightarrow \infty$.

Prendiamo quindi $\eta \sim ae^{-\alpha|\xi|}$ e $\phi \sim \psi(z)e^{-\alpha|\xi|}$ per $\xi \rightarrow \infty$; η e ϕ devono avere lo stesso comportamento esponenziale per soddisfare le condizioni al bordo.

Riscriviamo l'equazione di Laplace (3.7):

$$\psi''(z) + \alpha^2 \delta^2 \psi(z) = 0$$

la soluzione è della forma $\psi(z) = A \cos(\alpha\delta z) + B \sin(\alpha\delta z)$ con A e B costanti arbitrarie.

Calcoliamo la derivata prima $\psi'(z) = -\alpha\delta A \sin(\alpha\delta z) + \alpha\delta B \cos(\alpha\delta z)$ e imponendo le condizioni al bordo per $z = 0$ otteniamo la seguente uguaglianza:

$$0 = \alpha\delta B$$

da cui $B = 0$ e quindi la soluzione dell'equazione di Laplace sarà:

$$\psi(z) = A \cos(\alpha\delta z).$$

Consideriamo ora le condizioni sulla superficie $z = 1 + \eta$ e supponendo $z \sim 1$ otteniamo:

$$-A\alpha\delta \sin(\alpha\delta) = c\alpha\delta^2$$

e

$$cA\alpha \cos(\alpha\delta) + a = 0$$

da cui:

$$c^2 = \frac{\tan(\alpha\delta)}{\alpha\delta}. \quad (3.9)$$

Quindi se c ed α sono legate dalla relazione di cui sopra, esiste una soluzione con il comportamento richiesto; in particolare, tutte le onde solitarie presentano un decadimento esponenziale nelle loro code e tutte soddisfano la relazione

(3.9).

Nel 1880 Stokes si interessò, relativamente alle onde solitarie, alla nozione di onda più alta, al fine di esaminare quali fossero i fattori che potessero limitare l'ampiezza dell'onda solitaria e di conseguenza quali condizioni persistono quando questo accade. Egli mostrò che l'onda di massima ampiezza sviluppa un angolo acuto sulla cresta dell'onda, con un angolo interno di 120° .

Consideriamo, quindi, un'onda di forma permanente che si muove a velocità c nella direzione x su una profondità costante e stazionaria all'infinito.

Prendiamo, inoltre, delle coordinate che si spostano a velocità c per poter trattare l'onda come stazionaria.

Introduciamo, infine, la funzione $\Phi(\xi, z)$ tale che $\Phi = \phi - c\xi$ da cui $\Phi_\xi = \phi_\xi - c$; dal momento che $u = \phi_x = \phi_\xi$ la velocità sarà $V = u - c$.

Quanto appena osservato ci permette di riscrivere nuovamente le equazioni

(3.3):

$$\Phi_{zz} + \delta^2 \Phi_{\xi\xi} = 0$$

sulla superficie $z = 1 + \eta$ si ha:

$$\Phi_z = \delta^2 \Phi_\xi \eta_\xi \quad (3.10)$$

e

$$2\eta - c^2 + \frac{1}{\delta^2} \Phi_z^2 + \Phi_\xi^2 = 0 \quad (3.11)$$

mentre sulla superficie $z = 0$:

$$\Phi_z = 0.$$

Stokes affermò che quando la velocità delle particelle del fluido sul picco dell'onda è pari alla velocità dell'onda stessa, questa raggiunge la sua massima ampiezza.

Nelle onde di ampiezza ridotta la velocità delle particelle sarà minore della velocità dell'onda; quando la velocità delle particelle supera la velocità dell'onda, quest'ultima si rompe e non mantiene la sua forma.

Perciò in $\eta = \eta_0$ poniamo $V = \Phi_\xi = 0$ da cui $c^2 = 2\eta_0$; inoltre trasliamo l'origine delle coordinate (z, ξ) nel picco dell'onda, in modo che questo si trovi nel punto di coordinate $(0, 0)$.

Per studiare flussi irrotazionali e incomprimibili in due dimensioni risulta utile introdurre variabili complesse, in particolare poniamo:

$$\Phi + i\Psi = F(Z) \quad \text{con} \quad Z = \xi + i\delta z \quad (3.12)$$

dove Z è la coordinata di posizione complessa, F è il potenziale complesso e Ψ è la funzione di flusso⁴.

In un intorno di $Z = 0$ cerchiamo una soluzione della forma:

$$F(Z) \sim AZ^m \quad \text{per } |Z| \rightarrow 0$$

mentre in superficie si ha:

$$\eta \sim -H|\xi|^n \quad \text{per } \xi \rightarrow 0 \quad \text{e } H > 0$$

con η relativo al picco in $\eta = \eta_0$.

Affinché il comportamento nei dintorni del picco sia fisicamente accettabile ci aspettiamo $n > 0$ e $m > 1$.

Operando le opportune sostituzioni, da (3.10) riscriviamo le condizioni cinematiche in superficie:

$$\text{Re} \{i\delta Am Z_0^{m-1}\} \sim -\delta^2 n H \xi^{n-1} \text{Re} \{Am Z_0^{m-1}\}$$

e

$$Z_0 \sim \xi - i\delta H \xi^n$$

e da (3.11) ricaviamo quelle dinamiche al bordo:

$$-2H\xi \sim \xi^{2(m-1)} \left(\frac{1}{\delta^2} \left[\text{Re} \{i\delta Am(1 - i\delta H)^{m-1}\} \right]^2 + \left[\text{Re} \{Am(1 - i\delta H)^{m-1}\} \right]^2 \right)$$

Le condizioni cinematiche richiedono $n = 1$; quindi in questo caso limite si ha che

$$\eta \sim -H|\xi|$$

cioè la superficie presenta una cresta affilata.

Dalle condizioni dinamiche abbiamo che deve essere $m = 3/2$, questo valore determina anche l'angolo del cuneo che forma la cresta affilata.

La soluzione vicino alla cresta è dunque descritta da :

$$\Phi + i\Psi = F(Z) \sim AZ^{3/2} \quad \text{per } |Z| \rightarrow 0.$$

Poiché stiamo considerando la variabile complessa possiamo riscrivere Z in forma trigonometrica:

$$Z^{\frac{3}{2}} = r^{\frac{3}{2}} \left(\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) + i \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right)$$

⁴Parlando di un flusso incomprimibile e irrotazionale è opportuno introdurre la funzione di flusso Ψ e il potenziale Φ ; è possibile mostrare che esiste una funzione $F(Z)$ tale che valga (3.12).

da cui

$$\Phi + i\Psi = Ar^{\frac{3}{2}} \left(\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) + i \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right).$$

Uguagliando la parte immaginaria ricaviamo la funzione di flusso

$$\Psi = Ar^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right)$$

da cui

$$r = \sqrt[2/3]{\frac{\Psi}{A \sin(3/2\theta)}}$$

poiché il raggio deve essere positivo si ha che $0 < \theta < \frac{2}{3}\pi$.

Dunque $F(Z) \sim AZ^{3/2}$ rappresenta il flusso in un cono di angolo $\theta = 2\pi/3$ e $Z^{3/2}$ è il potenziale complesso per un flusso legato ad un angolo i cui valori spaziano tra 0 e $2\pi/3$.

Questi risultati confermano le osservazioni di Russell riguardanti l'angolo sulla cresta dell'onda.

Possiamo concludere affermando che non siamo in grado di trovare un'espressione matematica che ci permetta di rappresentare onde solitarie di grande ampiezza o l'onda più alta con la cresta affilata.

3.2.1 L'approssimazione sech^2

Abbiamo visto che non siamo in grado di arrivare ad una soluzione delle equazioni di governo, per ampiezze arbitrarie, che ci fornisca una rappresentazione matematica dell'onda solitaria.

Vediamo ora che il comportamento dell'onda solitaria, per onde di piccola ampiezza, è ben descritto dalla funzione sech^2 .

Le onde solitarie si estendono da $-\infty$ a $+\infty$, quindi la loro lunghezza è maggiore della profondità dell'acqua e possiamo supporre $\delta \rightarrow 0$, cioè è appropriato considerare onde lunghe anche se stiamo parlando di onde solitarie.

Per procedere supponiamo inoltre che l'ampiezza sia piccola, cioè $\epsilon \rightarrow 0$.

Consideriamo nuovamente le equazioni (3.4), (3.5), (3.6) per onde lunghe di piccola ampiezza.

Supponiamo che la soluzione asintotica dell'equazione di Laplace sia la seguente:

$$\phi(x, t, z; \delta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{2n} \phi_n(x, t, z) \quad \text{per } \delta \rightarrow 0,$$

per soddisfare le condizioni al bordo poniamo inoltre $\phi_0 = \theta_0(x, t)$, con θ_0 funzione arbitraria.

I termini di ordine superiore soddisfano la seguente uguaglianza

$$\phi_{n+1zz} = -\phi_{nxx} \quad \text{per } n = 0, 1 \dots \quad (3.13)$$

Per ottenere ϕ_1 prendiamo la relazione precedente per $n = 0$, considerando le condizioni trovate su ϕ_0 e integrando due volte rispetto alla variabile z si ha che

$$\begin{aligned} \phi_1(x, t, z) &= - \int \int \theta_{0xx}(x, t) dz dz \\ &= \frac{1}{2} z^2 \theta_{0xx} + \theta_1(x, t); \end{aligned}$$

considerando ora la relazione (3.13) per $n = 1$ troviamo anche ϕ_2 ⁵:

$$\begin{aligned} \phi_2(x, t, z) &= - \int \int \phi_{1xx} dz dz \\ &= \frac{1}{24} z^4 \theta_{0xxxx} - \frac{1}{2} z^2 \theta_{1xx} + \theta_2(x, t) \end{aligned}$$

In modo analogo possiamo definire ϕ_n per ogni valore di n in funzione dei ϕ_i , e quindi dei θ_i con $i = 1, \dots, n - 1$, dove θ_n è una funzione arbitraria e ϕ_n soddisfa la condizione al bordo $\phi_{nz} = 0$ su $z = 0$.

Nelle equazioni del sistema (3.8) sostituiamo ϕ e le sue derivate parziali con il loro sviluppo asintotico, la condizione cinematica sulla superficie $z = 1 + \epsilon\eta$ diventa

$$-(1 + \epsilon\eta)\theta_{0xx} + \delta^2 \{ \dots \} + \dots \sim \eta_t + \epsilon\eta_x \{ \dots \} + \dots \quad (3.14)$$

quella dinamica

$$\theta_{0t} + \delta^2 \{ \dots \} + \dots + \eta \sim -\frac{1}{2}\epsilon\delta^2 \{ \dots \} - \frac{1}{2}\epsilon \{ \dots \}. \quad (3.15)$$

Per $\epsilon \rightarrow 0$ e $\delta \rightarrow 0$ otteniamo, dalla prima, $-\theta_{0xx} \sim \eta_t$ e, dalla seconda, $\theta_{0t} \sim -\eta$ da cui

$$\theta_{0xx} \sim \theta_{0tt}. \quad (3.16)$$

Cerchiamo una soluzione che dipenda da $\xi = x - t$, quindi, assumendo questo ordine di approssimazione, l'onda si propaga a velocità unitaria.

Considerando θ ed η come funzioni di ξ e t le equazioni riportate sopra diventano $-\theta_{0z} \sim \eta_t - \eta_\xi$ e $\theta_{0t} - \theta_{0\xi} \sim -\eta$ e quindi la (3.16) diventa

$$2\theta_{0t\xi} \sim \theta_{0tt}.$$

⁵ $\phi_{1xx}(x, t, z) = -\frac{1}{2}\theta_{0xxxx} + \theta_{1xx}$

Inserendo questi termini nelle condizioni al bordo vediamo che le derivate rispetto a t sono piccole, poniamo quindi $\tau = \Delta t$ per $\Delta \rightarrow 0$. Riportando soltanto i termini piccoli quanto $O(\epsilon)$, $O(\delta^2)$ e $O(\Delta)$ le due condizioni (3.14) e (3.15) diventano:

$$-(1 + \epsilon\eta)\theta_{0\xi\xi} + \delta^2\left(\frac{1}{6}\theta_{0\xi\xi\xi\xi} - \theta_{1\xi\xi}\right) \sim \Delta\eta_\tau - \eta_\xi + \epsilon\eta\theta_{0\xi}$$

e

$$\Delta\theta_{0\tau} - \theta_{0\xi} + \delta^2\left(\frac{1}{2}\theta_{0\xi\xi\xi} - \theta_{1\xi}\right) + \eta \sim -\frac{1}{2}\epsilon(\theta_{0\xi})^2.$$

Deriviamo la seconda rispetto a ξ

$$\Delta\theta_{0\tau\xi} - \theta_{0\xi\xi} + \delta^2\left(\frac{1}{2}\theta_{0\xi\xi\xi\xi} - \theta_{1\xi\xi}\right) + \eta_\xi \sim -\epsilon\theta_{0\xi}\theta_{0\xi\xi}$$

e la sottraiamo alla prima

$$-\epsilon\eta\theta_{0\xi\xi} + \delta^2\frac{1}{6}\theta_{0\xi\xi\xi\xi} - \Delta\theta_{0\tau\xi} - \delta^2\frac{1}{2}\theta_{0\xi\xi\xi\xi} \sim \Delta\eta_\tau + \epsilon\eta\theta_{0\xi} + \epsilon\theta_{0\xi}\theta_{0\xi\xi}.$$

Inoltre, grazie alle osservazioni precedenti, e alla relazione $\theta_{0t} - \theta_{0\xi} \sim -\eta$, abbiamo che $\eta = \theta_{0\xi} + O(\delta)$, di conseguenza l'equazione precedente può essere riscritta come

$$2\Delta\eta_\tau + 3\epsilon\eta\eta_\xi \sim -\frac{\delta^2}{3}\eta_{\xi\xi\xi}.$$

Ponendo $\epsilon = O(\delta^2)$, $\Delta = \epsilon$ e $\delta^2 = K\epsilon$, l'equazione per il profilo della superficie diventa:

$$2\eta_\tau + 3\eta\eta_\xi + \frac{K}{3}\eta_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.17)$$

detta *equazione di Korteweg-de Vries*.

Questa equazione descrive un bilanciamento tra la componente non lineare $\eta\eta_\xi$, che tende a raddoppiare il profilo dell'onda, e la componente dispersiva $\eta_{\xi\xi\xi}$, che spinge verso gli effetti opposti.

Consideriamo ora $\eta = f(\xi - c\tau)$ e cerchiamo la soluzione dell'equazione (3.17) per un'onda in movimento. L'equazione diventa:

$$-2cf' + 3ff' + \frac{K}{3}f''' = 0$$

la soluzione che soddisfa $f, f', f'' \rightarrow 0$ per $|\xi - c\tau| \rightarrow \infty$ è:

$$f = 2c \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{3c}{2K}}(\xi - c\tau) \right\} \quad (3.18)$$

o

$$\epsilon\eta \sim \epsilon a \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3a}{4K}} \left(x - \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon a \right) t \right) \right] \quad (3.19)$$

dove $\epsilon\eta$ è la superficie dell'onda e $\epsilon a = 2\epsilon c$ è l'ampiezza.

Questa onda è detta *onda solitaria* sech^2 ed è la versione della classica onda solitaria con piccola ampiezza.

La velocità dell'onda, data da $1 + \frac{1}{2}\epsilon a$, aumenta all'aumentare di ϵa , infatti la soluzione è definita per ogni $\epsilon a > 0$ (purché ϵ sia piccolo).

La velocità dell'onda così trovata concorda con le prime osservazioni di Russell. In forma adimensionale essa è infatti:

$$\sqrt{1 + \epsilon a} \sim 1 + \frac{1}{2}\epsilon a \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0.$$

La larghezza dell'onda solitaria, definita come la distanza tra due punti ad altezza $\frac{1}{2}\epsilon a$, è inversamente proporzionale a \sqrt{a} . Questo significa che onde più alte viaggiano più velocemente e sono anche più strette.

Il comportamento della coda esponenziale dovrebbe inoltre soddisfare i risultati generali dati dall'equazione (3.9).

Dall'analisi appena fatta emerge che solo in caso di un particolare bilanciamento del parametro ϵ si può ottenere l'onda solitaria sech^2 , portandoci a pensare che quello analizzato sia dunque un fenomeno poco frequente. Questo perché è effettivamente raro poterla osservare come onda singola, mentre è possibile osservarla con maggiore frequenza in molte iterazioni tra onde e come onde periodiche. Si può verificare infatti che l'equazione di KdV ammette soluzioni periodiche che mantengono la loro forma. Una di queste soluzioni è la cosiddetta *onda cnoideale*.

3.2.2 Relazioni integrali

In questo paragrafo vogliamo introdurre alcune caratteristiche dell'onda e del suo moto e le relazioni che le legano.

Consideriamo un'onda che non modifica la sua forma, si sposta a velocità c e decade al tendere del modulo di ξ ad infinito; un'onda con queste caratteristiche è descritta dalle equazioni (3.8).

Per poter studiare in modo ancora più approfondito l'onda solitaria e la sua propagazione risulta utile introdurre le seguenti quantità:

- la **massa** associata all'onda:

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta d\xi;$$

- il **momento totale** del moto del fluido

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{1+\eta} \phi_\xi dz d\xi;$$

- l'**energia cinetica** totale del moto

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{1+\eta} \left(\frac{1}{\delta^2} \phi_z^2 + \phi_\xi^2 \right) dz d\xi$$

- l'**energia potenziale** dell'onda

$$V = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^2 d\xi$$

- la **circolazione** del moto

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = [\phi]_{-\infty}^{+\infty}$$

dove l'integrale è calcolato su ogni linea di flusso.

Le quantità fondamentali così espresse sono in forma adimensionale, vediamo che relazioni intercorrono tra esse.

Riscriviamo l'equazione della massa (1.14) introdotta nel primo capitolo nella forma $u_\xi + w_z = 0$, questa diventa $(u - c)_\xi + w_z = 0$ poiché stiamo prendendo in considerazione un'onda in movimento.

Vale, quindi, la seguente relazione

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \int_0^{1+\eta} (u - c) dz \right\} = 0.$$

Dato che al tendere di ξ ad infinito $u = \phi_\xi$ ed η tendono a zero si ha

$$\int_0^{1+\eta} (u - c) dz = \int_0^1 (-c) dz = -c$$

quindi

$$\int_0^{1+\eta} u dz = \int_0^{1+\eta} c dz - c = (1 + \eta)c - c = c\eta$$

da cui possiamo scrivere la seguente uguaglianza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{1+\eta} \phi_\xi dz d\xi = c \int_{-\infty}^{+\infty} \eta d\xi$$

o equivalentemente $I = cM$.

Consideriamo ora il teorema di Green in direzione y :

$$\int_V \{(\nabla u) \cdot (\nabla v) + u \nabla^2 v\} dV = \int_S u(\nabla v) \cdot dS^6.$$

Poniamo $u = v = \Phi = \phi - c\xi$ e $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial z}\right)$ quindi

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \phi = \phi_{\xi\xi} + \frac{1}{\delta^2} \phi_{zz} = 0.$$

La regione su cui vogliamo integrare è delimitata da una curva che va da $z = 1 + \eta$ a $z = 0$ per $-\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0$.

Otteniamo quindi il teorema di Green nella forma:

$$\int_{-\xi_0}^{\xi_0} \int_0^{1+\eta} \left\{ \frac{1}{\delta^2} \phi_z^2 + (\phi_\xi - c)^2 \right\} dz d\xi = \int_\Gamma \Phi (m \Phi_\xi + \frac{n}{\delta} \Phi_z) dl$$

con $\mathbf{n} = (m, n)$ il vettore normale unitario uscente da Γ , dove Γ è la curva che delimita la porzione di onda che andiamo ad analizzare.

Utilizzando queste coordinate la superficie dell'onda risulta stazionaria nel nostro dominio, inoltre attraverso $\xi = \pm \xi_0$ c'è un flusso uniforme di velocità verso ξ negativa.

Analizziamo ora tutti i contributi presenti nell'equazione precedente, considerando le quantità introdotte ad inizio sezione.

Il membro di sinistra diventa:

$$2\hat{T} - 2c \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \int_0^{1+\eta} \phi_\xi dz d\xi + c^2 \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \int_0^{1+\eta} dz d\xi = 2\hat{T} - 2c\hat{I} + 2c^2\xi_0 + c^2\hat{M}$$

dove $\hat{T} \rightarrow T$, $\hat{M} \rightarrow M$ e $\hat{I} \rightarrow I$ per $\xi_0 \rightarrow \infty$.

Per quanto riguarda il membro di destra abbiamo:

- su $z = 0$ si ha $\mathbf{n} = (0, -1)$ e $\Phi_z = \phi_z = 0$;
- su $\xi = \xi_0$ si ha $\mathbf{n} = (1, 0)$ e $\Phi_\xi = -\hat{c}$;
- su $\xi = -\xi_0$ si ha $\mathbf{n} = (-1, 0)$ e $\Phi_\xi = -\hat{c}$;
- su $z = 1 + \eta$, che è una linea di flusso, \mathbf{n} è normale a $\nabla\Phi$.

⁶ $dV = 1 \times ds$ e $dS = \mathbf{n}(1 \times dl)$

e per $\xi_0 \rightarrow \infty$ si ha $\hat{c} \rightarrow c$.

Riscriviamo quindi l'equazione che diventa:

$$2\hat{T} - 2c\hat{I} + 2c^2\xi_0 + c^2\hat{M} = - \int_0^{1+\eta} \Phi_+ \hat{c} dz + \int_0^{1+\eta} \Phi_- \hat{c} dz$$

indicando con Φ_+ e Φ_- la funzione Φ valutata rispettivamente in $\xi = \xi_0$ e in $\xi = -\xi_0$.

Facendo tendere ξ_0 ad infinito, per quanto riguarda il termine di sinistra consideriamo i limiti riportati sopra, mentre invece per quanto riguarda il termine di destra abbiamo:

$$- \int_0^{1+\eta} \Phi_+ \hat{c} dz + \int_0^{1+\eta} \Phi_- \hat{c} dz \sim -c\Phi_+ + c\Phi_- \sim -c[\Phi]_{-\infty}^{+\infty} + 2c\xi_0.$$

Quindi l'equazione ci fornisce la seguente uguaglianza:

$$2T - 2cI + c^2M = -cC$$

o equivalentemente

$$2T = c(I - C).$$

Come si può vedere in [17] e in [18] è possibile individuare anche altre relazioni che legano le quantità introdotte ad inizio paragrafo, come ad esempio

$$3V = (c^2 - 1)M \quad \text{e} \quad d\left(\frac{T}{c^2}\right) = \frac{1}{c^2}dV$$

che non approfondiremo in questo elaborato.

Queste relazioni sono state utilizzate, ad esempio, per svolgere alcuni calcoli relativi alla dinamica delle onde che si infrangono in acque basse e per ottenere una semplice approssimazione del solitone di massima ampiezza.

Capitolo 4

OpenFOAM e l'approccio numerico

4.1 La fluidodinamica computazionale

La fluidodinamica computazionale, comunemente conosciuta con l'acronimo CFD (*Computational Fluid Dynamics*) è un settore della meccanica dei fluidi che si serve di simulazioni eseguite con l'impiego di un calcolatore, per analizzare e risolvere problematiche di sistemi relativi, ad esempio, a movimenti fluidi, scambio di calore e reazioni chimiche.

La CFD è stata sviluppata a partire dagli anni '60 e le sue applicazioni sono legate in particolar modo agli ambiti della progettazione ingegneristica e architettonica, ma trova applicazione anche in ambito medico e chimico. Le simulazioni forniscono informazioni relative a tutte le proprietà del fluido ed è possibile imporre condizioni e dominio uguali a quelle del fenomeno studiato. Uno dei vantaggi della CFD è il fatto che le simulazioni permettono di studiare il flusso del fluido in modo molto più accurato rispetto agli esperimenti condotti in laboratorio, è infatti possibile mantenere invariate le grandezze del fenomeno che in laboratorio necessitano invece un riscaldamento. Tramite gli esperimenti diretti, inoltre, si è in grado di misurare ed osservare solo alcune grandezze.

L'introduzione di modelli matematici, lo sviluppo dei calcolatori e della fluidodinamica computazionale permette quindi di semplificare in modo significativo la fase sperimentale.

Questo approccio presenta però alcune criticità, se, ad esempio, l'algoritmo e il modello fisico non sono stati scelti in modo adeguato si può incorrere in una scorretta descrizione del fenomeno e conseguentemente in risultati inaffidabili.

4.1.1 Risoluzione tramite metodi numerici

I fenomeni fisici in cui le quantità di interesse variano nello spazio e nel tempo vengono spesso rappresentati tramite modelli matematici costituiti prevalentemente da equazioni alle derivate parziali. Il modello fisico-matematico rappresenta quindi il punto di partenza per lo sviluppo di ogni metodo numerico. Le equazioni e gli operatori differenziali che lo compongono non sono però direttamente interpretabili dal calcolatore e devono essere perciò sottoposti ad un processo di discretizzazione.

Questo processo consiste nel trasformare le equazioni del modello matematico in un sistema di equazioni algebriche tramite metodi numerici che permettono di trovare una soluzione approssimata che sia comunque valida e permetta di ricavare proprietà della soluzione analitica.

Per compiere un processo di discretizzazione risulta inoltre necessario selezionare un sistema di coordinate, definire le caratteristiche della griglia (ad esempio strutturata, strutturata a blocchi, non strutturata etc.), poiché è necessaria una descrizione discreta del dominio geometrico su cui deve essere calcolata la soluzione, e stabilire il tipo di approssimazione da utilizzare durante il processo.

Una volta stabilito il metodo numerico che si vuole utilizzare si ricava un algoritmo che permette di calcolare il valore numerico della soluzione approssimata per ogni valore discreto delle variabili indipendenti.

L'algoritmo è considerato valido ai fini della simulazione se è:

- **stabile**, cioè gli errori presenti nei dati iniziali o quelli dovuti ai primi passi dell'algoritmo stesso non vengono amplificati;
- **efficiente**, deve quindi presentare un basso costo computazionale e deve fornire la soluzione in tempi accettabili.

In particolare un metodo di risoluzione numerica deve soddisfare requisiti di consistenza, stabilità, convergenza, conservazione, limitatezza realizzabilità e accuratezza.

Tra i vari metodi computazionali per la discretizzazione di equazioni alle derivate parziali i più noti sono il metodo agli elementi finiti (FEM), il metodo alle differenze finite (FDM) e il metodo ai volumi finiti (FVM). Questi metodi, pur discretizzando le equazioni in maniera differente, nel caso in cui la griglia sia particolarmente raffinata portano alla stessa soluzione.

4.2 OpenFOAM

OpenFOAM, acronimo di *Open Field Operation and Manipulation*, è un software gratuito e *open source*, scritto in linguaggio C++, utilizzato principalmente per la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali, e, per questo motivo, può trovare applicazione in vari campi di studio.

Uno dei suoi utilizzi principali è legato allo studio di problemi CFD¹. Nello specifico, permette di risolvere tramite un approccio numerico le equazioni di Navier-Stokes, che sono risolvibili analiticamente solo in casi molto semplici. Nella maggior parte dei casi un programma CFD si sviluppa seguendo il seguente schema:

- **Pre-processing**
 - Creazione della *mesh*;
 - scelta del modello fisico;
 - scelta del modello numerico;
 - imposizione delle condizioni al contorno ed, eventualmente, delle condizioni iniziali.
- **Solving**
 - Risoluzione iterativa delle equazioni;
 - creazione di cartelle contenenti ciascuna le soluzioni numeriche del problema, una per ogni step temporale.
- **Post-processing**
 - Risoluzioni scientifiche statiche e di tipo interattivo.

OpenFOAM permette di creare file eseguibili chiamati *application*.

Le *applications* si dividono in due categorie:

- *solvers*: creati per risolvere problemi di ingegneria meccanica;
- *utilities*: progettate per l'esecuzione di attività di *pre* e *post-processing* principalmente legate allo sviluppo e all'applicazione di calcoli algebrici; per la risoluzione di problemi in cui è necessario manipolare più dati.

¹La *Computational Fluid Dynamics* come vedremo nel paragrafo 4.1, consiste nell'analisi di sistemi relativi a fenomeni fisici attraverso l'uso di simulazioni effettuate con il computer.

Questo *software* è quindi caratterizzato da una serie di librerie precompilate che durante il processo di compilazione interscambiano dinamicamente le informazioni tra *utilities* e *solvers*.

La versatilità di questo *software* risiede proprio nella non proprietarietà del suo codice sorgente, che lo rende particolarmente modificabile ed adattabile alle più svariate esigenze di modellizzazione, attraverso la creazione di *solvers* ed *utilities* appositi per ogni situazione specifica. Data l'elevata complessità di apprendimento del programma, quest'ultimo è corredato da una serie di tutorial ideati per avvicinare l'utente alle procedure base di funzionamento del *software*.

4.3 Metodo di discretizzazione ai volumi finiti

Il *software* OpenFOAM si basa su un metodo ai volumi finiti (FVM) e su un approccio di tipo segregato: le equazioni di governo vengono risolte per una variabile alla volta separatamente l'una dall'altra e in modo sequenziale.

Questo processo di discretizzazione si basa su due passaggi:

- **Discretizzazione del dominio della soluzione:** si ottiene una descrizione numerica del dominio computazionale, includendo la posizione dei punti in cui è cercata la soluzione e la descrizione del bordo. Vengono discretizzati sia lo spazio, che viene suddiviso in un numero finito di regioni discrete dette celle o volumi di controllo², sia il tempo (nel caso di problemi evolutivi), diviso in un numero finito di intervalli temporali.
- **Discretizzazione delle equazioni:** i termini delle equazioni di governo vengono trasformati in equazioni algebriche.

Per quanto riguarda la definizione del dominio computazionale ricordiamo che i volumi di controllo possono essere di forma poliedrica e confinare con un numero variabile di volumi vicini, dando luogo così ad una griglia non strutturata. Ai fini della nostra trattazione considereremo una griglia spaziale che non varia nel tempo.

Definito il modello, viene discretizzata la forma integrale delle equazioni di governo su ciascun volume di controllo.

L'insieme di valori ottenuti risolvendo il sistema di equazioni sono un'approssimazione delle soluzioni delle equazioni originali in un determinato momento e spazio.

Questo metodo è uno dei più semplici da comprendere e da programmare,

²In base alla dimensione del problema (1D, 2D, 3D) dividiamo la regione spaziale in cui studiamo il moto in un numero finito di punti, celle o volumi.

la sua ampia diffusione nell'ambito dell'ingegneria è probabilmente dovuta al fatto che tutti i termini hanno un significato fisico. Come abbiamo visto, il dominio spaziale è diviso in un numero finito di volumi di controllo contigui e l'equazione di conservazione è applicata ad ogni volume di controllo. Il valore delle variabili calcolato rappresenta la media integrale della soluzione sul volume di controllo.

Uno dei vantaggi di questo metodo è il fatto che risulta adattabile a tutti i tipi di griglie e permette quindi di lavorare su geometrie anche molto complesse. Il vantaggio di utilizzare la griglia è quello di stabilire i bordi del volume di controllo senza la necessità di essere in relazione con un sistema di coordinate. Per costruzione, inoltre, si tratta di un metodo conservativo, quindi gli integrali di superficie, relativi ai flussi convettivi e diffusivi, sono i medesimi per i volumi di controllo confinanti.

La principale criticità del metodo ai volumi finiti deriva dal fatto che sono richiesti due livelli di approssimazione: interpolazione e integrazione e questo porta ad una maggiore difficoltà nell'eseguire simulazioni tridimensionali con un ordine di accuratezza maggiore del secondo.

La maggior parte degli applicativi di OpenFOAM ricorre al metodo ai volumi finiti.

Consideriamo l'equazione del trasporto per una generica grandezza ϕ :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)}_{\text{derivata temporale}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{U})}_{\text{termini convettivi}} = \underbrace{\nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi)}_{\text{termini diffusivi}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{termine sorgente}}$$

dove Γ è la diffusività.

L'equazione viene integrata su ogni volume di controllo Ω_i :

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)dV + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{U})dV = \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi)dV + \int_{\Omega_i} S_\phi dV \quad (4.1)$$

e, in particolare, sfruttando il teorema di Gauss, gli integrali di volume, dove compaiono operatori differenziali, vengono trasformati in integrali di superficie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i} (\rho\phi)dV + \int_{\partial\Omega_i} (\rho\phi\mathbf{U}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Omega_i} (\Gamma\nabla\phi) \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Omega_i} S_\phi dV. \quad (4.2)$$

La discretizzazione dell'equazione porta ad un sistema di equazioni algebriche che, in forma matriciale, sono espresse da $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dove \mathbf{A} è una matrice quadrata, \mathbf{x} è il vettore colonna relativo alle variabili dipendenti e \mathbf{b} è il termine noto.

Per maggiore completezza della trattazione vediamo come vengono discretizzati alcuni termini.

Una volta applicato il teorema di Gauss, come visto sopra, risulta necessario integrare alcuni termini, come l'integrale della temperatura e i termini sorgenti su volumi di controllo, mentre altri, come i termini diffusivi e convettivi, sulle superfici dei volumi di controllo.

Prima di valutare questi integrali occorre supporre che la variazione di ϕ nello spazio sia lineare, cioè:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}_{P_i}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{P_i}) \cdot (\nabla\phi)_{P_i} \quad (4.3)$$

dove P_i è il centroide del volume di controllo Ω_i , al fine di ottenere un'accuratezza del secondo ordine in \mathbf{x} .

Ponendo $\phi(\mathbf{x}_{P_i}) = \phi_{P_i}$ possiamo dunque riscrivere un generico integrale di controllo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \phi dV &= \int_{\Omega_i} \left(\phi_{P_i} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{P_i}) \cdot (\nabla\phi)_{P_i} \right) dV \\ &= \phi_{P_i} \int_{\Omega_i} dV + (\nabla\phi)_{P_i} \cdot \int_{\Omega_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{P_i}) dV = \phi_{P_i} \Omega_i. \end{aligned}$$

il termine $\int_{\Omega_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{P_i}) dV$ risulta essere nullo poiché OpenFOAM individua i centroidi proprio imponendo

$$\int_{\Omega_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{P_i}) dV = 0.$$

In modo analogo otteniamo l'integrale di superficie per ϕ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_i} \phi d\mathbf{S} &= \sum_k \int_{\partial\Omega_{i,k}} \phi d\mathbf{S}_k \\ &= \sum_k \int_{\partial\Omega_{i,k}} \left(\phi_{F_{i,k}} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{F_{i,k}}) \cdot (\nabla\phi)_{F_{i,k}} \right) d\mathbf{S}_k \\ &=^{(2)} \sum_k \mathbf{S}_k \phi_{F_{i,k}} = \sum_k \partial\Omega_{i,k} \phi_{F_{i,k}} \end{aligned}$$

dove $\partial\Omega_{i,k}$ sono le facce del volume di controllo Ω_i e $\mathbf{x}_{F_{i,k}}$ è il centro della rispettiva faccia individuato imponendo

$$\int_{\partial\Omega_{i,k}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{F_{i,k}}) d\mathbf{S}_k = 0$$

da cui vale (2).

Notiamo inoltre che la prima uguaglianza è ottenuta decomponendo l'integrale di superficie nella somma degli integrali sulle facce.

Possiamo individuare tre schemi numerici utilizzati per valutare la variabile considerata sulle facce del volume di controllo:

- *Upwind Differencing*: interpolazione *upwind*, determina il valore di ϕ sulla faccia in base alla direzione del flusso, questo schema soddisfa le proprietà di limitatezza a discapito dell'accuratezza;
- *Central Differencing*: interpolazione centrata, questo schema è accurato al second'ordine ma non garantisce la limitatezza;
- *Blended Differencing*: interpolazione mista, combina gli schemi precedenti al fine di preservare la limitatezza garantendo anche un buon livello di accuratezza.

A titolo esemplificativo mostriamo ora come vengono discretizzati i termini convettivi, diffusivi e di sorgente.

Discretizzazione del termine convettivo

Il termine convettivo che compare nell'equazione (4.1) ha la seguente forma:

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{U}) dV$$

che applicando il teorema di Gauss, come abbiamo visto, diventa un integrale di superficie, che a sua volta può essere riscritto come somma degli integrali sulle facce:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_i} (\rho \phi \mathbf{U}) \cdot \mathbf{S} &= \sum_k \int_{\partial\Omega_{i,k}} (\rho \phi \mathbf{U}) \cdot d\mathbf{S} \\ &\approx \sum_k (\rho \phi \mathbf{U})_{F_{i,k}} \cdot \mathbf{S}_k \\ &= \sum_k (\mathbf{S}_k \cdot (\rho \mathbf{U})_{F_{i,k}}) \phi_{F_{i,k}} = \sum_k \Psi_{F_{i,k}} \phi_{F_{i,k}} \end{aligned}$$

dove $\Psi_{F_{i,k}}$ rappresenta il flusso volumetrico che attraversa la faccia $\partial\Omega_{i,k}$ e $\phi_{F_{i,k}}$ viene valutato utilizzando uno degli schemi precedentemente citati.

Discretizzazione del termine diffusivo

Analogamente a quanto visto per il termine convettivo valgono le seguenti uguaglianze per il termine diffusivo:

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV = \int_{\partial\Omega_i} (\Gamma \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} = \sum_k \int_{\partial\Omega_{i,k}} (\Gamma \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}$$

che, approssimando l'integrale sulle facce, può essere riscritto come

$$\sum_k \int_{\partial\Omega_{i,k}} (\Gamma \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} \approx \sum_k \mathbf{S}_k \cdot (\Gamma \nabla \phi)_{F_{i,k}} = \sum_k \Gamma_{F_{i,k}} \mathbf{S}_k \cdot (\nabla \phi)_{F_{i,k}}$$

i termini $\Gamma_{F_{i,k}}$ e $(\nabla \phi)_{F_{i,k}}$ devono essere approssimati a partire dal valore del centroide.

Discretizzazione del termine di sorgente

Il termine di sorgente può essere una funzione di spazio e tempo, della stessa ϕ e di altre variabili. Viene solitamente approssimato con una linearizzazione della funzione sorgente rispetto a ϕ come segue:

$$\int_{\Omega_{P_i}} S(\phi) dV = (S_{C_i} + S_{P_i} \phi_{P_i}) \Omega_i$$

dove S_{C_i} è la parte costante e $S_{P_i} = \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi}$.

4.3.1 Il metodo Volume Of Fluid

Come già anticipato in precedenza possiamo descrivere il comportamento di acqua e aria, se considerate separatamente, grazie alle equazioni di Navier-Stokes, formulate attorno al 1830. Queste equazioni sono date dall'unione delle tre equazioni che descrivono le leggi di conservazione relative al flusso di un fluido, cioè :

- conservazione della massa

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0; \quad (4.4)$$

- conservazione del momento

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{U}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) + \nabla \cdot p = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho g; \quad (4.5)$$

- conservazione dell'energia

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \nabla \cdot (E \mathbf{U} + p \mathbf{U}) = \nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{T} - q) + \rho \mathbf{U} \cdot g. \quad (4.6)$$

dove \mathbf{U} rappresenta la velocità di flusso, \mathbf{T} il tensore degli sforzi, ρ la densità e p la pressione.

Se supponiamo inoltre che gli effetti della temperatura siano trascurabili non consideriamo la legge di conservazione dell'energia interna.

Queste equazioni, grazie al fatto che la funzione momento è continua su tutto il volume, sono sempre verificate su un dominio su cui sia presente un solo fluido, devono invece essere modificate se si considera un flusso multifase.

Consideriamo un dominio in cui siano presenti due fluidi immiscibili, ad esempio acqua e aria. Questi due fluidi possono essere considerati incomprimibili, cioè la loro densità rimane invariata per tutto lo spazio e per tutti i tempi, quindi il suo valore cambia bruscamente attraversando la superficie libera.

Le osservazioni relative alla densità ci permettono di riscrivere in forma più semplice l'equazione di conservazione della massa (4.4)

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4.7)$$

abbiamo quindi che la velocità \mathbf{U} è una funzione continua attraverso il dominio e la superficie libera, chiamiamo dunque (4.7) equazione di continuità di fase.

Poiché la densità presenta una discontinuità lungo la superficie libera, abbiamo che anche la funzione del momento non è continua e, per questo motivo, l'equazione (4.5) non può essere utilizzata.

Per poter riscrivere il bilancio del momento in modo adeguato a descrivere un flusso multifase, risulta quindi necessario introdurre un nuovo metodo per trattare la superficie libera e rendere continua e differenziabile la funzione momento.

Il metodo VOF (acronimo di *Volume of Fluid*) è un metodo di discretizzazione utilizzato nelle simulazioni di fluidi multifase che permette di superare la problematica appena proposta.

Questo metodo si basa sull'introduzione di una funzione indicatrice $\mathcal{I}(x, t)$, che permette di capire che fluido è presente in ogni cella, e se nella cella sono presenti entrambi.

Supponiamo di indicare con \mathcal{R}_l la fase liquida e con \mathcal{R}_g quella gassosa, la funzione indicatrice è descritta da

$$\mathcal{I}(x, t) = \begin{cases} 1 & x \in \mathcal{R}_l \text{ al tempo } t \\ 0 & x \in \mathcal{R}_g \text{ al tempo } t \end{cases}$$

Questa funzione ci permette di introdurre la cosiddetta frazione di fase

$$\alpha(x_i, t) = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \mathcal{I}(x, t) dV$$

dove Ω_i indica una cella computazionale.

La funzione α appena introdotta assumerà dunque i seguenti valori

$$\alpha(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{gas;} \\ 0 < \alpha < 1 & \text{interfaccia;} \\ 1 & \text{liquido.} \end{cases}$$

Nel metodo volume of fluid vengono risolte contemporaneamente l'equazione di continuità e l'equazione del momento che riportiamo qui per semplicità espositiva

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4.8)$$

e

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho g. \quad (4.9)$$

A queste equazioni aggiungiamo l'equazione del trasporto per α :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\alpha) = 0. \quad (4.10)$$

Grazie a questo metodo possiamo quindi individuare la superficie libera tra liquido e gas.

I due fluidi immiscibili considerati, vengono trattati come un unico fluido, dunque le proprietà fisiche di questo fluido sono pari alle proprietà dei singoli fluidi nelle zone in cui è presente uno solo di essi, mentre lungo l'interfaccia sono calcolate facendo la media ponderata in base alla distribuzione della frazione di fase.

In particolare la formula utilizzata per la densità è la seguente:

$$\rho = \rho_l \alpha + \rho_g (1 - \alpha)$$

valida anche per le altre proprietà fisiche sostituendo a ρ_l , densità del liquido, e a ρ_g , densità del gas, rispettivamente il valore della proprietà fisica studiata per il liquido e per il gas.

Uno degli aspetti critici di questo metodo è costituito dal fatto che non sono sempre garantite la limitatezza e la conservazione della frazione di fase³. Dei

³Alcuni schemi numerici portano a valori della frazione di fase maggiori dell'unità o minori di zero, cioè la frazione di fase non è conservata nel passaggio da una cella all'altra.

vari tentativi messi in atto per ovviare a questa problematica, descriviamo ora una delle possibili modifiche apportabili al metodo appena descritto. Supponiamo che la velocità del liquido e quella del fluido contribuiscano all'evoluzione della superficie libera in modo proporzionale alla frazione di fase corrispondente e definiamo anche la velocità come una grandezza mediata cioè:

$$\mathbf{U} = \alpha \mathbf{U}_l + (1 - \alpha) \mathbf{U}_g$$

Riscriviamo quindi l'equazione del trasporto per la frazione di fase (4.10):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \{[\alpha \mathbf{U}_l + (1 - \alpha) \mathbf{U}_g] \alpha\} = 0$$

ponendo $\mathbf{U}_g = \mathbf{U}_l - \mathbf{U}_r$, con \mathbf{U}_r velocità relativa, l'equazione diventa:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \{[\mathbf{U}_l - (1 - \alpha) \mathbf{U}_r] \alpha\} = 0.$$

Riordinando i termini abbiamo:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}_l \alpha) - \nabla \cdot [(1 - \alpha) \alpha \mathbf{U}_r] = 0$$

dove la somma dei primi due termini rappresenta l'equazione del trasporto per la velocità del liquido ed è quindi nulla, da cui anche il terzo termine risulta essere nullo e lo aggiungiamo all'equazione del trasporto per α (4.10)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \alpha) + \nabla \cdot [(1 - \alpha) \alpha \mathbf{U}_r] = 0.$$

Il termine aggiunto è privo di significato per quanto riguarda la formulazione continua ma permette di comprimere l'interfaccia nella formulazione discreta, soprattutto quando questa non è particolarmente precisa.

4.4 Il solutore interFoam

Per il nostro studio abbiamo utilizzato `interFoam`, solutore di OpenFOAM, descritto nel file `interFoam.C`⁴

⁴Solutore per due fluidi incomprimibili, isotermi e immiscibili che utilizza un'approccio VOF per catturare l'interfaccia, basato su una frazione di fase.

Il momento e le altre proprietà del fluido sono combinate ed è risolta un'unica equazione del momento.

Il modello per la turbolenza è generico e deve essere selezionato, ad esempio laminare, RAS o LES.

```
Solver for 2 incompressible , isothermal immiscible fluids
using a VOF (volume of fluid) phase-fraction based interface
capturing approach.
```

```
The momentum and other fluid properties are of the "mixture"
and a single momentum equation is solved.
```

```
Turbulence modelling is generic , i.e. laminar , RAS or LES
may be selected.
```

Listing 4.1: `interFoam.C`

Questo file contiene tutte le informazioni relative al funzionamento di `interFoam`, comprendere come lavora risulta utile anche per poter individuare gli errori nel caso in cui il solutore si blocchi.

I passaggi principali affrontati da questo applicativo sono⁵:

- Inizializzazione delle variabili attraverso il dominio e adattamento degli step temporali in base alle richieste del numero di Courant⁶;
- Soluzione dell'equazione per la frazione di fase e correzione delle proprietà fisiche dei fluidi;
- Entrata nel ciclo PIMPLE⁷ e risoluzione dell'equazione del momento considerando la pressione calcolata allo step temporale precedente;
- La nuova soluzione della pressione si basa sul ciclo di correzione della pressione e la velocità di campo viene aggiornata. Il ciclo ricomincia dall'inizio;

⁵Per approfondire consultare l'Appendice A.

⁶La condizione di Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) è una condizione necessaria per la convergenza nella risoluzione numerica di alcune equazioni alle derivate parziali. Se consideriamo, ad esempio, un'onda che si propaga su una griglia di calcolo discreta, è necessario che l'intervallo temporale sia inferiore al tempo necessario all'onda per attraversare due punti adiacenti della griglia, cioè

$$\frac{\mathbf{u}\Delta t}{\Delta x} \leq C$$

con \mathbf{u} velocità di flusso.

Il valore del numero di Courant C varia in base al metodo di discretizzazione utilizzato, in particolare a seconda che questo sia implicito o esplicito.

⁷Algoritmo ottenuto dalla combinazione degli algoritmi PISO (*Pressure Implicit with Splitting of Operator*) e SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*)

come possiamo vedere dal seguente diagramma di flusso:

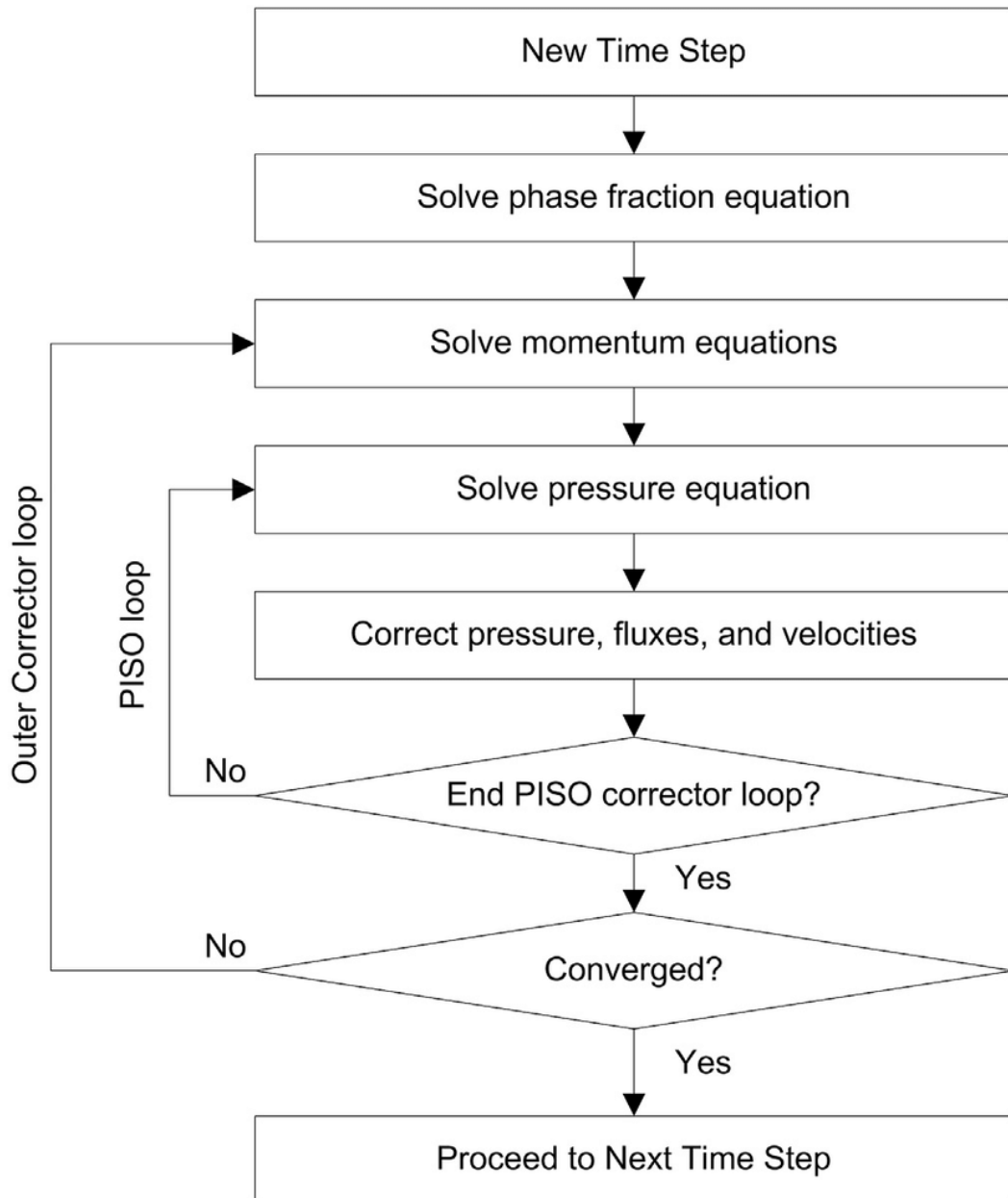


Figura 4.1: *Flow chart di interFoam*

Possiamo però notare dai file richiamati in `interFoam.C` che rispetto all'equazione (4.9) viene modificata la definizione di pressione.

La pressione che compare nell'equazione del momento è la pressione statica⁸. Questa pressione ha una componente idrostatica che dipende dalla posizione della cella e risulta quindi problematica per l'impostazione delle condizioni al contorno. Viene dunque definita una nuova variabile

$$p_{rgh} = p - \rho gh$$

detta pressione di contatto statico⁹.

Risulta ora possibile definire condizioni al contorno che non dipendono da dove sia un fluido piuttosto che un altro.

Viene quindi riscritto il gradiente della pressione e inserito nell'equazione (4.9).

Per completezza riportiamo quindi tutte le equazioni risolte da `interFoam.C` nella forma in cui compaiono nel solutore:

Equazioni fondamentali:

Equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$$

Equazione del momento

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\nabla p_{rgh} - \nabla \rho gh + \nabla \cdot \mu \nabla \mathbf{U} + f_b \quad (4.11)$$

Equazione del trasporto per α

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} \alpha + \nabla \cdot (\mathbf{U}_r \alpha (1 - \alpha)) = 0$$

Equazioni costitutive:

Proprietà fisiche

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_l \alpha + \rho_g (1 - \alpha) \\ \mu &= \mu_l \alpha + \mu_g (1 - \alpha) \end{aligned}$$

Il ciclo PIMPLE richiama i file `UEqn.H` e `pEqn.H`. Questi due file implementano e risolvono rispettivamente l'equazione del momento e l'equazione della pressione.

In `UEqn.H` l'equazione del momento, corrispondente a (4.11) è riportata dal seguente codice:

⁸Ovvero la reale pressione del fluido, associata non con il suo moto ma con il suo stato.

⁹Questa pressione dipende solo dalle forze di contatto o di superficie, viene eliminato il contributo della gravità.

```

fvVectorMatrix UEqn
(
    fvm::ddt(rho, U) + fvm::div(rhoPhi, U)
    + MRF.DDt(rho, U)
    + turbulence->divDevRhoReff(rho, U)
    ==
    fvOptions(rho, U)
);

```

Listing 4.2: UEqn.H

dove ϕ rappresenta il flusso $\phi = \rho \mathbf{U}$.

Il termine `fvOptions` ci permette di aggiungere alle equazioni di governo nuovi termini sorgente.

La velocità ricavata risolvendo questa equazione risulta essere un'approssimazione, per questo motivo questa fase è definita "*momentum predictor*".

L'equazione della pressione viene implementata e risolta come descritto nel file `pEqn.H`, in particolare la pressione viene valutata risolvendo un'equazione di Laplace,

```

while (pimple.correctNonOrthogonal())
{
    fvScalarMatrix p_rghEqn
    (
        fvm::laplacian(rAUf, p_rgh) == fvc::div(phiHbyA)
    );

    p_rghEqn.setReference(pRefCell, getRefCellValue(p_rgh,
    pRefCell));

    p_rghEqn.solve(mesh.solver(p_rgh.select(pimple.finalInnerIter
    ()))));

```

e in seguito viene calcolato il campo della velocità

```

if (pimple.finalNonOrthogonalIter())
{
    phi = phiHbyA - p_rghEqn.flux();

    p_rgh.relax();

    U = HbyA + rAU*fvc::reconstruct((phiH-p_rghEqn.flux())/rAUf);
    U.correctBoundaryConditions();
    fvOptions.correct(U);
}

```

a cui vengono apportate alcune correzioni

```
#include "continuityErrs.H"

p == p_rgh + rho*gh;

if (p_rgh.needReference())
{
    p += dimensionedScalar
    (
        "p",
        p.dimensions(),
        pRefValue - getRefCellValue(p, pRefCell)
    );
    p_rgh = p - rho*gh;
}
```

Possiamo quindi individuare tre *step* principali:

- **Momentum predictor** l'equazione del momento viene risolta considerando il valore assunto dalla pressione nell'intervallo temporale precedente;
- **Pressure solution** la velocità prevista è utilizzata per trovare il campo della pressione necessario a rendere quella velocità un campo solenoidale nell'intervallo temporale corrente;
- **Velocity correction** il gradiente della pressione è aggiunto alla velocità prevista al fine di trovare il corretto campo di velocità.

Una volta terminato, il ciclo è pronto per ricominciare e, a partire dal campo di pressione dello *step* temporale precedente, viene calcolato il nuovo campo di velocità relativo allo *step* temporale corrente.

Capitolo 5

Struttura del case e analisi dei dati

Per questo studio abbiamo applicato il solutore `interFoam` al modello `waveExampleSolitary`, opportunamente modificato, che fa parte dei tutorial standard di OpenFOAM, contenuti nella cartella "multiphase"¹.

Tutti i tutorial presentano la medesima struttura di base. Ogni caso studio è composto da una cartella che contiene tutte le informazioni necessarie alla risoluzione del problema e dove il programma, mentre esegue i calcoli, crea le cartelle con i risultati².

In questo caso specifico la directory `constant` contiene i file `g`, `transportProperties`, `turbulenceProperties` e `waveProperties`. Questi file contengono i valori delle costanti che dobbiamo inserire nelle equazioni riportate nel paragrafo 4.4.

Il primo file, `g`, riporta le caratteristiche del campo gravitazionale che agisce in tutto il dominio di riferimento. L'accelerazione di gravità g è rappresentata da un vettore con direzione verticale, il cui valore e dimensioni vengono indicati nel codice:

<code>dimensions</code>	<code>[0 1 -2 0 0 0 0];</code>
<code>value</code>	<code>(0 0 -9.81);</code>

da cui³ $g = -9.81 \text{ m/s}^2$.

¹Questa cartella raccoglie i tutorial relativi all'interazione tra due o più fluidi.

²Per approfondire consultare l'Appendice B.

³In OpenFOAM le dimensioni di una variabile vengono specificate utilizzando sette scalari posti tra parentesi quadre; ogni posizione rappresenta una grandezza specifica e lo scalare riportato indica la potenza dell'unità di misura corrispondente. Le grandezze e le loro rispettive unità di misura nell'ordine sono: massa (kg), lunghezza (m), tempo (s),

Nel secondo file, `transportProperties`, vengono specificate le caratteristiche dei fluidi presi in esame, utilizzate dal solutore per studiare l'interazione tra aria ed acqua. Tali caratteristiche dei fluidi vengono assegnate come è possibile vedere qui di seguito:

```
phases (water air);

water
{
    transportModel  Newtonian;
    nu              1e-06;
    rho            1000;
}

air
{
    transportModel  Newtonian;
    nu              1.48e-05;
    rho            1;
}

sigma            0.07;
```

Listing 5.1: `transportProperties`

In particolare *nu* rappresenta la viscosità cinematica del mezzo, mentre *rho* la densità; *sigma* è, invece, la tensione superficiale tra i due fluidi.

Il terzo file, `turbulenceProperties`, determina che la simulazione è di tipo laminare: il flusso, quindi, sarà privo di turbolenza.

Nel file `waveProperties` vengono, infine, definite le caratteristiche in entrata e in uscita dal dominio dell'onda che il programma andrà a riprodurre.

```
{
    inlet
    {
        alpha            alpha.water;

        waveModel        Boussinesq;

        nPaddle          1;

        waveHeight        0.3;
```

temperatura (K), peso molecolare (kgmol), corrente (A) e intensità luminosa (cd).

```

    waveAngle      0.0;

    activeAbsorption yes;

    wavePeriod     0.0;
}

outlet
{
    alpha          alpha.water;

    waveModel      shallowWaterAbsorption;

    nPaddle       1;
}

```

Listing 5.2: waveProperties

L'onda in entrata viene generata utilizzando le equazioni di Boussinesq. L'ampiezza dell'onda impostata nel modello è 0.3⁴ e l'angolo di incidenza con la superficie di ingresso del dominio è pari a 0 e questo indica che l'onda è perfettamente ortogonale alla stessa superficie di ingresso. Il periodo è nullo. In uscita è indicato un modello di assorbimento di tipo shallowWater.

Il modello delle equazioni di Boussinesq è descritto nel file `BoussinesqWaveModel.C` da cui possiamo ricavare in forma dimensionalizzata le equazioni che abbiamo ottenuto, in forma adimensionale, nel paragrafo 3.2.1.

```

scalar C = sqrt(mag(g_)*(H + h));
scalar ts = 3.5*h/sqrt(H/h);
scalar aux = sqrt(3.0*H/(4.0*h))/h;
scalar Xa = -C*t + ts - X0 + x*cos(theta) + y*sin(theta);

return H*1.0/sqr(cosh(aux * Xa));

```

Listing 5.3: BoussinesqWaveModel.C

Le equazioni rappresentate dal codice sono le seguenti

- $C = \sqrt{g(H + h)}$;

⁴In questo studio assegneremo valori diversi a questo parametro per studiare la propagazione di onde di ampiezza differente.

- $ts = \frac{7}{2}h\sqrt{\frac{h}{H}}$;
- $aux = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{3H}{4h}}$;
- $Xa = -C * t + ts - X0 + x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$;
- $\eta = \frac{H}{\cosh^2(aux * Xa)}$.

Confrontando queste equazioni con quelle riportate nel paragrafo [3.2.1](#) possiamo supporre che $H = a$ ampiezza dell'onda e $h = h_0$ profondità dell'acqua all'istante iniziale e possiamo quindi notare che la prima equazione corrisponde proprio alla relazione per la velocità ricavata da Russell.

Per passare dall'ultima relazione alla sua corrispondente adimensionale ([3.19](#)) osserviamo che Xa rappresenta la dipendenza del punto dallo spazio e dal tempo e possiamo dunque riscrivere l'equazione come $Xa = x - ct$.

Sostituendo quindi nell'equazione di η le equazioni di Xa e aux abbiamo⁵:

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{h} \sqrt{\frac{3H}{4h}} (x - ct) \right).$$

Da cui, grazie alle osservazioni precedenti, ponendo $K = h^3$, e poiché, come osservato nel paragrafo [3.2.1](#), la corrispondente adimensionale della velocità di propagazione $c = \sqrt{g(a + h_0)}$ è proprio $1 + \frac{1}{2}\epsilon a$, avremo che

$$H \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{h} \sqrt{\frac{3H}{4h}} (x - ct) \right) = a \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{3a}{4K}} \left(x - \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon a \right) t \right) \right)$$

Un altro aspetto fondamentale di questo genere di simulazioni è l'impostazione delle condizioni al bordo delle variabili considerate.

Determinare le condizioni al contorno risulta un aspetto essenziale poiché la soluzione delle equazioni differenziali implementate nel modello numerico è strettamente legata ad esse. Generalmente, le variabili dipendenti sono introdotte nelle equazioni algebriche relative ad una cella in base ai valori assunti nelle celle adiacenti. Questo però non accade quando consideriamo una cella

⁵ $\operatorname{sech}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

posizionata al bordo del dominio e, per questo motivo, è necessario imporre preliminarmente delle condizioni in tali celle.

Queste condizioni sono determinate nei file `U`, `p_rgh`, `alpha.water`, relativi ciascuno ad una variabile significativa e contenuti nella cartella `0.orig`.

Possiamo individuare tre tipologie di condizioni al contorno: le condizioni di *Dirichlet* assegnano alle celle poste al bordo del dominio computazionale il valore della variabile, parliamo quindi di condizioni *fixed value*; le condizioni di *Neumann* impongono il valore della componente normale del gradiente della variabile al bordo, vengono quindi dette condizioni *fixed gradient*; la terza tipologia è data da una combinazione delle precedenti parliamo quindi di *condizioni miste*.

Nella seguente tabella sono riportate le condizioni al bordo impostate nel nostro studio:

Variabile	Patches			
	Inlet	Outlet	Top	Ground
U	waveVelocity	waveVelocity	pressureInletOutlet	fixedValue
p_rgh	fixedFluxPressure	fixedFluxPressure	totalPressure	fixedFluxPressure
alpha.water	waveAlpha	zeroGradient	inletOutlet	zeroGradient

Lungo le pareti (*sides*) si ha una condizione di tipo *empty* per tutte le variabili, cioè lungo tali superfici la soluzione non viene studiata.

Possiamo quindi analizzare il significato di ciascuna delle condizioni:

- **waveVelocity**: condizione di entrata e uscita per la velocità;
- **fixedFluxPressure**: modifica il gradiente di pressione affinché il flusso alla frontiera sia compatibile con le condizioni al contorno per la velocità;
- **waveAlpha**: condizione di entrata per la frazione di fase α ;
- **zeroGradient**: impone che la componente del gradiente della proprietà considerata normale al bordo sia nulla ai bordi del dominio;
- **pressureInletOutlet**: condizione associata alla pressione sul bordo del dominio quando questa è specificata;
- **totalPressure**: fornisce una condizione di pressione totale;
- **inletOutlet**: condizione associata ad una condizione **zeroGradient** per le quantità abbinate al flusso in uscita e ad un valore fissato in entrata;

- **fixedValue:** permette di assegnare sul bordo il valore di una certa quantità ed è la base per altre condizioni al contorno.

Il calcolatore utilizzato per lo svolgimento delle simulazioni è stato gentilmente messo a disposizione dalla sede di Pisa dell'Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia. In particolare, le simulazioni in due dimensioni sono state eseguite in parallelo su 6 processori mentre quelle tridimensionali su 24 processori. Al termine delle simulazioni è stato quindi necessario riunire i dati elaborati separatamente da ogni processore.

Per eseguire una simulazione in parallelo su più processori OpenFOAM scompone il dominio, e quindi la sua geometria e i campi, su più processori e dopo il *running* delle applicazioni ricompone i dati contenuti nelle cartelle di ciascun processore per avere un unico risultato finale.

Per la renderizzazione grafica dei risultati è stato utilizzato il software ParaView, un programma *open source* per la visualizzazione scientifica interattiva che sfrutta le librerie *Visualisation Toolkit* (VTK) per l'elaborazione digitale delle immagini, la visualizzazione scientifica e la grafica 3D.

5.1 Simulazioni in due dimensioni

5.1.1 Propagazione di un'onda solitaria su fondo piatto

La *mesh* utilizzata in questo lavoro di tesi è quella presente nel *tutorial*, ingrandita e raffinata nella fascia centrale interessata dal passaggio dell'onda. La griglia di dominio risulta quindi essere un parallelepipedo di lunghezza 20 e di altezza 1.5 formato da sei blocchi, due dei quali maggiormente raffinati lungo le x .

Al tempo $t = 0$ l'interfaccia è posizionata parallelamente all'asse delle ascisse, e quindi al fondo, e si trova in stato di quiete. Il dominio computazionale è occupato per metà da acqua e per l'altra metà da aria, l'altezza dell'interfaccia è dunque a metà rispetto alle z considerate.

In figura è mostrata una parte della *mesh* ingrandita per poter visualizzare la fascia più raffinata

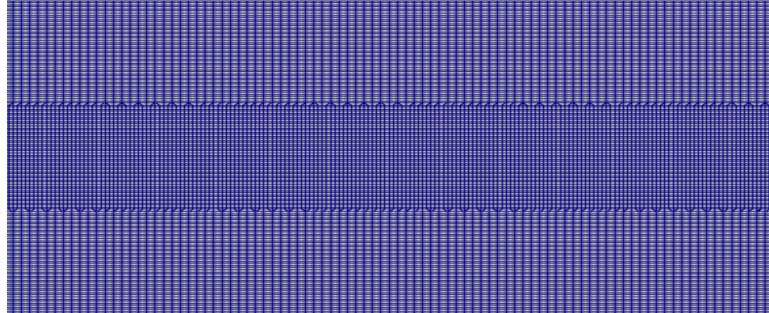


Figura 5.1: *Visualizzazione della fascia più raffinata del dominio computazionale*

Lo studio è stato condotto mantenendo sempre le stesse condizioni al bordo e gli stessi valori dei parametri e variando solo il valore dell'ampiezza dell'onda, a cui sono stati assegnate le seguenti misure [0.01 , 0.04 , 0.06 , 0.08 , 0.10 , 0.13 , 0.16 , 0.22 , 0.25].

Validazione dei dati

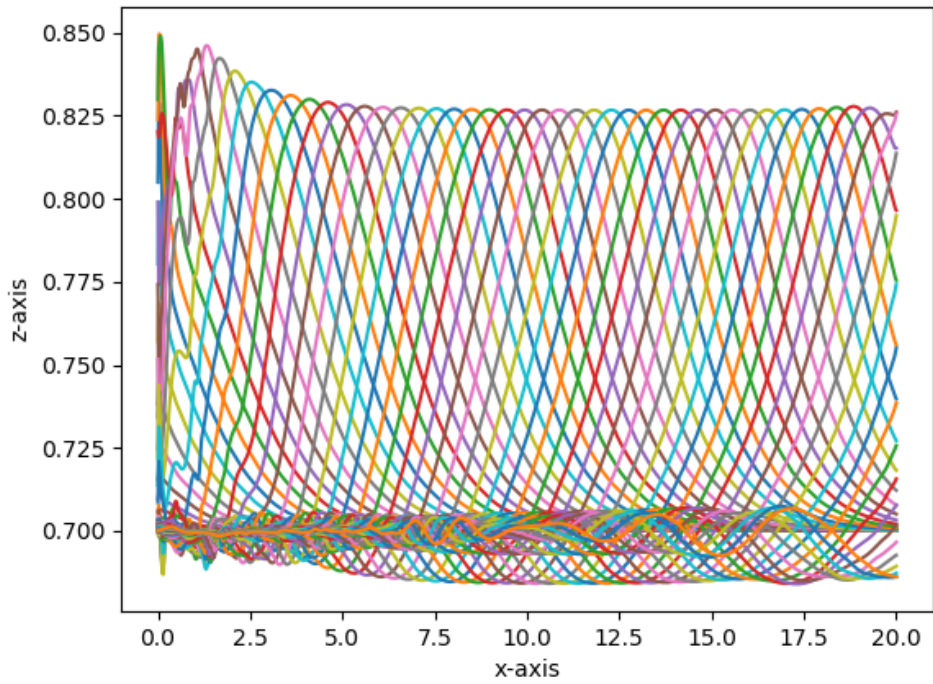
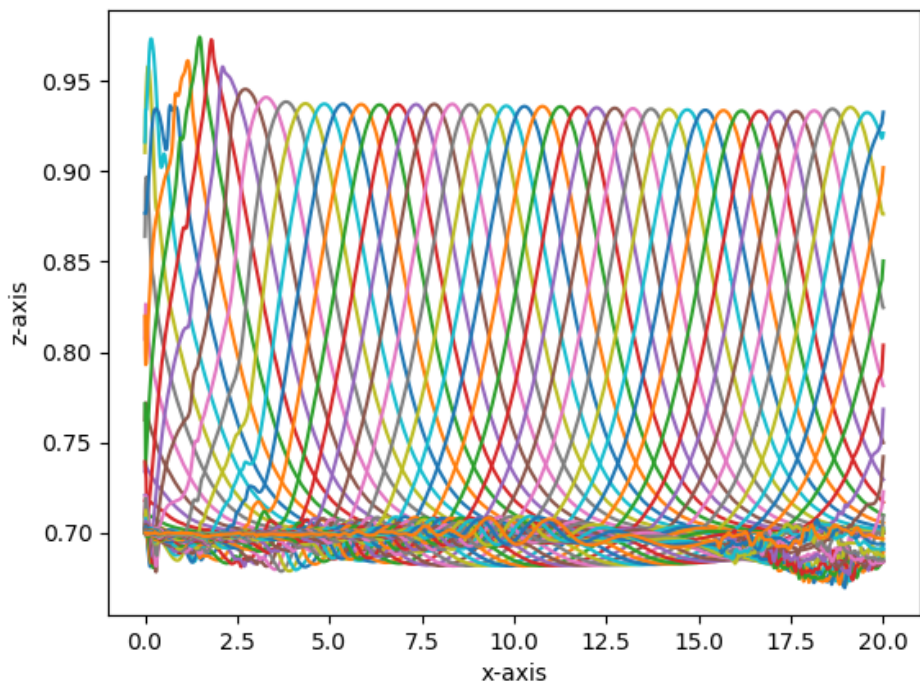
Per valutare la bontà dell'impostazione del caso abbiamo confrontato i risultati ottenuti con i dati analitici in nostro possesso, ricavati nei capitoli precedenti grazie ai calcoli svolti. In particolare abbiamo analizzato i seguenti aspetti:

- il mantenimento della forma dell'onda;
- il legame tra ampiezza e forma dell'onda;
- il rapporto tra la velocità di propagazione e l'ampiezza dell'onda.

Utilizzando ParaView abbiamo ottenuto un file per ogni frazione temporale della soluzione, ciascuno contenente i dati relativi alla velocità, densità e posizione di ogni punto dell'interfaccia in quell'istante temporale.

Osservazioni relative alla forma dell'onda

Sulla base dei dati relativi alla posizione di interfaccia così ottenuti è stato predisposto un programma, in linguaggio Python, con il quale viene tracciato il grafico della forma che l'onda presenta ogni 5 tempi della simulazione. Quelli riportati in figura [5.2](#) ad esempio, raffigurano due onde di ampiezza rispettivamente $a = 0.13$ e $a = 0.22$,

(a) *Onda di ampiezza 0.13*(b) *Onda di ampiezza 0.22*Figura 5.2: *In figura il grafico di due onde di ampiezza differente*

Dai grafici precedenti possiamo osservare che l'onda, eccetto che negli istanti iniziali, probabilmente a causa di qualche problema a livello numerico, mantiene la sua forma, caratteristica essenziale dell'onda solitaria come descritto nel paragrafo [5.1.1](#).

Legame ampiezza - forma dell'onda

Confrontando i grafici possiamo inoltre osservare che la forma dell'onda dipende strettamente dalla sua ampiezza, come confermato anche dall'equazione [\(3.19\)](#).

Per evidenziare questa dipendenza, consideriamo ora le onde di minore e maggiore ampiezza utilizzate nelle simulazioni, cioè le onde di ampiezza rispettivamente $a = 0.01$ e $a = 0.25$, delle quali riportiamo il grafico della forma dell'onda in un dato istante [6](#).

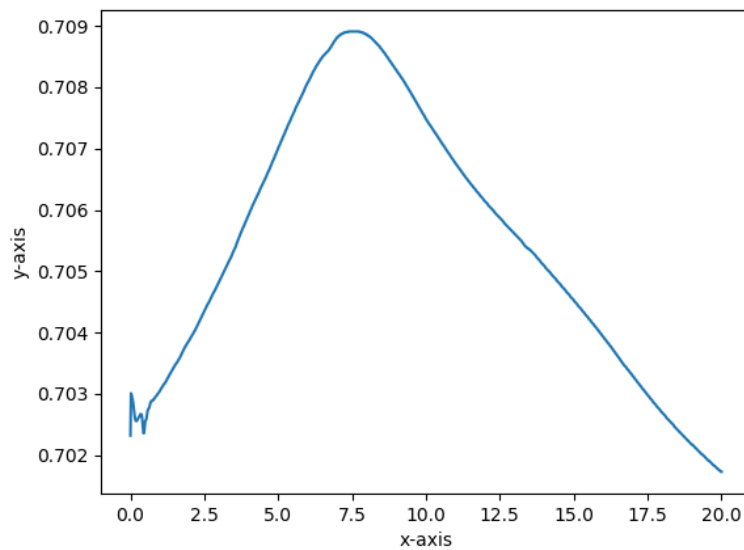
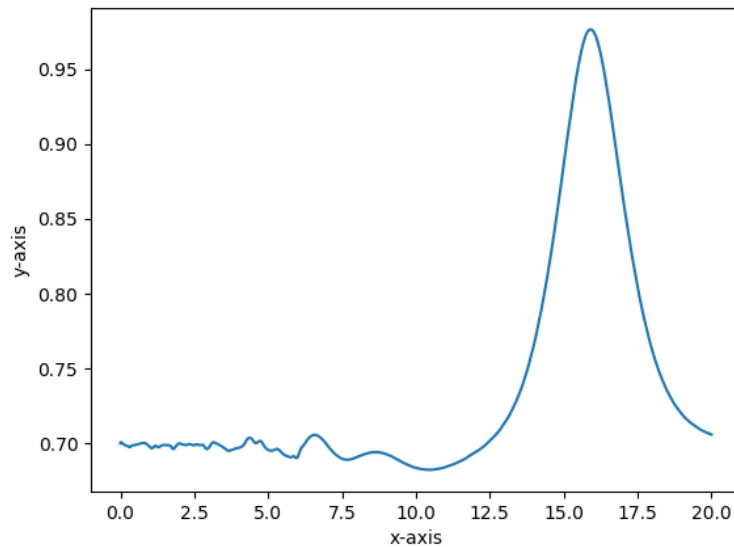


Figura 5.3: *Onda di ampiezza 0.01*

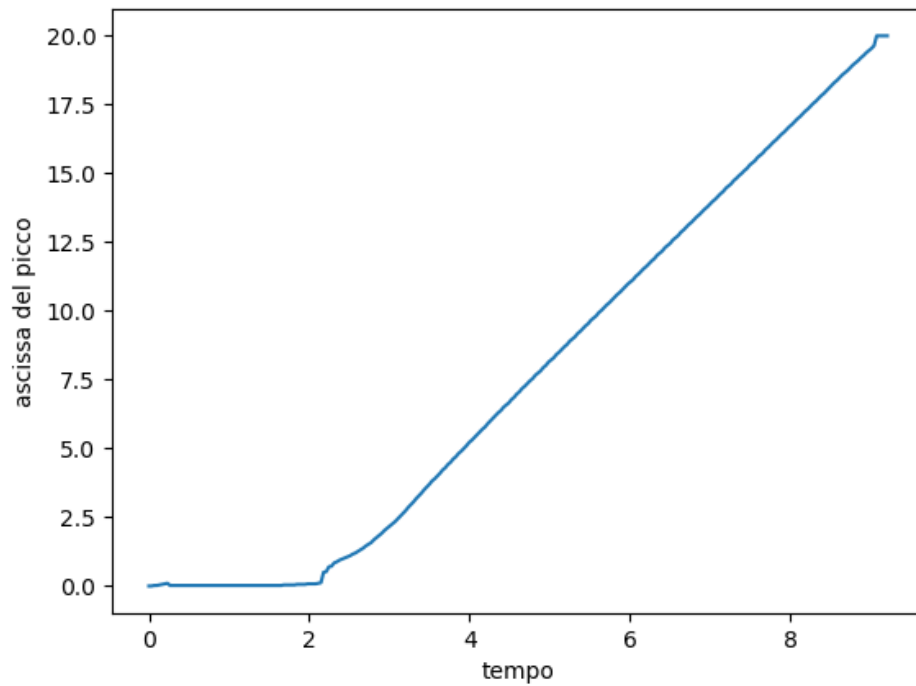
⁶Risulta necessario considerare le due forme dell'onda in due istanti differenti perché, come vedremo successivamente, la velocità dell'onda varia al variare dell'ampiezza e per questo motivo, l'onda di minore ampiezza da noi considerata non è ancora totalmente entrata nel dominio, quando quella di maggiore ampiezza considerata inizia già ad uscire dal dominio computazionale. Per questa ragione non ci è possibile individuare un istante in cui tutte e due le onde siano ben visibili all'interno del dominio.

Figura 5.4: *Onda di ampiezza 0.25*

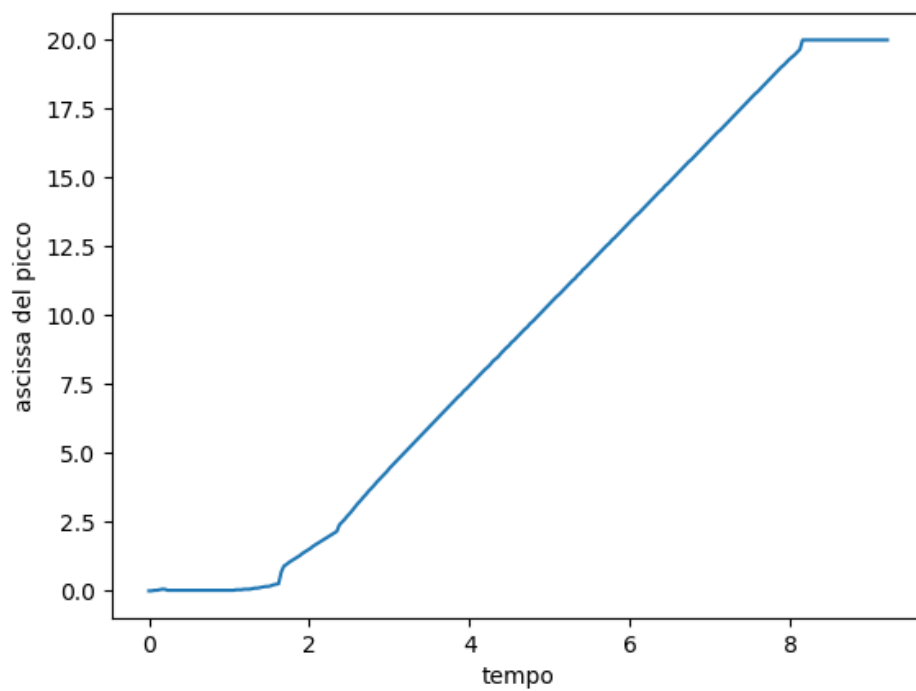
Dalle figure riportate sopra osserviamo che, avendo mantenuto invariati gli altri parametri caratteristici dell'onda, quella delle due di minore ampiezza risulterà essere caratterizzata da una superficie più arrotondata, mentre quella di ampiezza maggiore da una superficie più appuntita; queste osservazioni concordano sia con le osservazioni di Russell, che con i calcoli svolti nel paragrafo , dove è già emerso che l'onda di massima ampiezza presenta una cresta affilata.

Spostamento del picco

Osservando il picco dell'onda, possiamo notare che questo percorre distanze uguali in intervalli di tempo uguali, cioè lo spostamento del picco è una funzione lineare rispetto al tempo. Grazie ad un altro programma scritto in linguaggio Python e, utilizzando nuovamente i dati in nostro possesso, abbiamo tracciato il grafico dello spostamento dell'ascissa del picco in funzione del tempo, che conferma quanto appena osservato.



(a) *Spostamento del picco di un'onda di ampiezza 0.13*



(b) *Spostamento del picco di un'onda di ampiezza 0.22*

Figura 5.5: *Grafico della posizione del picco di due onde di ampiezza differente in funzione del tempo*

Da questi due grafici possiamo inoltre osservare che la pendenza delle due rette è differente, anche questo riporta la nostra attenzione alla dipendenza della velocità di propagazione dall'ampiezza.

Ampiezza e velocità di propagazione

Consideriamo la propagazione di tre onde di ampiezze diverse nello stesso dominio e con le stesse condizioni sia iniziali, che al bordo. Visualizzando le tre simulazioni contemporaneamente tramite ParaView e fermandole nello stesso istante si ha:

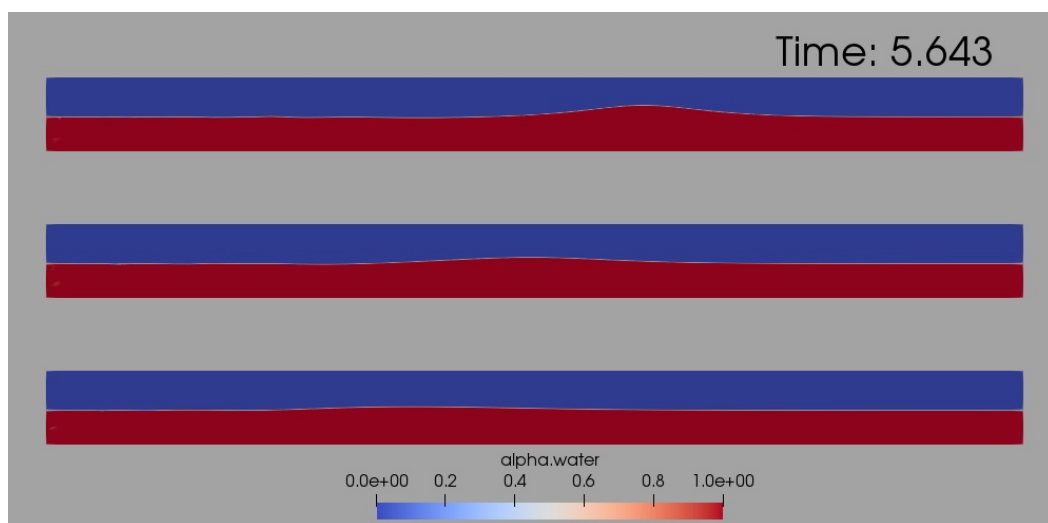


Figura 5.6: Visualizzazione di tre onde di ampiezza $a=0.22, 0.13, 0.08$ al tempo $t=5.643$

Possiamo quindi notare che l'onda di ampiezza $a = 0.22$ ha percorso una distanza maggiore rispetto alle altre due onde di ampiezza inferiore.

Considerando una sezione dei tre domini e tracciando solo l'interfaccia possiamo sovrapporre le tre onde per evidenziare meglio il fatto che, trascorso il medesimo intervallo di tempo, queste si trovano in tre posizioni differenti:



Figura 5.7: Sovrapposizione di tre onde di ampiezza diversa al tempo $t=5.643$

I dati contenuti nei file *.csv creati tramite ParaView sono stati analizzati utilizzando un programma scritto in Python per calcolare la velocità media di propagazione di ogni onda. Tracciando il grafico (ampiezza, velocità) abbiamo confrontato i risultati numerici con la relazione velocità-ampiezza osservata da Russell

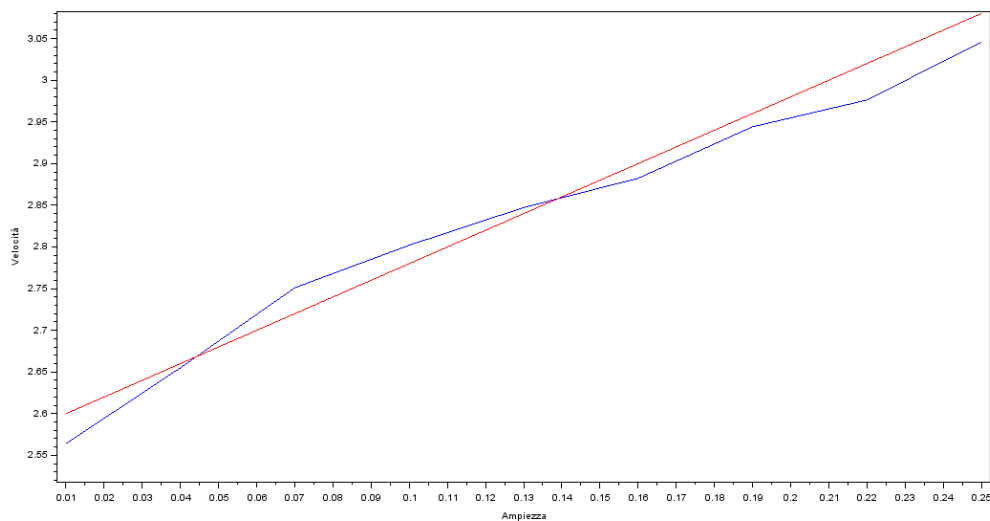


Figura 5.8: In blu la funzione ricavata dai dati raccolti sperimentalmente, in rosso il grafico della velocità calcolata in base alla relazione di Russell

5.1.2 Propagazione di un'onda solitaria su un fondo a pendenza costante

La *mesh* utilizzata per queste simulazioni è la stessa utilizzata per quelle su fondo piatto, alla quale però sono stati sollevati due vertici, imponendo così una pendenza. Come mostrato in figura [5.9](#) l'onda si propaga inizialmente su un fondo piatto e solo ad un certo punto della simulazione incontra il fondale pendente.

Abbiamo considerato due domini con due differenti pendenze e su ciascuno di essi abbiamo osservato la propagazione di onde ad ampiezze diverse. Questo ha reso possibili due differenti tipologie di confronti:

- comportamento di onde ad ampiezza diversa che propagano su fondali con la stessa pendenza;

- onde con la stessa ampiezza che propagano su fondali a pendenza diversa.

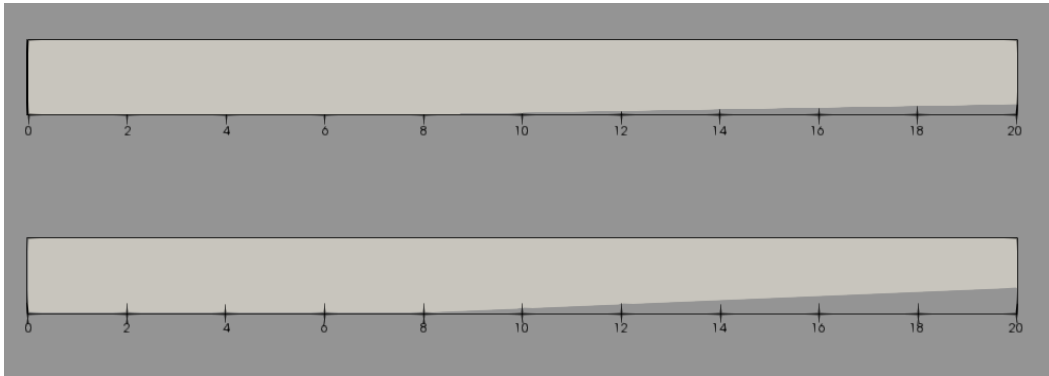


Figura 5.9: *Visualizzazione di due mesh bidimensionali che rappresentano due fondi a pendenza costante*

Propagazione di onde di ampiezza diversa su fondali con la stessa pendenza

Consideriamo un dominio il cui fondo presenti, a partire da un determinato punto, una determinata pendenza. Confrontiamo quindi due simulazioni eseguite su questo dominio impostando l'ampiezza dell'onda $a = 0.13$ e $a = 0.22$. Utilizzando lo stesso programma scritto per le simulazioni precedenti, analizziamo i dati forniti da ParaView, e tracciamo i grafici della forma di queste due onde ogni 5 tempi della simulazione.

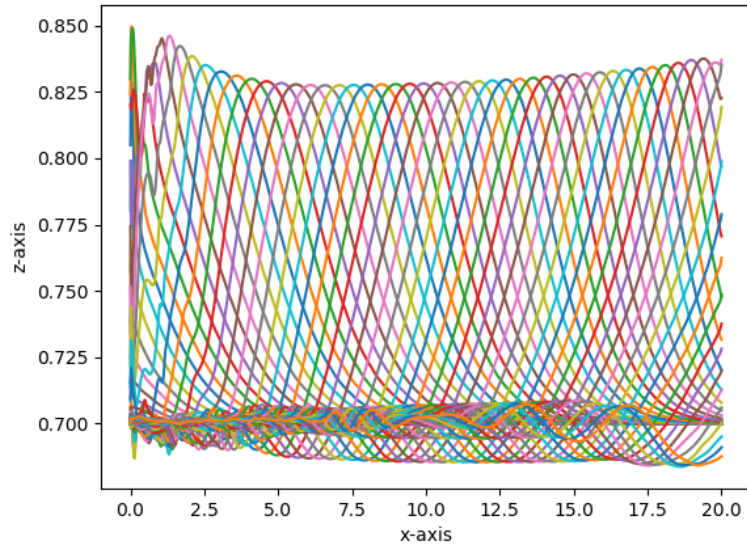


Figura 5.10: *Onda di ampiezza 0.13 che si propaga su un fondale a pendenza costante*

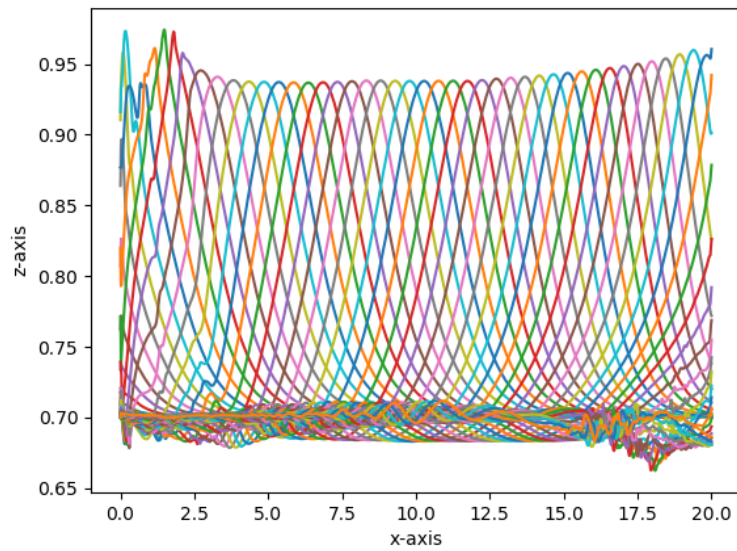


Figura 5.11: *Onda di ampiezza 0.22 che si propaga su un fondale a pendenza costante*

Consideriamo ora tre onde di ampiezze diverse, notiamo che, in linea con quanto osservato nel paragrafo precedente, nella prima parte del dominio computazionale, caratterizzata da un fondo piatto, viaggiano a velocità differenti:

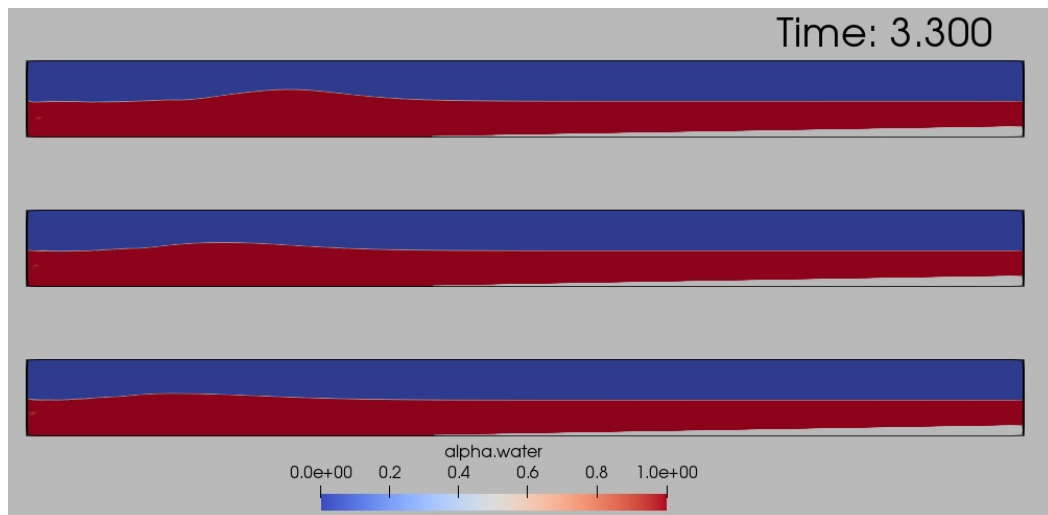


Figura 5.12: Onde di ampiezza 0.13, 0.16 e 0.22 che si propagano su fondali con la stessa pendenza

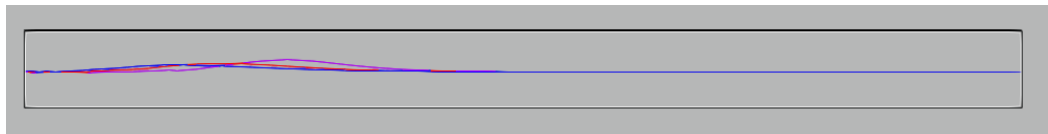


Figura 5.13: Sovrapposizione al tempo $t=3.3$ di onde di ampiezza 0.13, 0.16 e 0.22 che si propagano su fondali con la stessa pendenza

Quando le onde incontrano il fondale pendente l'onda di ampiezza maggiore continua a propagarsi con velocità maggiore come è possibile osservare dalle seguenti figure:

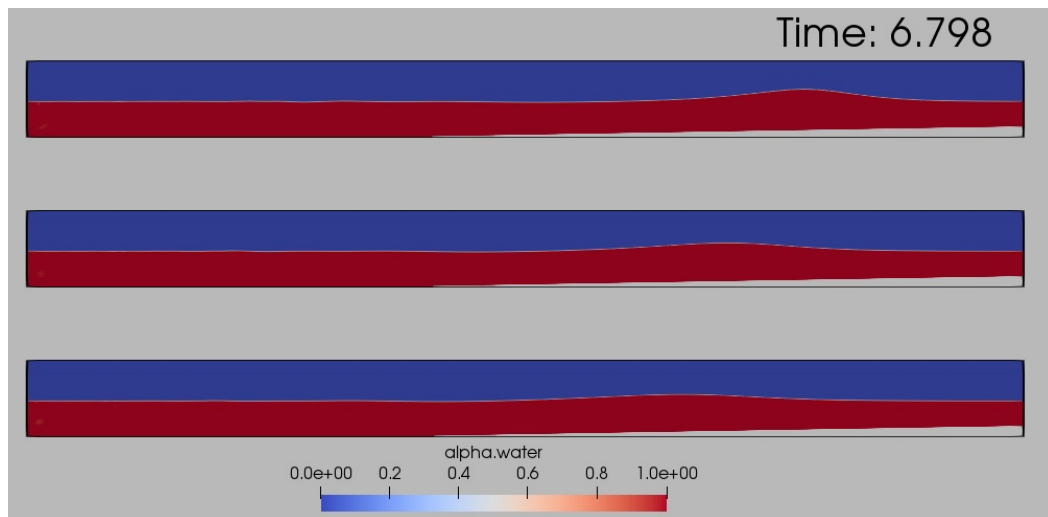


Figura 5.14: Onde di ampiezza 0.13, 0.16 e 0.22 che si propagano su fondali con la stessa pendenza

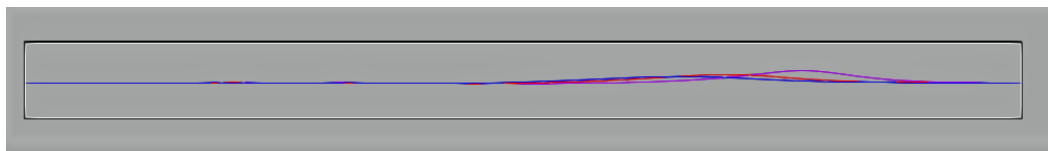


Figura 5.15: Sovrapposizione al tempo $t=6.798$ di onde di ampiezza 0.13, 0.16 e 0.22 che si propagano su fondali con la stessa pendenza

Onde con la stessa ampiezza che si propagano su fondali diversi

Lo studio della propagazione su un fondo pendente ci permette di evidenziare un'ulteriore dipendenza della velocità: possiamo infatti notare come onde della medesima ampiezza si propagano a velocità differenti se il fondale presenta pendenze differenti. Anche questa dipendenza era già stata evidenziata da Russell poiché nella relazione da lui trovata compaiono sia l'ampiezza che la profondità.

Consideriamo un'onda di ampiezza $a = 0.22$ che si propaga su due fondali caratterizzati da pendenze diverse. Vediamo che, poiché inizialmente il fondale è piatto, le due onde coincidono per una parte del loro percorso:

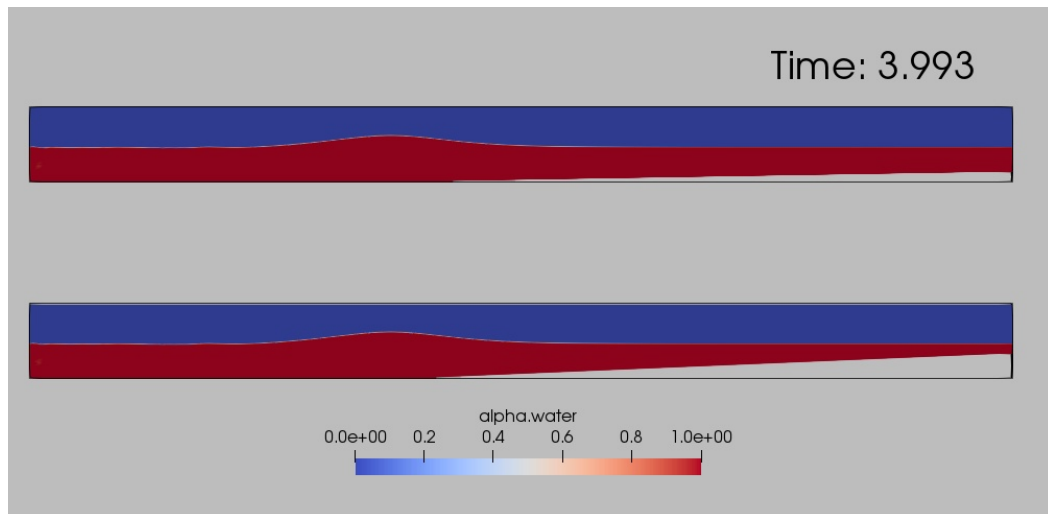


Figura 5.16: *Onda di ampiezza 0.22 che si propaga su due diversi fondali a pendenza costante*

sezionando il dominio e sovrapponendo le due onde vediamo infatti che coincidono:

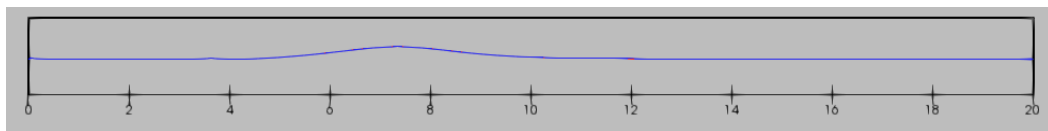
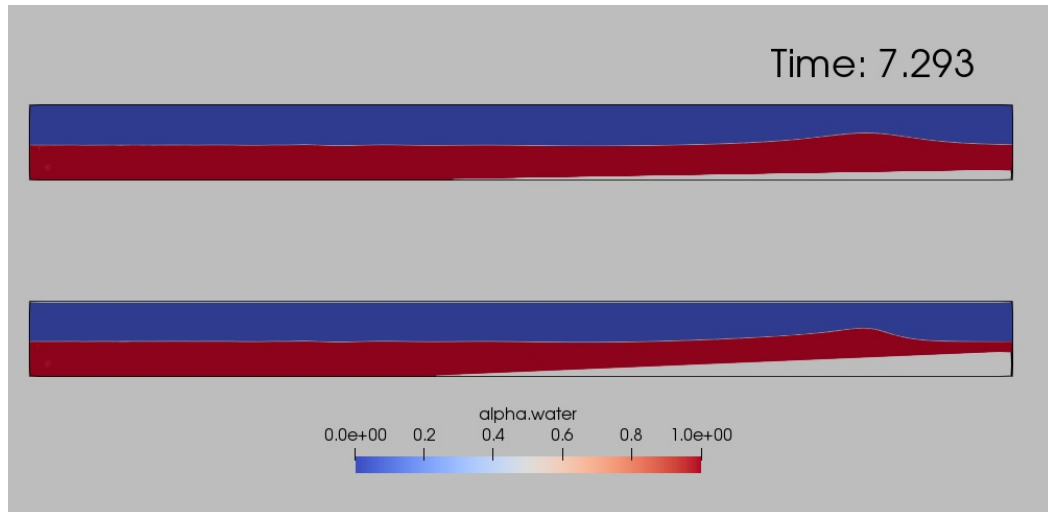


Figura 5.17: *Sovrapposizione onde di ampiezza 0.22 che si propagano su fondali a diversa pendenza al tempo $t=3.993$*

Quando le onde incontrano il fondo pendente notiamo invece che l'onda che si propaga su una profondità maggiore viaggia più velocemente



(a)

Figura 5.18: *Onda di ampiezza 0.22 che si propaga su due diversi fondali a pendenza costante*

In particolare, se sezioniamo nuovamente il dominio e sovrapponiamo le onde, considerando anche un'onda di ampiezza $a = 0.22$ che si muove su un fondo piatto, vedremo che questa si muove più velocemente delle altre due:

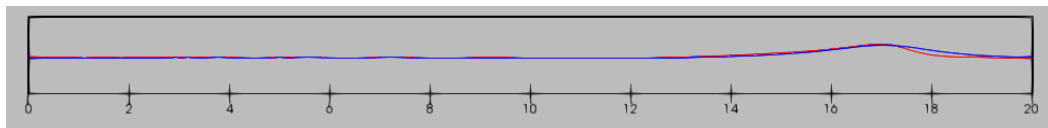


Figura 5.19: *Sovrapposizione onde di ampiezza 0.22 che si propagano su fondali a diversa pendenza*

5.2 Simulazioni tridimensionali

Le onde che si propagano su fondali caratterizzati da una graduale variazione di profondità subiscono cambiamenti sia per quanto riguarda il numero d'onda, sia per quanto riguarda la velocità di fase. In particolare le onde d'acqua si comportano in modo simile alla luce: possiamo infatti riscontrare anche in questo caso il fenomeno della rifrazione. Infatti, quando le onde che provengono dal largo raggiungono obliquamente la costa, il fronte dell'onda che

entra nelle acque meno profonde per primo subisce un rallentamento, mentre il resto del fronte d'onda manterrà la sua velocità fino a quando anch'esso non arriverà al basso fondale della costa. Quando l'onda raggiunge acque basse il suo moto subisce un rallentamento della velocità di propagazione a causa della diminuzione del fondale, abbiamo infatti visto che dalla relazione trovata da Russell la velocità dipende anche dalla profondità dell'acqua nella zona in cui l'onda si propaga. Il percorso delle onde che si avvicinano alla linea di costa è deviato, rispetto alla direzione originaria di movimento, a causa del fenomeno di rifrazione dell'onda marina, che si verifica proprio per il cambiamento di velocità di propagazione. In particolare il fronte d'onda tende a disporsi parallelamente rispetto alla linea di costa, indipendentemente dalla direzione del moto ondoso al largo.

Questo fenomeno è particolarmente visibile nelle seguenti fotografie tratte dal reportage fotografico *Above it All* del fotografo Woody Woodworth, per Surfer Magazine:



Figura 5.20: *San Buenaventura, California, USA.*

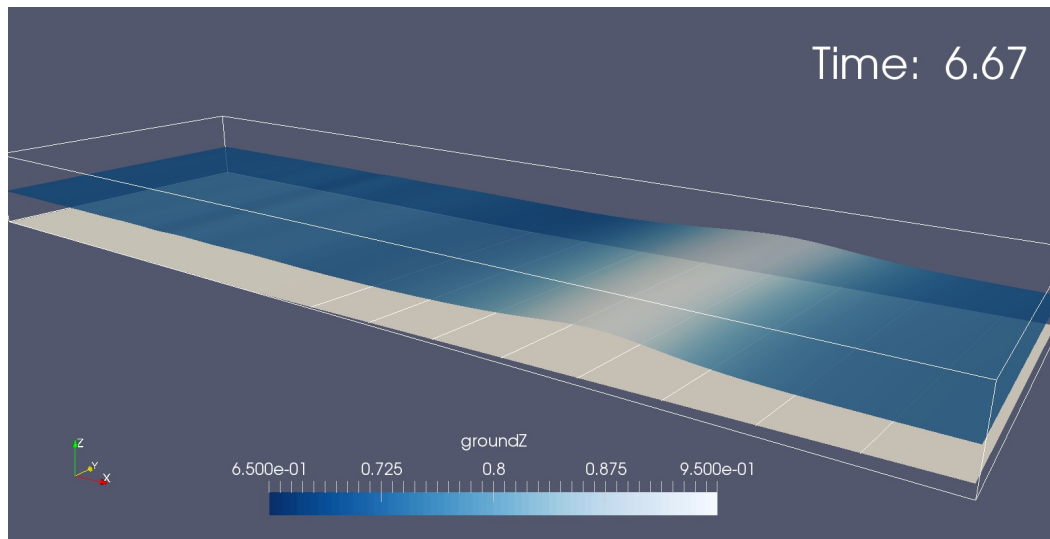


Figura 5.21: *Rincon, spiaggia per surfisti tra Ventura e Santa Barbara, California, USA*

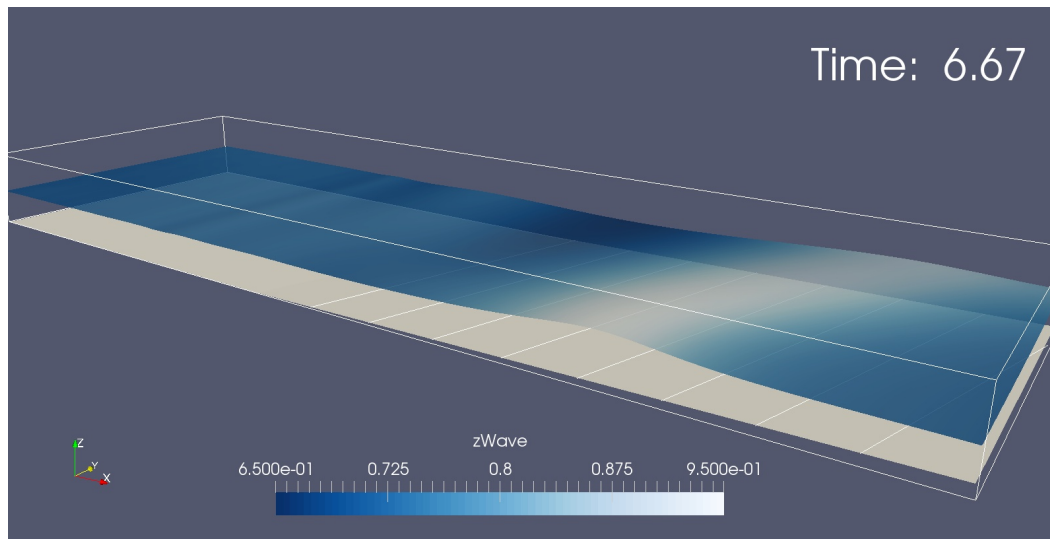
Le simulazioni tridimensionali sono quelle che più si avvicinano alla descrizione del fenomeno così come avviene nella realtà, grazie ad esse è possibile osservare proprio gli effetti della rifrazione dovuti ad una lenta variazione di profondità.

Per la costruzione della *mesh* tridimensionale è stata presa in considerazione quella del caso bidimensionale triplicata in larghezza, alzando poi a due altezze differenti due dei vertici della base per ottenere due fondali con pendenze differenti.

Nelle figure riportate sotto possiamo dunque osservare due onde con la medesima ampiezza che, propagandosi su due fondali a differente pendenza, modificano la loro direzione di propagazione disponendosi con il fronte d'onda parallelo alla linea di costa



(a) Fondale a pendenza 5 gradi



(b) Fondale a pendenza 10 gradi

Figura 5.22: Onda di ampiezza 0.16 che si propaga su fondali a pendenza costante

Poiché, come abbiamo osservato in precedenza, la velocità di propagazione dipende anche dalla profondità osserviamo che le due onde, pur avendo la stessa ampiezza, percorrono distanze differenti negli stessi intervalli di tempo come mostrato nella figura seguente.

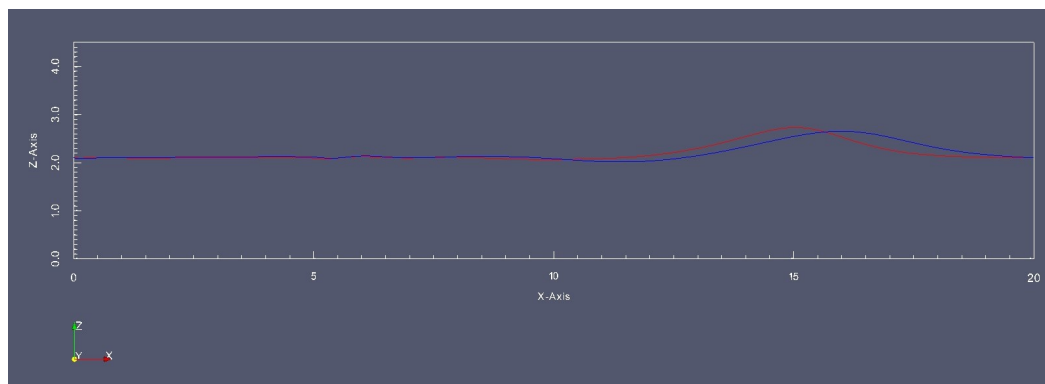


Figura 5.23: Sovrapposizione di una sezione delle due onde al tempo $t=6.67$

Appendice A

File del solutore interFoam

A.1 interFoam.C

Riportiamo e analizziamo il codice contenuto in interFoam.C

```
1  /**\  
2  ===== |  
3  \\      / F i e l d      | OpenFOAM: The Open Source CFD  
   ↪ Toolbox  
4  \\      / O p e r a t i o n      |  
5  \\      / A n d      | Copyright (C) 20112017 OpenFOAM  
   ↪ Foundation  
6  \\\/      M a n i p u l a t i o n      |  
7  
8  License  
9      This file is part of OpenFOAM.  
10  
11     OpenFOAM is free software: you can redistribute it and/or  
   ↪ modify it  
12     under the terms of the GNU General Public License as  
   ↪ published by  
13     the Free Software Foundation, either version 3 of the  
   ↪ License, or  
14     (at your option) any later version.  
15  
16     OpenFOAM is distributed in the hope that it will be  
   ↪ useful, but WITHOUT
```



```
17 ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
18 ↪ MERCHANTABILITY or
19 FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General
20 ↪ Public License
21 for more details.
22
23 You should have received a copy of the GNU General Public
24 ↪ License
25 along with OpenFOAM. If not, see
26 ↪ <http://www.gnu.org/licenses/>.
27
28 Application
29 interFoam
30
31 Group
32 grpMultiphaseSolvers
33
34 Description
35 Solver for 2 incompressible, isothermal immiscible fluids
36 ↪ using a VOF
37 (volume of fluid) phasefraction based interface capturing
38 ↪ approach.
39
40 The momentum and other fluid properties are of the
41 ↪ "mixture" and a single
42 momentum equation is solved.
43
44 Turbulence modelling is generic, i.e. laminar, RAS or LES
45 ↪ may be selected.
46
47 For a twofluid approach see twoPhaseEulerFoam.
48
49 /**/
50
51 #include "fvCFD.H"
52 #include "CMULES.H"
53 #include "EulerDdtScheme.H"
54 #include "localEulerDdtScheme.H"
55 #include "CrankNicolsonDdtScheme.H"
56 #include "subCycle.H"
```

```
49 #include "immiscibleIncompressibleTwoPhaseMixture.H"
50 #include "turbulentTransportModel.H"
51 #include "pimpleControl.H"
52 #include "fvOptions.H"
53 #include "CorrectPhi.H"
54 #include "fvcSmooth.H"
55
56 // * * * * *
   ↪ * * * * * //
57
58 int main(int argc, char *argv[])
59 {
60     #include "postProcess.H"
61
62     #include "setRootCase.H"
63     #include "createTime.H"
64     #include "createMesh.H"
65     #include "createControl.H"
66     #include "createTimeControls.H"
67     #include "initContinuityErrs.H"
68     #include "createFields.H"
69     #include "createAlphaFluxes.H"
70     #include "createFvOptions.H"
71     #include "correctPhi.H"
72
73     turbulence>validate();
74
75     if (!LTS)
76     {
77         #include "readTimeControls.H"
78         #include "CourantNo.H"
79         #include "setInitialDeltaT.H"
80     }
81
82     // * * * * *
   ↪ * * * * * //
83
84     Info<< "\nStarting time loop\n" << endl;
85
86     while (runTime.run())
```

```
87     {
88         #include "readTimeControls.H"
89
90         if (LTS)
91         {
92             #include "setRDeltaT.H"
93         }
94         else
95         {
96             #include "CourantNo.H"
97             #include "alphaCourantNo.H"
98             #include "setDeltaT.H"
99         }
100
101         runTime++;
102
103         Info<< "Time = " << runTime.timeName() << nl << endl;
104
105         // Pressurevelocity PIMPLE corrector loop
106         while (pimple.loop())
107         {
108             #include "alphaControls.H"
109             #include "alphaEqnSubCycle.H"
110
111             mixture.correct();
112
113             if (pimple.frozenFlow())
114             {
115                 continue;
116             }
117
118             #include "UEqn.H"
119
120             // Pressure corrector loop
121             while (pimple.correct())
122             {
123                 #include "pEqn.H"
124             }
125
126             if (pimple.turbCorr())
```

```

127         {
128             turbulence>correct();
129         }
130     }
131
132     runTime.write();
133
134     Info<< "ExecutionTime = " << runTime.elapsedCpuTime()
135     ↪ << " s"
136         << "   ClockTime = " << runTime.elapsedClockTime()
137     ↪ << " s"
138         << nl << endl;
139 }
140
141 Info<< "End\n" << endl;
142
143 return 0;
144 }

```

- **Linee 1-41** come in ogni solutore di OpenFOAM viene descritto il solutore;
- **Linee 43-54** vengono inclusi nel solutore tutti i file.H. Questa parte è la stessa in molti solutori di base perché contiene strumenti molto comuni. Nello specifico, i file "fvCFD.H", "CrankNicolsonDdtScheme.H" e "EulerDdtScheme.H" contengono la descrizione del metodo ai volumi finiti per la discretizzazione delle equazioni e ,in particolare, gli ultimi due contengono le informazioni relative agli schemi di differenziazione temporale supportati da interFoam. Il file "turbolentTransportModel.H" contiene i modelli di turbolenza come laminare (DNS), RAS (Reynolds Averaged Simulation), LES (Large Eddies Simulation) e DES (Detached Eddy Simulation). Grazie al file "fvOptions.H" possiamo inserire termini sorgente addizionali nell'equazione del momento. Il file "pimpleControl.H" definisce le variabili dell'algoritmo PIMPLE, ovvero un algoritmo PISO-SIMPLE per la risoluzione dell'accoppiamento pressione-velocità nelle equazioni fondamentali.
- **Linee 58-71** viene avviata la funzione principale del solutore e vengono richiamati i file.H specifici. Ad esempio in "createTime.H" e "createMesh.H" vengono discretizzati rispettivamente il dominio temporale e

quello spaziale; in "createFields.H" vengono inizializzati e creati tutti i campi necessari al calcolo come pressione e velocità.

- **Linee 75-99** vengono caricati i parametri di controllo relativi al tempo, ad esempio il numero di Courant. Questi parametri assicurano la stabilità della soluzione in ogni cella.
- **Linee 101-103** il tempo viene incrementato e stampato sullo schermo;

Le prossime righe rappresentano il fulcro del solutore, vengono infatti scritte e risolte le equazioni principali:

- **Linee 105-109** "pressure velocity PIMPLE corrector loop": vengono calcolate tutte le quantità relative alla frazione di fase la cui equazione del trasporto è risolta in "alphaEqnSubCycle.H";
- **Linea 111** vengono corrette tutte le variabili "miscelate" al fine di inserirle nell'equazione del momento;
- **Linea 118** viene richiamato il file "UEqn.H" dove è implementata e risolta l'equazione del momento, come già analizzato nel paragrafo [4.4](#).
- **Linee 120-130** richiamando il file "pEqn.H" viene implementata e risolta l'equazione della pressione. Il numero di volte che questo loop viene ripetuto è definito nella cartella system del case study considerato alla voce "nCorrectors";
- **Linee 132-137** una volta usciti dal PIMPLE loop vengono stampati il tempo di esecuzione e l'ora e si entra in un nuovo ciclo.

A.2 UEqn.H

```
1     MRF.correctBoundaryVelocity(U);
2
3     fvVectorMatrix UEqn
4     (
5         fvm::ddt(rho, U) + fvm::div(rhoPhi, U)
6         + MRF.DDt(rho, U)
7         + turbulence>divDevRhoReff(rho, U)
8         ==
9         fvOptions(rho, U)
10    );
11
12    UEqn.relax();
13
14    fvOptions.constrain(UEqn);
15
16    if (pimple.momentumPredictor())
17    {
18        solve
19        (
20            UEqn
21            ==
22            fvc::reconstruct
23            (
24                (
25                    mixture.surfaceTensionForce()
26                    ghf*fvc::snGrad(rho)
27                    fvc::snGrad(p_rgh)
28                ) * mesh.magSf()
29            )
30        );
31
32        fvOptions.correct(U);
33    }
```

A.3 pEqn.H

```

1  {
2      volScalarField rAU("rAU", 1.0/UEqn.A());
3      surfaceScalarField rAUf("rAUf", fvc::interpolate(rAU));
4
5      volVectorField HbyA(constrainHbyA(rAU*UEqn.H(), U, p_rgh));
6
7      surfaceScalarField phiHbyA
8      (
9          "phiHbyA",
10         fvc::flux(HbyA)
11         + fvc::interpolate(rho*rAU)*fvc::ddtCorr(U, phi)
12     );
13     MRF.makeRelative(phiHbyA);
14     adjustPhi(phiHbyA, U, p_rgh);
15
16     surfaceScalarField phig
17     (
18         (
19             mixture.surfaceTensionForce()
20             ghf*fvc::snGrad(rho)
21         )*rAUf*mesh.magSf()
22     );
23
24     phiHbyA += phig;
25
26     // Update the pressure BCs to ensure flux consistency
27     constrainPressure(p_rgh, U, phiHbyA, rAUf, MRF);
28
29     while (pimple.correctNonOrthogonal())
30     {
31         fvScalarMatrix p_rghEqn
32         (
33             fvm::laplacian(rAUf, p_rgh) == fvc::div(phiHbyA)
34         );
35
36         p_rghEqn.setReference(pRefCell, getRefCellValue(p_rgh,
37         ↪ pRefCell));

```

```
38     p_rghEqn.solve(mesh.solver(p_rgh.select
    ↪ (pimple.finalInnerIter())));
39
40     if (pimple.finalNonOrthogonalIter())
41     {
42         phi = phiHbyA p_rghEqn.flux();
43
44         p_rgh.relax();
45
46         U = HbyA + rAU*fvc::reconstruct((phig
    ↪ p_rghEqn.flux())/rAUf);
47         U.correctBoundaryConditions();
48         fvOptions.correct(U);
49     }
50 }
51
52 #include "continuityErrs.H"
53
54 p == p_rgh + rho*gh;
55
56 if (p_rgh.needReference())
57 {
58     p += dimensionedScalar
59     (
60         "p",
61         p.dimensions(),
62         pRefValue getRefCellValue(p, pRefCell)
63     );
64     p_rgh = p rho*gh;
65 }
66 }
```


Appendice B

Struttura di un tutorial

Ogni caso studio affrontato in OpenFOAM è caratterizzato da una cartella al cui interno sono contenute tutte le informazioni necessarie alla risoluzione del problema, e i risultati ottenuti dopo l'esecuzione dei calcoli.

All'interno della cartella relativa al caso studio, prima di avviare la simulazione, sono presenti tre sottocartelle (`0` o `0.orig`, `constant` e `system`) e due file (`Allclean` e `Allrun`).

I file `Allrun` e `Allclean` contengono rispettivamente i comandi per eseguire la simulazione e quelli per ripulire il *case* dopo averla eseguita.

Analizziamo ora il contenuto delle tre cartelle.

La cartella `0`

La cartella `0` contiene i file che descrivono le condizioni iniziali di tutte le variabili significative.

In ogni file inizialmente vengono definite la variabile e l'unità di misura. In OpenFOAM per specificare le dimensioni di una variabile vengono utilizzati sette scalari posti tra parentesi quadre, ogni posizione rappresenta una grandezza specifica e lo scalare riportato indica la potenza dell'unità di misura corrispondente.

Successivamente viene specificato il valore della variabile in entrata, in uscita, all'interno e agli estremi del dominio.

La cartella `constant`

La *directory* `constant` contiene una descrizione completa delle proprietà del flusso che si vuole descrivere, cioè delle caratteristiche di trasporto.

La cartella `system`

I file presenti nella `directory system`, detti *dictionaries*, riportano i parametri associati alla procedura, necessari alla determinazione della soluzione del problema.

In generale in questa cartella troviamo sempre i seguenti file :

- nel *dictionary controlDict* sono riportati i parametri necessari alla creazione di un database che controlli gli I/O, contiene quindi le impostazioni per l'esecuzione: la scelta del solutore e i parametri riguardanti l'integrazione temporale, la lettura e la scrittura dei risultati. Tra i parametri di controllo impostati in questo file troviamo l'istante di inizio e di fine, gli *step* di calcolo (cioè ogni quanto riportare in *output* la soluzione), la precisione con cui devono essere eseguiti i calcoli e il massimo numero di Courant. Questo numero viene modificato e si aggiorna automaticamente durante i calcoli, a differenza degli altri dati inseriti che rimangono invariati per tutta l'esecuzione;
- `fvScheme`: contiene gli schemi di discretizzazione, cioè determina per ogni termine presente nelle equazioni che metodo numerico applicare. Gli schemi risolutivi applicabili sono presenti nella seguente tabella:

Keyword	Category of mathematical terms
<code>interpolationSchemes</code>	Point-to-point interpolations of values
<code>snGradSchemes</code>	Component of gradient normal to a cell face
<code>gradSchemes</code>	Gradient ∇
<code>divSchemes</code>	Divergence $\nabla \cdot$
<code>laplacianSchemes</code>	Laplacian ∇^2
<code>timeSchemes</code>	First and second time derivatives $\partial/\partial t$, $\partial^2/\partial^2 t$

Tabella B.1: *schemi risolutivi*

- `fvSolution` contiene le procedure di soluzione, al suo interno vengono specificate le equazioni da risolvere, le tolleranze per arrivare a convergenza e gli altri algoritmi necessari alla risoluzione del problema.

In aggiunta ai file elencati sopra, nella `directory system` di questo tutorial, sono contenuti anche i file `blockMeshDict`, `decomposeParDict`, `setFieldsDict`, `refineMeshDictX` e `topoSetDict`.

Nel primo file vengono fornite le indicazioni per la creazione della *mesh*, contiene infatti un dizionario per l'*utility* `blockMesh`. Il comando *scale*, nella prima riga del file, scala le grandezze riportate ai vertici, in questo caso il dominio non viene riscalo poiché questo rapporto è posto pari a 1. Successivamente vengono elencati i vertici del parallelepipedo che rappresenterà il dominio dell'onda. Ai vertici del parallelepipedo viene assegnato un ordine e si specifica quanti passi di discretizzazione verranno eseguiti in ogni direzione. Le condizioni riportate dopo il comando *boundary* sono le condizioni al contorno sulle facce del parallelepipedo; sono di tipo *inlet* e *outlet* nelle facce di ingresso e uscita del flusso, di tipo *ground* e *top* rispettivamente sul fondo e sulla superficie superiore, quelle di tipo *side* sono relative alle pareti laterali e possono anche essere omesse.

Nel file `topoSetDict` viene definita la parte di griglia da raffinare ulteriormente, le indicazioni relative a questo raffinamento, ovvero la direzione interessata e quanto deve essere raffinata, sono contenute nel file `refineMeshDictX`.

Il file `decomposeParDict` contiene i comandi necessari per scomporre la *mesh*. La *mesh* viene scomposta e il problema distribuito su più processori, con lo scopo di rendere più veloce il computo; diciamo quindi che l'applicazione viene eseguita "in parallelo". La scomposizione può avvenire seguendo quattro metodi differenti, in questo caso viene utilizzato il metodo *hierarchical*¹ che consiste nella scomposizione geometrica del dominio scegliendo da che asse cominciare, nello specifico il dominio viene suddiviso in due sottodomini lungo l'asse *x*.

Nel file `setFieldsDict` è definita la zona del dominio in cui deve trovarsi l'acqua.

¹Gli altri metodi applicabili sono: *simple*, *scotch* e *manual*.

Bibliografia

- [1] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press, 1991.
- [2] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2000.
- [3] G. Biagioli, *Modellizzazione fisico-matematica e simulazioni numeriche di eruzioni freatiche*, Università degli Studi di Firenze, 2018.
- [4] L. B. Chubarov, Z. I. Feedotova, *A method for mathematical modelling of tsunamis runup on a shore*, in Submarine Landslides and Tsunamis, Ahmet et al., Springer Science Business Media, 2003, p.203 e ss.
- [5] G. Cipollina, *Il modello numerico OpenFOAM per lo studio degli tsunami*, Relazione di fine tirocinio, Università degli Studi Roma Tre.
- [6] C. Dainese, *Equazione di Korteweg-de Vries e sue soluzioni solitoniche*, Università degli Studi di Padova, 2009/2010.
- [7] S. M. Damián, *Description and utilization of interFoam multiphase solver*, 2012.
- [8] M. De' Michieli Vitturi, T. Esposti Ongaro, *Introduction to Computational Fluid Dynamics for Earth Science - Introduction to Finite Difference Method*, Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia - Sezione di Pisa, 2017.
- [9] M. De' Michieli Vitturi, T. Esposti Ongaro, *Introduction to Computational Fluid Dynamics for Earth Science - Running OpenFOAM: mesh generation, initial and boundary conditions*, Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia - Sezione di Pisa, 2017.
- [10] M. De' Michieli Vitturi, T. Esposti Ongaro, *Introduction to Computational Fluid Dynamics for Earth Science - The Finite Volume method in*

- OpenFOAM*, Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia - Sezione di Pisa, 2017.
- [11] S. S. Deshpande, L. Anumolu, M. F. Trujillo, *Evaluating the performance of the two-phase flow solver interFoam*, Computational Science Discovery 5, 2012.
- [12] D. Dutykh, *Mathematical modelling of tsunami waves*, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2007.
- [13] J. H. Ferziger, M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd ed., Springer, Berlin, 2002.
- [14] C. W. Hirt, B. D. Nichols, *Volume of Fluid Method for the Dynamics of Free Boundaries*, Journal of Computational Physics 39, 1981, pp. 201-225.
- [15] R.S. Johnson, *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of water Waves*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1997.
- [16] P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons an introduction*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1989.
- [17] M. S. Longuet-Higgins, *On the Mass, Momentum, Energy and Circulation of a Solitary Wave*, Royal Society, Great Britain, 1974.
- [18] M. S. Longuet-Higgins, J.D. Fenton, *On the Mass, Momentum, Energy and Circulation of a Solitary Wave. II*, Royal Society, Great Britain, 1974.
- [19] P. A. Madsen, D. R. Fuhrman, H. A. Schäffer, *On the solitary wave paradigm for tsunamis*, Journal of Geophysical Research 113, 2008.
- [20] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci, *Fisica, vol. II, Elettromagnetismo - Onde*, seconda edizione, EdiSES, 2002.
- [21] G. C. J. Morgan, *Application of the interFoam VOF code to the coastal wave/structure interaction*, University of Bath, 2013.
- [22] F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwish, *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics - An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab®*, Springer, 2016.
- [23] A. Nalin, *Analisi di un'ala bio-ispirata tramite codice di calcolo openFOAM*, Politecnico di Torino, 2015.

- [24] OpenCFD Limited, *OpenFOAM - The Open Source CFD Toolbox, Tutorial Guide* versione v1806, 4 luglio 2018.
- [25] OpenCFD Limited, *OpenFOAM - The Open Source CFD Toolbox, User Guide*, versione v1806, 4 luglio 2018.
- [26] D. H. Peregrine, *Equations for Water Waves and the Approximation behind Them*, Waves on Beach, Academic, 1972, p.95.
- [27] K. Qu, X. Y. Ren, S. Kraatz, *Numerical investigation of tsunami-like wave hydrodynamic characteristics and its comparison with solitary wave*, Applied Ocean Research 63, Elsevier, 2017, pp.36-48.
- [28] M. Remoissenet, *Waves Called Solitons - Concepts and Experiments*, Springer, 2003.
- [29] G. Riccardi, D. Durante, *Elementi di fluidodinamica - Un'introduzione per l'Ingegneria*, Springer, Milano, 2006.
- [30] H. Rusche, *Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions*, PhD thesis, Imperial College London (University of London), 2002.
- [31] J. S. Russell, *Report on Waves*, Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, London, 1845, pp. 311-391.
- [32] L. Silvestri, *Numerical study of wind-wave interfacial phenomena*, Università di Bologna, 2017.
- [33] J. D. Tyvand, *Computational fluid dynamics simulations of gravity wave flows - Comparing finite volume and finite element solvers*, Master's Thesis, University of Oslo, 2017.