Ingegneria Edile, Civile, Ambientale
Prove scritte di Analisi 2

Prova scritta del 16 novembre 2015

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^2}{2} - \frac{(x+y)^3}{3}, \qquad (x,y) \in D,$$

ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 1\}$.

(i) Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 2, f(1,2))$.

(ii) Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva $L = \{(x,y) \in D : f(x,y) = 1/2\}$ nel punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(iii) Si trovino il massimo ed il minimo di f su D.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_E |xy| z^2 \, dxdydz,$$

ove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$.

Esercizio 3 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\, e^{y-2x^2}, \\ y(0) = -\ln 2. \end{cases}$$

Si determini esplicitamente la soluzione, si verifichi che essa è una funzione pari definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, e se ne calcoli il limite per $x \to +\infty$.

Esercizio 4 Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (x^3 + y^4, x^4 + y^3)$ lungo la curva Γ descritta dall'equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e percorsa in verso antiorario.

Esercizio 5 Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{G}(x,y,z) = (x^2, y^2, 1-z)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ 0 \leq z \leq 1\}$, orientata dalla normale diretta verso l'esterno.

Esercizio 6 Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$, ove

$$f_n(x) = \frac{(\sin x)^n}{2 + (\sin x)^n}, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

(i) Si calcoli, se esiste, il limite puntuale della successione $\{f_n\}$.

[**(ii)** Si trovino gli eventuali sottointervalli di $[0, 2\pi]$ in cui si ha convergenza uniforme.

(iii) Si determini, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{(\sin x)^n}{2 + (\sin x)^n} \, dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione f è di classe C^∞, e $f(1,2) = -\frac{17}{2}$. Poiché

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x - y - (x+y)^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y - x - (x+y)^2,$$

l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $\left(1, 2, -\frac{17}{2}\right)$ è

$$z = -\frac{17}{2} - 10(x-1) - 8(y-2),$$

ossia

$$z + 10x + 8y = \frac{35}{2}\,.$$

(ii) Poiché il gradiente di f è ortogonale a qualunque curva di livello di f in ogni suo punto, l'equazione della retta tangente alla curva L è

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

ossia

$$y = x - 1.$$

(iii) Gli eventuali punti stazionari interni sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - y - (x+y)^2 = 0 \\ y - x - (x+y)^2 = 0. \end{cases}$$

Confrontando le due equazioni si deduce $x - y = 0$, ossia $x = y$, e da una qualunque delle due segue di conseguenza $x + y = 0$; pertanto l'unica soluzione del sistema è $(x,y) = (0,0)$. In questo punto la f si annulla, ed è immediato vedere che $(0,0)$ non è né punto di massimo locale, né punto di minimo locale, dato che $f(a,-a) > 0$ e $f(a,a) < 0$ per ogni $a > 0$.
Il massimo ed il minimo di f in D, che esistono per il teorema di Weierstrass, sono quindi raggiunti in punti della frontiera. Il bordo di Q si compone di quattro vertici e di quattro segmenti. Nei vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ si ha

$$f(1,0) = \frac{1}{6}\,, \qquad f(0,1) = \frac{1}{6}\,, \qquad f(-1,0) = \frac{5}{6}\,, \qquad f(0,-1) = \frac{5}{6}\,.$$

Nei quattro segmenti,

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = x \\ y = 1 - x, \end{cases} \quad x \in \,]0,1[\,, \qquad \Gamma_2 : \begin{cases} x = x \\ y = x + 1, \end{cases} \quad x \in \,]-1,0[\,,$$

$$\Gamma_3 : \begin{cases} x = x \\ y = -x - 1, \end{cases} \quad x \in \,]-1,0[\,, \qquad \Gamma_4 : \begin{cases} x = x \\ y = x - 1, \end{cases} \quad x \in \,]0,1[\,,$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
&g_1(x) := f|_{\Gamma_1}(x, 1-x) = \tfrac{(2x-1)^2}{2} - \tfrac{1}{3}, \quad g_1'(x) = 2(2x-1) \geq 0 \iff \tfrac{1}{2} \leq x < 1;\\
&g_2(x) := f|_{\Gamma_2}(x, x+1) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{(2x+1)^3}{3}, \quad g_2'(x) = -2(2x+1)^2 \leq 0 \ \ \forall x \in]-1, 0[\,;\\
&g_3(x) := f|_{\Gamma_3}(x, -x-1) = \tfrac{(2x+1)^2}{2} + \tfrac{1}{3}, \quad g_3'(x) = 2(2x+1) \geq 0 \iff -\tfrac{1}{2} \leq x < 0;\\
&g_4(x) := f|_{\Gamma_4}(x, x-1) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{(2x-1)^3}{3}, \quad g_1'(x) = -2(2x-1)^2 \leq 0 \ \ \forall x \in]0, 1[\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto vi è un punto di minimo vincolato per g_1 in $x = \frac{1}{2}$, in cui $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$, ed un punto di minimo vincolato per g_3 in $x = -\frac{1}{2}$, in cui $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$.
Si conclude allora, confrontando i valori di f nei punti trovati, che

$$\max_D f = f(0, -1) = f(-1, 0) = \frac{5}{6}\,, \qquad \min_D f = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}\,.$$

Esercizio 2 L'insieme E è chiuso e limitato. Utilizzando le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = r \cos\vartheta, \end{cases} \qquad r \geq 0, \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

l'insieme E si rappresenta come

$$E' = \{(r, \vartheta, \varphi) : \ r^2 \leq 1, \ 0 \leq r\cos\vartheta \leq r\sin\vartheta\},$$

ossia mediante le limitazioni

$$0 \leq r \leq 1, \quad \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\,, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Si ha dunque, tenuto conto del determinante $r^2 \sin\vartheta$ dello Jacobiano,

$$
\begin{aligned}
\int_E |xy| z^2 \, dxdydz &= \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^6 \sin^3\vartheta \cos^2\vartheta |\cos\varphi \sin\varphi| \, d\varphi d\vartheta dr.\\
&= \frac{1}{14} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos^2\vartheta (1 - \cos^2\vartheta) \, d\vartheta \int_0^{2\pi} |\sin 2\varphi| \, d\varphi.
\end{aligned}
$$

Poiché

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos^2\vartheta (1 - \cos^2\vartheta) \, d\vartheta = \left[-\frac{1}{3}\cos^3\vartheta + \frac{1}{5}\cos^5\vartheta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{20\sqrt{2}} = \frac{7}{60\sqrt{2}}\,,$$

mentre

$$\int_0^{2\pi} |\sin 2\varphi| \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} |\sin t| \, dt = 2 \int_0^{\pi} \sin t \, dt = 2\,[-\cos t]_0^{\pi} = 4,$$

si conclude che

$$\int_E |xy|z^2\,dxdydz = \frac{2}{7}\left[\frac{7}{60\sqrt{2}}\right] = \frac{\sqrt{2}}{60}\,.$$

Esercizio 3 L'equazione differenziale è a variabili separabili. Si ha successivamente

$$\begin{aligned} e^{-y}dy &= x\,e^{-2x^2}\,dx, \\ e^{-y} &= \tfrac{1}{4}e^{-2x^2} + c, \\ y &= -\ln\left(\tfrac{1}{4}e^{-2x^2} + c\right). \end{aligned}$$

La condizione iniziale implica

$$-\ln 2 = y(0) = -\ln\left(\frac{1}{4} + c\right),$$

da cui $\frac{1}{4} + c = 2$ ed infine $c = \frac{7}{4}$. Pertanto

$$y(x) = -\ln\left(\frac{1}{4}e^{-2x^2} + \frac{7}{4}\right) = -\ln\frac{7 + e^{-2x^2}}{4}\,.$$

Questa funzione è ovviamente pari e definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = -\ln\frac{7}{4}\,.$$

Esercizio 4 Possiamo descrivere la curva Γ con la parametrizzazione

$$x(\vartheta) = 2\cos\vartheta, \quad y(\vartheta) = \sin\vartheta, \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

la quale ha verso antiorario. Il vettore tangente è allora

$$\boldsymbol{\tau} = (x'(\vartheta), y'(\vartheta)) = (-2\sin\vartheta, \cos\vartheta)$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\,ds &= \int_0^{2\pi} [(x(\vartheta)^3 + y(\vartheta)^4)x'(\vartheta) + (y(\vartheta)^3 + x(\vartheta)^4)y'(\vartheta)]\,d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} [-2(8\cos^3\vartheta + \sin^4\vartheta)\sin\vartheta + (\sin^3\vartheta + 16\cos^4\vartheta)\cos\vartheta]\,d\vartheta. \end{aligned}$$

Dato che l'integrando è 2π-periodico, possiamo integrare fra $-\pi$ e π, anziché fra 0 e 2π; in questo modo, sfruttando la disparità di tre dei quattro addendi, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\,ds = 16\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5\vartheta\,d\vartheta &= 16\int_{-\pi}^{\pi} \cos\vartheta(1 - \sin^2\vartheta)^2\,d\vartheta = \\ &= 16\left[\sin\vartheta - \frac{2}{3}\sin^3\vartheta + \frac{1}{5}\sin^5\vartheta\,\right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Quindi il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ è nullo.
Osservazione Avremmo anche potuto utilizzare il teorema della divergenza. Infatti, posto

$$\mathbf{G}(x,y) = (F_2(x,y), -F_1(x,y)) = (x^4+y^3, -x^3-y^4),$$

ed osservato che il versore normale esterno al dominio E delimitato dalla curva chiusa Γ è

$$\boldsymbol{\nu} = (\tau_2, -\tau_1),$$

si ha

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle = F_1\tau_1 + F_2\tau_2 = (-G_2)(-\nu_2) + G_1\nu_1 = \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle,$$

e dunque, per il teorema della divergenza,

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds = \int_\Gamma \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, ds = \int_E \operatorname{div} \mathbf{G}(x,y) \, dxdy.$$

Essendo

$$\operatorname{div} \mathbf{G}(x,y) = 4x^3 - 4y^3,$$

troviamo infine, per la simmetria del dominio E rispetto all'origine e per la disparità della funzione integranda,

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds = \int_E \operatorname{div} \mathbf{G}(x,y) \, dxdy = 0.$$

Esercizio 5 Possiamo parametrizzare la superficie Σ nel modo seguente:

$$x(r,\vartheta) = r\cos\vartheta, \quad y(r,\vartheta) = r\sin\vartheta, \quad z(r,\vartheta) = r^2, \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi.$$

La matrice Jacobiana è

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \\ 2r & 0 \end{pmatrix},$$

quindi il vettore normale indotto è

$$\boldsymbol{\nu} = \left(-2r^2\cos\vartheta, -2r^2\sin\vartheta, r\right)$$

ed è diretto verso l'interno, essendo le sue prime due componenti negative nel primo quadrante. Quindi tale vettore va cambiato di segno. Si ha pertanto

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[x(r,\vartheta)^2(2r^2\cos\vartheta) + y(r,\vartheta)^2(2r^2\sin\vartheta) - (1 - z(r,\vartheta))r\right] \, d\vartheta dr = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[2r^4(\cos^3\vartheta + \sin^3\vartheta) - r(1-r^2)\right] \, d\vartheta dr.\end{aligned}$$

Poiché gli integrali

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\vartheta \, d\vartheta, \qquad \int_0^{2\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta$$

sono nulli, si ottiene

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma = -2\pi \int_0^1 r(1-r^2)\, dr = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Osservazione Avremmo anche potuto utilizzare il teorema della divergenza, osservando che il campo $\mathbf{G}$ è nullo sul "tappo" della superficie Σ, cioè sul disco

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \le 1, \; z = 1\}.$$

La superficie $\Sigma \cup D$ è chiusa e quindi, detta E la regione contenuta in $\Sigma \cup D$, si ha

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma = \int_{\Sigma \cup D} \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma = \int_E \operatorname{div} \mathbf{G}(x,y,z)\, dxdydz.$$

Essendo

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \le z \le 1\},$$

ed osservato che

$$\operatorname{div} \mathbf{G}(x,y,z) = 2x + 2y - 1,$$

si trova, passando in coordinate cilindriche,

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma &= \int_E (2x+2y-1)\, dxdydz = \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^1 (2r\cos\vartheta + 2r\sin\vartheta - 1) r \, dr d\vartheta dz = \\
&= 0 + 0 - 2\pi \int_0^1 r(1-r^2)\, dr = -\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (i) Per ogni $x \in [0, 2\pi]$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} (\sin x)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2}\,, \\ \nexists & \text{se } x = \frac{3\pi}{2}\,, \\ 0 & \text{se } x \in [0,2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}. \end{cases}$$

Quindi la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente in $[0,2\pi] \setminus \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } x = \frac{\pi}{2}\,, \\ 0 & \text{se } x \in [0,2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}. \end{cases}$$

ed in particolare

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{(\sin x)^n}{2 + (\sin x)^n} = 0 \quad \text{q.o. in } [0,2\pi].$$

(ii) Essendo la funzione limite non continua in $x = \frac{\pi}{2}$ e addirittura non definita in $x = \frac{3\pi}{2}$, la convergenza non può essere uniforme in alcun sottointervallo contenente uno di questi due punti. Invece in ogni intervallo della forma $[a,b]$ contenuto in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\, \cup$

$\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ vi è convergenza uniforme, in quanto esiste $\delta>0$ tale che sia $|\sin x|\le 1-\delta$ per ogni $x\in[a,b]$, e di conseguenza risulta

$$\left|\frac{(\sin x)^n}{2+(\sin x)^n}\right|\le\frac{|\sin x|^n}{2-1}=|\sin x|^n\le(1-\delta)^n\quad\forall x\in[a,b],$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{(\sin x)^n}{2+(\sin x)^n}\right|=0.$$

(iii) Come sappiamo, si ha $f_n(x)\to 0$ q.o. in $[a,b]$. Inoltre la convergenza è dominata dalla funzione costante 1:

$$\left|\frac{(\sin x)^n}{2+(\sin x)^n}\right|\le 1\qquad\forall x\in[0,2\pi].$$

Ne segue, per il teorema di Lebesgue,

$$\exists\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{(\sin x)^n}{2+(\sin x)^n}\,dx=\int_0^{2\pi}0\,dx=0.$$

Osservazione Si può dimostrare il punto (iii) anche senza ricorrere al teorema di Lebesgue: basta osservare che, fissato $\varepsilon>0$, esiste $\delta\in]0,\varepsilon]$ tale che

$$|\sin x|\le 1-\varepsilon\qquad\forall x\in[0,2\pi]\setminus\left(\left[\frac{\pi}{2}-\delta,\frac{\pi}{2}+\delta\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2}-\delta,\frac{3\pi}{2}+\delta\right]\right);$$

quindi, decomponendo l'integrale $\int_0^{2\pi}$ come $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}+\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta}+\int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{3\pi}{2}-\delta}+\int_{\frac{3\pi}{2}-\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta}+\int_{\frac{3\pi}{2}+\delta}^{2\pi}$, si ha

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}\frac{(\sin x)^n}{2+(\sin x)^n}\,dx\right| &\le \int_0^{2\pi}\frac{|\sin x|^n}{|2+(\sin x)^n|}\,dx\le\int_0^{2\pi}|\sin x|^n\,dx\le\\ &\le \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}(1-\varepsilon)^n\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta}1\,dx+\\ &\quad+\int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{3\pi}{2}-\delta}(1-\varepsilon)^n\,dx+\int_{\frac{3\pi}{2}-\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta}1\,dx+\int_{\frac{3\pi}{2}+\delta}^{2\pi}(1-\varepsilon)^n\,dx\le\\ &\le 2\pi(1-\varepsilon)^n+4\delta\end{aligned}$$

Dunque, se n è sufficientemente grande,

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{(\sin x)^n}{2+(\sin x)^n}\,dx\right|\le(2\pi+4)\delta\le(2\pi+4)\varepsilon,$$

e pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{(\sin x)^n}{2+(\sin x)^n}\right|=0.$$

Prova scritta del 14 gennaio 2016

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y,z) = y + z\ln(1+y) - x^2, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}\times\,]-1,+\infty[\,\times\mathbb{R}.$$

(i) Si mostri che per ogni $(x,z) \in \mathbb{R}^2$ esiste almeno un $y \geq 0$ tale che $f(x,y,z) = 0$, e che tale y è unico allorché $z \geq 0$; in quest'ultimo caso si scriva $y = g(x,z)$, cosicché $f(x,g(x,z),z) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $z \geq 0$.

(ii) Si provi che per $x \in \mathbb{R}$ e $z \geq 0$ la funzione g è non negativa, è decrescente e convessa rispetto a z, ed è tale che $x = 0$ se e solo se $g(x,z) = 0$.

(iii) Si determini il polinomio di Taylor del secondo ordine di g di centro $(2,0)$.

Esercizio 2 Sia Σ la superficie definita dall'equazione cartesiana

$$z = \sin(x+y), \qquad |x| + |y| \leq \pi.$$

(i) Si scriva l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

(ii) Si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma |z|\, d\sigma.$$

Esercizio 3 Si consideri la funzione $f(x) = x^2$, definita per $x \in [-\pi,\pi[$, e la si prolunghi a $\mathbb{R}$ per periodicità.

(i) Si scriva la serie di Fourier di f, quella di f' e quella di f''.

(ii) In quale senso ciascuna delle tre serie converge alla sua somma: in $L^2(-\pi,\pi)$? puntualmente in $[-\pi,\pi]$? uniformemente in $[-\pi,\pi]$?

Esercizio 4 Sia $\{f_n\}$ la successione definita da

$$f_n(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^n, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Descrivere l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \exists f(x,y) := \lim_{n\to\infty} f_n(x,y)\right\}.$$

(ii) Determinare in quali sottoinsiemi $E \subseteq D$ risulta $f_n \to f$ uniformemente in E.

(iii) Stabilire se

$$\lim_{n\to\infty} \int_D |f_n - f|\, dxdy = 0.$$

Esercizio 5 Sia $y_c(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)}{t} + t\,y(t), & t \geq 0, \\ y(1) = c. \end{cases}$$

(i) Si scriva esplicitamente $y_c(t)$.

(ii) Si determini $c \in \mathbb{R}$, se esiste, tale che $y_c(t)$ sia limitata per $t \to +\infty$.

Esercizio 6 Sia Γ la curva descritta, in coordinate polari, dall'equazione

$$r = \vartheta^2, \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

orientata nel verso delle ϑ crescenti.

(i) Si determini la lunghezza di Γ.

(ii) Si calcoli il lavoro compiuto lungo Γ dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

Esercizio 7 Si calcoli l'integrale

$$\int_E zx^2 \, dxdydz,$$

ove

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 2, \ z \ge x^2+y^2\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Qui non c'entra (ancora) il teorema del Dini: si tratta solo di ragionare. Fissati x e z, la funzione

$$h(y) = y + z\ln(1+y)$$

è continua, vale 0 per $y=0$ e tende a $+\infty$ quando $y \to +\infty$; pertanto essa assume almeno una volta, per qualche $y \ge 0$, il valore non negativo x^2. Ciò significa che l'equazione $f(x,y,z)=0$ ha almeno una soluzione $y > -1$. Se, in particolare, supponiamo $z \ge 0$, allora

$$h'(y) = 1 + \frac{z}{1+y} > 0,$$

e quindi la soluzione y è unica.

(ii) Per definizione, $y = g(x,z)$ verifica $f(x,g(x,z),z) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $z \ge 0$; per costruzione g è non negativa, come abbiamo visto, e infine per $z \ge 0$ dall'espressione di f riconosciamo che $y=0$ (ossia $g(x,z)=0$) se e solo se $x=0$.
Ora osserviamo che la nostra g è la stessa funzione che otteniamo dal teorema del Dini, mettendoci nell'intorno di un fissato punto (x_0,y_0,z_0), ove $z_0 \ge 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e y_0 è l'unica soluzione dell'equazione $f(x_0,y_0,z_0)=0$: essendo $f_y(x_0,y_0,z_0) > 0$, il teorema ci dice

che l'equazione $f(x, y, z) = 0$ in un intorno di (x_0, y_0, z_0) definisce il grafico di una funzione implicita $y = \varphi(x, z)$. Allora, per unicità, φ coincide con g, la funzione di prima, in quell'intorno. Inoltre φ, e quindi g, è di classe C^∞, dato che f è di classe C^∞. Derivando l'equazione

$$f(x, g(x, z), z) = g(x, z) + z \ln(1 + g(x, z)) - x^2 = 0,$$

si trova

$$g_z + \ln(1 + g) + \frac{z}{1+g}\, g_z = 0,$$

da cui, essendo $g \geq 0$,

$$g_z = -\frac{\ln(1+g)}{1 + \frac{z}{1+g}} < 0,$$

ossia g decresce rispetto a z. Derivando ancora,

$$g_{zz} + \frac{2}{1+g}\, g_z - \frac{z}{(1+g)^2}(g_z)^2 + \frac{z}{1+g}\, g_{zz} = 0,$$

da cui, essendo $g_z \leq 0$,

$$g_{zz} = \frac{1}{1 + \frac{z}{1+g}} \left(-\frac{2}{1+g}\, g_z + \frac{z}{(1+g)^2}(g_z)^2 \right) > 0,$$

ossia g è convessa rispetto a z.

(iii) Il polinomio di Taylor di ordine 2 di g in $(2, 0)$ è, per definizione,

$$\begin{aligned} P(x, z) &= g(2,0) + g_x(2,0)(x-2) + g_z(2,0)z + \\ &+ \frac{1}{2} g_{xx}(2,0)(x-2)^2 + g_{xz}(2,0)(x-2)z + \frac{1}{2} g_{zz}(2,0)z^2. \end{aligned}$$

È facile verificare che $g(2, 0) = 4$. Poiché

$$g_x + \frac{z}{1+g}\, g_x - 2x = 0,$$

si ha $g_x(2, 0) = 4$, e dall'espressione di g_z segue $g_z(2, 0) = -\ln 5$. Poi, essendo

$$g_{xx} - \frac{z}{(1+g)^2}\, (g_x)^2 + \frac{z}{1+g}\, g_{xx} - 2 = 0,$$

$$g_{xz} + \frac{1}{1+g}\, g_x - \frac{z}{(1+g)^2}\, g_z\, g_x + \frac{z}{1+g}\, g_{xz} = 0,$$

si ricava $g_{xx}(2, 0) = 2$, $g_{xz}(2, 0) = -\frac{4}{5}$, mentre dall'espressione di g_{zz} si deduce infine $g_{zz}(2, 0) = \frac{2 \ln 5}{5}$. Pertanto

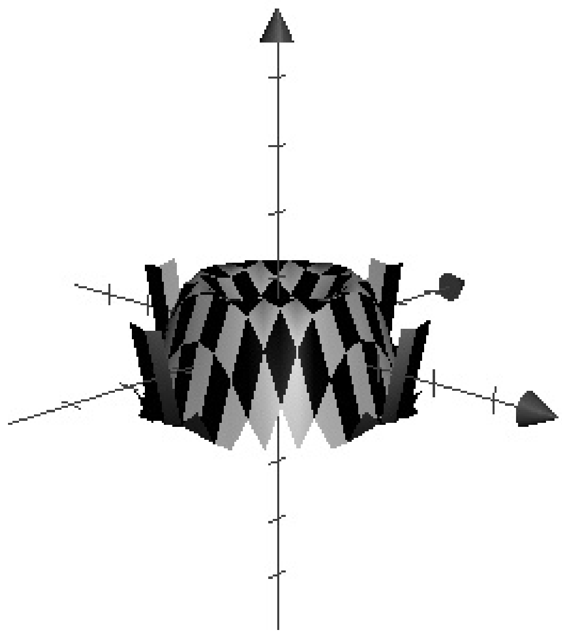
$$P(x, z) = 4 + 4(x-2) - (\ln 5)\, z + (x-2)^2 - \frac{4}{5}\, (x-2)z + \frac{\ln 5}{5}\, z^2.$$

Esercizio 2 (i) Posto $f(x,y)=\sin(x+y)$, si ha $f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$; inoltre

$$f_x(x,y)=f_y(x,y)=\cos(x+y),$$

da cui $f_x\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)=f_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; dunque l'equazione del piano tangente al grafico di f in $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{\pi}{4}\right).$$



(ii) Nel nostro caso, Σ è una superficie cartesiana, e dunque l'elemento d'area è

$$d\sigma=\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}\,dxdy=\sqrt{1+\cos^2(x+y)}\,dxdy;$$

pertanto, posto $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x|+|y|\le 1\}$, si ha

$$\int_\Sigma |z|\,d\sigma=\int_E |\sin(x+y)|\sqrt{1+\cos^2(x+y)}\,dxdy.$$

Per calcolare questo integrale, il cui dominio base è un rombo quadrato, conviene cambiare variabili in modo da "raddrizzare" il rombo: quando $(x,y)\in E$, le quantità $u=x+y$ e $v=y-x$ si muovono entrambe in $[-\pi,\pi]$, ossia D si trasforma in $[-\pi,\pi]^2$. Inoltre

$$\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=2 \quad \forall (x,y)\in E,$$

da cui

$$|J(u,v)|=\left|\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right|=\frac{1}{\left|\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\right|}=\frac{1}{2} \quad \forall (u,v)\in[-\pi,\pi]^2.$$

In definitiva

$$\int_\Sigma |z|\, d\sigma = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin u|\sqrt{1+\cos^2 u}\, dudv = \pi\int_{-\pi}^{\pi} |\sin u|\sqrt{1+\cos^2 u}\, du;$$

quindi

$$\begin{aligned}\int_\Sigma |z|\, d\sigma &= 2\pi\int_0^\pi \sin u\sqrt{1+\cos^2 u}\, du = 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+2s^2}\, ds = \\ &= 4\pi\int_0^1 \sqrt{1+2s^2}\, ds = 2\sqrt{2}\,\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+t^2}\, dt.\end{aligned}$$

Poiché una primitiva di $\sqrt{1+t^2}$ è $\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})$, si ottiene

$$\int_\Sigma |z|\, d\sigma = 2\sqrt{2}\,\pi\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]_0^1 = 2\sqrt{2}\,\pi[\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})].$$

Esercizio 3 (i) Calcoliamo i coefficienti di Fourier di f: dato che essa è una funzione pari, si ha $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, mentre

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[x^2\,\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\,\sin nx\, dx = \\ &= 0+\frac{4}{n\pi}\left[x\,\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \cos nx\, dx = (-1)^n\,\frac{4}{n^2}\,. \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,\end{aligned}$$

e anche

$$a_0 = \frac{2}{3}\,\pi^2.$$

Poiché $f'(x) = 2x$, per i coefficienti di Fourier a_n' e b_n' di f' si ha $a_n' = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, mentre, utilizzando il calcolo precedente,

$$b_n' = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x\,\sin nx\, dx = -\frac{2}{n}\,(-1)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Per la funzione $f''(x) = 2$ si ha evidentemente $a_0'' = 4$ e $a_n'' = b_n'' = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Le tre serie di Fourier sono quindi: per f

$$\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{4}{n^2}\,\cos nx,$$

per f'

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{2}{n}\,\sin nx,$$

mentre per f'' la serie si riduce all'unico addendo 2.

(ii) La serie di Fourier di f converge a f nel senso di $L^2(-\pi, pi)$, perché $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Essa inoltre converge puntualmente a f in $[-\pi,\pi]$, in quanto f soddisfa le ipotesi del

teorema di Dirichlet (è continua ed ha un solo punto di non derivabilità, vale a dire π, ovvero $-\pi$, nel quale però esistono finite le derivate destra e sinistra). Ma in realtà la serie converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-\pi, \pi]$, essendo il suo termine generale infinitesimo di ordine $\frac{1}{n^2}$.
La serie di Fourier di f' converge a f' nel senso di $L^2(-\pi, \pi)$, perché $f' \in L^2(-\pi, \pi)$. Essa inoltre converge puntualmente a f' in $]-\pi, \pi[$ e a 0 in $\pm\pi$, in quanto f soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet (è continua e derivabile salvo che in π, ovvero $-\pi$, ed ha in tale punto limite destro e sinistro finiti ed opposti, nonché derivata destra e sinistra finite). La serie non può convergere uniformemente in $[-\pi, \pi]$ percheè le somme parziali della serie sono funzioni continue mentre la somma non lo è.
Le serie di Fourier di f'' è ovviamente convergente in tutti i sensi possibili, visto che è costituita da un solo termine.

Esercizio 4 (i) Affinché $f_n(x, y)$ abbia limite è necessario che sia $|1 - x^2 - y^2| \leq 1$, altrimenti avremmo $|f_n(x, y)| \to \infty$. Si ha, ovviamente,

$$|1 - x^2 - y^2| \leq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + y^2 \leq 2.$$

È allora facile verificare che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x, y) = f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x^2 + y^2 < 2 \\ 1 & \text{se } x^2 + y^2 = 2 \text{ oppure } (x, y) = (0, 0) \\ \text{non esiste} & \text{se } x^2 + y^2 \geq 2. \end{cases}$$

In particolare,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}.$$

(ii) La convergenza non può essere uniforme in tutto D, perché le f_n sono funzioni continue mentre f non lo è, essendo discontinua nel punto $(0, 0)$. Tuttavia la convergenza è uniforme in ogni corona circolare della forma

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \delta \leq x^2 + y^2 \leq 2 - \delta\}, \qquad \text{ove } 0 < \delta < 1 :$$

infatti

$$\sup_{(x,y)\in C} |f_n(x, y) - f(x, y)| = \sup_{(x,y)\in C} |1 - x^2 - y^2|^n \leq (1 - \delta)^n,$$

e l'ultimo membro tende a 0 per $n \to \infty$.

(iii) In virtù del teorema di convergenza dominata si ha

$$\int_D |f_n - f| dxdy = \int_D |1 - x^2 - y^2|^n \, dxdy \to 0 \quad \text{per } n \to \infty :$$

infatti, come sappiamo, $|f_n - f| \leq 1$ in D, e la funzione costante 1 è sommabile in D, dato che D ha misura finita.

Esercizio 5 (i) L'equazione differenziale si scrive come

$$y' = \frac{1 + t^2}{t} y,$$

ed è quindi a variabili separabili. Otteniamo successivamente (osservando che $t > 0$, visto che siamo in un intorno di 1):

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{t} + t\right) dt,$$

$$\ln|y(t)| = \ln t + \frac{t^2}{2} + A,$$

$$|y(t)| = e^A\, t\, e^{\frac{t^2}{2}},$$

$$y(t) = Kt\, e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = c$ si trova $c = K\sqrt{e}$, da cui finalmente

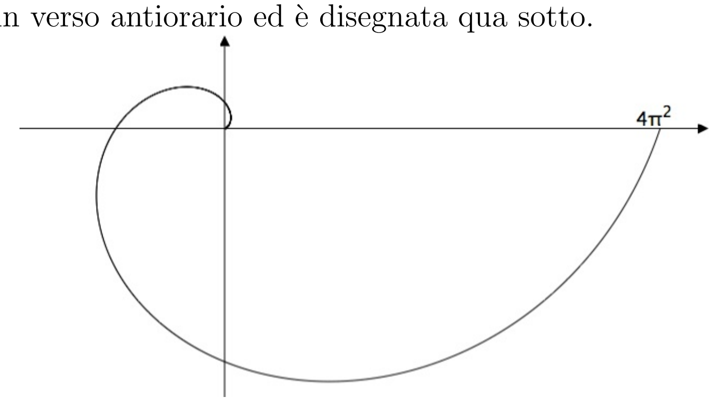
$$y_c(t) = c\, t\, e^{\frac{t^2-1}{2}}.$$

(ii) Se vogliamo che $y_c(t)$ sia limitata per $t \to \infty$, l'unica possibilità è quella di scegliere $c = 0$. Dunque al variare di c l'unica soluzione limitata è $y(t) \equiv 0$.

Esercizio 6 (i) La curva Γ è espressa da una equazione in coordinate polari della forma $r = g(\vartheta)$, con $g(\vartheta) = \vartheta^2$. Dunque Γ si parametrizza così:

$$x = \vartheta^2 \cos\vartheta, \quad y = \vartheta^2 \sin\vartheta, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi];$$

essa è orientata in verso antiorario ed è disegnata qua sotto.



Si ha

$$x' = 2\vartheta\cos\vartheta - \vartheta^2 \sin\vartheta, \quad y' = 2\vartheta \sin\vartheta + \vartheta^2\cos\vartheta,$$

e pertanto

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, d\vartheta = \sqrt{4\vartheta^2 + \vartheta^4}\, d\vartheta = \vartheta\sqrt{4 + \vartheta^2}\, d\vartheta.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &= \int_0^{2\pi} \vartheta\sqrt{4+\vartheta^2}\, d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi^2} \sqrt{4+t}\, dt = \frac{1}{3}\left[(4+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4\pi^2} = \frac{8}{3}[(1+\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1]. \end{aligned}$$

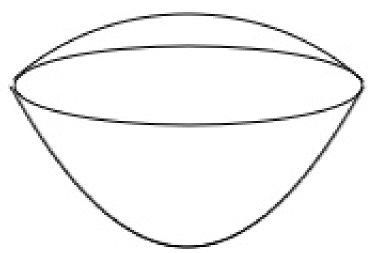
(ii) Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_{+\Gamma} \left(\frac{y(\vartheta)}{\sqrt{x(\vartheta)^2 + y(\vartheta)^2}}\, x'(\vartheta) - \frac{x(\vartheta)}{\sqrt{x(\vartheta)^2 + y(\vartheta)^2}}\, y'(\vartheta) \right) d\vartheta.$$

Si ha dunque, ricordando le espressioni di x' e y' già calcolate,

$$\begin{aligned} &\int_{+\Gamma} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy \right) = \\ &\quad = \int_0^{2\pi} [\sin\vartheta\,(2\vartheta\cos\vartheta - \vartheta^2\sin\vartheta) - \cos\vartheta\,(2\vartheta\sin\vartheta + \vartheta^2\cos\vartheta)]\, d\vartheta = \\ &\quad = -\int_0^{2\pi} \vartheta^2\, d\vartheta = -\frac{8}{3}\,\pi^3. \end{aligned}$$

Esercizio 7 L'insieme E è descritto nella figura sottostante.



Utilizzando le coordinate cilindriche

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = z,$$

e tenuto conto che, per le limitazioni imposte, deve essere

$$x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{2 - x^2 - y^2},$$

l'insieme E si descrive come

$$E' = \{(r, \vartheta, z):\ 0 \le \vartheta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ r^2 \le z \le \sqrt{2 - r^2}\}.$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} \int_E zx^2\, dxdydz &= \int_{E'} zr^2\cos^2\vartheta\, r\, drdzd\vartheta = \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^1 r^3 \left[\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z\, dz \right] dr = \\ &= \pi \int_0^1 r^3 \left[\frac{2 - r^2 - r^4}{2} \right] dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 [2r^3 - r^5 - r^7]\, dr = \frac{\pi}{24}. \end{aligned}$$

Prova scritta del 3 febbraio 2016

Esercizio 1 Si consideri l'insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ descritto dalla relazione

$$x^2 + y^2 \le x.$$

Calcolare il massimo ed il minimo su D della funzione

$$f(x,y) = xy^2 + x^2y - xy - x^2y^2.$$

Esercizio 2 **(i)** Provare che la funzione

$$g(s,x) = \frac{e^{-s\sqrt{x}}}{1+x^2}$$

è sommabile su $[0,\infty[\times[0,\infty[$.

(ii) Definite per $s \geq 0$ le funzioni

$$f_n(s) = \int_0^n g(s,x)\,dx, \quad f(s) = \int_0^\infty g(s,x)\,dx,$$

si provi che la successione $\{f_n\}$ converge a f puntualmente in $[0,\infty[$, ed anche in $L^1(0,\infty)$.

Esercizio 3 Sia Σ la parte di superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2=1$, contenuta nel primo ottante, delimitata dai piani $x=\sqrt{3}\,y$ e $y=\sqrt{3}\,x$, orientata secondo la normale esterna alla sfera. Posto

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(x(x^2+y^2) + z\,\ln(2+xz),\ -yz + y(x^2+y^2),\ x\,\ln(2+xz)\big),$$

si calcoli il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo il bordo $b\Sigma$, orientato in modo coerente.

Esercizio 4 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\,e^{x^2-y+e^y} \\ y(-1) = -1. \end{cases}$$

Esercizio 5 Sia D il compatto di $\mathbb{R}^3$ delimitato dal piano $z=2$ e dalla superficie Σ generata dalla rotazione del grafico $z=\sqrt{1+x^2}-1$, ove $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$. Si calcoli l'integrale

$$\int_D \frac{x^2y^2z}{(x^2+y^2)^2}\,dxdydz.$$

Esercizio 6 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) In quali punti di $\mathbb{R}$ la serie converge assolutamente?

(ii) In quali punti di $\mathbb{R}$ la serie converge puntualmente?

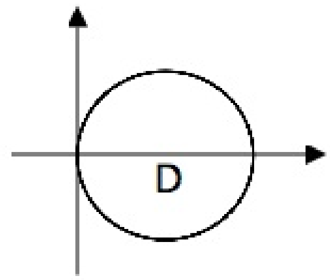
(iii) In quali sottointervalli di $\mathbb{R}$ la serie converge uniformemente?

Risoluzione

Esercizio 1 La relazione che descrive D si può mettere nella forma

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\,,$$

e quindi D è il disco di centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e raggio $\frac{1}{2}$.
Cerchiamo, se esistono, i punti stazionari di f interni a D. Si ha



$$\begin{cases} f_x(x,y) = y^2 + 2xy - y - 2xy^2 = (1-2x)(y^2 - y) \\ f_y(x,y) = 2xy + x^2 - x - 2x^2y = (1-2y)(x^2 - x); \end{cases}$$

dunque i punti stazionari di f sono

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (1,0), \quad (1,1), \quad (0,0), \quad (0,1),$$

e di questi nessuno è interno a D.
Vediamo la situazione sulla frontiera.

Primo metodo Si ha, utilizzando le coordinate polari,

$$x^2 + y^2 = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad r = \cos\vartheta, \text{ con } -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Analizziamo allora la funzione $f(x,y) = xy^2 + x^2y - xy - x^2y^2 = (x - x^2)(y^2 - y)$ sulla frontiera:

$$f(x,y) = g(\vartheta) = (\cos^2\vartheta - \cos^4\vartheta)(\cos^2\vartheta \sin^2\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta),$$

ovvero

$$g(\vartheta) = \cos^3\vartheta \sin^3\vartheta(\cos\vartheta\sin\vartheta - 1), \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} g'(\vartheta) &= (-3\cos^2\vartheta\sin^4\vartheta + 3\cos^4\vartheta\sin^2\vartheta)(\cos\vartheta\sin\vartheta - 1) + \\ &\quad + \cos^3\vartheta\sin^3\vartheta(-\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) = \\ &= \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)(4\cos\vartheta\sin\vartheta - 3) = \\ &= \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\cos 2\vartheta(2\sin 2\vartheta - 3). \end{aligned}$$

Nell'ultima espressione il fattore $2\sin 2\vartheta - 3$ è negativo, mentre i primi due sono positivi. Quindi $g'(\vartheta)$ è positiva se $\cos 2\vartheta < 0$, ossia per $\frac{\pi}{4} < |\vartheta| \leq \frac{\pi}{2}$, mentre $g'(\vartheta)$ è negativa se $\cos 2\vartheta > 0$, ossia per $0 \leq |\vartheta| < \frac{\pi}{4}$. In definitiva, g cresce in $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$, decresce in $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, cresce in $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Si noti che g' è nulla anche in $\vartheta = 0$, che corrisponde al punto $(1,0)$, ma non cambia segno. Pertanto g ha un massimo relativo in $-\frac{\pi}{4}$, ha un minimo relativo in $\frac{\pi}{4}$, e un massimo relativo in $\frac{\pi}{2}$. I punti corrispondenti sono rispettivamente $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0,0)$, e risulta

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{16}, \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{16},$$

e come sappiamo $f(0,0) = 0$. Pertanto

$$\max_D f = \frac{3}{16}, \qquad \min_D f = -\frac{1}{16}\,.$$

Secondo metodo Volendo utilizzare il metodo dei moltiplicatori, posto

$$L(x, y, \lambda) = xy^2 + x^2y - xy - x^2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - x),$$

dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = y^2 + 2xy - y - 2xy^2 - 2\lambda x + \lambda = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 2xy + x^2 - x - 2x^2y - 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - x = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} (2x - 1)(y - y^2 - \lambda) = 0 \\ (x - x^2)(2y - 1) - 2\lambda y = 0 \\ y^2 = x - x^2. \end{cases}$$

La prima equazione implica $x = \frac{1}{2}$ oppure $\lambda = y - y^2$. Nel primo caso, la terza equazione fornisce $y = \pm\frac{1}{2}$, e di conseguenza abbiamo i due punti stazionari vincolati

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

e dalla seconda equazione ricaviamo i corrispondenti moltiplicatori, che sono $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{1}{2}$. Nel secondo caso, analizziamo la seconda equazione: se $\lambda = 0$ otteniamo $y = \frac{1}{2}$, da cui per la terza equazione $x = \frac{1}{2}$ (caso già esaminato), oppure $x - x^2 = 0$ ossia $x = 0$ o $x = 1$ (da cui, in entrambi i casi, per la terza equazione $y = 0$). Si hanno così i due punti stazionari $(0, 0)$ e $(1, 0)$, tutti e due con moltiplicatore $\lambda = 0$. Se invece $\lambda \neq 0$, sostituiamo la terza equazione nella seconda, ottenendo

$$y^2(2y - 1) - 2\lambda y = 0.$$

Poiché $y \neq 0$ (il caso $y = 0$ è stato già esaminato) abbiamo allora, dalla prima equazione e da questa,

$$\begin{cases} \lambda = y - y^2 \\ 2\lambda = 2y^2 - y. \end{cases}$$

Ne segue $y - y^2 = y^2 - y/2$, ossia $y = \frac{3}{4}$, che è impossibile (le ordinate sul vincolo sono non superiori a $\frac{1}{2}$). In conclusione, abbiamo quattro punti stazionari nei quali f assune i seguenti valori:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16}, \quad f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}, \quad f(0,0) = 0, \quad f(1,0) = 0.$$

Si può concludere nuovamente che

$$\max_D f = \frac{3}{16}, \qquad \min_D f = -\frac{1}{16}\,.$$

Esercizio 2 (i) La funzione g è non negativa. Per il teorema di Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty[\,\times[0,\infty[} g(s,x)\,dsdx &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^\infty e^{-s\sqrt{x}}\,ds\right)dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+u^4}\,du < \infty.\end{aligned}$$

(ii) Sia $\chi_{[0,n]}$ la funzione indicatrice di $[0,n]$, ossia

$$\chi_{[0,n]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le n \\ 0 & \text{se } x > n. \end{cases}$$

Risulta ovviamente $0 \le \chi_{[0,n]} \le \chi_{[0,n+1]}$; pertanto per ogni $s \ge 0$ si ha

$$f_n(s) = \int_{\mathbb{R}} g(s,x)\chi_{[0,n]}(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}} g(s,x)\chi_{[0,n+1]}(x)\,dx = f_{n+1}(s).$$

Le funzioni integrande $g(s,x)\chi_{[0,n]}(x)$ sono positive e formano una successione crescente che converge a $g(s,x)\chi_{[0,\infty[}$. Dal teorema di B. Levi ricaviamo allora la convergenza puntuale in $[0,\infty[$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(s) = \int_0^\infty g(s,x)\,dx \qquad \forall s \ge 0.$$

Poniamo adesso $f(s) = \int_0^\infty g(s,x)\,dx$, ed osserviamo che la funzione f è sommabile in $[0,\infty[$, in quanto

$$\int_0^\infty f(s)\,ds = \int_{[0,\infty[\,\times[0,\infty[} g(s,x)dsdx < +\infty,$$

come abbiamo visto in (i). Dato che $f_n \to f$ puntualmente in $[0,\infty[$, e dato che risulta

$$0 \le f(s) - f_n(s) \le 2f(s) \qquad \forall s \ge 0,$$

la convergenza di f_n a f è dominata. Ne segue, per il teoorema di Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (f - f_n)\,ds = 0.$$

Esercizio 3 Utilizzando il teorema di Stokes,

$$\int_{+b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds = \int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot}\, \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma.$$

Se indichiamo con $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ $Z(x, y, z)$ le tre componenti di $\mathbf{F}(x, y, z)$, e calcoliamo le componenti di $\mathbf{rot}\, \mathbf{F}$, si ha

$$Z_y - Y_z = 0 - (-y) = y,$$

$$X_z - Z_x = \ln(2 + xz) + \frac{zx}{2 + xz} - \ln(2 + xz) - \frac{zx}{2 + xz} = 0,$$

$$Y_x - X_y = 2xy - 2xy = 0,$$

e dunque

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{F}(x, y, z) = (y, 0, 0).$$

Usando le coordinate sferiche, Σ è descritta da

$$x = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \cos \vartheta,$$

ove $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ e $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, in conseguenza della limitazione $\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}\, x$ e dell'appartenenza al primo ottante. Inoltre si ha $\mathbf{n} = (x, y, z)$. Pertanto

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot}\, \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\Sigma} xy \, d\sigma,$$

ed essendo

$$d\sigma = \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot}\, \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi d\vartheta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \vartheta - \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) \, d\vartheta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \\ &= \left[-\cos \vartheta + \frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}\,. \end{aligned}$$

Volendo utilizzare, invece del teorema di Stokes, il calcolo diretto, si fa un po' più di fatica. Il bordo di Σ è costituito dalle tre curve Γ_1 (semi-meridiano di angolo $\varphi = \frac{\pi}{3}$), Γ_2 (semi-meridiano di angolo $\varphi = \frac{\pi}{6}$), e Γ_3 (tratto di equatore), che si parametrizzano nel modo seguente:

$$\Gamma_1 : \quad x = \frac{1}{2} \sin \vartheta, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \vartheta, \quad z = \cos \vartheta, \qquad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\Gamma_2: \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta, \quad y = \frac{1}{2}\sin\vartheta, \quad z = \cos\vartheta, \qquad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2},$$

$$\Gamma_3: \quad x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad z = 0, \qquad \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$$

L'orientazione positiva di $b\Sigma$ fa percorrere Γ_1 dall'equatore al polo nord, quindi con orientazione opposta a quella delle ϑ crescenti, Γ_2 dal polo nord all'equatore, quindi con orientazione uguale a quella delle ϑ crescenti, e Γ_3 nel verso delle φ crescenti. Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_{+b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds &= \int_{-\Gamma_1} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds + \int_{+\Gamma_2} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds + \int_{+\Gamma_3} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds = \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\frac{\sin^3\vartheta}{2} + \cos\vartheta\, \ln\left(2 + \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right)\right] \frac{\cos\vartheta}{2} + \right. \\
&\quad + \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^3\vartheta\right]\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\vartheta - \\
&\quad \left. - \left[\frac{\sin\vartheta}{2}\ln\left(2 + \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right)\right]\sin\vartheta \right\} d\vartheta - \\
&\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^3\vartheta + \cos\vartheta\, \ln\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\right)\right]\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\vartheta + \right. \\
&\quad + \left[-\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{2} + \frac{\sin^3\vartheta}{2}\right]\frac{\cos\vartheta}{2} - \\
&\quad \left. - \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta\, \ln\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\right)\right]\sin\vartheta \right\} d\vartheta + \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} [\cos\varphi(-\sin\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi]\, d\varphi.
\end{aligned}$$

Gli integrandi contenenti $\sin^3\vartheta\cos\vartheta$ si cancellano; quelli che contengono $\sin\vartheta\cos^2\vartheta$ si riducono all'addendo

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta;$$

quelli che contengono i logaritmi generano il termine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\left[-\frac{1}{2}\ln\left(2 + \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\right)\right]\right\} d\vartheta,$$

mentre l'ultimo integrale è banalmente nullo. Ne segue

$$\begin{aligned}
&\int_{+b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \\
&\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos 2\vartheta \left[-\frac{1}{2}\ln\left(2 + \frac{\sin 2\vartheta}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\vartheta\right)\right]\right\} d\vartheta = \\
&\quad = \frac{1}{6} + \int_0^{\pi} \left\{ \cos t \left[-\frac{1}{4}\ln\left(2 + \frac{\sin t}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin t\right)\right]\right\} dt.
\end{aligned}$$

L'ultimo integrale è nullo, essendo uguale a

$$\int_0^\pi \frac{d}{dt}\left[\left(2+\frac{\sin t}{4}\right)\ln\left(2+\frac{\sin t}{4}\right)-\frac{\sin t}{4}\right]dt = 0,$$

grazie alla periodicità di seno e coseno. In conclusione si ottiene nuovamente

$$\int_{+b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds = \frac{1}{6}\,.$$

Esercizio 4 L'equazione differenziale è a variabili separabili, perché

$$y' = x\, e^{x^2-y+e^y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' = x\, e^{x^2}\, e^{-y+e^y}.$$

Non esistendo soluzioni stazionarie, possiamo scrivere via via

$$\begin{aligned} e^{y-e^y}\, y; &= x\, e^{x^2}, \\ -\frac{d}{dy}e^{-e^y}\, y' &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^{x^2}, \\ \frac{d}{dx}e^{-e^{y(x)}} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^{x^2}, \\ e^{-e^{y(x)}} &= \frac{1}{2}\, e^{x^2} + c. \end{aligned}$$

Calcolando in $x = -1$ si trova, grazie alla condizione iniziale,

$$e^{-e^{-1}} = \frac{e}{2} + c,$$

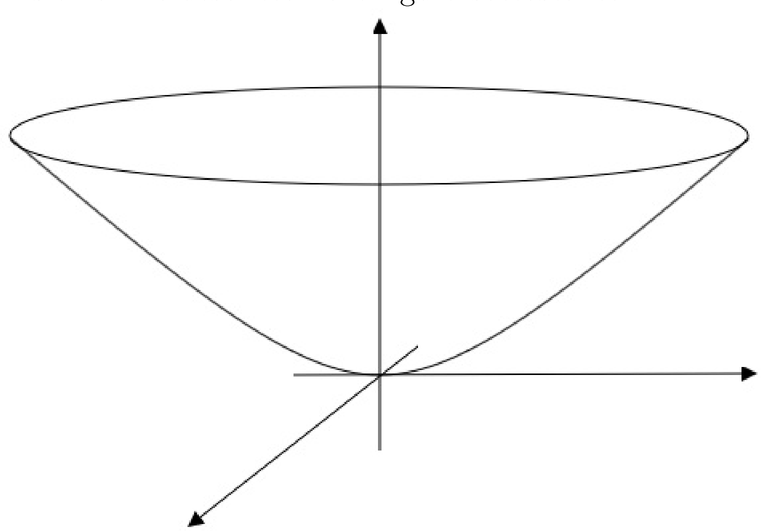
da cui

$$c = e^{-e^{-1}} - \frac{e}{2} = e^{-1/e} - \frac{e}{2}.$$

Ne segue

$$y(x) = \ln\ln\frac{1}{\frac{1}{2}\, e^{x^2} + c} = \ln\ln\frac{1}{\frac{1}{2}\, e^{x^2} + e^{-1/e} - \frac{e}{2}}\,.$$

Esercizio 5 L'insieme D è descritto nella figura sottostante.



Come è naturale, risulta $\sqrt{1+x^2}-1=2$ se e solo se $x=\pm 2\sqrt{2}$. In coordinate cilindriche $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$, $z=z$ l'insieme D è descritto dalle relazioni

$$\sqrt{1+r^2}-1\le z\le 2, \quad 0\le r\le 2\sqrt{2}, \quad 0\le\vartheta\le 2\pi.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{x^2y^2z}{(x^2+y^2)^2}\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{2}}\int_{\sqrt{1+r^2}-1}^{2} zr\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\,dzdrd\vartheta = \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\sqrt{2}} r\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{1+r^2}-1}^{2} dr = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{r}{2}\left(4-(\sqrt{1+r^2}-1)^2\right)dr = \\
&= \frac{\pi}{8}\int_0^{2\sqrt{2}}(2r-r^3+2r\sqrt{1+r^2})\,dr = \\
&= \frac{\pi}{8}\left(\left[r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\sqrt{2}}+\int_0^8\sqrt{1+t}\,dt\right) = \\
&= \frac{\pi}{8}(8-16)+\frac{\pi}{8}\left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \\
&= -\pi+\frac{\pi}{12}(27-1) = -\pi+\frac{13}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (i) La serie è costituita da funzioni pari, quindi possiamo limitarci a vedere cosa succede per $x\ge 0$: ciò che vale per x, vale ugualmente per $-x$.
Se $|1-x^2|<1$, vale a dire $0<x^2<2$, ossia $0<x<\sqrt{2}$, la serie converge assolutamente, per confronto con la serie geometrica di ragione $|1-x^2|$.
Se $|1-x^2|\ge 1$, vale a dire $x^2=0$ oppure $x^2\ge 2$, ossia $x=0$ oppure $x\ge\sqrt{2}$, la serie dei valori assoluti diverge, per confronto con la serie armonica. In definitiva, per $x\ge 0$ la serie converge assolutamente se e solo se $0<x<\sqrt{2}$.

(ii) La convergenza puntuale vale dove c'è quella assoluta, ossia per $0<x<\sqrt{2}$, e non c'è né per $x=0$, né per $x>\sqrt{2}$: infatti per $x=0$ la serie si riduce alla serie armonica, mentre per $x>\sqrt{2}$ il termine generale non è infinitesimo. Vi è invece convergenza puntuale per $x=\sqrt{2}$, perché in tale punto la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ e si applica il criterio di Leibniz. In definitiva, per $x\ge 0$ la serie converge puntualmente quando $0<x\le\sqrt{2}$.

(iii) La serie converge uniformemente in ogni intervallo della forma $[\delta,\sqrt{2}-\delta]$, con δ positivo e piccolo: infatti in tali intervalli vi è addirittura convergenza totale, poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[\delta,\sqrt{2}-\delta]}\frac{|1-x^2|^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\delta^2)^n}{n}<\sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta^2)^n<\frac{1}{\delta^2}<\infty.$$

Ma si ha convergenza uniforme anche in $[1, \sqrt{2}]$: infatti, grazie alla stima del resto N-simo fornita dal criterio di Leibniz, si ha

$$\sup_{x \in [1,\sqrt{2}]} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n} \right| = \sup_{x \in [1,\sqrt{2}]} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2-1)^n}{n} \right| \leq \frac{(x^2-1)^N}{N} \leq \frac{1}{N},$$

e quindi

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{x \in [1,\sqrt{2}]} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n} \right| = 0.$$

Per $x \geq 0$, avendosi convergenza uniforme in $[\delta, \sqrt{2}-\delta]$ e in $[1, \sqrt{2}]$, la si avrà in $[\delta, \sqrt{2}-\delta] \cup [1, \sqrt{2}] = [\delta, \sqrt{2}]$ per ogni δ positivo e piccolo.

Osservazione Si può anche calcolare la somma della serie. Infatti, se $|1-x^2| < 1$, posto $t = 1 - x^2$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t s^{n-1}\, ds,$$

e poiché la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1}$ converge uniformemente in $[-|t|, |t|]$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1}\, ds = \int_0^t \frac{1}{1-s}\, ds = [-\ln(1-s)]_0^t = \ln \frac{1}{1-t}.$$

Pertanto, se $|1-x^2| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n} = \ln \frac{1}{1-(1-x^2)} = \ln \frac{1}{x^2}.$$

Quando $x \geq 0$, questa relazione vale per $0 < x < \sqrt{2}$; tuttavia, utilizzando la stima fornita dal criterio di Leibniz, il risultato si estende anche a $x = \sqrt{2}$.

Prova scritta del 22 febbraio 2016

Esercizio 1 Nella regione pianeggiante circolare di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$, due corsi d'acqua percorrono approssimativamente le curve di equazioni

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y - x + 1 = 0.$$

Si vogliono collegare i due fiumi mediante un canale rettilineo di lunghezza minima. In quali punti si troveranno le due estremità del canale, e quale sarà la lunghezza del canale stesso?

Esercizio 2 Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3xy^2, -x^2yz, (y^3 + x^3)z).$$

Si calcoli il flusso del rotore di F attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \; 0 \leq z \leq 2\right\},$$

orientata secondo la normale che in $(0, 0, 0)$ vale $(0, 0, ?1)$.

Esercizio 3 Si determini la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{|x|}{2}, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Esercizio 4 Sia $\{f_n\}$ la successione definita da

$$f_n(x, y) = \frac{(2x)^n}{1 + (2x)^n}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Stabilire in quali punti la successione converge puntualmente, e trovarne il limite f.

(ii) Determinare in quali sottoinsiemi $E \subseteq \mathbb{R}$ risulta $f_n \to f$ uniformemente in E.

Esercizio 5 Sia Γ la curva descritta, in coordinate polari, dall'equazione

$$r = 6(1 + \cos\vartheta), \qquad -\pi \leq \vartheta \leq \pi.$$

(i) Si scriva l'equazione della retta tangente a Γ nel punto $\big(3(\sqrt{2} + 1), 3(\sqrt{2} + 1)\big)$.

(ii) Si determini la lunghezza di Γ.

Esercizio 6 Si calcoli l'integrale

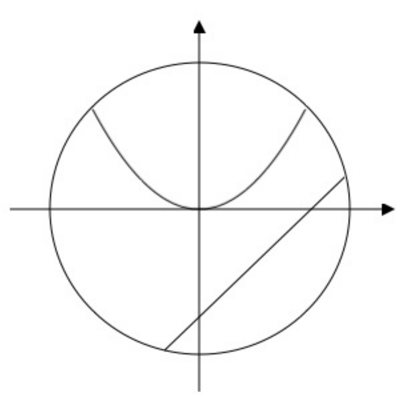
$$\int_E x\sqrt{1 - y^2}\, dxdydz,$$

ove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq 1, \; 0 \leq z \leq \sqrt{2} - x - y\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La regione che ci interessa è descritta nella figura sottostante.



Il canale da costruire è rappresentato da un segmento che unisce un punto della parabola $y = x^2$ ad un punto della retta $y = x-2$. Si tratterà di scegliere i due punti in modo che la lunghezza del segmento sia minima. I punti della parabola sono della forma (t, t^2), metre quelli della retta hano la forma $(s, s-2)$. La distanza fra questi due punti, cioè la lunghezza del segmento che li unisce, è

$$g(s,t) = \sqrt{(t-s)^2 + (t^2 - s + 1)^2};$$

le variabili t e s sono vincolate a descrivere punti del disco $x^2 + y^2 \leq 2$, quindi devono valere le disuguaglianze

$$t^2 + t^4 \leq 2, \qquad s^2 + (s-1)^2 \leq 2,$$

vale a dire

$$-1 \leq t \leq 1, \qquad \frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq s \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Per eliminare le radici conviene minimizzare $f := g^2$, invece di g. Il problema diventa allora quello di trovare il minimo di

$$f(s,t) = (t-s)^2 + (t^2 - s + 1)^2, \qquad (s,t) \in \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right] \times [-1, 1].$$

Annullando il gradiente di f si ottiene il sistema

$$\begin{cases} f_s(s,t) = -2(t-s) - 2(t^2 - s + 1) = 0 \\ f_t(s,t) = 2(t-s) + 4t(t^2 - s + 1) = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} s - t = t^2 - s + 1 \\ s - t = 2t(t^2 - s + 1), \end{cases}$$

Se $s - t = 0$, ossia $s = t$, si deduce $0 = t^2 - s + 1 = s^2 - s + 1$, equazione che non ha soluzioni reali. Quindi $s - t \neq 0$, e confrontando le due equazioni è evidente che deve essere $t = \frac{1}{2}$, da cui $s - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} - s$ e dunque $s = \frac{7}{8}$.
Essendo

$$f_{ss}(s,t) = 4, \quad f_{st}(s,t) = f_{ts}(s,t) = -2 - 4t, \quad f_{tt}(s,t) = 12t^2 - 4s + 6,$$

la matrice Hessiana di f nel punto $\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right)$ è

$$H_f\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & \frac{11}{2} \end{pmatrix},$$

e si riconosce che essa è definita positiva. Pertanto il punto $\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right)$ è di minimo relativo per f, con

$$f\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{64} + \frac{9}{64} = \frac{9}{32}.$$

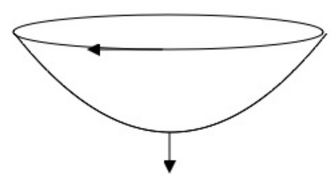
Osserviamo adesso che: (a) la funzione f ha solo questo punto stazionario; (b) risulta

$$\lim_{\sqrt{s^2+t^2}\to+\infty} f(s,t) = +\infty.$$

Ciò si prova nel modo seguente: se $\sqrt{s^2+t^2} \to +\infty$ mantenendo la quantità $|t-s|$ limitata, allora s e t tendono simultaneamente a $+\infty$ e sono infiniti dello stesso ordine; pertanto $t^2 - s + 1 \to +\infty$ e dunque $f(s,t) \to +\infty$. Se invece $|t-s|$ non è limitata, allora ovviamente, a maggior ragione, $f(s,t) \to +\infty$.
Da questi due fatti segue che la f deve avere un minimo assoluto nel punto $\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right)$; dunque è inutile esaminare il comportamento di f sul bordo del rettangolo $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right] \times [-1,1]$. Al punto di minimo trovato corrispondono sulla parabola il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e sulla retta il punto $\left(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}\right)$, punti che costituiranno le due estremità del canale. La lunghezza effettiva del canale sarà

$$g\left(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}\right) = \sqrt{f\left(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}\right)} = \frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

Esercizio 2 Il bordo di Σ è la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ sul piano $z = 2$. Volendo applicare il teorema di Stokes, occorre orientare tale circonferenza in modo coerente con l'orientazione della normale $\mathbf{n}$ a Σ, che è quella la cui terza componente è negativa.



Dobbiamo quindi percorrere $b\Sigma$ in verso orario. Scegliendo per $b\Sigma$ la parametrizzazione

$$x = 2\cos\vartheta, \quad y = 2\sin\vartheta, \quad z = 2,$$

l'orientazione associata $\boldsymbol{\tau}$ è quella opposta: se scegliamo la nostra parametrizzazione, dovremo scrivere dunque

$$\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds = -\int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma.$$

Per l'integrale a primo membro si ha, essendo $x' = -2\sin\vartheta$, $y' = 2\cos\vartheta$, $z' = 0$,

$$\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds = \int_0^{2\pi} (-48\cos\vartheta\sin^3\vartheta - 32\cos^3\vartheta\sin\vartheta) \, d\vartheta = 0$$

per periodicità e disparità dell'integrando, e pertanto

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma = 0.$$

Esercizio 3 La funzione f è pari, quindi i coefficienti di Fourier b_n, relativi ai seni, sono tutti nulli. Per i coefficienti a_n, relativi ai coseni, si ha:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{|x|}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{|x|}{2}\right)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx = \\ &= 0-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\cos nx\,dx = -\frac{1}{n\pi}\left[x\,\sin nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \\ &= -\frac{1}{n^2\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}. \end{aligned}$$

Dunque risulta

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{2}{n^2\pi} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

La serie di Fourier di f è quindi, ponendo $n = 2k+1$,

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x.$$

Osserviamo che il prolungamento 2π-periodico della funzione f è continuo e ha in tutti i punti derivata destra e sinistra finite, la somma della serie è $f(x)$ in tutti i punti di $[-\pi,\pi]$. Calcolando per $x=0$ si ottiene

$$\frac{\pi}{4} = f(0) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2},$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Esercizio 4 La successione $\{f_n\}$ non è definita in $\overline{x} = -\frac{1}{2}$, in quanto per n dispari si ha $(2\overline{x})^n + 1 = 0$. Per $x \neq -\frac{1}{2}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2x)^n}{1+(2x)^n} = \begin{cases} 1 & \text{se } 2x > 1, \text{ ossia } x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } 2x = 1, \text{ ossia } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } |2x| < 1, \text{ ossia } |x| < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } 2x < -1, \text{ ossia } x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Tutte queste deduzioni sono facili, tranne forse che nel caso $2x < -1$, cin cui, raccogliendo a numeratore e denominatore il termine che tende a infinito, si trova:

$$\frac{(2x)^n}{1+(2x)^n} = \begin{cases} \frac{1}{|2x|^{-n}+1} \to 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{1-|2x|^{-n}} \to 1 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

dato che la funzione limite è discontinua, per la convergenza uniforme dovremo escludere un intorno di ciascuno dei punti $\pm\frac{1}{2}$. In effetti, consideriamo per $\delta > 0$ (piccolo) e $M > 0$ (grande) fissati, gli intervalli $I_1 =]-\infty, -\frac{1}{2}-\delta]$, $I_2 = [-\frac{1}{2}+\delta, \frac{1}{2}-\delta]$, $I_3 = [\frac{1}{2}+\delta, +\infty[$. Su I_1 si ha

$$|f_n(x) - 1| = \frac{1}{1-|2x|^{-n}} - 1 \leq \frac{1}{1-(1+2\delta)^{-n}} - 1 \qquad \forall x \in I_1,$$

da cui per confronto

$$\sup_{x\in I_1} |1 - f_n(x)| \leq \frac{1}{1-(1+2\delta)^{-n}} - 1 \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Su I_2 si ha

$$|f_n(x)| \leq \frac{|2x|^n}{|1+(2x)^n|} \leq \frac{(1-2\delta)^n}{1-(1-2\delta)^n} \qquad \forall x \in I_2,$$

da cui per confronto

$$\sup_{x\in I_1} |f_n(x)| \leq \frac{(1-2\delta)^n}{1-(1-2\delta)^n} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Infine, su I_3 si ha

$$|f_n(x) - 1| = 1 - \frac{1}{|2x|^{-n}+1} \leq 1 - \frac{1}{(1+2\delta)^{-n}+1} \qquad \forall x \in I_3,$$

da cui per confronto

$$\sup_{x\in I_3} |1 - f_n(x)| \leq 1 - \frac{1}{(1+2\delta)^{-n}+1} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Esercizio 5 (i) Il punto $\big(3(\sqrt{2}+1), 3(\sqrt{2}+1)\big)$, avendo l'ascissa uguale all'ordinata, deve corrispondere all'angolo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, ed infatti per tale valore di ϑ si ha

$$\begin{aligned} x &= 6(1+\cos\vartheta)\cos\vartheta = \tfrac{6}{\sqrt{2}} + 3 = 3\left(\sqrt{2}+1\right), \\ y &= 6(1+\cos\vartheta)\sin\vartheta = \tfrac{6}{\sqrt{2}} + 3 = 3\left(\sqrt{2}+1\right). \end{aligned}$$

Inoltre, per $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ si ha

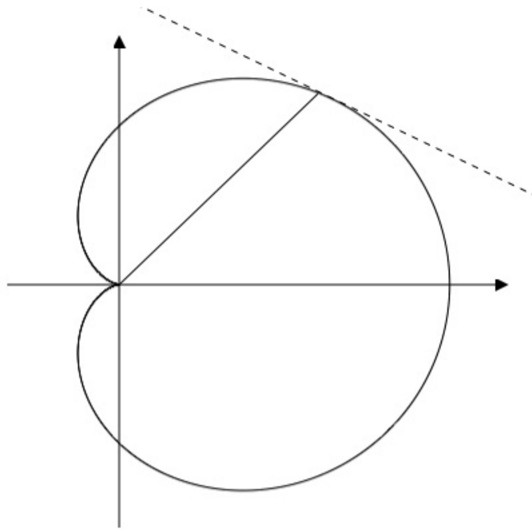
$$\begin{aligned} x' &= -6\sin\vartheta\cos\vartheta - 6(1+\cos\vartheta)\sin\vartheta = -3 - 3\left(\sqrt{2}+1\right) = -6 - 3\sqrt{2}, \\ y' &= -6\sin^2\vartheta + 6(1+\cos\vartheta)\cos\vartheta = -3 + 3\left(\sqrt{2}+1\right) = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Le equazioni parametriche della retta tangente a Γ in $\big(3(\sqrt{2}+1), 3(\sqrt{2}+1)\big)$ sono quindi

$$\begin{cases} x = 3\left(\sqrt{2}+1\right) - (6+3\sqrt{2})t \\ y = 3\left(\sqrt{2}+1\right) + 3\sqrt{2}\,t. \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R};$$

eliminando t si ottiene l'equazione cartesiana

$$y - 3\left(\sqrt{2}+1\right) = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}\left(x - 3(\sqrt{2}+1)\right).$$



(ii) Per la lunghezza di una curva Γ, espressa in coordinate polari nella forma $r = g(\vartheta)$, $a \le \vartheta \le b$, c'è la ben nota formula

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\vartheta)^2 + g'(\vartheta)^2}\, d\vartheta.$$

Posto allora $g(\vartheta) = 6(1+\cos\vartheta)$, si ha $g'(\vartheta) = -6\sin\vartheta$ e dunque

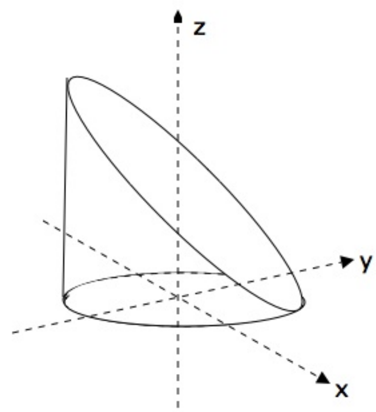
$$\ell(\Gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} 6\sqrt{(1+\cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta}\, d\vartheta = 2\int_0^{\pi} 6\sqrt{2+2\cos\vartheta}\, d\vartheta.$$

Essendo $2 + 2\cos\vartheta = 4\cos^2\frac{\vartheta}{2}$, otteniamo, tenuto conto che $\cos\frac{\vartheta}{2} \ge 0$ in $[0,\pi]$,

$$\ell(\Gamma) = 12\int_0^{\pi} 2\cos\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta = 48\left[\sin\frac{\vartheta}{2}\right]_0^{\pi} = 48.$$

Esercizio 6 L'integrando non dipende da z. L'uso delle coordinate cilindriche è poco indicato, perché genererebbe termini della forma $\sqrt{1 - r^2\sin^2\vartheta}$ che poi si maneggerebbero con difficoltà: utilizziamo allora le consuete coordinate cartesiane.
Si ha

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ -1 \le y \le 1,\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2},\ 0 \le z \le \sqrt{2} - x - y\},$$



e dunque

$$\begin{aligned}\int_E x\sqrt{1-y^2}\,dxdydz &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{2}-x-y} x\sqrt{1-y^2}\,dzdxdy = \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\sqrt{1-y^2}(\sqrt{2}-x-y)\,dxdy = \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}(\sqrt{2}\,x-x^2-xy)\,dxdy.\end{aligned}$$

Si tratta di tre integrali su intervalli simmetrici, il primo e terzo dei quali si annullano per disparità dell'integrando rispetto a x o a y. Si ha dunque, usando la parità del secondo integrando,

$$\begin{aligned}\int_E x\sqrt{1-y^2}\,dxdydz &= -4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2\sqrt{1-y^2}\,dxdy = \\ &= -\frac{4}{3}\int_0^1 (1-y^2)^2\,dy = -\frac{4}{3}\int_0^1 (1-2y^2+y^4)\,dy = -\frac{32}{45}.\end{aligned}$$

Prova scritta del 10 giugno 2016

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 - xy^3 + y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Posto $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) = 1\}$, si provi che esiste una funzione implicita della forma $y = g(x)$ definita in un intorno U di $x = 1$, di classe C^∞, tale che $f(x,g(x)) = 1$ in U.

(ii) Si scriva il polinomio di Taylor di g, centrato in 1, di grado 2.

(iii) Si mostri che g è invertibile e si scriva esplicitamente g^{-1}.

Esercizio 2 Si trovino il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + z^2 - z$$

nell'insieme

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le x^2+y^2 \le 1, \ 0 \le z \le 1\}.$$

Esercizio 3 Si determini, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^e \frac{n \, \ln x + x}{nx + x^2 \ln x} \, dx.$$

Esercizio 4 Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 - z^2, y^2 + x^2, z^2 - y^2)$$

attraverso la superficie conica

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = -\sqrt{x^2+y^2}, \ -1 \le z \le 0\}$$

orientata secondo la normale esterna al cono.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Per $x = 1$ risulta $f(1,y) = 1 - y^3 + y = 1$ se e solo se $y^3 + y = 0$, dunque, se e solo se $y = 1$, oppure $y = 0$, oppure $y = -1$. Inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3xy^2 + 1,$$

e quindi

$$\begin{cases} \nabla f(1,1) = (1,-2) \ne (0,0), \\ \nabla f(1,0) = (2,1) \ne (0,0), \\ \nabla f(1,-1) = (3,-2) \ne (0,0). \end{cases}$$

Il teorema del Dini assicura allora l'esistenza di tre funzioni $g_1, \ g_2, \ g_3$, definite in un intorno U del punto 1, di classe C^1, tali che $f(x, g_1(x)) = f(x, g_2(x)) = f(x, g_3(x)) = 1$ in U, ed in particolare $g_1(1) = 1$, $g_2(1) = 0$, $g_3(1) = -1$. Poiché F è di classe C^∞, anche $g_1, \ g_2, \ g_3$ sono di classe C^∞.

(ii) Si ha per ogni $x \in U$

$$x^2 - x[g_i(x)]^3 + g_i(x) = 1, \qquad i = 1,2,3,$$

da cui, derivando una volta,

$$2x - [g_i(x)]^3 - 3x[g_i(x)]^2 g_i'(x) + g_i'(x) = 0, \qquad i = 1,2,3,$$

ovvero

$$(1 - 3x[g_i(x)]^2) g_i'(x) = [g_i(x)]^3 - 2x;$$

in particolare, essendo $g_1(1) = 1$, $g_2(1) = 0$, $g_3(1) = -1$, si ha

$$g_1'(1) = \frac{1-2}{1-3} = \frac{1}{2}, \qquad g_2'(1) = \frac{-2}{1} = -2, \qquad g_3'(1) = \frac{-1-2}{1-3} = -\frac{3}{2}.$$

Derivando una seconda volta, si ha per $i = 1, 2, 3$

$$2 - 3[g_i(x)]^2 g_i'(x) - 3[g_i(x)]^2 g_i'(x) - 6x\, g_i(x)[g_i'(x)]^2 - 3x[g_i(x)]^2 g_i''(x) + g_i''(x) = 0,$$

ovvero

$$(1 - 3x[g_i(x)]^2) g_i''(x) = -2 + 6[g_i(x)]^2 g_i'(x) + 6x\, g_i(x)[g_i'(x)]^2, \qquad i = 1, 2, 3;$$

dunque, essendo $g_1'(1) = \frac{1}{2}$, $g_2'(1) = -2$, $g_3'(1) = -\frac{3}{2}$, si ha

$$g_1''(1) = \frac{-2+3+\frac{3}{2}}{1-3} = -\frac{5}{4}, \quad g_2''(1) = \frac{-2+0+0}{1} = -2, \quad g_3''(1) = \frac{-2-9-\frac{27}{2}}{1-3} = \frac{49}{4}.$$

Dunque i polinomi di Taylor delle g_i, centrati in 1, di grado 2 sono

$$\begin{cases} p_1(x) = g_1(1) + g_1'(1)(x-1) + \frac{1}{2} g_1''(1)(x-1)^2 = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{5}{8}(x-1)^2, \\ p_2(x) = g_2(1) + g_2'(1)(x-1) + \frac{1}{2} g_2''(1)(x-1)^2 = -2(x-1) - (x-1)^2, \\ p_3(x) = g_3(1) + g_3'(1)(x-1) + \frac{1}{2} g_3''(1)(x-1)^2 = -1 - \frac{3}{2}(x-1) + \frac{49}{8}(x-1)^2. \end{cases}$$

(iii) Dato che $\frac{\partial f}{\partial x}$ è non nulla in $(1, 1)$, in $(1, 0)$ e in $(1, -1)$, l'insieme Z può anche essere descritto:

- in un intorno di $y = 1$, dal grafico di una funzione $x = h_1(y)$, ove necessariamente $h_1(y) = g_1^{-1}(y)$:
- in un intorno di $y = 0$, dal grafico di una funzione $x = h_2(y)$, ove necessariamente $h_2(y) = g_2^{-1}(y)$:
- in un intorno di $y = -1$, dal grafico di una funzione $x = h_3(y)$, ove necessariamente $h_3(y) = g_3^{-1}(y)$.

D'altronde, l'uguaglianza $f(x, y) = 1$ si può esplicitare rispetto a x, essendo un'equazione di secondo grado in x: si ha in effetti

$$x = h_i(y) = \frac{y^3 \pm \sqrt{y^6 - 4(y-1)}}{2}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

e dovendo essere $h_1(1) = 1$, $h_2(0) = 1$, $h_3(-1) = 1$, occorre scegliere in tutti e tre i casi il segno $+$. Pertanto

$$h_i(y) = g_i^{-1}(y) = \frac{y^3 + \sqrt{y^6 - 4(y-1)}}{2}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Esercizio 2 (i) L'insieme C è un cilindro pieno di asse l'asse z e raggio 1, delimitato dai piani $z = 0$ e $z = 1$. La funzione f non è differenziabile nei punti $(0, 0, z)$, nei quali

$f(0,0,z) = z^2 - z$: questa quantità è minima per $z = \frac{1}{2}$, dove vale $-\frac{1}{4}$, e massima per $z = 0$ e $z = 1$, dove vale 0. Nei punti (x,y,z) con $(x,y) \neq (0,0)$ si ha

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z-1 \right),$$

quindi in tali punti il gradiente non si annulla mai.
Non resta che lo studio sulla frontiera di C, che è fatta di tre parti: il disco $D_0 = \{(x,y,z) : \ x^2+y^2 \leq 1, \ z = 0\}$, il disco $D_1 = \{(x,y,z) : \ x^2+y^2 \leq 1, \ z = 1\}$, e la superficie laterale $S = \{(x,y,z) : \ x^2+y^2 = 1, \ 0 \leq z \leq 1\}$. Su D_0 si ha

$$f(x,y,0) = \sqrt{x^2+y^2},$$

dunque f è minima per $x = y = 0$, dove vale 0, ed è massima per $x^2+y^2 = 1$, dove vale 1. Esattamente lo stesso accade su D_1, dato che

$$f(x,y,1) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Lungo S si ha

$$f(x,y,z) = 1 + z^2 - z,$$

dunque f è minima per $z = \frac{1}{2}$ dove vale $\frac{3}{4}$, ed è massima per $z = 0$ e $z = 1$, dove vale 1. In definitiva

$$\max_C f = f(\cos t, \sin t, 0) = f(\cos t, \sin t, 1) = 1 \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

mentre

$$\min_C f = f\left(0, 0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Esercizio 3 La funzione integranda converge puntualmente: infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln x + x}{nx + x^2 \ln x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x + \frac{x}{n}}{x + \frac{x^2 \ln x}{n}} = \frac{\ln x}{x}.$$

Inoltre per ogni $x \in [1, e]$ e per ogni $n \geq 1$ si ha

$$0 \leq \frac{n \ln x + x}{nx + x^2 \ln x} \leq \frac{\ln x + \frac{e}{n}}{x} \leq \frac{\ln x + e}{x},$$

e siccome la funzione $\frac{\ln x + e}{x}$ è sommabile in $[1, e]$, possiamo concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^e \frac{n \ln x + x}{nx + x^2 \ln x}\, dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4 La superficie è descritta in coordinate cilindriche dalla relazione $r = -z$, con $z \in [-1, 0]$, e pertanto si parametrizza nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = -z\cos\vartheta, \\ y = -z\sin\vartheta, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi], \qquad z \in [-1, 0]. \\ z = z, \end{cases}$$

La matrice delle derivate è

$$\begin{pmatrix} -\cos\vartheta & z\,\sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & -z\,\cos\vartheta \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

il vettore normale associato a questa parametrizzazione è

$$\mathbf{n} = (z\,\cos\vartheta, z\,\sin\vartheta, z),$$

ed essendo la terza componente negativa, la sua orientazione è opposta a quella richiesta. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle\, d\sigma &= -\int_{-1}^{0}\int_0^{2\pi} [z^3(\cos^2\vartheta - 1)\cos\vartheta + z^3\sin\vartheta + z^3(1-\sin^2\vartheta)]d\vartheta dz = \\
&= \int_{-1}^{0}\int_0^{2\pi} [z^3\sin^2\vartheta\cos\vartheta - z^3\sin\vartheta - z^3\cos^2\vartheta]d\vartheta dz = \\
&= 0 + 0 - \pi\int_{-1}^{0} z^3\,dz = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Osservazione Si può anche fare uso del teorema della divergenza: sia C il cono pieno

$$C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2 \le -z,\ z\in[-1,0]\},$$

e sia D la sua base:

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=-1,\ x^2+y^2\le 1\}.$$

Possiamo scrivere

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle\, d\sigma + \int_D \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle\, d\sigma = \int_C \operatorname{div}\mathbf{F}\, dxdydz.$$

Poiché la normale esterna a D è $(0,0,-1)$, usando su D le coordinate polari si ha

$$\int_D \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle\, d\sigma = -\int_D (1-y^2)dxdy = -\int_0^1\int_0^{2\pi} r(1-r^2\sin^2\vartheta)d\vartheta dr = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}\,,$$

mentre

$$\begin{aligned}
\int_C \operatorname{div}\mathbf{F}\, dxdydz &= \int_C (2x+2y+2z)dxdydz = 0+0+2\int_C z\,dxdydz = \\
&= 2\int_{-1}^{0}\int_0^{|z|}\int_0^{2\pi} zr\,d\vartheta dr dz = 2\pi\int_{-1}^{0} z^3\,dz = -\frac{\pi}{2};
\end{aligned}$$

pertanto

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle\, d\sigma = \int_C \operatorname{div}\mathbf{F}\, dxdydz - \int_D \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle\, d\sigma = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Prova scritta del 1° luglio 2016

Esercizio 1 Si trovino il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^3$$

nell'insieme $E = \{(x,y,z) : \ x^2 + y^2 \le z \le 1\}$.

Esercizio 2 Sia S la superficie costituita dalla "scatola da scarpe"

$$S = \big[[0,2] \times [0,1] \times \{0\}\big] \cup \{(x,y,z) : \ (x,y) \in \partial\left([0,2] \times [0,1]\right), \ 0 \le z \le 1\},$$

orientata secondo la normale esterna. Si calcoli il flusso attraverso la superficie S del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2yz, z^2 - 2xz).$$

Esercizio 3 Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ sia

$$f_n(x) = \frac{e^{-x/n}}{1 + x^2 + e^{-n/x}}, \quad x > 0.$$

(i) Si determini il limite puntuale $f(x)$ della successione $\{f_n\}$.

(ii) Si dimostri che $f_n \to f$ uniformemente in $]0,a]$ per ogni $a > 0$.

(iii) Si ha convergenza uniforme anche in $]0,\infty[$?

(iv) Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx.$$

Esercizio 4 (i) Fissato $k \in \mathbb{R}$, si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - y(x)\,\tan x = \frac{1}{\cos x}, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ y(0) = k, \end{cases}$$

ove $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Si trovi k, se esiste, tale che la corrispondente soluzione verifichi

$$\exists \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} y(x) \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5 Sia Γ la curva la curva del piano $\mathbb{R}^2$ definita in coordinate polari dalla relazione

$$r = \sin^2\vartheta, \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi.$$

Si calcoli:

(i) l'area della regione piana D delimitata da Γ;

(ii) l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\,ds,$$

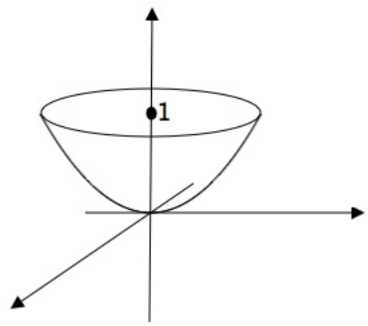
ove

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2, -y^2)$$

e $\boldsymbol{\tau}$ è il versore tangente a Γ orientato in verso antiorario.

Risoluzione

Esercizio 1 L'insieme E è un paraboloide pieno, con minimo nell'origine, simmetrico rispetto all'asse z, contenuto nella regione $0 \leq z \leq 1$. Cerchiamo i punti stazionari di f interni a E: in questi punti risulta $0 < x^2 + y^2 < z < 1$. Si ha



$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2, -3y^2, 3z^2),$$

quindi il gradiente è nullo solo nell'origine, che non è un punto interno.
Sul tappo superiore T, descritto da

$$T = \{(x, y, z) : \ z = 1, \ x^2 + y^2 \leq 1\},$$

si ha

$$g(x, y) := f(x, y, 1) = x^3 - y^3 + 1, \qquad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Il gradiente di g si annulla (ovviamente) solo nell'origine: tale punto corrisponde al punto $(0, 0, 1) \in T$, nel quale $f(0, 0, 1) = 1$. Sul bordo di T, possiamo scrivere

$$x = \cos\vartheta, \quad y = \sin\vartheta, \quad z = 1, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi];$$

la funzione

$$h(\vartheta) = g(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = f(\cos\vartheta, \sin\vartheta, 1) = \cos^3\vartheta - \sin^3\vartheta + 1$$

verifica

$$h'(\vartheta) = -3\cos^2\vartheta \sin\vartheta - 3\sin^2\vartheta \cos\vartheta = -3\cos\vartheta \sin\vartheta(\cos\vartheta + \sin\vartheta),$$

e tale derivata si annulla in $[0, 2\pi[$ per:

- $\vartheta = 0$, con $h(0) = f(1, 0, 1) = 2$;
- $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, con $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0, 1, 1) = 0$;
- $\vartheta = \pi$, con $h(\pi) = f(-1, 0, 1) = 0$;
- $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$, con $h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f(0, -1, 1) = 0$;
- $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$, con $h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1$;
- $\vartheta = \frac{7\pi}{4}$, con $h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$.

Rimane la superficie S del paraboloide, descritta da

$$S = \{(x, y, z): \; z = x^2 + y^2 < 1\}.$$

Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori: posto

$$L(x, y, z, \lambda) = x^3 - y^3 + z^3 + \lambda(z - x^2 - y^2),$$

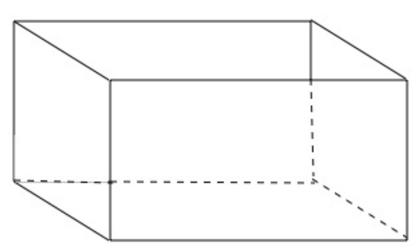
si ha, annullando il gradiente di L,

$$\begin{cases} 3x^2 - 2\lambda x = x(3x - 2\lambda) = 0 \\ -3y^2 - 2\lambda y = y(3y + 2\lambda) = 0 \\ 3z^2 + \lambda = 0. \\ z - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Se $x = 0$, dalla terza equazione segue $y = 0$ oppure $\lambda = -\frac{3y}{2}$. Nel primo caso, la quarta equazione dà $z = 0$, quindi si trova il punto stazionario vincolato $(0, 0, 0)$, con $f(0, 0, 0) = 0$; nel secondo caso, dalla quarta equazione segue $z = y^2$, mentre la seconda e terza ci dicono che $-\frac{3y}{2} = \lambda = -3z^2 = -3y^4$, ossia $y^3 = \frac{1}{2}$, cioè $y = 2^{-1/3}$ e $z = 2^{-2/3}$. Si ha quindi il punto stazionario vincolato $(0, 2^{-1/3}, 2^{-2/3})$, con $f(0, 2^{-1/3}, 2^{-2/3}) = -\frac{1}{4}$. Similmente, se $y = 0$ si ha dalla seconda equazione $x = 0$ oppure $\lambda = \frac{3x}{2}$. Nel primo caso si trova nuovamente l'origine; nel secondo caso, si ottiene $z = x^2$, $\frac{3x}{2} = \lambda = -3z^2 = -3x^4$, da cui, come prima, $x = -2^{-1/3}$ e $z = 2^{-2/3}$. Si ha quindi il punto stazionario vincolato $(-2^{-1/3}, 0, 2^{-2/3})$, con $f(-2^{-1/3}, 0, 2^{-2/3}) = -\frac{1}{4}$. Infine, se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ si ha $\lambda = \frac{3x}{2} = -\frac{3y}{2} = -3z^2$, da cui $x = -y = -2z^2$; dunque $z = x^2 + y^2 = 8z^4$, ovvero $z = \frac{1}{2}$, e pertanto $x = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$. Si ha quindi il punto stazionario vincolato $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, con $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$.
In conclusione, confrontando i valori trovati, si ha

$$\max_E f = f(1, 0, 1) = 2, \qquad \min_E f = f(0, 2^{-1/3}, 2^{-2/3}) = f(-2^{-1/3}, 0, 2^{-2/3}) = -\frac{1}{4}.$$

Esercizio 2 La superficie S è regolare a tratti ed ha 5 facce rettangolari i cui versori normali sono paralleli ad uno degli assi cartesiani. Dobbiamo calcolare l'integrale



$$\int_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma,$$

ove $\mathbf{n}$ è il versore normale esterno a S.
Si potrebbe calcolare l'integrale direttamente, come somma di 5 pezzi (su ognuno dei quali conta una sola componente di $\mathbf{F}$), e il calcolo non sarebbe difficile.
Alternativamente, si può utilizzare il teorema della divergenza sul parallelepipedo rettangolo $P = [0, 2] \times [0, 1] \times [0, 1]$: la faccia superiore S_1 di questo parallelepipedo non é compresa in S, e quindi si ottiene

$$\int_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma = \int_P \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz - \int_{S_1} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma.$$

Inoltre, osservando che

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 2x - 2y + 2y - 2z + 2z - 2x = 0,$$

ricaviamo

$$\int_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle\, d\sigma = -\int_{S_1} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle\, d\sigma,$$

e non ci resta che calcolare l'ultimo integrale. Si ha

$$S_1 = \{(x,y,z):\ x \in [0,2],\ y \in [0,1], z = 1\}, \qquad \mathbf{n} = (0,0,1),$$

e pertanto $\langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle = z^2 - 2xz = 1 - 2x$ su S_1, da cui

$$\int_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle\, d\sigma = -\int_{S_1} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle\, d\sigma = -\int_0^2 \int_0^1 (1-2x)dydx = \int_0^2 (2x-1)dx = 2.$$

Esercizio 3 (i) Poiché gli argomenti delle esponenziali sono negativi, e tendono a 0 (a numeratore) ed a $-\infty$ (a denominatore), risulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

(ii) Fissato $a > 0$, risulta per ogni $x \in]0,a]$

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq\ \frac{1}{1+x^2} - f_n(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{e^{-x/n}}{1+x^2+e^{-n/x}} = \frac{1+x^2+e^{-n/x} - (1+x^2)e^{-x/n}}{(1+x^2)(1+x^2+e^{-n/x})} = \\ &=\ \frac{(1+x^2)(1-e^{-x/n}) + e^{-n/x}}{(1+x^2)(1+x^2+e^{-n/x})} \leq \frac{(1+a^2)(1-e^{-a/n}) + e^{-n/a}}{(1+x^2)(1+x^2+e^{-n/x})} \leq \\ &\leq\ (1+a^2)(1-e^{-a/n}) + e^{-n/a}, \end{aligned}$$

e l'ultimo membro tende a 0 uniformemente in $]0,a]$.

(iii) La risposta è sì. Infatti, sia $\varepsilon > 0$: esiste $a_\varepsilon > 0$, sufficientemente grande, tale che $1 + x^2 > 2/\varepsilon$ per ogni $x > a_\varepsilon$. Quindi, per $x > a_\varepsilon$ si ha

$$0 \leq \frac{1}{1+x^2} - f_n(x) \leq \frac{(1+x^2)(1-e^{-x/n}) + e^{-n/x}}{(1+x^2)^2} \leq \frac{2}{1+x^2} < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

D'altra parte, per (ii) vi è convergenza uniforme in $]0,a_\varepsilon]$, quindi esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$0 \leq \frac{1}{1+x^2} - f_n(x) \leq \varepsilon \qquad \forall x \in]0,a_\varepsilon], \quad \forall n \geq \nu_\varepsilon\,.$$

Pertanto, si ha

$$0 \leq \frac{1}{1+x^2} - f_n(x) \leq \varepsilon \qquad \forall x > 0, \quad \forall n \geq \nu_\varepsilon\,,$$

che è la tesi.

(iv) Si può osservare che il numeratore è positivo e crescente rispetto a n, mentre il denominatore è positivo e decrescente rispetto a n. Ne segue

$$f_n(x) < f_{n+1}(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall x > 0.$$

Pertanto, per il teorema di B. Levi,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-x/n}}{1+x^2+e^{-n/x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Naturalmente si poteva più semplicemente notare che, poiché l'esponenziale a numeratore ha argomento negativo, risulta

$$f_n(x) = \frac{e^{-x/n}}{1+x^2+e^{-n/x}} \le \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad x > 0;$$

la tesi segue allora per convergenza dominata.

Esercizio 4 (i) Moltiplichiamo l'equazione per $\cos x$: si ottiene

$$y'(x)\,\cos x - y(x)\,\sin x = 1,$$

ossia

$$\frac{d}{dx}[y(x)\,\cos x] = 1.$$

Ne segue

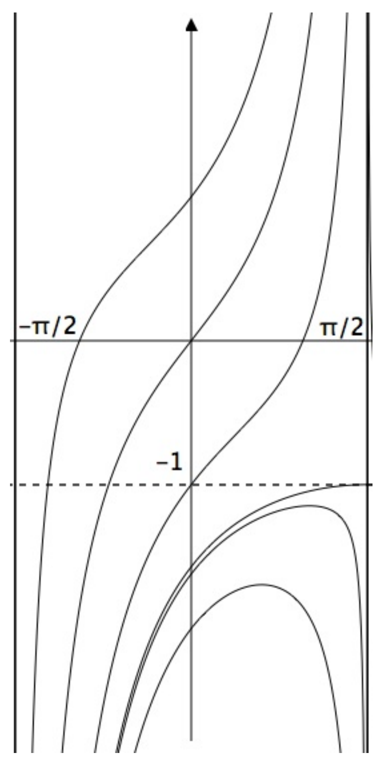
$$y(x)\,\cos x = x + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

e quindi

$$y(x) = \frac{x+c}{\cos x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Dovendo essere $y(0) = k$, si ha $c = k$, e pertanto

$$y(x) = \frac{x+k}{\cos x}\,.$$



(iii) Si ha

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{x+k}{\cos x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \frac{\pi}{2}+k > 0 \\ -\infty & \text{se } \frac{\pi}{2}+k < 0, \end{cases}$$

mentre se $k = -\frac{\pi}{2}$ otteniamo, con il teorema di de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{-\sin x} = -1.$$

Quindi, l'unico $k \in \mathbb{R}$ per il quale la soluzione y ha limite finito per $x \to \frac{\pi}{2}^-$ è $k = -\frac{\pi}{2}$, e in tal caso il limite è -1.

Esercizio 5 (i) Per le curve chiuse, descritte in coordinate polari da un'equazione della forma

$$r = g(\vartheta), \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

l'area della regione D delimitata da Γ è data dalla formula

$$a(D) = \int_0^{2\pi} g(\vartheta)^2 \, d\vartheta.$$

Quindi nel nostro caso

$$\begin{aligned} a(D) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^4\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta(1-\cos^2\vartheta)\, d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta - \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\vartheta \, d\vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}\,. \end{aligned}$$

(ii) Lungo la curva Γ si ha

$$x = \sin^2\vartheta\cos\vartheta, \quad y = \sin^3\vartheta,$$

da cui

$$x' = 2\sin\vartheta\cos^2\vartheta - \sin^3\vartheta, \qquad y' = 3\sin^2\vartheta\cos\vartheta.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle \, ds &= \int_0^{2\pi} \left(x^2\, x' - y^2\, y'\right) d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\sin^4\vartheta\cos^2\vartheta(2\sin\vartheta\cos^2\vartheta - \sin^3\vartheta) - \sin^6\vartheta(3\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\right] d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} (2\sin^5\vartheta\cos^4\vartheta - \sin^7\vartheta\cos^2\vartheta - 3\sin^8\vartheta\cos\vartheta)\, d\vartheta = 0, \end{aligned}$$

grazie alla disparità e periodicità degli integrandi.
Si noti che il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è conservativo: quindi si poteva stabilire subito che, essendo Γ una curva chiusa, deve essere

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle \, ds = 0.$$

Prova scritta del 22 luglio 2016

Esercizio 1 Sia

$$Z = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : \; e^{x^2 y} + yz - x^3 = 0\}.$$

(i) Osservato che $(1, 0, 1) \in Z$, si mostri che esiste un intorno U di $(1, 0, 1)$ tale che $Z \cap U$ è il grafico di una funzione $y = g(x, z)$ di classe C^∞.

(ii) Si scriva l'equazione del piano tangente a Z nel punto $(1, 0, 1)$.

(iii) Si determini il polinomio di Taylor di g di centro $(1,1)$ e grado 2.

(iv) Detta $\mathbf{h}(x,z) = (z^2, g(x,z))$, si dica se la funzione $\mathbf{h}$ è localmente invertibile nel punto $(1,1)$.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_E (1-x)(1-y)(5-z)dxdydz,$$

ove

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leq 1, \ 1 \leq z \leq 5 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

Esercizio 3 Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, x^2y^2, x^2y^2).$$

Posto

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ x^2+y^2+z^2 = 1, \ z \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\},$$

si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie Σ, orientata in modo che $\mathbf{n}(0,0,-1) = (0,0,-1)$.

Esercizio 4 (i) Fissato $k \in \mathbb{R}$, si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + y(x)\tan x = \frac{1}{\cos x}\,, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ y(0) = k. \end{cases}$$

(ii) Si verifichi che, al variare di k in $\mathbb{R}$, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono prolungabili a $\mathbb{R}$ e limitate.

(iii) Si scelga k, se possibile, in modo che la corrispondente soluzione verifichi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} y(x) = 0.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Ovviamente $(1,0,1) \in Z$. Dato che la funzione

$$G(x,y,z) = e^{x^2y} + yz - x^3$$

è di classe C^∞, e che

$$G_y(x,y) = x^2\, e^{x^2y} + z,$$

si ha evidentemente $G_y(1,0,1) = 2$ e quindi per il teorema del Dini esistono un intorno V di $(1,1)$, un intorno W di 0, ed una funzione $g: V \to W$ di classe C^∞, tale che $g(1,1) = 0$ e, posto $U = V \times W$,

$$Z \cap U = \{(x,y,z) \in U : \ y = g(x,z)\}.$$

(ii) Si ha
$$G_x(x,y,z) = 2xy\, e^{x^2y} - 3x^2, \qquad G_z(x,y,z) = y,$$
da cui $G_x(1,0,1) = -3$ e $G_z(1,0,1) = 0$; poiché l'equazione del piano tangente alla curva di livello Z in $(1,0,1)$ è data dalla formula
$$G_x(1,0,1)(x-1) + G_y(1,0,1)y + G_z(1,0,1)(z-1) = 0,$$
nel nostro caso si ottiene
$$-3(x-1) + 2y = 0,$$
ossia
$$2y - 3x + 2 = 0 :$$
il piano è parallelo all'asse z.

(iii) Si ha, come già sappiamo, $g(1,1) = 0$, ed inoltre vale l'identità
$$G(x, g(x,z), z)) = e^{x^2 g(x,z)} + zg(x,z) - x^3 = 0.$$
Derivando tale identità rispetto a x e a z si ottengono le relazioni
$$(2xg(x,z) + x^2 g_x(x,z))e^{x^2 g(x,z)} + zg_x(x,z) - 3x^2 = 0$$
$$x^2 g_z(x,z)e^{x^2 g(x,z)} + g(x,z) + zg_z(x,z) = 0,$$
da cui, calcolando per $(x,z) = (1,1)$,
$$g_x(1,1) = \frac{3}{2}, \qquad g_z(1,1) = 0;$$
derivando ancora le due relazioni rispetto a x e z si trova, scrivendo per brevità g e le sue derivate senza la dipendenza dalle variabili (x,z),
$$\begin{aligned}
&(2g + 4xg_x + x^2 g_{xx})e^{x^2g} + (2xg + x^2 g_x)^2 e^{x^2g} + zg_{xx} - 6x = 0\\
&(2xg_z + x^2 g_{xz})e^{x^2g} + (2xg + x^2 g_x)(x^2 g_z)e^{x^2g} + g_x + zg_{xz} = 0\\
&x^2 g_{zz} e^{x^2g} + (x^2 g_z)^2 e^{x^2g} + 2g_z + zg_{zz} = 0,
\end{aligned}$$
da cui, calcolando per $(x,z) = (1,1)$, si ottiene facilmente
$$g_{xx}(1,1) = -\frac{9}{8}, \quad g_{xz}(1,1) = -\frac{3}{4}, \quad g_{zz}(1,1) = 0.$$
Quindi otteniamo il polinomio cercato:
$$\begin{aligned}
p(x,z) \;&=\; g(1,1) + g_x(1,1)(x-1) + g_z(1,1)(z-1) + \\
&\quad + \frac{1}{2} g_{xx}(1,1)(x-1)^2 + g_{xz}(1,1)(x-1)(z-1) + \frac{1}{2} g_{zz}(1,1)(z-1)^2,
\end{aligned}$$
vale a dire
$$p(x,z) = \frac{3}{2}(x-1) - \frac{9}{16}(x-1)^2 - \frac{3}{4}(x-1)(z-1).$$

(iv) La funzione $\mathbf{h}$ è definita in V, è di classe C^∞ e si ha

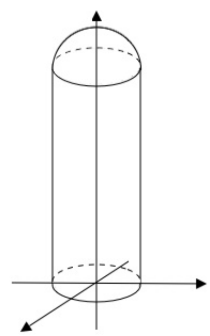
$$\mathbf{Dh}(x,z) = \begin{pmatrix} 0 & g_x(x,z) \\ 2z & g_z(x,z) \end{pmatrix},$$

da cui

$$\det \mathbf{Dh}(1,1) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -3 \neq 0.$$

Ciò basta per garantire che $\mathbf{h}$ è localmente invertibile nel punto $(1,1)$.

Esercizio 2 L'insieme E è un cilindro cha ha per asse l'asse z, ed è delimitato inferiormente dal piano $z = 1$ e superiormente dalla semisfera $x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 1$, $z \geq 5$. Utilizzando le coordinate cilindriche, l'integrale diventa



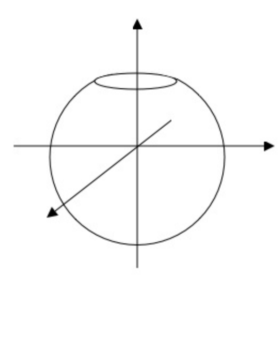
$$\begin{aligned}
&\int_E (1-x)(1-y)(5-z)dxdydz = \\
&\quad = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^{5+\sqrt{1-r^2}} (1-r\cos\vartheta)(1-r\sin\vartheta)(5-z)r\,dzdrd\vartheta = \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} (r - r^2(\cos\vartheta+\sin\vartheta) + r^3\cos\vartheta\sin\vartheta)\left[-(5-z)^2\right]_1^{5+\sqrt{1-r^2}} d\vartheta dr = \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} (r - r^2(\cos\vartheta+\sin\vartheta) + r^3\cos\vartheta\sin\vartheta)\left[-(1-r^2)+16\right] d\vartheta dr.
\end{aligned}$$

Gli integrali $\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta$, $\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta$ e $\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\,\sin\vartheta\,d\vartheta$ sono nulli. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\int_E (1-x)(1-y)(5-z)dxdydz &= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} r(15+r^2)d\vartheta dr = \\
&= \pi\int_0^1 (15r+r^3)dr = \pi\left(\frac{15}{2}+\frac{1}{4}\right) = \pi\,\frac{31}{4}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 La superficie Σ è una sfera, tagliata al livello $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e privata della calotta superiore. Abbiamo due possibilità:

- scrivere rot $\mathbf{F}$ e calcolarne direttamente il flusso attraverso Σ;
- utilizzare il teorema di Stokes e calcolare invece il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il bordo $b\Sigma$, convenientemente orientato.



Utilizziamo la prima strada: si ha

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ yz & x^2y^2 & x^2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2y \\ y - 2xy^2 \\ 2xy^2 - z \end{pmatrix}.$$

Poi, passando in coordinate sferiche, la superficie Σ si parametrizza nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = \sin\vartheta\cos\varphi \\ y = \sin\vartheta\sin\varphi \\ z = \cos\vartheta, \end{cases} \qquad \frac{\pi}{6} \leq \vartheta \leq \pi, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

In particolare,

$$D\sigma = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta\cos\varphi \\ \sin^2\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Dunque il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso Σ è

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle \, d\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} [2\sin^3\vartheta\cos^2\varphi\sin\varphi(\sin^2\vartheta\cos\varphi) + \\
&\quad +(\sin\vartheta\sin\varphi - 2\sin^3\vartheta\cos\varphi\sin^2\varphi)(\sin^2\vartheta\sin\varphi) + \\
&\quad +(2\sin^3\vartheta\cos\varphi\sin^2\varphi - \cos\vartheta)(\cos\vartheta\sin\vartheta)]\, d\vartheta d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} [2\sin^5\vartheta\cos^3\varphi\sin\varphi + \sin^3\vartheta\sin^2\varphi - \\
&\quad -2\sin^5\vartheta\cos\varphi\sin^3\varphi + 2\sin^4\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\sin^3\varphi - \cos^2\vartheta\sin\vartheta]\, d\vartheta d\varphi = \\
&= 0 + \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\sin^3\vartheta\, d\vartheta + 0 + 0 - 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta = \\
&= \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta - 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta = \\
&= \pi\left[-\cos\vartheta + \cos^3\vartheta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} = \pi\left[1 - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right] = \frac{\pi\sqrt{3}}{8}.
\end{aligned}$$

Utilizziamo la seconda strada: il bordo di Σ è il parallelo della sfera unitaria a quota $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ossia la circonferenza di tale piano con centro $\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e raggio $\frac{1}{2}$, Essa si parametrizza così:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos\varphi \\ y = \frac{1}{2}\sin\varphi \qquad\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi. \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

In particolare il vettore tangente è

$$\boldsymbol{\tau} = \left(-\frac{1}{2}\sin\varphi, \frac{1}{2}\cos\varphi, 0\right).$$

L'orientazione di questa parametrizzazione però non è coerente con quella di Σ, per cui occorre cambiare segno all'integrale su $b\Sigma$. Pertanto, dal teorema di Stokes si ha

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle \, d\sigma &= -\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle \, ds = \\
&= -\int_0^{2\pi} \left[\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\varphi\left(-\frac{1}{2}\sin\varphi\right) + \frac{1}{16}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\left(\frac{1}{2}\cos\varphi\right)\right] d\varphi = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi - \frac{1}{32}\int_0^{2\pi} (1-\sin^2\varphi)\sin^2\varphi\cos\varphi \, d\varphi = \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{8} + 0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{8}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (i) L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. Dividendo per $\cos x$ si ottiene l'equazione equivalente

$$\frac{y'(x)\cos x + y(x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad |x| < \frac{\pi}{2},$$

che equivale a

$$\frac{d}{dx}\frac{y(x)}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{d}{dx}\tan x,$$

da cui

$$\frac{y(x)}{\cos x} = \tan x + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

ossia

$$y(x) = \sin x + c\,\cos x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dalla condizione iniziale $y(0) = k$ segue immediatamente $c = k$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \sin x + k\,\cos x.$$

(ii) L'espressione della generica soluzione dell'equazione ci dice immediatamente che ogni soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è una funzione limitata.

(iii) Affinché risulti $y(x) \to 0$ per $x \to \frac{\pi}{2}^+$, deve essere

$$0 = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (\sin x + k\,\cos x) = 1 + 0 = 1,$$

quindi non esiste alcun $k \in \mathbb{R}$ tale che la corrispondente soluzione y sia infinitesima per $x \to \frac{\pi}{2}^+$.

Prova scritta del 14 settembre 2016

Esercizio 1 Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \frac{1}{n} \le x \le 1 \\ 1 - \frac{1}{n}(x-1) & \text{se } 1 < x < n+1 \\ 0 & \text{se } x \ge n+1. \end{cases}$$

(i) Provare che

$$\exists f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x > 0,$$

e calcolare $f(x)$.

(ii) In quali intervalli $I \subseteq]0, \infty[$ la convergenza delle f_n è uniforme?

(iii) Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{10} f_n(x)\, dx.$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = xy(x^2 + 2y^2 - 2), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Si determinino

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y), \qquad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y).$$

(ii) Si trovino i punti stazionari di f e se ne stabilisca la natura.

Esercizio 3 Sia Σ la superficie parametrizzata da

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \\ z = \vartheta, \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi.$$

(i) Si calcoli l'integrale

$$\int_\Sigma \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, d\sigma.$$

(ii) Detto $\mathbf{n}(x,y,z)$ il versore normale a Σ per il quale $\mathbf{n}(1,0,0)$ ha la terza componente positiva, e assegnata a Σ l'orientazione di $\mathbf{n}$, si calcoli il flusso attraverso Σ del rotore di $\mathbf{F}$, ove

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(1, x(2\pi - z), xz\big).$$

Esercizio 4 (i) Risolvere il problema di Cauchy

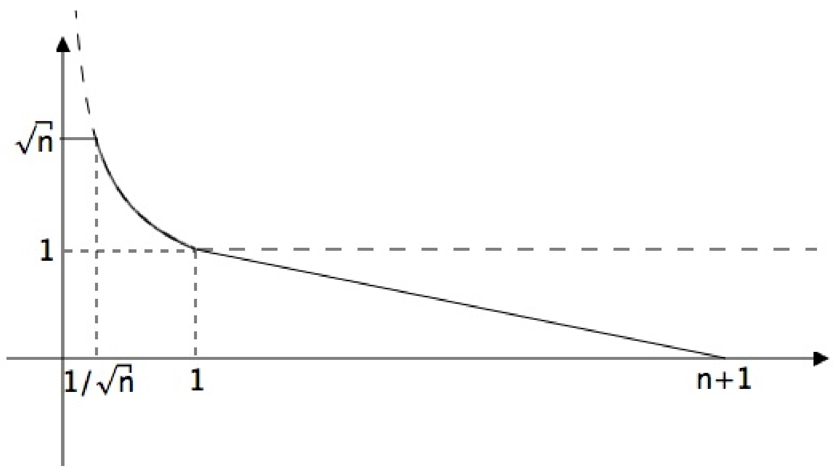
$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x-1}{y} \\ y(0) = A \end{cases}$$

ove $A \in \mathbb{R}$ è un parametro reale diverso da 0.

(ii) Per quali A la soluzione $y(x)$ è definita univocamente per ogni $x \in \mathbb{R}$?

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Il grafico della generica f_n è il seguente:



Per $x > 0$ fissato, quando $n \to \infty$ si ha

$$f_n(x) \to f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < \infty. \end{cases}$$

(ii) La convergenza non può essere uniforme in alcun intervallo del tipo $I =]0, a]$, perché in I le f_n sono limitate mentre la f no: quindi $\sup_I |f_n - f| = +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Analogamente, non c'è convergenza uniforme in alcuna semiretta $S = [b, \infty[$, poiché tutte le f_n sono definitivamente nulle mentre $f \geq 1$, e pertanto $\sup_S |f_n - f| \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ sufficientemente grande.
Vediamo cosa succede negli intervalli $[a, b]$ con $0 < a < b < \infty$. Se $[a, b] \subset]0, 1]$ allora $f_n = f$ definitivamente in $[a, b]$ e quindi $\sup_{[a,b]} |f_n - f| = 0$ per $n \in \mathbb{N}^+$ sufficientemente grande (per la precisione, per ogni $n \geq \frac{1}{a^2}$). Se $[a, b] \subseteq [1, \infty[$ allora definitivamente (per la precisione, per ogni $n \geq b-1$) si ha $f - f_n = \frac{1}{n}(x-1)$ e quindi $\sup_{[a,b]} |f_n - f| \leq \frac{b}{n}$; ne segue che $f_n \to f$ uniformemente in $[a, b]$ per $n \to \infty$ in ogni intervallo $[a, b]$ contenuto in $]0, 1]$ oppure in $[1, \infty[$; quindi si ha convergenza uniforme anche in ogni intervallo $[a, b]$ contenuto in $]0, \infty[$.

(iii) È facile verificare che $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ per ogni $x > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Dunque il teorema di B. Levi ci garantisce che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{10} f_n(x)\, dx = \int_0^{10} f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^{10} 1\, dx = 2 + 9 = 11.$$

Esercizio 2 (i) Scelto $y = 1$, risulta

$$f(x, 1) = x^3 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

e dunque

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) \leq \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x, 1) = -\infty, \qquad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) \geq \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x, 1) = +\infty.$$

(ii) Calcoliamo il gradiente di f:

$$\nabla f(x,y) = \big(3x^2y + 2y^3 - 2y, x^3 + 6xy^2 - 2x\big).$$

Dunque i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y(3x^2 + 2y^2 - 2) = 0 \\ x(x^2 + 6y^2 - 2) = 0, \end{cases}$$

Ovviamente vi è la soluzione nulla $(0,0)$. Se $x = 0$ e $y \neq 0$, la prima equazione dà $y = \pm 1$, e quindi abbiamo le soluzioni $(0,1)$ e $(0,-1)$. Se $y = 0$ e $x \neq 0$, la seconda equazione dà $x = \pm\sqrt{2}$, e quindi abbiamo le soluzioni $(\sqrt{2},0)$ e $(\sqrt{2},0)$. Infine se x e y sono diversi da 0 si ottiene $3x^2 + 2y^2 = 2 = x^2 + 6y^2$, da cui facilmente $x^2 = 2y^2$ e pertanto $8y^2 = 2$ e $4x^2 = 2$, ossia $y = \pm\frac{1}{2}$ e $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi abbiamo le soluzioni $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$.
Per analizzare la natura di questi 9 punti stazionari, calcoliamo la matrice Hessiana di f:

$$\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 + 6y^2 - 2 \\ 3x^2 + 6y^2 - 2 & 12xy \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$\mathbf{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det \mathbf{H}_f(0,0) = -4 < 0,$$

cosicché $(0,0)$ è punto di sella;

$$\mathbf{H}_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det \mathbf{H}_f(0,\pm 1) = -16 < 0,$$

cosicché $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono punti di sella;

$$\mathbf{H}_f(\pm\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det \mathbf{H}_f(\pm\sqrt{2},0) = -16 < 0,$$

cosicché $(\sqrt{2},0)$ e $(-\sqrt{2},0)$ sono punti di sella;

$$\mathbf{H}_f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & 1 \\ 1 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \det \mathbf{H}_f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right) = 8 > 0,$$

ed essendo il termine di posto $1,1$ positivo, i punti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ sono di minimo relativo;

$$\mathbf{H}_f\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} & 1 \\ 1 & -3\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \det \mathbf{H}_f\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right) = 8 > 0,$$

ed essendo il termine di posto $1,1$ negativo, i punti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ sono di massimo relativo.

Esercizio 3 (i) La superficie $\Sigma = \boldsymbol{\sigma}(r,\vartheta)$ è di classe C^1 e si ha

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}(r\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r \in [0,1], \quad \vartheta \in [0,2\pi].$$

Poiché

$$E = 1, \qquad G = r^2 + 1, \qquad F = 0,$$

risulta

$$d\sigma = \sqrt{1+r^2}\, dr d\vartheta,$$

e quindi l'integrale proposto vale

$$\int_\Sigma \sqrt{x^2+y^2+1}\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r^2)\, dr d\vartheta = 2\pi\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\,\pi.$$

(ii) Il vettore normale (che non serve normalizzare) è

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_r \times \boldsymbol{\sigma}_\vartheta = (\sin\vartheta, -\cos\vartheta, r) :$$

infatti la sua terza componente è positiva per $r = 1$ e $\vartheta = 0$, che corrispondono al punto $(1,0,0)$ di $\mathbb{R}^3$. Il rotore di $\mathbf{F}$ è

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ 1 & x(2\pi - z) & xz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ 2\pi - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ -\vartheta \\ 2\pi - \vartheta \end{pmatrix}.$$

Quindi il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ è

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \big(r\cos\vartheta\sin\vartheta + \vartheta\,\cos\vartheta + r(2\pi - \vartheta)\big)\, dr d\vartheta = 0 + 0 + \pi^2 = \pi^2.$$

Esercizio 4 (i) L'equazione differenziale è a variabili separabili e quindi si ha successivamente

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\,y^2 = 2x - 1,$$
$$y^2 = 2x^2 - 2x + c;$$

poiché $y(0) = A$, si ha $c = A^2 > 0$ e

$$y(x) = \pm\sqrt{2x^2 - 2x + A^2},$$

ove il segno $\pm$ dipende dal segno di A.

(ii) La soluzione è certamente definita in un intorno di $x = 0$. Se vogliamo che essa sia definita globalmente e sia unica, ci occorre che il trinomio $2x^2 - 2x + A^2$ sia strettamente positivo per ogni $x \in \mathbb{R}$, ossia che $\Delta = 4 - 8A^2 > 0$; infati se fosse $\Delta = 0$ in qualche punto, lì si perderebbe l'unicità della soluzione. Deve quindi essere $A^2 < \frac{1}{2}$, ossia

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < A < 0 \quad \text{oppure} \quad 0 < A < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Prova scritta del 18 novembre 2016

Esercizio 1 Si determinino i punti di massimo e di minimo della funzione

$$f(x, y, z) = z(2x - y^2)$$

sull'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ |x| \leq 2, \ |y| \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1 - y^2\}.$$

Esercizio 2 Sia Γ la curva di equazione (in coordinate polari)

$$r = \frac{1}{1 + \vartheta}, \qquad \vartheta \in [0, \infty[\,,$$

orientata secondo le ϑ crescenti. Si calcoli:

(i) l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma (x^2 + y^2)\, ds;$$

(ii) il lavoro compiuto lungo Γ dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (y, -x).$$

Esercizio 3 Sia P la piramide solida che ha per base il quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$ del piano $z = 0$ e per vertice il punto $(0, 0, 1)$, e sia Σ la superficie

$$\Sigma = \partial P \setminus \{(x, y, z) : \ |x| < 1, \ |y| < 1, \ z = 0\},$$

orientata secondo la normale che ha terza coordinata positiva. Si calcoli:

(i) l'integrale triplo

$$\int_P z^2\, dxdydz;$$

(ii) il flusso attraverso Σ di $\mathbf{rot}\,\mathbf{G}$, ove $\mathbf{G}$ è il campo vettoriale

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, 0).$$

Esercizio 4 (i) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{1 - y^2}{1 + x^2};$$

(ii) per ogni soluzione y, calcolare i limiti

$$\lim_{x \to +\infty} y(x), \qquad \lim_{x \to -\infty} y(x).$$

Risoluzione

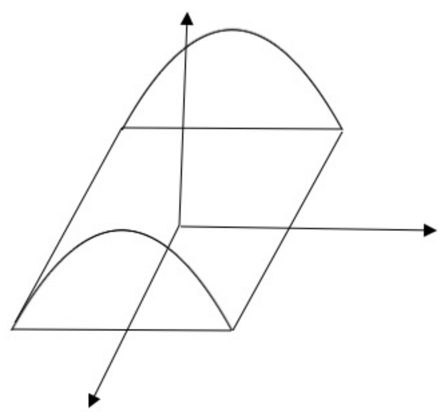
Esercizio 1 La funzione f è di classe C^∞ sul dominio chiuso e limitato D, quindi il suo massimo ed il suo minimo esistono. Cerchiamo i punti stazionari interni: deve essere

$$\begin{cases} 2z = 0 \\ -2yz = 0 \\ 2x - y^2 = 0, \end{cases}$$

e questo implica immediatamente che $z = 0$ e $x = \frac{y^2}{2}$, con $-1 < y < 1$. In questi punti risulta

$$f\left(\frac{y^2}{2}, y, 0\right) = 0.$$

Vediamo cosa succede sul bordo di D. Esso è composto da tre pezzi: la base, ossia il rettangolo $[-2, 2] \times [-1, 1]$ del piano $z = 0$; le pareti anteriore e posteriore, ossia



$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 2, \ 0 < z < 1 - y^2\},$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = -2, \ 0 < z < 1 - y^2\};$$

il tetto, vale a dire

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ |x| < 2, \ |y| < 1, \ z = 1 - y^2\};$$

ed infine gli spigoli curvilinei

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) : \ x = 2, \ z = 1 - y^2\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y, z) : \ x = -2, \ z = 1 - y^2\},$$

dove D non ha piano tangente.
Sulla base, compresi i lati di bordo, si ha $z = 0$ e dunque

$$f(x, y, 0) = 0 \qquad \forall (x, y) \in [-2, 2] \times [-1, 1].$$

Sulla superficie S_1 si ha $x = 2$ e $f(2, y, z) = z(4 - y^2)$, con $(y, z) \in \tilde{D} = \{(y, z) : \ 0 < z < 1 - y^2\}$. La f su $\tilde{D}$ è non negativa e non ha punti stazionari interni. Analogamente, sulla superficie S_2 si ha $x = -2$ e $f(-2, y, z) = z(-4 - y^2)$, con $(y, z) \in \tilde{D}$. La f su $\tilde{D}$ è non positiva e non ha punti stazionari interni.
Sulla superficie S si ha $(x, y) \in]-2, 2[\times]-1, 1[$ e $z = 1 - y^2$. Dunque su S si ha $f(x, y, 1 - y^2) = (1 - y^2)(2x - y^2)$. I punti stazionari di questa funzione sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2(1 - y^2) = 0 \\ -2y(2x - y^2 + 1 - y^2) = 0, \end{cases}$$

ossia $y = \pm 1$, $x = \frac{1}{2}$, $z = 0$, coordinate di punti che sono sulla base e quindi sono già ststi considerati.
Restano i due spigoli curvilinei, descritti da Γ_1 e Γ_2.

Su Γ_1 si ha $f(2, y, 1-y^2) = (1-y^2)(4-y^2)$: derivando si vede che l'unico punto che ci interessa è $y = 0$, da cui $z = 1$, e si ha

$$f(2, 0, 1) = 4.$$

Su Γ_2 si ha $f(-2, y, 1-y^2) = (1-y^2)(-4-y^2)$: analogamente, derivando si vede che l'unico punto che ci interessa è $y = 0$, da cui $z = 1$, e si ha

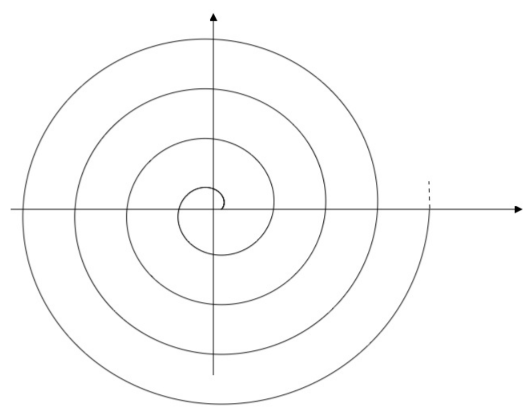
$$f(-2, 0, 1) = -4.$$

In conclusione, confrontando i valori trovati, otteniamo

$$\max_D f = f(2, 0, 1) = 4, \qquad \min_D f = f(-2, 0, 1) = -4.$$

Esercizio 2 (i) La curva Γ si parametrizza così:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos\vartheta}{1+\vartheta} \\ y = \dfrac{\sin\vartheta}{1+\vartheta}, \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, \infty[\,.$$



Quindi

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\sin\vartheta}{1+\vartheta} - \dfrac{\cos\vartheta}{(1+\vartheta)^2} \\ y' = \dfrac{\cos\vartheta}{1+\vartheta} - \dfrac{\sin\vartheta}{(1+\vartheta)^2}, \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, \infty[\,.$$

Si ha poi, per una nota formula,

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\vartheta = \sqrt{\frac{1}{(1+\vartheta)^2} + \frac{1}{(1+\vartheta)^4}}\, d\vartheta = \frac{1}{1+\vartheta}\sqrt{1 + \frac{1}{(1+\vartheta)^2}}\, d\vartheta,$$

da cui

$$\int_\Gamma (x^2 + y^2)\, ds = \int_0^\infty \frac{1}{(1+\vartheta)^3}\sqrt{1 + \frac{1}{(1+\vartheta)^2}}\, d\vartheta.$$

Posto $t = \frac{1}{(1+\vartheta)^2}$ si ottiene

$$\int_\Gamma (x^2 + y^2)\, ds = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+t}\, dt = \frac{1}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2^{\frac{3}{2}} - 1}{3}.$$

(ii) Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_\Gamma \langle F, \boldsymbol{\tau}\rangle_2\, ds = \int_{+\Gamma} (y\, dx - x\, dy) = \int_0^\infty [y(\vartheta)x'(\vartheta) - x(\vartheta)y'(\vartheta)]\, d\vartheta.$$

Dunque

$$\int_\Gamma \langle F,\boldsymbol{\tau}\rangle_2\,ds = \int_0^\infty \left[-\frac{\sin\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{\sin\vartheta}{1+\vartheta}+\frac{\cos\vartheta}{(1+\vartheta)^2}\right)-\frac{\cos\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{\cos\vartheta}{1+\vartheta}-\frac{\sin\vartheta}{(1+\vartheta)^2}\right)\right]d\vartheta =$$

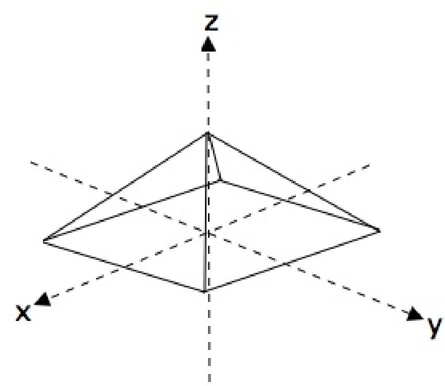
$$= \int_0^\infty \left[-\frac{1}{(1+\vartheta)^2}\right]d\vartheta = \left[\frac{1}{1+\vartheta}\right]_0^\infty = -1.$$

Esercizio 3 (i) La piramide P può essere descritta da

$$P = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le z\le 1,\ \max\{|x|,|y|\}\le 1-z\}.$$

Dunque, indicato con Q_z il quadrato $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \max\{|x|,|y|\}\le 1-z\}$, si ha

$$Q_z = [-(1-z),1-z]\times[-(1-z),1-z]$$



e quindi si può scrivere

$$\int_P z^2\,dz = \int_0^1\left[\int_{Q_z} z^2\,dxdy\right]dz =$$

$$= \int_0^1 z^2\,m_2(Q_z)\,dz = 4\int_0^1 z^2(1-z)^2\,dz.$$

Perciò

$$\int_P z^2\,dz = 4\int_0^1 (z^2-2z^3+z^4)\,dz = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15}\,.$$

(ii) La superficie Σ è costituita dalle pareti laterali della piramide, senza la base, ed il suo bordo $b\Sigma$ è la frontiera del quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$ del piano $z=0$. Parametrizzare Σ è alquanto lungo, quindi conviene utilizzare la formula di Stokes: l'orientazione di $b\Sigma$, coerente con quella assegnata a Σ, è antioraria. Dunque otteniamo

$$\int_{+\Sigma}\langle \mathrm{rot}\mathbf{G},\mathbf{n}\rangle_3\,d\boldsymbol{\sigma} = \int_{+b\Sigma}\langle \mathbf{G},\boldsymbol{\tau}\rangle_3\,ds$$

e l'ultimo integrale si compone di quattro addendi:

$$\begin{array}{llllll}
\Gamma_1: & x=x, & y=-1, & z=0, & & -1\le x\le 1;\\
\Gamma_2: & x=1, & y=y, & z=0, & & -1\le y\le 1;\\
-\Gamma_3: & x=x, & y=1, & z=0, & & -1\le x\le 1;\\
-\Gamma_4: & x=-1, & y=y, & z=0, & & -1\le y\le 1.
\end{array}$$

Sulle quattro curve i vetrtori tangenti ed i valori di $\mathbf{G}$ sono

$$\boldsymbol{\tau}=(1,0,0),\ \mathbf{G}=(1,-x^2,0)\text{ su }\Gamma_1,\qquad \boldsymbol{\tau}=(0,1,0),\ \mathbf{G}=(y^2,-1,0)\text{ su }\Gamma_2,$$

$$\boldsymbol{\tau}=(-1,0,0),\ \mathbf{G}=(1,-x^2,0)\text{ su }\Gamma_3,\quad \boldsymbol{\tau}=(0,-1,0),\ \mathbf{G}=(y^2,-1,0)\text{ su }\Gamma_4.$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}\int_{+b\Sigma}\langle \mathbf{G},\boldsymbol{\tau}\rangle_3\,ds &= \int_{-1}^{1} 1\,dx+\int_{-1}^{1}(-1)\,dy+\int_{-1}^{1}\cdot(-1)\,dx+\int_{-1}^{1}(-1)\cdot(-1)\,dy=\\ &= 2-2-2+2=0.\end{aligned}$$

Si poteva seguire un'altra strada: a causa del teorema della divergenza, il flusso del rotore di $\mathbf{G}$ attraverso l'*intera* frontiera ∂P deve essere nullo, essendo $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\mathbf{G}=0$: quindi, posto $Q_0=[-1,1]\times[-1,1]$, si ha, visto che la normale esterna a P su Q_0 è $(0,0,-1)$:

$$0=\int_{+\partial P}\langle \mathbf{rot}\,\mathbf{G},\mathbf{n}\rangle_3\,d\boldsymbol{\sigma}=\int_{+b\Sigma}\langle \mathbf{rot}\,\mathbf{G},\mathbf{n}\rangle_3\,d\boldsymbol{\sigma}-\int_{Q_0}(\mathbf{rot}\,\mathbf{G})_3\,dxdy.$$

Pertanto, essendo

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{G}(x,y,z)=(-2z,-2z,-2x-2y),$$

si deduce

$$\int_{+b\Sigma}\langle \mathbf{rot}\,\mathbf{G},\mathbf{n}\rangle_3\,ds=-2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x+y)\,dxdy=0,$$

essendo il dominio simmetrico e l'integrando dispari.

Esercizio 4 L'equazione è a variabili separabili. Ci sono le soluzioni costanti $y(x)\equiv\pm1$, per le quali ovviamente

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to-\infty}y(x)=\pm1.$$

Cercando le soluzioni $y(x)$ non costanti si ha successivamente

$$\begin{gathered}\frac{y'}{1-y^2}=\frac{1}{1+x^2},\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right)y'=\frac{1}{1+x^2},\\ \frac{1}{2}\left(-\ln|1-y|+\ln|1+y|\right)=\arctan x+c,\\ \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|=2\arctan x+2c,\\ \left|\frac{1+y}{1-y}\right|=e^{2\arctan x+2c}=K\,e^{2\arctan x},\quad K>0,\\ \frac{1+y}{1-y}=c\,e^{2\arctan x},\qquad c\in\mathbb{R}.\\ 1+y=c\,e^{2\arctan x}(1-y)\\ y(x)=\tfrac{c\,e^{2\arctan x}-1}{c\,e^{2\arctan x}+1}.\end{gathered}$$

Dalla espressione esplicita delle soluzioni si vede che ciascuna di esse, qualunque sia c, è definita in una semiretta del tipo $]b,+\infty[$ ed anche in una semiretta del tipo $]-\infty,a[$, pur potendo avere un asintoto verticale in qualche punto x_0 per certi valori di c. Si ottiene, passando al limite e tenendo conto dei segni del numeratore e del denominatore nel caso che quest'ultimo diverga,

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} \dfrac{c\,e^{\pi}-1}{c\,e^{\pi}+1} & \text{se } c \neq -e^{-\pi}, \\ -\infty & \text{se } c = -e^{-\pi}; \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \begin{cases} \dfrac{c\,e^{-\pi}-1}{c\,e^{-\pi}+1} & \text{se } c \neq -e^{\pi}, \\ +\infty & \text{se } c = -e^{\pi}. \end{cases}$$

Prova scritta del 13 gennaio 2017

Esercizio 1 Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1-x^2)^n}{1+n^2x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Stabilire:

(i) per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge assolutamente;

(ii) per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente;

(iii) in quali intervalli $I \subseteq \mathbb{R}$ la serie converge totalmente;

(iv) in quali intervalli $I \subseteq \mathbb{R}$ la serie converge uniformemente.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_D z\,dxdydz,$$

ove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 \leq 1, \; x^2+y^2+z^2 \leq 2z\}.$$

Esercizio 3 Sia Γ la curva del piano xz di equazioni parametriche

$$x = e^{-t}\cos t, \quad z = e^{-t}\sin t, \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

(i) Si scriva l'equazione della retta passante per il punto $(-e^{-\pi}, 0)$, perpendicolare alla curva Γ in tale punto.

(ii) Si calcoli l'area della superficie Σ che si ottiene ruotando la curva Γ attorno all'asse x.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Poiché nella serie il parametro x compare al quadrato, possiamo supporre $x \geq 0$. Analizziamo la serie dei valori assoluti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|1-x^2|^n}{1+n^2x^2}, \qquad x \geq 0.$$

Il criterio del rapporto chi dice che per la convergenza è sufficiente che sia $|1-x^2| < 1$, e d'altra parte quando $|1-x^2| \geq 1$ la serie diverge perché il suo termine generale non è infinitesimo. Pertanto, si ha convergenza assoluta se e solo se $|1-x^2| < 1$, ossia se e solo se $0 < x < \sqrt{2}$.

(ii) Chiaramente, si ha convergenza almeno per $0 < x < \sqrt{2}$; per $x = 0$ la serie si riduce a $\sum_{n=1}^{\infty} n$ e quindi diverge; per $x = \sqrt{2}$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{1+2n^2}$ e quindi converge in virtù del criterio di Leibniz. Per $|1-x^2| > 1$, come si è già osservato, il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie non converge (diverge positivamente per $x = 0$ ed è indeterminata per $x > \sqrt{2}$).

(iii) Per ogni fissato $\delta \in]0,1[$ la serie converge totalmente in qualunque intervallo $I \subseteq [\sqrt{\delta}, \sqrt{2-\delta}]$: infatti, se $x \in [\sqrt{\delta}, \sqrt{2-\delta}]$ si ha $\delta \leq x^2 \leq 2-\delta$ e pertanto

$$\frac{n|1-x^2|^n}{1+n^2x^2} \leq \frac{n[1-\delta]^n}{1+n^2\delta},$$

il che implica, quando $I \subseteq [\sqrt{\delta}, \sqrt{2-\delta}]$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in I} \frac{n|1-x^2|^n}{1+n^2x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[1-\delta]^n}{1+n^2\delta} < \infty.$$

Invece, se 0 appartiene allc chiusura di I si ha

$$\sup_{x\in I} \frac{n|1-x^2|^n}{1+n^2x^2} \geq n,$$

quindi la serie degli estremi superiori diverge; similmente, se $\sqrt{2}$ appartiene alla chiusura di I si ha

$$\sup_{x\in I} \frac{n|1-x^2|^n}{1+n^2x^2} \geq \frac{n}{1+2n^2},$$

quindi la serie degli estremi superiori diverge per confronto asintotico con la serie armonica.

(iv) La serie converge uniformemente in ogni insieme I contenuto in un intervallo del tipo $[\sqrt{\delta}, \sqrt{2-\delta}]$, poiché lì vi è convergenza totale. Ma Si ha convergenza uniforme anche quando $I \subseteq [\sqrt{\delta}, \sqrt{2}]$: infatti, per $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ si ha dal criterio di Leibniz la seguente stima del resto:

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n(1-x^2)^n}{1+n^2x^2}\right| = \left|\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \frac{n(x^2-1)^n}{1+n^2x^2}\right| \leq \frac{N(x^2-1)^N}{1+N^2x^2},$$

da cui

$$\sup_{1\le x\le\sqrt{2}}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{n(1-x^2)^n}{1+n^2x^2}\right|\le\frac{N}{1+N^2}\,.$$

Ne segue, se $I\subseteq[\sqrt{\delta},\sqrt{2}]$,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{1\le x\le\sqrt{2}}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{n(1-x^2)^n}{1+n^2x^2}\right|=0,$$

ossia la serie converge uniformemente in I. Non si può avere convergenza uniforme in insiemi I la cui chiusura contenga 0 oppure punti maggiori di $\sqrt{2}$, perché in tal caso non si ha nemmeno convergenza puntuale.

Esercizio 2 L'insieme D è la regione comune alle due sfere di equazioni

$$x^2+y^2+z^2\le 1,\qquad x^2+y^2+(z-1)^2\le 1,$$

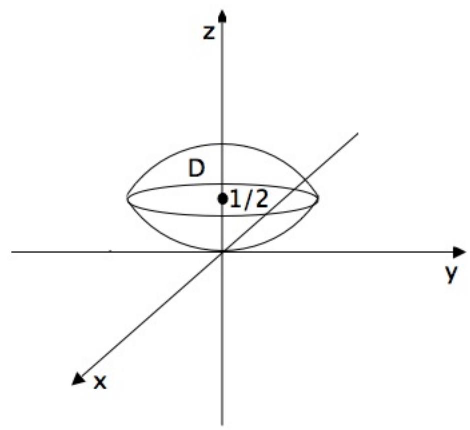
ed è illustrato nella figura a fianco. Si ha perciò

$$z\le\sqrt{1-x^2-y^2},\qquad 1-z\le\sqrt{1-x^2-y^2},$$

ossia

$$1-\sqrt{1-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\,:$$

ciò implica $2\sqrt{1-x^2-y^2}\ge 1$, vale a dire $x^2+y^2\le\frac{3}{4}$. Si ha pertanto



$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le\frac{3}{4},\ 1-\sqrt{1-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$

Utilizzando le coordinate cilindriche $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$, $z=z$, l'insieme D è descritto dalla relazioni

$$\vartheta\in[0,2\pi],\quad 0\le r\le\frac{\sqrt{3}}{2},\quad 1-\sqrt{1-r^2}\le z\le\sqrt{1-r^2}.$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}
\int_D z\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} z\,r\,dzdrd\vartheta=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} z\,dzdr=\\
&= \pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r\left[(1-r^2)-(1-\sqrt{1-r^2})^2\right]dr=\\
&= \pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[-r+2r\sqrt{1-r^2}\right]dr=\pi\left[-\frac{r^2}{2}-\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\\
&= \pi\left[-\frac{3}{8}-\frac{1}{12}+\frac{2}{3}\right]=\frac{5\pi}{24}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (i) Risulta

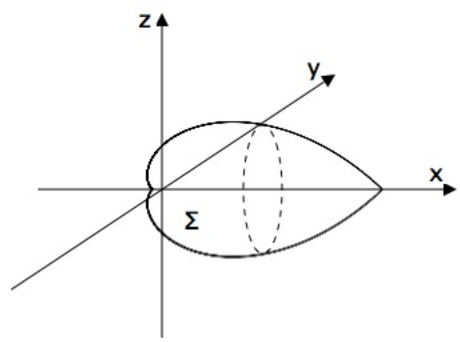
$$x'(t) = e^{-t}(-\cos t - \sin t), \qquad z'(t) = e^{-t}(-\sin t + \cos t),$$

cosicché il vettore tangente a Γ nel punto $(-e^{-\pi}, 0)$, che corrisponde al valore $t = \pi$ del parametro, è $e^{-\pi}(1, -1)$. Quindi un vettore normale è $(1, 1)$. Dunque la retta cercata ha equazioni parametriche

$$x = -e^{-\pi} + t, \quad z = t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e la sua equazione cartesiana è $z = x + e^{-\pi}$.

(ii) La superficie Σ è disegnata a fianco. Poiché essa deriva da una rotazione attorno all'asse x, la quantità z va distribuita, nella rotazione, fra z e y: dunque Σ si parametrizza nel modo seguente:



$$\boldsymbol{\sigma} : \begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \cos \vartheta \\ z = e^{-t} \sin t \sin \vartheta, \end{cases}$$

ove $t \in [0, \pi]$ e $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Dunque, con facili calcoli,

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -e^{-t}(\cos t + \sin t) & 0 \\ e^{-t}(-\sin t + \cos t) \cos \vartheta & -e^{-t} \sin t \sin \vartheta \\ e^{-t}(-\sin t + \cos t) \sin \vartheta & e^{-t} \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

da cui

$$E = |\boldsymbol{\sigma}_t|_3^2 = 2e^{-2t}, \qquad G = |\boldsymbol{\sigma}_\vartheta|_3^2 = e^{-2t} \sin t, \qquad F = \langle \boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{\sigma}_\vartheta \rangle_3 = 0;$$

pertanto

$$a(\Sigma) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - f^2}\, d\vartheta dt = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, e^{-2t} \sin t\, dt d\vartheta = 2\pi\sqrt{2} \int_0^\pi e^{-2t} \sin t\, dt.$$

Integrando 2 volte per parti, si trova

$$\int_0^\pi e^{-2t} \sin t\, dt = -\frac{1}{5} \left[e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t) \right]_0^\pi = \frac{1 + e^{-2\pi}}{5},$$

da cui, finalmente,

$$a(\Sigma) = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5} (1 + e^{-2\pi}).$$

Si osservi che avremmo potuto integrare per circonferenze di raggio z lungo la curva Γ:

$$\int_\Gamma 2\pi z\, ds = \int_0^\pi 2\pi e^{-2t} \sin t \sqrt{2e^{-4t}}\, dt = 2\pi\sqrt{2} \int_0^\pi e^{-2t} \sin t\, dt,$$

ritrovando lo stesso risultato.

Prova scritta del 2 febbraio 2017

Esercizio 1 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y)=\frac{2y^2-x^2}{x^2+y^2}+2y^2-x$$

nell'insieme

$$D=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}.$$

Esercizio 2 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^n)}{1+nx^2}\,dx.$$

Esercizio 3 Sia Γ la curva definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x=3\cos\vartheta-\cos 3\vartheta \\ y=3\sin\vartheta-\sin 3\vartheta, \end{cases}\qquad \vartheta\in[0,2\pi].$$

(i) Si detarmini la lunghezza di Γ.

(ii) Si calcoli l'area della regione piana A delimitata dalla curva Γ.

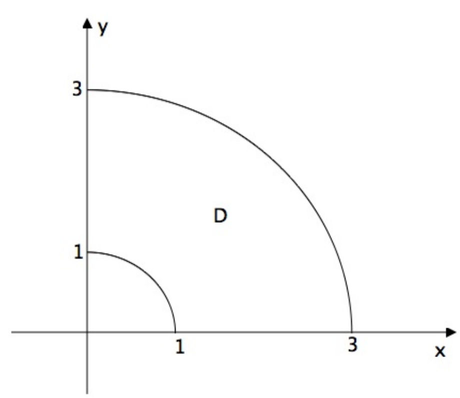
Esercizio 4 Stabilire in quali sottointervalli di $[0,\infty[$ la successione di funzioni

$$f_n(x)=\frac{\ln(1+x^n)}{1+nx^2},\qquad x\ge 0,$$

(i) converge puntualmente;

(ii) converge uniformemente.

Risoluzione



Esercizio 1 La funzione è di classe C^1 sul dominio D. Risulta

$$f_x(x,y)=\frac{-2x(x^2+y^2)-(2y^2-x^2)2y}{(x^2+y^2)^2}-1$$

$$f_y(x,y)=\frac{4y(x^2+y^2)-(2y^2-x^2)2y}{(x^2+y^2)^2}+4y,$$

e quindi i punti stazionari di f risolvono il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{-2x(x^2+y^2)-(2y^2-x^2)2x}{(x^2+y^2)^2}-1=0 \\ \dfrac{4y(x^2+y^2)-(2y^2-x^2)2y}{(x^2+y^2)^2}+4y=\dfrac{6y\,x^2}{(x^2+y^2)^2}+4y=0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione segue subito che $y = 0$, oppure $\frac{6x^2}{(x^2+y^2)^2} + 4 = 0$, che non è mai verificata. Per $y = 0$ la prima equazione diventa $-1 = 0$ e ovviamente non ha soluzioni. Dunque f non ha punti stazionari.
Vediamo la situazione sulla frontiera. Sui vertici di D si ha

$$f(1,0) = -2, \quad f(3,0) = -4, \quad f(0,1) = 4, \quad f(0,3) = 20.$$

Sul segmento $1 < x < 3$, $y = 0$ si ha $f(x,0) = -1 - x$, funzione decrescente, quindi non abbiamo punti significativi.
Sul segmento $1 < y < 3$, $x = 0$ si ha $f(0,y) = 2 + 2y^2$, funzione crescente, quindi non abbiamo punti significativi.
Sull'arco di circonferenza unitaria che unisce i punti $(0,1)$ e $(1,0)$ si ha $x = \cos\vartheta$, $y = \sin\vartheta$, $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, e quindi $f(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = 4\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta - \cos\vartheta = 4 - 5\cos^2\vartheta - \cos\vartheta$. La derivata di questa funzione è $(10\cos\vartheta + 1)\sin\vartheta$, dunque essa non si annulla mai nell'intervallo considerato.
Sull'arco di circonferenza di raggio 3 che unisce i punti $(0,3)$ e $(3,0)$ si ha $x = 3\cos\vartheta$, $y = 3\sin\vartheta$, $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, e quindi $f(3\cos\vartheta, 3\sin\vartheta) = 20\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta - 9\cos\vartheta = 20 - 21\cos^2\vartheta - 9\cos\vartheta$; anche stavolta la sua derivata $(42\cos\vartheta + 9)\sin\vartheta$ non si annulla mai nell'intervallo considerato.
Si conclude allora che

$$\min_D f = f(3,0) = -4, \qquad \max_D f = f(0,3) = 20.$$

Esercizio 2 Gli integrandi sono funzioni non negative e continue. Conviene distinguere cosa accade per $0 < x \le 1$ e cosa accade per $x > 1$: si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{1+nx^2} = 0 \qquad \forall x \in]0,1[\,,$$

poiché per $n \to \infty$ il numeratore è infinitesimo mentre il denominatore tende a $+\infty$. Se invece $x \ge 1$, scrivendo

$$\frac{\ln(1+x^n)}{1+nx^2} = \frac{n\ln x + \ln(1+x^{-n})}{1+nx^2}, \tag{1}$$

si trova

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{1+nx^2} = \frac{\ln x}{x^2} \qquad \forall x \ge 1$$

essendo il secondo addendo del numeratore limitato da $\ln 2$. Dunque esiste il limite puntuale delle f_n, che è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \dfrac{\ln x}{x^2} & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

La convergenza delle f_n è dominata: infatti, usando per $x \ge 1$ la decomposizione (1),

$$\frac{\ln(1+x^n)}{1+nx^2} \le \begin{cases} \ln 2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{\ln 2}{x^2} & \text{se } x \ge 1 \end{cases} \qquad \forall n \ge 1,$$

e la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \ln 2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{\ln 2}{x^2} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

è sommabile su $[0, \infty[$, con

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(x)\,dx &= \ln 2 + \int_1^\infty \frac{\ln 2 + \ln x}{x^2}\,dx = 2\ln 2 + \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \\ &= 2\ln 2 + \int_0^\infty t\,e^{-2t}dt = 2\ln 2 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dunque possiamo concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^n)}{1+nx^2}\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int_0^\infty t\,e^{-t}dt = 1.$$

Esercizio 3 (i) Posto $\boldsymbol{\gamma}(\vartheta) = (3\cos\vartheta - \cos 3\vartheta, 3\sin\vartheta - \sin 3\vartheta)$, calcoliamo $\boldsymbol{\gamma}'(\vartheta)$:

$$\begin{cases} x'(\vartheta) = -3\sin\vartheta + 3\sin 3\vartheta \\ y'(\vartheta) = 3\cos\vartheta - 3\cos 3\vartheta, \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Dunque

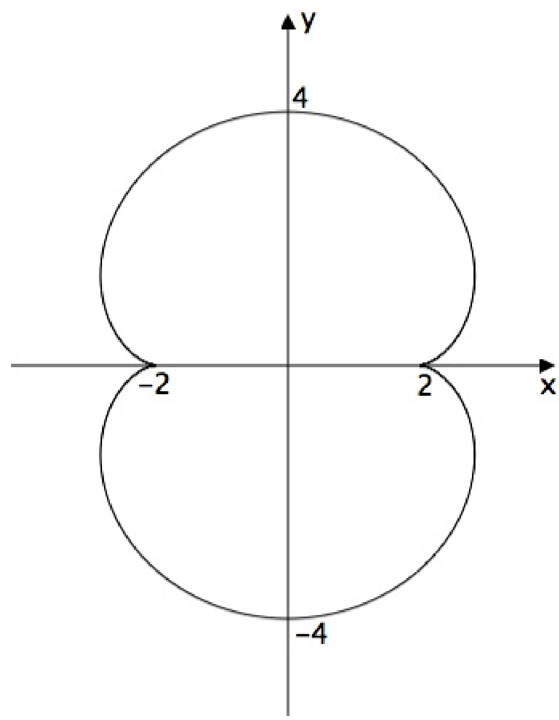
$$\begin{aligned} \sqrt{x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2} &= \sqrt{9 + 9 - 18(\cos\vartheta\cos 3\vartheta + \sin\vartheta\sin 3\vartheta)} = \\ &= \sqrt{18(1-\cos 2\vartheta)} = \sqrt{36\sin^2\vartheta}, \end{aligned}$$

e pertanto

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{36\sin^2\vartheta}\,d\vartheta = 2\int_0^\pi \sqrt{36\sin^2\vartheta}\,d\vartheta = 12\int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta = 24.$$

(ii) Utilizzando una conseguenza delle formule di Gauss-Green si ha, indicando con $+\partial A$ l'orientazione antioraria della frontiera ∂A:

$$\begin{aligned} m_2(A) &= \frac{1}{2}\int_{+\partial A} (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [x(\vartheta)y'(\vartheta) - y(\vartheta)x'(\vartheta)]\,d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(3\cos\vartheta - \cos 3\vartheta)(3\cos\vartheta - 3\cos 3\vartheta) - \\ &\qquad -(3\sin\vartheta - \sin 3\vartheta)(-3\sin\vartheta + 3\sin 3\vartheta)]\,d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [9 + 3 - 12(\cos\vartheta\cos 3\vartheta + \sin\vartheta\sin 3\vartheta)]\,d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} 6(1 - \cos 2\vartheta)\,d\vartheta = 12\pi. \end{aligned}$$



Esercizio 4 (i) Le funzioni f_n sono non negative. La presenza del monomio x^n ci obbliga a distinguere il caso $0 \le x \le 1$ dal caso $x > 1$. Nel primo caso, $0 \le x \le 1$, si ha

$$0 \le f_n(x) \le \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\ln 2}{1 + nx^2} & \text{se } 0 < x \le 1, \end{cases}$$

e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall x \in [0, 1].$$

nel secondo caso, $x > 1$, conviene scrivere

$$\ln(1 + x^n) = \ln x^n(1 + x^{-n}) = n \ln x + \ln(1 + x^{-n}), \tag{2}$$

e di conseguenza

$$f_n(x) = \frac{n \ln x}{1 + nx^2} + \frac{\ln(1 + x^{-n})}{1 + nx^2};$$

ne segue che il primo termine converge a $\frac{\ln x}{x^2}$, mentre il secondo termine è più piccolo di $\frac{\ln 2}{n}$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2} \qquad \forall x > 1.$$

In definitiva, posto

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{\ln x}{x^2} & \text{se } x \ge 1, \end{cases} \tag{3}$$

la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f in $[0,\infty[$.

(ii) Analizziamo la convergenza uniforme in $[0,1]$. Essendo $\ln(1+t)\le t$ per $t\ge 0$, si ha

$$0\le f_n(x)\le \begin{cases} \dfrac{x^n}{1}\le\dfrac{1}{2^n} & \text{se } 0\le x\le\dfrac12 \\ \dfrac{\ln 2}{1+nx^2}\le\dfrac{\ln 2}{1+\frac{n}{4}} & \text{se } \dfrac12\le x\le 1, \end{cases}$$

e pertanto $f_n\to 0$ uniformemente in $[0,1]$.
Analizziamo la convergenza uniforme in $[1,\infty[$. Utilizzando la decomposizione (2), si ha

$$\begin{aligned}\left|\frac{\ln(1+x^n)}{1+nx^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right| &= \left|\frac{n\ln x}{1+nx^2}-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{\ln(1+x^{-n})}{1+nx^2}\right|\le\\ &\le \left|\frac{n\ln x}{1+nx^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right|+\left|\frac{\ln(1+x^{-n})}{1+nx^2}\right|.\end{aligned}$$

Il primo addendo si stima nel modo seguente:

$$\left|\frac{n\ln x}{1+nx^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right|=\left|\frac{nx^2\ln x-nx^2\ln x-1}{x^2(1+nx^2)}\right|=\frac{1}{x^2(1+nx^2)}\le\frac{1}{1+n}\quad\forall x\ge 1,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\ge 1}\left|\frac{n\ln x}{1+nx^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right|=0.$$

Il secondo addendo si maggiora così:

$$\left|\frac{\ln(1+x^{-n})}{1+nx^2}\right|\le\frac{\ln 2}{1+n}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\ge 1}\left|\frac{\ln(1+x^{-n})}{1+nx^2}\right|=0.$$

Ne segue

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\ge 1}\left|\frac{n\ln x}{1+nx^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right|=0,$$

ossia $f_n(x)\to\frac{\ln x}{x^2}$ uniformemente in $[1,\infty[$.
Tirando le somme, la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in $[0,\infty[$ alla funzione f definita in (3).

Prova scritta del 21 febbraio 2017

Esercizio 1 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y)=\frac{2x-y}{x^2+y^2+1}$$

nell'insieme chiuso D, delimitato dal triangolo di vertici (0.0), $(3,0)$, $(0,3)$.

Esercizio 2 Calcolare l'integrale triplo

$$\int_E y|xz|\, dxdydz,$$

ove

$$E = \{(x,y,z): \ 0 \le y \le 1 - \sqrt{x^2+z^2}\}.$$

Esercizio 3 Sia Σ la superficie che si ottiene ruotando il grafico della funzione

$$z = -x^2, \qquad -1 \le x \le 0,$$

attorno all'asse z; si orienti Σ in modo che la terza componente del versore normale a Σ sia positiva. Posto

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z, y^2 - z^2 + x, z^2 - x^2 + y),$$

si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

Risoluzione

Esercizio 1 Anzitutto, calcoliamo il valore di f sui tre vertici:

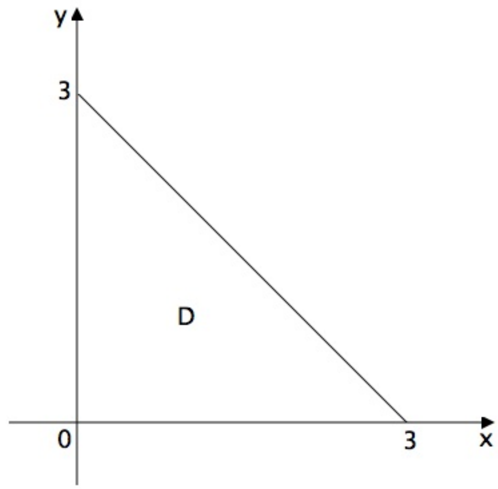
$$f(0,0) = 0, \qquad f(3,0) = \frac{3}{5}, \qquad f(0,3) = -\frac{3}{10}.$$

Cerchiamo i punti stazionari di f interni a D. Si ha

$$f_x(x,y) = \frac{2(x^2+y^2+1) - (2x-y)2x}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2y^2+2xy+2}{(x^2+y^2+1)^2},$$
$$f_y(x,y) = \frac{-(x^2+y^2+1) - (2x-y)2y}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{-x^2+y^2-4xy-1}{(x^2+y^2+1)^2},$$

dunque i punti stazionari risolvono il sistema

$$\begin{cases} -2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2 = 0 \\ -x^2 + y^2 - 4xy - 1 = 0. \end{cases}$$



Esso si riscrive come

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = -1 - xy \\ y^2 - x^2 = 1 + 4xy; \end{cases}$$

quindi

$$-1 - xy = 1 + 4xy,$$

ossia

$$\begin{cases} xy = -\dfrac{2}{5} \\ y^2 - x^2 = -\dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Qui ci possiamo fermare, perché essendo $xy < 0$ gli eventuali punti stazionari devono essere discordi in segno, e dunque non possono appartenere all'insieme D, visto che D giace nel primo quadrante.
Vediamo cosa succede lungo i tre segmenti del bordo di D. Il primo segmento è

$$S_1 = \{(x, 0) : \ 0 < x < 3\} :$$

in S_1 si ha

$$f(x, 0) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \qquad 0 < x < 3,$$

e analizzando la derivata $\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$ si vede che l'unico punto stazionario vincolato è $(1, 0)$, con

$$f(1, 0) = 1.$$

Il secondo segmento è

$$S_2 = \{(0, y) : \ 0 < y < 3\} :$$

in S_2 si ha

$$f(0, y) = -\frac{y}{y^2 + 1}, \qquad 0 < y < 3,$$

e analizzando la derivata $\frac{y^2-1}{(y^2+1)^2}$ si vede che l'unico punto stazionario vincolato è $(0, 1)$, con

$$f(0, 1) = -\frac{1}{2}.$$

Il terzo segmento è

$$S_3 = \{(x, 3 - x) : \ 0 < x < 3\} :$$

in S_3 si ha

$$f(x, 3-x) = \frac{2x-3+x}{x^2+(3-x)^2+1} = \frac{3x-3}{2x^2-6x+10},$$

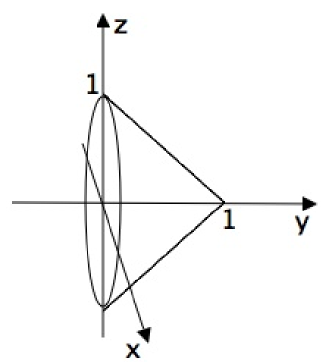
e analizzando la derivata $\frac{-6x^2+12x+12}{(2x^2-6x+10)^2}$ si vede che essa si annulla per $x = 1 \pm \sqrt{3}$, ma $x = 1-\sqrt{3} \notin S_3$. Si ha dunque l'unico punto stazionario vincolato $(1+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$, con

$$f(1+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})^2-6(1+\sqrt{3})+10} = \frac{3\sqrt{3}}{2(6-\sqrt{3})}.$$

Infine, notando che, come si verifica agevolmente, $\frac{3\sqrt{3}}{2(6-\sqrt{3})} < 1$, confrontando i valori trovati si ha

$$\max_D f = f(1,0) = 1, \qquad \min_D f = f(0,1) = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 2 L'insieme E è un cono con vertice $(0,1,0)$, con asse l'asse y e con base il disco di centro $(0,0,0)$ e raggio 1 contenuto nel piano $y=0$. Possiamo descriverlo mediante coordinate cilindriche con asse l'asse y:



$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = y \\ z = r\sin\vartheta, \end{cases}$$

ove $0 \le r \le 1$, $0 \le y \le 1-r$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Per ragioni di simmetria risulta

$$\int_E y|xz|\,dxdydz = 4\int_{E'} yxz\,dxdydz,$$

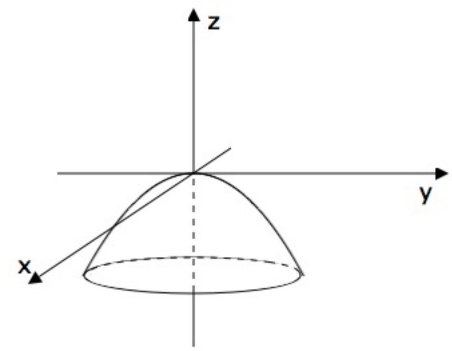
ove $E' = E \cap \{(x,y,z):\ x \ge 0,\ z \ge 0\}$. Dunque

$$\begin{aligned}
\int_E y|xz|\,dxdydz &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\sin\vartheta \int_0^1 r^3 \int_0^{1-r} y\,dydrd\vartheta = \\
&= 2\left[\sin^2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-r} dr = \int_0^1 r^3(1-r)^2\,dr = \\
&= \int_0^1 (r^3 - 2r^4 + r^5)\,dr = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{60}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 La superficie di rotazione Σ si parametrizza in coordinate cilindriche:

$$\boldsymbol{\sigma}: \begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \\ z = -r^2, \end{cases}$$

ove $0 \le r \le 1$ e $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Risulta



$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \\ -2r & 0 \end{pmatrix},$$

quindi il vettore normale a Σ è

$$\mathbf{n} = (2r^2\cos\vartheta, 2r^2\sin\vartheta, r).$$

Essendo r positivo, il vettore normale è orientato come richiesto.
Il bordo $b\Sigma$ di Σ è la circonferenza descritta da

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad z = -1,$$

e si parametrizza con

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = -1, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Il vettore tangente è

$$\boldsymbol{\tau} = (-\sin t, \cos t, 0).$$

Il verso di percorrenza associato a questa parametrizzazione lascia la superficie Σ, orientata come sopra descritto, a sinistra: quindi le due orientazioni sono coerenti. Pertanto, utilizzando il teorema di Stokes, il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ è uguale a

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\sigma &= \int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3 \, ds = \\ &= \int_0^{2\pi} [-(\cos^2 t - \sin^2 t + 1)\sin t + (\sin^2 t - 1 + \cos t)\cos t + \\ &\quad +(1 - \cos^2\vartheta + r\sin\vartheta)\cdot 0]\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi. \end{aligned}$$

Naturalmente si poteva anche calcolare direttamente il flusso del rotore di $\mathbf{F}$: volendo seguire questa strada, si ha anzitutto, a partire dalla parametrizzazione di Σ,

$$\mathbf{n} = (2r^2\cos\vartheta, 2r^2\sin\vartheta, r),$$

mentre

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ x^2-y^2+z & y^2-z^2+x & z^2-x^2+y \end{pmatrix} = (1+2z, 1+2x, 1+2y).$$

Dunque

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\sigma =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[(1-2r^2)2r^2\cos\vartheta + (1+2r\cos\vartheta)2r^2\sin\vartheta + (1+2r\sin\vartheta)r\right] \, d\vartheta dr.$$

Tutti gli integrali sono nulli, tranne il primo del terzo addendo: si trova

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, d\vartheta dr = \frac{1}{2}\, 2\pi = \pi.$$

Prova scritta del 13 aprile 2017

Esercizio 1 Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$f_n(x) = n^4 x^3 \, e^{-n^2 x}, \qquad x \geq 0.$$

Si provi che:

(i) la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 in $[0,\infty[$;

(ii) la serie $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ converge totalmente in $[0,\infty[$.

Esercizio 2 Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ la “forma di pecorino” definita da

$$D = \left\{(x,y,z): \; x^2+y^2+z^2 \leq 1, \; |z| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Si determini il volume di D.

Esercizio 3 Sia Σ la superficie così definita:

$$\Sigma = \begin{cases} x = t\cos\vartheta \\ y = t\sin\vartheta \\ z = 3-3t, \end{cases} \qquad t \in [0,1], \; \vartheta \in [0,2\pi].$$

Si orienti Σ secondo la normale che ha la terza componente non negativa, e si calcoli il flusso attraverso Σ del campo vettoriale $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$, ove

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2y - yz, -y^2x + xz, e^{z^2} - xy).$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Le funzioni f_n sono tutte non negative. Dobbiamo mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 0} n^4 x^3\, e^{-n^2 x} = 0.$$

Risulta $f_0(x) \equiv 0$. Per $n \in \mathbb{N}^+$, ponendo $n^2 x = t$ si ha

$$\sup_{x\geq 0} n^4 x^3\, e^{-n^2 x} = \sup_{t\geq 0} \frac{t^3}{n^2}\, e^{-t} = \frac{1}{n^2} \sup_{t\geq 0} t^3\, e^{-t},$$

e l'ultimo membro si calcola facilmente: posto $f(t) = t^3\, e^{-t}$, si ha $f(0) = f(+\infty) = 0$, $f'(t) = (3t^2 - t^3)e^{-t} = 0$ se e solo se $t = 3$, e questo è certamente un punto di massimo. Pertanto

$$\sup_{x\geq 0} n^4 x^3\, e^{-n^2 x} = \frac{1}{n^2} \sup_{t\geq 0} t^3\, e^{-t} = \frac{27}{n^2} e^{-3}.$$

Ne segue la tesi.

(ii) Come abbiamo visto in (i),

$$\sup_{x\geq 0} f_n(x) = \frac{27}{n^2} e^{-3};$$

pertanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\geq 0} f_n(x) = 27\, e^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

è convergente, e ciò prova la tesi.

Esercizio 2 Utilizziamo le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r\,\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\,\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\,\cos\vartheta, \end{cases} \qquad r \geq 0,\ \ \vartheta \in [0,\pi],\ \ \varphi \in [0, 2\pi].$$

Le limitazioni che definiscono l'insieme D diventano

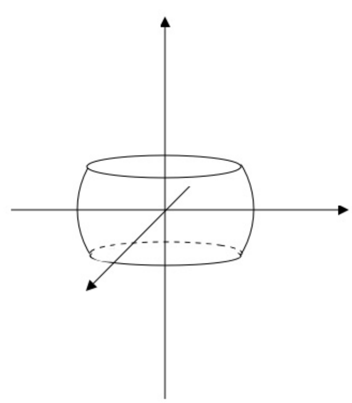
$$0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \qquad r|\cos\vartheta| \leq \frac{1}{2},$$

ossia

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \qquad 0 \leq r \leq \min\left\{1, \frac{1}{2|\cos\vartheta|}\right\}.$$

Osserviamo che

$$\min\left\{1, \frac{1}{2|\cos\vartheta|}\right\} = \begin{cases} 1 & \text{se } \vartheta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right], \\ \frac{1}{2|\cos\vartheta|} & \text{se } \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \end{cases}$$



Quindi il volume di D si calcola in questo modo:

$$
\begin{aligned}
m_3(D) &= \int_D dxdydz = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{1}{2|\cos\vartheta|}} r^2\sin\vartheta\, drd\vartheta d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\int_0^{1} r^2\sin\vartheta\, drd\vartheta d\varphi + \\
&\quad + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\int_0^{\frac{1}{2|\cos\vartheta|}} r^2\sin\vartheta\, drd\vartheta d\varphi.
\end{aligned}
$$

Il primo e il terzo addendo sono uguali, osservando che $\sin(\pi-\vartheta) = \sin\vartheta$ e $|\cos(\pi-\vartheta)| = |\cos\vartheta|$ e facendo la sostituzione $\tau = \pi - \vartheta$. Dunque

$$
\begin{aligned}
m_3(D) &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{1}{2\cos\vartheta}} r^2\sin\vartheta\, drd\vartheta d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\int_0^{1} r^2\sin\vartheta\, drd\vartheta d\varphi = \\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}\left[\frac{1}{8\cos^3\vartheta}\right]\sin\vartheta\, d\vartheta + 2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{3}\sin\vartheta\, d\vartheta = \\
&= \frac{\pi}{6}\left[\frac{1}{2\cos^2\vartheta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{2\pi}{3}\big[-\cos\vartheta\big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

Osservazione Potevamo, più semplicemente, utilizzare le coordinate cilindriche: le relazioni che definiscono D sono

$$x^2+y^2 \le 1-z^2, \qquad z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

e dunque, se $x = r\cos\vartheta$ e $y = r\sin\vartheta$, si ha

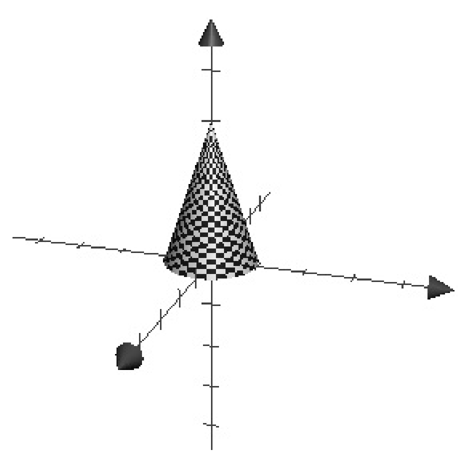
$$0 \le r \le \sqrt{1-z^2}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Pertanto, integrando per fette orizzontali, e osserrvando che ciascuna fetta è un disco di raggio $\sqrt{1-z^2}$, si trova

$$m_3(D) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pi(1-z^2)\, dz = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \pi(1-z^2)\, dz = 2\pi\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right] = \frac{11\pi}{12}.$$

Esercizio 3 La superficie Σ è regolare, tranne che nel suo vertice $(0,0,3)$; essa è anche orientabile, visto che si tratta di un cono retto a base circolare. La matrice delle derivate è

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -t\,\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & t\,\cos\vartheta \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$



dunque il vettore normale è

$$\pm(3t\,\cos\vartheta, 3t\,\sin\vartheta, t),$$

e bisogna scegliere il segno $+$, essendo la terza componente uguale a t che è positivo. Dunque $\mathbf{n} = (3t\, \cos\vartheta, 3t\, \sin\vartheta, t)$. Risulta poi

$$\textbf{rot}\,\mathbf{F} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ x^2y - yz & -y^2x + xz & e^{z^2} - xy \end{pmatrix} = (-2x, 0, -y^2 - x^2 + 2z).$$

Dunque il flusso Φ cercato è

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_\sigma \langle \textbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\mathbf{s} = \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \big(-6t^2 \cos^2\vartheta + 0 + t(-t^2 + 6 - 6t)\big)\, d\vartheta dt = \\
&= \int_0^1 6t^2\, dt \int_0^{2\pi} (-\cos^2\vartheta)\, d\vartheta + 2\pi \int_0^1 (-t^3 + 6t - 6t^2)\, dt = \\
&= -2\pi + 2\pi\left(-\frac{1}{4} + 3 - 2\right) = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Osservazione Avremmo potuto utilizzare anche il teorema di Stokes: il bordo di Σ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 nel piano $z = 0$. Essa va orientata in modo coerente con l'orientazione fissata su Σ e quindi nel verso antiorario rispetto al piano xy. Quindi una sua parametrizzazione è

$$x = \cos\vartheta, \qquad y = \sin\vartheta, \qquad z = 0, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

e il vettore tangente è $\boldsymbol{\tau} = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0)$. Dunque, essendo

$$\mathbf{F}(x, y, 0) = (x^2y, -y^2x, 1 - xy),$$

si ha

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3 \, ds = \int_0^{2\pi} (-\cos^2\vartheta \sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta + 0)\, d\vartheta = \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\vartheta\, d\vartheta = -\frac{1}{4}\int_0^{4\pi} \sin^2 s\, ds = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 30 giugno 2017

Esercizio 1 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y, z) = y - x, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

nell'nsieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_E x^3\, dxdy,$$

ove

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq \frac{1}{2} \,, \; y \geq 0, \; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 3 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3y, -2xz, yz^2), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

si consideri la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 4 \geq z = x^2 + y^2\},$$

orientata secondo il versore normale $\mathbf{n}$ la cui terza componente è negativa. Si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds,$$

ove il versore tangente $\boldsymbol{\tau}$ al bordo $b\Sigma$ è orientato nel modo coerente con $\mathbf{n}$.

Risoluzione

Esercizio 1 Poiché $\nabla f(x,y,z) = (-1,1,0)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, la funzione f non ha punti stazionari liberi. Dunque il massimo ed il minimo di f su D saranno assunti in punti del bordo di D, cioè in punti di

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

Utiliuzzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, andiamo a cercare i punti stazionari di

$$L(x,y,z,\lambda) = y - x + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9) :$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9. \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ la prima e la seconda equazione non hanno soluzione: quindi $\lambda \neq 0$ e pertanto dalla terza equazione segue $z = 0$. Ne deriva $x = \frac{1}{2\lambda} = -y$, e la quarta equazione ci dà allora $2x^2 = 9$, ossia $x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. Si hanno così i due punti

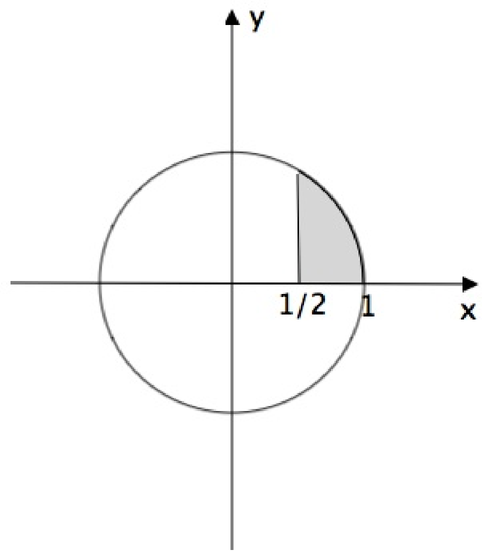
$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, 0 \right), \qquad \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

nei quali

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, 0 \right) = -3\sqrt{2} = \min_D f, \qquad f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 0 \right) = 3\sqrt{2} = \max_D f.$$

Esercizio 2 L'insieme E è disegnato in figura. Conviene utilizzare le coordinate polari: risulta

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta, \end{cases}$$



con le limitazioni

$$r\cos\vartheta \geq \frac{1}{2}, \quad r\sin\vartheta \geq 0,$$

che corrispondono a

$$\frac{1}{2\cos\vartheta} \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2},$$

e, affinchè l'intervallo per la r non sia vuoto,

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Dunque

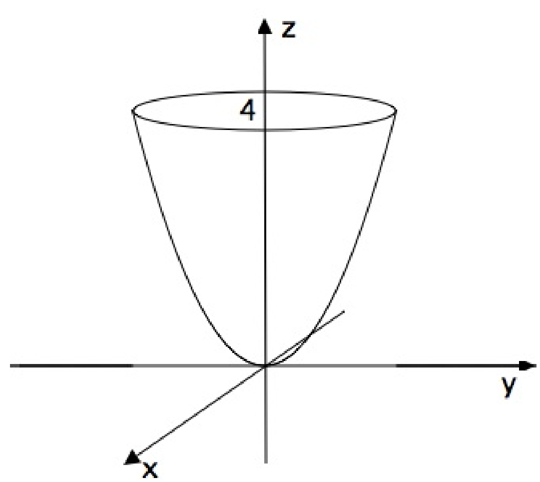
$$\begin{aligned}\int_E x^3\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{1}{2\cos\vartheta}}^1 r^3\cos^3\vartheta\, r\,drd\vartheta = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^3\vartheta\left[1 - \frac{1}{32\cos^5\vartheta}\right]d\vartheta = \\ &= \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\sin^2\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta - \frac{1}{160}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2\vartheta}d\vartheta = \\ &= \frac{1}{5}\left[\sin\vartheta - \frac{1}{3}\sin^3\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{160}\Big[\tan\vartheta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{40} - \frac{\sqrt{3}}{160} = \frac{11\sqrt{3}}{160}.\end{aligned}$$

Esercizio 3 La superficie Σ è disegnata in figura. Il bordo $b\Sigma$ è descritto dalle equazioni

$$z = 4, \qquad x^2 + y^2 = 4,$$

e quindi si parametrizza come

$$\begin{cases} x = 2\cos\vartheta \\ y = 2\sin\vartheta \qquad \vartheta \in [0, 2\pi]. \\ z = 4, \end{cases}$$



Questo verso di percorrenza però non è coerente con il verso della normale $\mathbf{n}$, che è diretta "verso il basso". Si deve cioè cambiare di segno il vettore tangente: pertanto

$$\boldsymbol{\tau} = -(-2\sin\vartheta, 2\cos\vartheta, 0) = (2\sin\vartheta, -2\cos\vartheta, 0).$$

L'integrale vale perciò

$$\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds = \int_0^{2\pi} [6 \sin\vartheta(2\sin\vartheta) - 16\cos\vartheta(-2\cos\vartheta)] \, d\vartheta = 44\pi.$$

Naturalmente si poteva anche far uso del teorema di Stokes: si ha

$$\mathbf{rotF}(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ 3y & -2xz & yz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2+2x \\ 0 \\ -2z-3 \end{pmatrix};$$

inoltre la superficie Σ è parametrizzata da

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = r^2, \qquad (r,\vartheta) \in [0,2] \times [0,2\pi],$$

per cui la matrice Jacobiana è

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \\ 2r & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque il vettore normale a Σ è $(-2r^2\cos\vartheta, -2r^2\sin\vartheta, r)$; ma l'orientazione richiesta deve avere terza componente negativa, e quindi scegliamo

$$\mathbf{n} = (2r^2\cos\vartheta, 2r^2\sin\vartheta, -r).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds &= \int_{\Sigma} \langle \mathbf{rotF}, \mathbf{n} \rangle \, ds = \int_0^2 \int_0^{2\pi} [(r^4 + 2r\cos\vartheta)(2r^2\cos\vartheta) + (2r^2+3)r] \, d\vartheta dr = \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (2r^6\cos\vartheta + 4r^3\cos^2\vartheta + 2r^3 + 3r) \, d\vartheta dr = \\ &= 0 + 16\pi + 16\pi + 12\pi = 44\pi. \end{aligned}$$

Prova scritta del 29 giugno 2018

Esercizio 1 Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{1+x^n}{1-x^n}, \qquad -1 < x < 1.$$

(i) Si mostri che f_n converge puntualmente e se ne determini il limite.

(ii) Si indichi in quali sotto-intervalli di $]-1,1[$ vi è convergenza uniforme.

Esercizio 2 Sia

$$F(x, y) = 3x^2y - 2xy^2 + y\sin(x-2), \qquad x, y \in \mathbb{R}^2.$$

e poniamo $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; F(x, y) = 0\}$.

(i) Si verifichi che $(2, 3) \in Z$ e che il teorema del Dini è applicabile in tale punto.

(ii) Si mostri che la funzione g tale che $F(x, g(x)) = 0$ in un intorno di 2 è ricavabile esplicitamente, e se ne scriva il polinomio di Taylor di grado 2, centrato in 2.

Esercizio 3 Si consideri la curva piana Γ descritta in coordinate polari dall'equazione

$$r = \frac{1}{\vartheta}, \qquad 0 < \vartheta < \infty.$$

(i) Si scriva l'equazione della retta tangente a Γ nel punto $\left(-\frac{1}{\pi}, 0\right)$.

(ii) Si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+x^2+y^2)^3}\, ds.$$

Esercizio 4 Due urne, U_1 e U_2, contengono ciascuna due palline. Si lancia un dado equilibrato: se esce 1 oppure 2, si estrae una pallina dall'urna U_1; se invece esce 3, o 4, o 5, oppure 6, si estrae una pallina dall'urna U_2. Si ripete la procedura fino a quando una delle due urne è vuota.

(i) Si calcoli la probabilità che sia l'urna U_1 a svuotarsi.

(ii) Detta T la variabile aleatoria che conta il numero di lanci di dado necessari a svuotare una delle due urne, si determini la densità discreta di T e se ne calcoli la speranza.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Poiché $|x| < 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1.$$

(ii) Posto $f(x) = 1$, risulta

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1+x^n}{1-x^n} - 1\right| = \frac{2|x^n|}{1-x^n} \qquad \forall x \in]-1, 1[\,,$$

da cui

$$\sup_{|x|<1} |f_n(x) - f(x)| = +\infty.$$

Quindi non vi è convergenza uniforme in $]-1,1[$. Tuttavia, fissato $\delta \in]0,1[$, nell'intervallo $[-\delta,\delta]$ si ha

$$\sup_{|x|\le\delta} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{|x|\le\delta} \frac{2|x^n|}{1-x^n} \le \sup_{|x|\le\delta} \frac{2|x^n|}{1-|x|^n} = \frac{2\delta^n}{1-\delta^n},$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\le\delta} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Dunque la convergenza è uniforme in tutti gli intervalli $[-\delta,\delta]$ con $0<\delta<1$.

Esercizio 2 (i) È chiaro che $F(2,3) = 36 - 36 + 0 = 0$. Inoltre

$$\nabla F(x,y) = (6xy - 2y^2 + y\cos(x-2), 3x^2 - 4xy + \sin(x-2)),$$

cosicché

$$\nabla F(2,3) = (21, -12).$$

Il teorema del Dini è dunque applicabile.

(ii) Essendo $F_y(2,3) \neq 0$, esiste in un intorno di 2 la funzione implicita $g(x)$ tale che $F(x,g(x)) = 0$; in altre parole

$$3x^2 g(x) - 2x g(x)^2 + g(x)\sin(x-2) = 0,$$

ossia

$$g(x)\big(3x^2 + \sin(x-2) - 2x\, g(x)\big) = 0.$$

Essendo $g(2) = 3$, la g è diversa da 0 in un intorno di 2; dunque deve essere $3x^2 + \sin(x-2) - 2x\,g(x) = 0$, vale a dire

$$g(x) = \frac{3x^2 + \sin(x-2)}{2x} = \frac{3}{2}x + \frac{\sin(x-2)}{2x}.$$

Questa funzione è definita per ogni $x>0$, è non nulla in un intorno di 2 e si ha $g(2)=3$; inoltre, con facili conti,

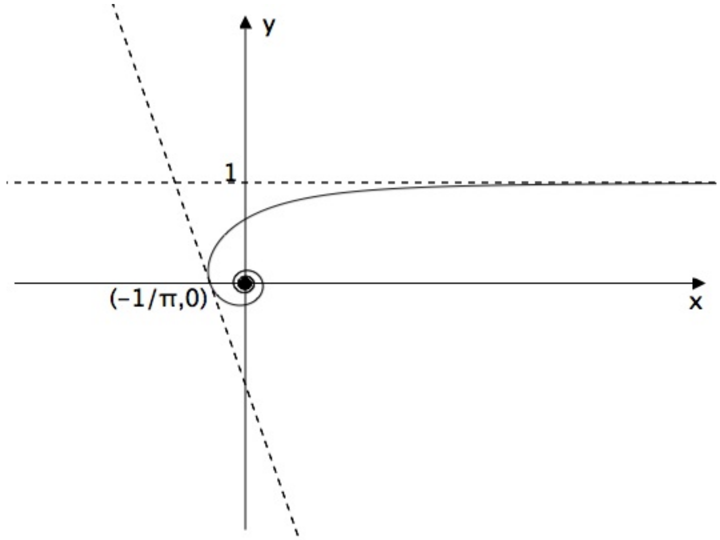
$$g'(x) = \frac{3}{2} + \frac{x\cos(x-2) - \sin(x-2)}{2x^2}, \qquad g'(2) = \frac{7}{4},$$

$$g''(x) = -\frac{1}{2x^2}\cos(x-2) + \frac{2x - x^3}{2x^4}\sin(x-2), \qquad g''(2) = -\frac{1}{4}.$$

Dunque il polinomio di Taylor cercato è

$$P_2(x) = 3 + \frac{7}{4}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2.$$

Esercizio 3 (i) La curva Γ, con la retta tangente richiesta, è illustrata in figura.



La parametrizzazione di Γ è

$$x = \frac{\cos\vartheta}{\vartheta}, \quad y = \frac{\sin\vartheta}{\vartheta},$$

da cui

$$x' = -\frac{\cos\vartheta}{\vartheta^2} - \frac{\sin\vartheta}{\vartheta}, \quad y' = -\frac{\sin\vartheta}{\vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{\vartheta},$$

e in particolare

$$(x(\pi), y(\pi)) = \left(-\frac{1}{\pi}, 0\right), \qquad (x'(\pi), y'(\pi)) = \left(\frac{1}{\pi^2}, -\frac{1}{\pi}\right),$$

cosicché la retta tangente richiesta ha equazioni parametriche

$$x = -\frac{1}{\pi} + \frac{t}{\pi^2}, \quad y = -\frac{t}{\pi}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Calcoliamo l'integrale proposto: per una curva espressa in coordinate polari si ha, come è noto,

$$ds = \sqrt{x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2}\, d\vartheta = \sqrt{r(\vartheta)^2 + r'(\vartheta)^2}\, d\vartheta,$$

e pertanto

$$ds = \sqrt{\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{1}{\vartheta^4}}\, d\vartheta = \frac{1}{\vartheta^2}\sqrt{\vartheta^2 + 1}\, d\vartheta.$$

Inoltre, lungo Γ, l'integrando vale

$$\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+x^2+y^2)^3} = \frac{1}{\vartheta^3}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\vartheta^2}\right)^3} = \frac{\vartheta^3}{(\vartheta^2+1)^3}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+x^2+y^2)^3}\, ds &= \int_0^\infty \frac{\vartheta^3}{(\vartheta^2+1)^3}\frac{1}{\vartheta^2}\sqrt{\vartheta^2+1}\, d\vartheta = \\ &= \int_0^\infty \frac{\vartheta}{(\vartheta^2+1)^{\frac{5}{2}}}\, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^\infty (t+1)^{-\frac{5}{2}}\, dt = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Esercizio 4 (i) Iniziamo con l'osservare che la procedura si arresta al più dopo tre lanci di dado. Sia B l'evento "l'urna U_1 si svuota dopo due lanci", e sia C l'evento "l'urna U_1 si svuota dopo tre lanci": allora è immediato verificare che (i) si realizza l'evento B se e solo se per due volte di seguito esce 1 o 2, (ii) si realizza l'evento C se e solo se nei primi due lanci escono una volta 1 o 2 e una volta 3 o 4 o 5 o 6, mentre nel terzo lancio esce 1 o 2:. Possiamo meglio descrivere la situazione indicando con A_i l'evento "al lancio i-simo esce 1 oppure 2": poiché il dado è equilibrato risulta

$$P(A_i) = \frac{1}{3}, \qquad P(A_i^c) = \frac{2}{3}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Inoltre gli eventi A_1, A_2 e A_3 sono indipendenti, e si ha evidentemente

$$B = A_1 \cap A_2, \qquad C = \big([A_1 \cap A_2^c] \cup [A_1^c \cap A_2]\big) \cap A_3.$$

Si ha allora, per indipendenza,

$$P(B) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{9},$$

mentre, essendo C l'unione di eventi incompatibili,

$$P(C) = P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{4}{27}.$$

Dunque si conclude che la probabilità che sia l'urna U_1 a svuotarsi è

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{7}{27}.$$

(ii) Come abbiamo osservato, T assume solo i valori 2 e 3. Si ha

$$\{T = 2\} = [A_1 \cap A_2] \cup [A_1^c \cap A_2^c],$$

da cui

$$P(T = 2) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Inoltre , si ha $T = 3$ se e solo se dopo i primi due lanci si è estratta una pallina dall'urna U_1 e una pallina dall'urna U_2 in qualunque ordine. Dunque

$$\{T = 3\} = [A_1 \cap A_2^c] \cup [A_1^c \cap A_2] = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}.$$

Abbiamo così la densità discreta f_T:

$$f_T(k) = P(T = k) = \begin{cases} \dfrac{5}{9} & \text{se } k = 2, \\[2ex] \dfrac{4}{9} & \text{se } k = 3. \end{cases}$$

Calcoliamo infine la speranza di T:

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=2}^{3} k\, P(T = k) = 2 \cdot \frac{5}{9} + 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{22}{9}.$$

Prova scritta del 20 luglio 2018

Esercizio 1 Sia
$$f(x,y,z) = e^{xy} - x^2e^y - y^2e^x - z^2,$$
e poniamo $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; f(x,y,z) = 0\}$. Si mostri che $(1,0,0) \in Z$ e che esiste un intorno U di tale punto tale che $Z \cap U$ è grafico di una funzione implicita che ha un massimo locale nel punto $(0,0)$.

Esercizio 2 Posto per $n \geq 2$
$$f_n(x) = \frac{x + n\sin x}{n + \sin x}, \qquad x \in [0, 2\pi],$$
si provi che la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[0, 2\pi]$ e se ne calcoli il limite.

Esercizio 3 Calcolare, se esiste,
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{x + n\cos x}{n + \cos x}\, dx.$$

Esercizio 4 Calcolare il lavoro del campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 + 2y, y^2 - 2x, z^2)$$
lungo il bordo $b\Sigma$ della superficie
$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = z \leq 1\},$$
orientato positivamente secondo il versore tangente $\boldsymbol{\tau}$ tale che $\boldsymbol{\tau}(1,0,1) = (0,1,0)$.

Esercizio 5 Si vuole stimare il tempo medio di esecuzione di un certo programma informatico. Si sa che tale tempo, misurato in secondi, è una variabile aleatoria X avente densità normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dove i parametri μ e σ sono incogniti. Il programma viene fatto girare 10 volte: si ottiene una media empirica $\overline{X} = 2.3$ sec, ed una varianza empirica $S^2 = 0.16$ sec^2. Determinare un intervallo di fiducia per μ al livello 0.98, ed un intervallo di fiducia per σ^2 al livello 0.90.

Risoluzione

Esercizio 1 Chiaramente
$$f(1,0,0) = 1 - 1 - 0 - 0 = 0;$$
inoltre
$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= y\,e^{xy} - 2x\,e^y - y^2e^x, \\ f_y(x,y,z) &= x\,e^{xy} - x^2e^y - 2y\,e^x, \\ f_z(x,y,z) &= -2z, \end{aligned}$$
da cui
$$f_x(1,0,0) = -2, \quad f_y(1,0,0) = 0, \quad f_z(1,0,0) = 0.$$

Possiamo dunque, in un intorno U di $(1,0,0)$, esplicitare la variabile x in funzione delle altre due, ottenendo una funzione implicita $g(y,z)$ tale che $Z \cap U$ è il grafico di g. In particolare

$$g(0,0)=1, \qquad e^{g(y,z)y}-g(y,z)^2e^y-y^2e^{g(y,z)}-z^2=0 \quad \forall (x,y,z)\in U.$$

Inoltre

$$g_y(y,z)=-\frac{f_y(g(y,z),y,z)}{f_x(g(y,z),y,z)}, \qquad g_z(y,z)=-\frac{f_z(g(y,z),y,z)}{f_x(g(y,z),y,z)},$$

da cui

$$g_y(0,0)=0, \qquad g_z(0,0)=0.$$

Dunque il punto $(0,0)$ è punto stazionario per g. Per verificare che si tratta di un punto di massimo locale, bisogna scrivere le derivate seconde di g. Si ha, calcolando tutte le funzioni in $(g(y,z),y,z)$,

$$\begin{aligned}
g_{yy}(y,z) &= -\frac{[f_{yx}g_y+f_{yy}]f_x - f_y[f_{xx}g_y+f_{xy}]}{(f_x)^2},\\
g_{yz}(y,z) &= -\frac{[f_{yx}g_z+f_{yz}]f_x - f_y[f_{xx}g_z+f_{xz}]}{(f_x)^2},\\
g_{zz}(y,z) &= -\frac{[f_{zx}g_z+f_{zz}]f_x - f_z[f_{xx}g_z+f_{xz}]}{(f_x)^2}.
\end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}
&f_{xx}(x,y,z)=y^2\,e^{xy}-2e^y-y^2e^x,\\
&f_{xy}(x,y,z)=(1+xy)e^{xy}-2x\,e^y-2y\,e^x, \quad f_{xz}(x,y,z)=0,\\
&f_{yy}(x,y,z)=x^2e^{xy}-x^2e^y-2\,e^x, \quad f_{yz}(x,y,z)=0,\\
&f_{zz}(x,y,z)=-2,
\end{aligned}$$

cosicché

$$\begin{aligned}
&f_{xx}(1,0,0)=-2, \quad f_{xy}(1,0,0)=-1, \quad f_{xz}(1,0,0)=0,\\
&f_{yy}(1,0,0)=-2e, \quad f_{yz}(1,0,0)=0, \qquad f_{zz}(x,y,z)=-2.
\end{aligned}$$

Ne segue

$$g_{yy}(0,0)=-e, \qquad g_{yz}(0,0)=0, \qquad g_{zz}(0,0)=-1.$$

Pertanto la matrice Hessiana di g in $(0,0)$ è

$$\mathbf{H}_g(0,0)=\begin{pmatrix} -e & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

ed è dunque definita negativa. Ne deduciamo che $(0,0)$ è un punto di massimo locale per la funzione implicita g.

Esercizio 2 Per $n \geq 2$ la successione $\{f_n\}$ è ben definita e si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x+n\sin x}{n+\sin x}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sin x+\frac{x}{n}\right)}{n\left(1+\frac{\sin x}{n}\right)}=\sin x \qquad \forall x\in[0,2\pi].$$

Inoltre, per ogni $x \in [0, 2\pi]$,

$$\left| \frac{x + n \sin x}{n + \sin x} - \sin x \right| = \left| \frac{x - \sin^2 x}{n + \sin x} \right| \le \frac{|x| + |\sin^2 x|}{n - |\sin x|} \le \frac{2\pi + 1}{n - 1},$$

da cui

$$\sup_{x \in [0,2\pi]} \left| \frac{x + n \sin x}{n + \sin x} - \sin x \right| \le \frac{2\pi + 1}{n - 1},$$

e dunque

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,2\pi]} \left| \frac{x + n \sin x}{n + \sin x} - \sin x \right| = 0.$$

Ciò prova che $f_n(x) \to \sin x$ uniformemente in $[0, 2\pi]$.

Esercizio 3 Le funzioni integrande, per $n \ge 2$, sono continue e convergono puntualmente: infatti

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x + n \cos x}{n + \cos x} = \lim_{n \to \infty} \frac{n \left[\cos x + \frac{x}{n}\right]}{n \left[1 + \frac{\cos x}{n}\right]} = \cos x \qquad \forall x \in [0, \pi].$$

Inoltre la convergenza è dominata, poiché per $n \ge 2$ si ha

$$\left| \frac{x + n \cos x}{n + \cos x} \right| = \left| \frac{n \left[\cos x + \frac{x}{n}\right]}{n \left[1 + \frac{\cos x}{n}\right]} \right| \le \frac{|\cos x| + \pi}{1 - \frac{1}{2}} \le 2 + 2\pi,$$

e ovviamente la funzione costante $g(x) = 2 + 2\pi$ è sommabile sull'intervallo limitato $[0, \pi]$. Pertanto

$$\exists \lim_{n \to \infty} \int_0^\pi \frac{x + n \cos x}{n + \cos x}\, dx = \int_0^\pi \cos x\, dx = 0.$$

Esercizio 4 Dobbiamo calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{+b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3\, ds.$$

La curva $b\Sigma$ è la circonferenza contenuta nel piano $z = 1$ di centro (0,0,1) e raggio 1:

$$x = \cos\vartheta, \quad y = \sin\vartheta, \quad z = 1, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Risulta allora

$$x'(\vartheta) = -\sin\vartheta, \quad y'(\vartheta) = \cos\vartheta, \quad z'(\vartheta) = 0;$$

con questa parametrizzazione, dunque, nel punto $(1, 0, 1)$, che corrisponde a $\vartheta = 0$, si ha $\boldsymbol{\tau}(1, 0, 1) = (0, 1, 0)$ come richiesto.

Possiamo calcolare l'integrale direttamente, oppure utilizzare il teorema di Stokes. Nel primo caso, si ha

$$\int_{+b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3\, ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-(\cos^2\vartheta) + 2\sin\vartheta) \sin\vartheta + (\sin^2\vartheta - 2\cos\vartheta)\cos\vartheta + 0\right]\, d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\cos^3\vartheta + \frac{1}{3}\sin^3\vartheta - 2\vartheta\right]_{)}^{2\pi} = -4\pi.$$

Utilizzando invece il teorema di Stokes, cominciamo con l'osservare che

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ x^2+2y & y^2-2x & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Una parametrizzazione di Σ è

$$\boldsymbol{\sigma}: \quad \begin{cases} x = r\,\cos\vartheta \\ y = r\,\sin\vartheta \\ z = r^2, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi. \end{array}$$

Dunque la matrice Jacobiana è

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\,\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\,\cos\vartheta \\ 2r & 0 \end{pmatrix},$$

cosicché il versore normale è

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -2r^2\cos\vartheta \\ -2r^2\sin\vartheta \\ r \end{pmatrix};$$

si noti che, essendo $n_3 = r > 0$, il versore è orientato verso l'interno del paraboloide, e quindi il suo verso è coerente con quello fissato su $b\Sigma$ per il versore $\boldsymbol{\tau}$. Dunque

$$\int_{+b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3\, ds = \int_{+\Sigma} \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3\, d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-4r)\, dr d\vartheta = -4\pi.$$

Esercizio 5 Per quanto riguarda la stima di μ, si ha $1-\alpha = 0.98$, dunque $\alpha = 0.02$. Si sa dalla teoria che, nel caso in cui μ e σ siano entrambi sconosciuti, un intervallo di fiducia per μ a livello $1-\alpha$ è

$$\left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right],$$

ove $\overline{X}$ è la media empirica e S è la deviazione standard empirica. Nel nostro caso

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99, \quad n = 10, \quad \overline{X} = 2.3, \quad S = \sqrt{0.16} = 0.4$$

e dalle tavole si ricava

$$t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.99}(9) = 2.8214.$$

Pertanto un intervallo di fiducia per μ a livello 0.98 è

$$\left[2.3 - \frac{0.4}{\sqrt{10}} \cdot 2.8214, 2.3 + \frac{4}{\sqrt{10}} \cdot 2.8214\right] = [1.94312, 2.65688].$$

Per quanto riguarda invece la stima di σ^2, si ha $1-\alpha = 0.90$, dunque $\alpha = 0.1$. La teoria ci dice che un intervallo di fiducia per σ^2 a livello $1-\alpha$ è

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right].$$

Nel nostro caso, $S^2 = 0.16$ e

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.95}(9) = 16.919, \quad \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.05}(9) = 3.3251.$$

Pertanto un intervallo di fiducia per σ^2 a livello 0.90 è

$$\left[\frac{9 \cdot 0.16}{16.919}, \frac{9 \cdot 0.16}{3.3251}\right] = [0.0851, 0.4331].$$

Prova scritta del 14 settembre 2018

Esercizio 1 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = xy + \ln(1 + x^2 + 4y^2)$$

sull'insieme $E = [-2,2] \times [-3,3]$.

Esercizio 2 Posto per $n \in \mathbb{N}^+$

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + e^{nx} + n^2x^2)}{n}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

stabilire:

(i) in quali sotto-intervalli di $\mathbb{R}$ esiste il limite puntuale $f(x)$ della successione $\{f_n\}$;

(ii) bin quali sotto-intervalli di $\mathbb{R}$ la convergenza è uniforme.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_C zx^2y(2-y)\,dxdydz,$$

ove

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le x \le 4, \ 0 \le y \le 2, \ 0 \le z \le 4 - |y-1|\}.$$

Esercizio 4 Un programma genera sequenze di 5 caratteri di tipo 0 oppure 1: la probabilità che venga emesso il carattere 1 è pari a $p = 0.4$, quella di emettere il carattere 0 è dunque $1-p = 0.6$. Il tempo necessario per emettere il carattere 1 è di $2\,\mu s$ (microsecondi); il tempo necessario per emettere il carattere 0 è di $3\,\mu s$. Indichiamo con Y la v.a. che conta i caratteri 1 in una sequenza, e con X la v.a. che misura il tempo impiegato per generare l'intera sequenza.

(i) Determinare le densità discrete f_Y e f_X, e le speranze $\mathbb{E}[Y]$ e $\mathbb{E}[X]$.

(ii) Calcolare la probabilità che per ottenere un'intera sequenza il programma impieghi più di $12\,\mu s$.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è definita su $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^∞. Cerchiamo i punti stazionari di f interni al rettangolo E. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y + \dfrac{2x}{1+x^2+4y^2} = 0 \\ \\ x + \dfrac{8y}{1+x^2+4y^2} = 0, \end{cases}$$

da cui, intanto, troviamo il punto stazionario $(0,0)$ nel quale $f(0,0) = 0$.
Osservando i segni nelle equazioni, si riconosce che gli altri punti stazionari, se esistono, hanno coordinate discordi. Poi, moltiplicando la prima equazione per x e la seconda per y, sottraendo una dall'altra ed eliminando il denominatore, otteniamo $x^2 = 4y^2$, ossia, tenuto conto dei segni discordi, $y = -\frac{1}{2}x$. Sostituendo nella seconda equazione, ed eliminando x, ricaviamo

$$1 = \frac{4}{1+2x^2}.$$

Questa equazione ha le soluzioni

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

cui corrispondono i due punti stazionari

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right), \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right),$$

entrambi interni al rettangolo E e nei quali

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{4} + \ln 4 \simeq -0.1137.$$

Vediamo adesso la situazione sulla frontiera del rettangolo. I valori di f nei vertici sono

$$f(-2,-3) = f(2,3) = 6 + \ln 41 \simeq 9.71357,$$
$$f(-2,3) = f(2,-3) = -6 + \ln 41 \simeq -2.28643.$$

Si noti che $f(x,y) = f(-x,-y)$, ossia il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine. Pertanto possiamo limitarci alla ricerca dei punti stazionari vincolati su due soli lati del rettangolo, ad esempio $]-2,2[\,\times\{3\}$ e $\{2\}\times\,]-3,3[$. Sul primo segmento

$$f(x,3) = 3x + \ln(37+x^2), \qquad -2 < x < 2.$$

Questa funzione ha derivata $3 + \frac{2x}{37+x^2}$, che non è mai nulla. Dunque non vi sono punti stazionari vincolati nel primo segmento.
Sul secondo segmento

$$f(2,y) = 2y + \ln(5+4y^2), \qquad -3 < y < 3.$$

La derivata è $2+\frac{8y}{5+4y^2}$, che non è mai nulla. Dunque non vi sono punti stazionari vincolati nel secondo segmento.
Ricordando che $f(x,y)=f(-x,-y)$, si conclude che non vi sono punti stazionari vincolati. Confrontando tutti i valori si conclude che

$$\min_E f = f(-2,3) = f(2,-3) = -2.28643,$$
$$\max_E f = f(-2,-3) = f(2,3) = 9.71357.$$

Esercizio 2 Possiamo scrivere per $x>0$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\ln\left[e^{nx}\left(e^{-nx}+1+n^2x^2e^{-nx}\right)\right] = x + \frac{1}{n}\ln(e^{-nx}+1+n^2x^2e^{-nx}),$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \qquad \forall x>0.$$

Per $x=0$ si ha direttamente

$$f_n(0) = \frac{\ln 2}{n} = 0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+.$$

Infine per $x<0$ risulta

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\ln\left[n^2x^2\left(\frac{1+e^{nx}}{n^2x^2}+1\right)\right] = \frac{\ln(n^2x^2)}{n} + \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1+e^{nx}}{n^2x^2}\right),$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall x<0.$$

In definitiva la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x>0, \\ 0 & \text{se } x\le 0. \end{cases}$$

Essendo

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+,$$

mentre $f(x)=0$ per $x<0$, la convergenza delle f_n non può essere uniforme in alcuna semiretta della forma $]-\infty,c]$. Invece, dato che $f(x)\to+\infty$ per $x\to+\infty$, la convergenza potrebbe essere uniforme su semirette della forma $[c,+\infty[$.
Andiamo con ordine. Su intervalli $[b,0]$ con $b<0$ la convergenza è uniforme perché

$$|f_n(x)-f(x)| = |f_n(x)| = \frac{|\ln(1+e^{nx}+n^2x^2)|}{n} \le \frac{\ln(2+n^2b^2)}{n} \quad \forall x\in[b,0],$$

per cui

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{b\le x\le 0}|f_n(x)| = 0.$$

Sulla semiretta $[0,\infty[$ si ha invece

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - x| = \frac{1}{n}\ln(e^{-nx} + 1 + n^2x^2e^{-nx}) \qquad \forall x \geq 0,$$

e dunque, essendo

$$n^2x^2e^{-nx} \leq \max_{t\geq 0} t^2e^{-t} = 4e^{-4} \qquad \forall x \geq 0,$$

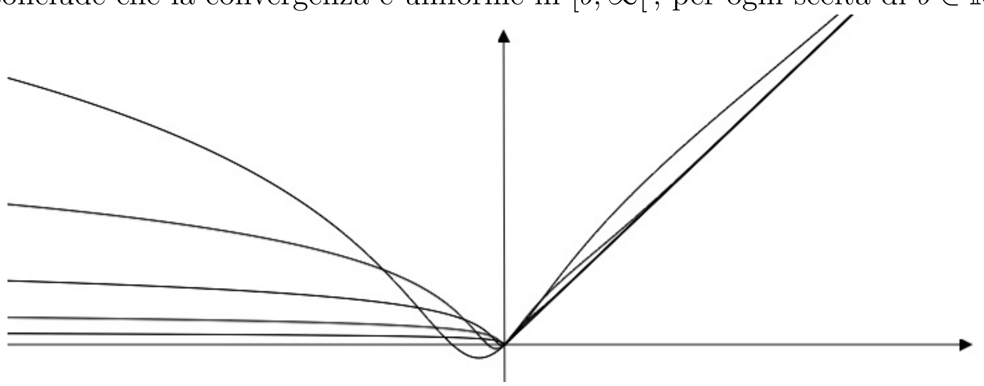
si trova

$$\sup_{x\geq 0}|f_n(x) - x| = \sup_{x\geq 0}\frac{1}{n}\ln(e^{-nx} + 1 + n^2x^2e^{-nx}) \leq \frac{\ln(2 + 4\,e^{-4})}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

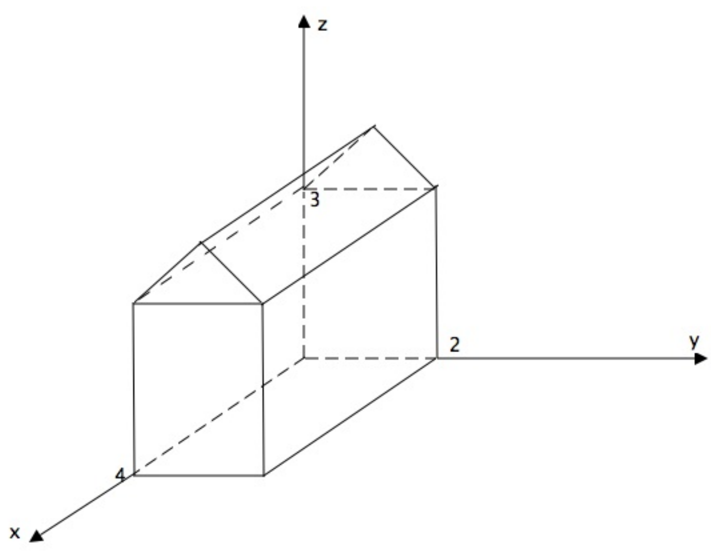
e pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq 0}|f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Se ne conclude che la convergenza è uniforme in $[b,\infty[$, per ogni scelta di $b \in \mathbb{R}$.



Esercizio 3 L'insieme C è descritto nella figura sottostante.



Esso è normale rispetto al piano xy, e quindi l'integrale si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\int_C zx^2y(2-y)\,dxdydz &= \int_0^4 x^2\int_0^2 y(2-y)\int_0^{4-|y-1|} z\,dzdydx = \\ &= \frac{64}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 y(2-y)(4-|y-1|)^2\,dy.\end{aligned}$$

Conviene approfittare della simmetria rispetto al piano $y=1$, facendo la sostituzione $t=y-1$: si ottiene

$$\begin{aligned}\int_C zx^2y(2-y)\,dxdydz &= \frac{64}{6}\int_{-1}^1 (1+t)(1-t)(4-|t|)^2\,dt = \\ &= \frac{64}{6}\cdot 2\int_0^1 (1-t^2)(4-t)^2\,dt = \\ &= \frac{64}{3}\int_0^1 (-t^4+8t^3-15t^2-8t+16)\,dt = \\ &= \frac{64}{3}\left(-\frac{1}{5}+2-5-4+16\right) = \\ &= \frac{64}{3}\cdot\frac{44}{5} = \frac{2816}{15}.\end{aligned}$$

Esercizio 4 (i) La v.a. Y rappresenta il numero di caratteri 1 in una sequenza di 5, quindi ha legge binomiale $\mathcal{B}(5,p)$. Dunque la sua densità discreta è

$$f_Y(k) = P(Y=k) = \binom{5}{k} p^k(1-p)^{5-k}, \quad k=0,1,2,3,4,5,$$

con $p=0.4$.
La v.a. X, tempo di elaborazione della sequenza di 5 caratteri, è legata alla v.a. Y nel modo seguente: visto che ogni carattere 1 comporta $2\,\mu s$ mentre ogni carattere 0 comporta $3\,\mu s$, avremo

$$\begin{array}{lcll} X = 15\,\mu s & \Longleftrightarrow & Y=0 & \text{(5 caratteri 0);} \\ X = 14\,\mu s & \Longleftrightarrow & Y=1 & \text{(4 caratteri 0 e 1 carattere 1);} \\ X = 13\,\mu s & \Longleftrightarrow & Y=2 & \text{(3 caratteri 0 e 2 caratteri 1);} \\ X = 12\,\mu s & \Longleftrightarrow & Y=3 & \text{(2 caratteri 0 e 3 caratteri 1);} \\ X = 11\,\mu s & \Longleftrightarrow & Y=4 & \text{(1 carattere 0 e 4 caratteri 1);} \\ X = 10\,\mu s & \Longleftrightarrow & Y=5 & \text{(5 caratteri 1).} \end{array}$$

Dunque $X = 15 - Y$, e pertanto la densità discreta di X è

$$f_X(k) = f_Y(15-k) = \binom{5}{15-k} p^{15-k}(1-p)^{k-10}, \quad k=10,11,12,13,14,15.$$

Calcoliamo le speranze di Y e X: per la Y, che ha legge binomiale $\mathcal{B}(5,p)$, si ha semplicemente

$$\mathbb{E}[Y] = 5p = 2.$$

Per la X risulta allora

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[15 - Y] = 15 - \mathbb{E}[Y] = 15 - 5p = 13.$$

(ii) Dobbiamo calcolare $P(X > 12)$. Dunque

$$\begin{aligned} P(X > 12) &= P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15) = \\ &= P(Y = 2) + P(Y = 1) + P(Y = 0) = \\ &= \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 + \binom{5}{1} p (1-p)^4 + \binom{5}{0} (1-p)^5 = \\ &= 10 \cdot 0.16 \cdot 0.216 + 5 \cdot 0.4 \cdot 0.1296 + 0.0776 = 0.68256. \end{aligned}$$

Prova scritta del 16 novembre 2018

Esercizio 1 Posto per $n \in \mathbb{N}^+$

$$f_n(x) = \frac{nx\, e^{-x}}{n + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

stabilire:

(i) in quali sotto-intervalli di $\mathbb{R}$ esiste il limite puntuale $f(x)$ della successione $\{f_n\}$;

(ii) in quali sotto-intervalli di $\mathbb{R}$ la convergenza è uniforme.

Esercizio 2 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y, z) = e^{2x^2 + y^2 - yz}$$

sull'insieme $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - y^2,\ y \in [-1, 1],\ x \in [-2, 2]\}$.

Esercizio 3 Sia Σ la superficie definita nell'esercizio 1, orientata secondo il versore normale $\mathbf{n}$ che ha la terza coordinata positiva. Consideriamo il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(z\, e^x,\ y\, e^z,\ x\, e^y\big), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$

si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie Σ.

Esercizio 4 Sia $\{f_n\}$ la successione di funzioni definita nell'esercizio 2. Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-10}^{\infty} f_n(x)\, dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Le f_n sono continue e si ha, facilmente,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x\, e^{-x}.$$

(ii) Posto $f(x) = x\, e^{-x}$, risulta

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n}{n + x^2} - 1 \right| x\, e^{-x} = \frac{|x|^3}{n + x^2}\, e^{-x};$$

possiamo dire allora che non vi è convergenza uniforme su $\mathbb{R}$, in quanto

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|^3}{n + x^2}\, e^{-x} = +\infty.$$

Per lo stesso motivo, non vi è convergenza uniforme in nessuna semiretta della forma $]-\infty, a]$. Invece su tutte le semirette della forma $[b, +\infty[$ si ha convergenza uniforme: infatti, la funzione $|x|^3\, e^{-x}$ ha massimo in $[b, +\infty[$, dato da

$$\max_{x\geq b} |x|^3\, e^{-x} = \max\{27\, e^{-3}, |b|^3 e^{-b}\} =: K,$$

e quindi

$$\sup_{x\geq b} |f_n(x) - f(x)| \sup_{x\geq b} \frac{|x|^3}{n + x^2}\, e^{-x} \leq \frac{1}{n} \sup_{x\geq b} |x|^3\, e^{-x} = \frac{K}{n}\,.$$

Esercizio 2 L'insieme Σ è una superficie, quindi non ha parte interna. Pertanto dobbiamo solo cercare i punti stazionari vincolati di f. La superficie si parametrizza così:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1 - y^2, \end{cases} \qquad x \in [-2, 2], \quad y \in [-1, 1].$$

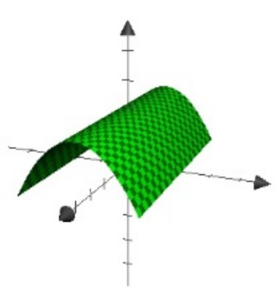
Ci si riduce pertanto a cercare i punti di massimo e di minimo per la funzione

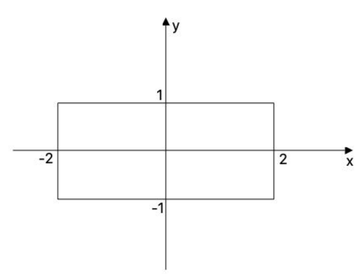
$$g(x, y) = f(x, y, 1 - y^2), \qquad (x, y) \in [-2, 2] \times [-1, 1],$$

e questo è un problema in dimensione 2 anziché 3. Possiamo anzi considerare la funzione più semplice

$$h(x, y) = \log f(x, y, 1 - y^2) = 2x^2 + y^2 - y(1 - y^2),$$

e solo alla fine calcolare i valori di $g(x, y) = e^{h(x,y)}$ nei punti che avremo trovato.





Cerchiamo i punti stazionari di h interni al rettangolo: si ha

$$h_x(x,y) = 4x, \qquad h_y(x,y) = 2y - 1 + 3y^2;$$

le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ 3y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

sono $(0,-1)$ (non interno al rettangolo) e $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Il primo punto riapparirà come punto stazionario vincolato, quindi calcoliamo

$$h(0,-1) = 1, \qquad h\left(0, \frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{27}.$$

Vediamo la situazione sulla frontiera, che è costituita dai quattro segmenti

$$\Gamma_1 = \{2\} \times [-1,1], \qquad \Gamma_2 = [-2,2] \times \{1\},$$
$$\Gamma_3 = \{-2\} \times [-1,1], \quad \Gamma_4 = [-2,2] \times \{-1\}.$$

Occorre intanto calcolare h sui vertici: risulta

$$h(-2,-1) = h(2,-1) = h(-2,1) = h(2,1) = 9.$$

Poi si noti che $h(x,y) = h(-x,y)$, quindi i valori di h su Γ_1 e su Γ_3 coincidono. Su Γ_1 si ha

$$h(2,y) = 8 + y^2 - y(1-y^2), \quad \frac{d}{dy}h(2,y) = 2y - 1 + 3y^2,$$

e come sappiamo questa derivata si annulla in $y = -1$ e in $y = \frac{1}{3}$, con

$$h(2,-1) = 9 \text{ (già trovato)}, \qquad h(\left(2, \frac{1}{3}\right) = \frac{211}{27}.$$

Su Γ_3 si ha analogamente

$$h(-2,-1) = 9, \qquad h\left(-2, \frac{1}{3}\right) = \frac{211}{27}.$$

Su Γ_2 risulta

$$h(x,1) = 2x^2 + 1, \quad \frac{d}{dx}h(x,1) = 4x$$

e quindi si trova il punto $(0,1)$ nel quale

$$h(0,1) = 1.$$

Similmente, essendo $h(x,1) = h(x,-1)$, su Γ_4 si trova il punto $(0,-1)$ (già trovato). In definitiva, confrontando tutti i valori,

$$\max_{[-2,2]\times[-1,1]} h = 9, \qquad \min_{[-2,2]\times[-1,1]} h = -\frac{5}{27}.$$

Perciò

$$\max_{[-2,2]\times[-1,1]} f = e^9, \qquad \min_{[-2,2]\times[-1,1]} f = e^{-\frac{5}{27}}.$$

Esercizio 3 Dobbiamo calcolare l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\sigma,$$

e a questo scopo è equivalente, in virtù del teorema di Stokes, calcolare invece l'integrale curvilineo

$$\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 \, ds,$$

ove $b\Sigma$ è il bordo della superficie Σ, ed il versore tangente $\boldsymbol{\tau}$ è orientato nel verso coerente con $\mathbf{n}$, che è quello antiorario.
Il calcolo dell'integrale curvilineo appare più semplice. Il bordo $b\Sigma$ è costituito di quattro pezzi:

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = 2 \\ y = y \\ z = 1 - y^2, \end{cases} \qquad y \in [-1,1], \qquad \boldsymbol{\tau} = (0, 1, -2y);$$

$$-\Gamma_2 : \begin{cases} x = x \\ y = 1 \\ z = 0, \end{cases} \qquad x \in [-2,2], \qquad \boldsymbol{\tau} = (1, 0, 0);$$

$$-\Gamma_3 : \begin{cases} x = -2 \\ y = y \\ z = 1 - y^2, \end{cases} \qquad y \in [-1,1], \qquad \boldsymbol{\tau} = (0, 1, -2y);$$

$$\Gamma_4 : \begin{cases} x = x \\ y = -1 \\ z = 0, \end{cases} \qquad x \in [-2,2], \qquad \boldsymbol{\tau} = (1, 0, 0).$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 \, ds &= \int_{b\Sigma} (z\, e^x\, \tau_1 + y\, e^z\, \tau_2 + x\, e^y\, \tau_3)\, ds = \\ &= \int_{-1}^{1} \Big((1 - y^2) e^{-2} \cdot 0 + y\, e^{1-y^2} \cdot 1 + 2 e^y (-2y) \Big)\, dy + \int_{-2}^{2} 0\, dx - \\ &- \int_{-1}^{1} \Big((1 - y^2) e^{2} \cdot 0 + y\, e^{1-y^2} \cdot 1 - 2 e^y (-2y) \Big)\, dy - \int_{-2}^{2} 0\, dx = \\ &= 0 - 4 \int_{-1}^{1} y\, e^y\, dy + 0 - 4 \int_{-1}^{1} y\, e^y\, dy = -8 \left[y\, e^y - e^y \right]_{-1}^{1} = -16\, e^{-1}. \end{aligned}$$

Si può anche, alternativamente, calcolare l'integrale superficiale: si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ z\, e^x & y\, e^z & x\, e^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\, e^y - y\, e^z \\ e^x - e^y \\ 0 \end{pmatrix},$$

mentre

$$\Sigma: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1 - y^2, \end{cases} \qquad x \in [-2,2],\ y \in [-1,1],$$

$$D\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2y \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \langle \mathrm{rot}\, \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\sigma &= \int_{-1}^{1} \int_{-2}^{2} [(x\, e^y - y\, e^z) \cdot 0 + (e^x - e^y) \cdot 2y + 0 \cdot 1] \, dx dy = \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-2}^{2} 2y(e^x - e^y) dx dy = 0 - 8 \int_{-1}^{1} y\, e^y \, dy = -16\, e^{-1}. \end{aligned}$$

Esercizio 4 La successione converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione

$$f(x) = x\, e^{-x};$$

Inoltre si ha $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ per ogni $x \ge 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, mentre

$$|f_n(x)| \le |x| e^{-x} \qquad \forall x \in [-10, 0], \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Dunque, per il teorema di B. Levi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx = \int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx,$$

e per il teorema di Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-10}^0 f_n(x)\, dx = \int_{-10}^0 x\, e^{-x}\, dx.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-10}^\infty f_n(x)\, dx = \int_{-10}^\infty x\, e^{-x}\, dx = \left[-x\, e^{-x} - e^{-x}\right]_{-10}^\infty = -9\, e^{-10}.$$

Prova scritta dell'11 gennaio 2019

Esercizio 1 Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ così definita:

$$f_n(x) = \frac{n - n^2}{x + n^2}, \qquad x \ge 0.$$

(i) Si provi che la successione converge puntualmente ad una funzione $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$.

(ii) Si stabilisca in quali sottoinsiemi di $[0, \infty[$ la convergenza è uniforme.

(iii) Si descriva il comportamento della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(f_n(x) - f(x)\big), \qquad x \geq 0.$$

Esercizio 2 Si determini il volume del sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ così definito:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq \arccos(y-1)\}.$$

Esercizio 3 Si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma \frac{xy}{\sqrt{1 + 2y - y^2}}\, d\sigma,$$

ove Σ è il grafico della funzione

$$f(x, y) = \arccos(y - 1), \qquad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2].$$

Esercizio 4 La durata di una lampadina, in ore, è una variabile aleatoria X dotata della densità

$$f_X(x) = \frac{1}{30}\, e^{-x/30}, \qquad x \geq 0.$$

(i) Determinare la durata media di una lampadina.

(ii) Calcolare la probabilità che una lampadina duri più di due giorni, sapendo che è accesa da 12 ore.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Scrivendo

$$f_n(x) = \frac{n - n^2}{x + n^2} = \frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{x}{n^2} + 1}$$

si vede subito che

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = -1 \qquad \forall x \geq 0.$$

Dunque vi è convergenza puntuale in $[0, \infty[$ verso la funzione $f(x) = -1$.

(ii) Risulta

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n - n^2}{x + n^2} + 1 \right| = \frac{x + n}{x + n^2},$$

e dunque, in particolare,

$$\lim_{x \to +\infty} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + n}{x + n^2} = 1;$$

ciò prova che non vi è convergenza uniforme sull'intera semiretta $[0, \infty[$, dato che

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{x \to +\infty} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$

Tuttavia, scelto arbitrariamente $K > 0$, la convergenza è uniforme su $[0, K]$. Infatti se $0 \leq x \leq K$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x+n}{x+n^2} \leq \frac{K+n}{n^2} = \frac{K}{n^2} + \frac{1}{n},$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x\leq K} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

(iii) Per ogni fissato $x \geq 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(f_n(x) - f(x)\big), \quad \text{cioè} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{x+n^2},$$

è a termini positivi. Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x+n}{x+n^2}}{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \forall x \geq 0,$$

la serie diverge a $+\infty$ per ogni $x \geq 0$, in virtù del criterio del confronto asintotico.

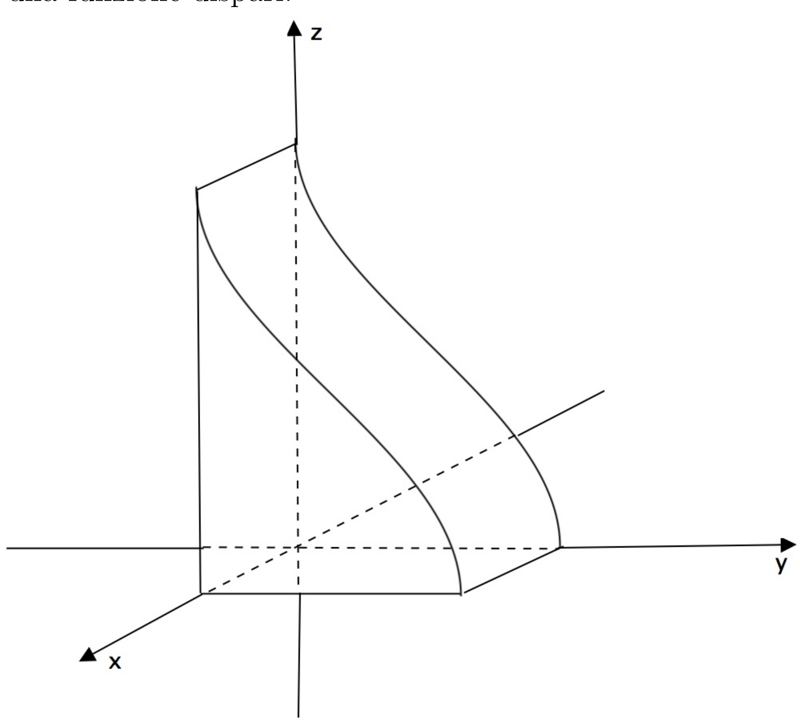
Esercizio 2 Il solido S è un insieme normale rispetto al piano xy: dunque il suo volume è dato da

$$m_3(S) = \int_0^1 \int_0^2 \arccos(y-1)\, dydx = \int_0^2 \arccos(y-1)\, dy = \int_{-1}^1 \arccos t\, dt.$$

Integrando per parti,

$$\int_{-1}^1 \arccos t\, dt = [t\ \arccos t]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \pi + 0 = \pi,$$

dato che l'ultimo integrale è fatto su un intervallo simmetrico rispetto all'origine e l'integrando è una funzione dispari.



Esercizio 3 La superficie Σ è cartesiana: dunque

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\boldsymbol{\nabla} f|_2^2}\, dxdy.$$

Essendo

$$f_x(x,y) = 0, \qquad f_y(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{1-(y-1)^2}},$$

si ha

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{1}{1-(y-1)^2}}\, dxdy = \sqrt{\frac{2-(y-1)^2}{1-(y-1)^2}}\, dxdy.$$

Dunque dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_\Sigma \frac{xy}{\sqrt{1+2y-y^2}}\, d\sigma = \int_0^1 \int_0^2 \frac{xy}{\sqrt{1+2y-y^2}} \sqrt{\frac{2-(y-1)^2}{1-(y-1)^2}}\, dxdy.$$

Notiamo che

$$\sqrt{1+2y-y^2} = \sqrt{2-(y-1)^2},$$

cosicché l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \frac{xy}{\sqrt{1+2y-y^2}}\, d\sigma &= \int_0^1 \int_0^2 \frac{xy}{\sqrt{1-(y-1)^2}}\, dydx = \\
&= \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{x(t+1)}{\sqrt{1-t^2}}\, dtdx = \\
&= \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{xt}{\sqrt{1-t^2}}\, dtdx + \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-t^2}}\, dtdx.
\end{aligned}$$

Il primo integrale all'ultimo membro è nullo, perché è l'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine. Il secondo integrale diventa

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-t^2}}\, dxdt = 2 \int_0^1 x\, dx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = [\arcsin t]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Si conclude quindi che

$$\int_\Sigma \frac{xy}{\sqrt{1+2y-y^2}}\, d\sigma = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 4 (i) La durata media di una lampadina si ottiene calcolando la speranza della v.a. X: dunque essa è data da

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x\, f_X(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{x}{30}\, e^{-x/30}\, dx = 30,$$

ossia una lampadina dura in media 30 ore.

(ii) La probabilità richiesta è $P(X \geq 48 | X \geq 12)$. Dunque

$$P(X \geq 48 \,|\, X \geq 12) = \frac{P(X \geq 48)}{P(X \geq 12)}.$$

Dato che
$$P(X \geq 48) = \int_{48}^{\infty} \frac{1}{30}\, e^{-x/30}\, dx = e^{-48/30} = e^{-8/5},$$
e similmente
$$P(X \geq 12) = e^{-12/30} = e^{-2/5},$$
si ottiene
$$P(X \geq 48 \,|\, X \geq 12) = \frac{e^{-8/5}}{e^{-2/5}} = e^{-6/5} \simeq 0.3011942.$$

Prova scritta del 1º febbraio 2019

Esercizio 1 Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ così definita:
$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx}{e} & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ e^{-nx} & \text{se } x > \dfrac{1}{n}\,. \end{cases}$$

(i) Si provi che la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente ad una funzione $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$.

(ii) Si stabilisca in quali sottoinsiemi di $[0,\infty[$ la convergenza è uniforme.

(iii) Si determini, se esiste,
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\, dx.$$

Esercizio 2 Si calcoli
$$\int_E x^2\, z\, dxdydz,$$
ove
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq \min\{1,(2-z)^2\},\ 0 \leq z \leq 2\}.$$

Esercizio 3 Posto
$$A = \{\mathbf{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq 1-x\},$$
si determini il valore dell'integrale superficiale
$$\int_{\partial A} \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}\rangle_3\, d\boldsymbol{\sigma},$$
ove $\mathbf{n}$ è il versore normale esterno al dominio A.

Esercizio 4 Una vecchia fabbrica di componenti meccaniche produce una percentuale di pezzi difettosi pari al 3.2%. La produzione giornaliera è di 10.000 pezzi. Utilizzando l'approssimazione normale, si stabilisca con quale probabilità, in un certo giorno, si produrranno meno di 300 pezzi difettosi.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Per ogni $x > 0$ si ha definitivamente $x > \frac{1}{n}$: dunque

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-nx} = 0 \qquad \forall x > 0.$$

D'altronde, se $x = 0$ si ha $f_n(x) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, il che implica più in generale

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall x \geq 0.$$

(ii) Osserviamo che tutte le f_n sono non negative in $[0, \infty[$, e che ciascuna di esse cresce in $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ e decresce in $\left[\frac{1}{n}, \infty\right[$; pertanto

$$\max_{[0,\infty[} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1},$$

cosicché non può aversi convergenza uniforme in $[0, \infty[$; d'altra parte, fissato $\delta > 0$, si ha definitivamente $\frac{1}{n} < \delta$, e ci ò implica che, definitivamente

$$\max_{[\delta,\infty[} f_n(x) = f_n(\delta) = e^{-n\delta}.$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \max_{[\delta,\infty[} f_n(x) = \lim_{n\to,\infty} e^{-n\delta} = 0 \qquad \forall \delta > 0,$$

ossia vi è convergenza uniforme in ogni semiretta $[\delta, \infty[$ con $\delta > 0$.

(iii) Risulta

$$\int_0^\infty f_n(x)\, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{nx}{e}\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^\infty e^{-nx}\, dx;$$

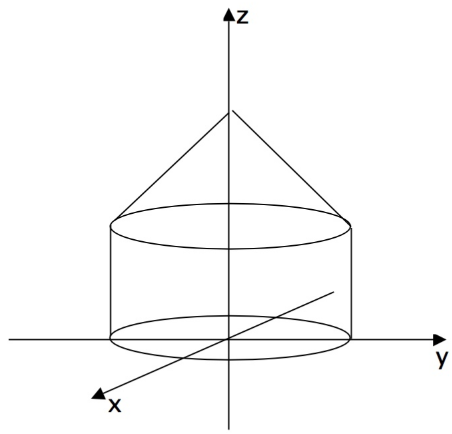
ponendo $nx = t$, si può scrivere

$$\int_0^\infty f_n(x)\, dx = \frac{1}{ne}\int_0^1 t\, dt + \frac{1}{n}\int_1^\infty e^{-t}\, dt = \frac{1}{2ne} + \frac{1}{ne} = \frac{3}{2ne}\,,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2ne} = 0.$$

Esercizio 2 L'insieme E è contenuto nello spazio fra il piano $z = 0$ ed il piano $z = 2$. Tale insieme, fino alla quota $z = 1$, è un cilindro con base il disco unitario di $\mathbb{R}^2$; infatti, $\min\{1, (2-z)^2\} = 1$ per ogni $z \in [0, 1]$. Dalla quota $z = 1$ alla quota $z = 2$, invece, E è un cono di vertice $(0, 0, 2)$ e base il disco unitario del piano $z = 1$, in quanto $\min\{1, (2-z)^2\} = (2-z)^2$ per ogni $z \in [1, 2]$.



Per il calcolo dell'integrale, che ha la forma

$$\int_E x^2\, z\, dxdydz = \int_0^2 z \int_{x^2+y^2\le\min\{1,(2-z)^2\}} x^2\, dxdy,$$

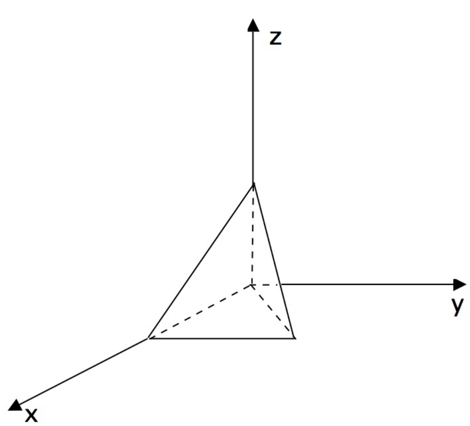
conviene decomporlo in due parti, corrispondenti a $0 \le z \le 1$ ed a $1 \le z \le 2$. Si ha allora

$$\int_E x^2\, z\, dxdydz = \int_0^1 z \int_{x^2+y^2\le 1} x^2\, dxdy + \int_1^2 z \int_{x^2+y^2\le(2-z)^2} x^2\, dxdy.$$

Utilizzando le coordinate cilindriche $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $z = z$, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_E x^2\, z\, dxdydz = \\
&\quad = \int_0^1 z \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\vartheta\, drd\vartheta dz + \int_1^2 z \int_0^{2\pi}\int_0^{2-z} r^3\cos^2\vartheta\, drd\vartheta dz = \\
&\quad = \frac{\pi}{4}\int_0^1 z\, dz + \frac{\pi}{4}\int_1^2 z(2-z)^4\, dz = \\
&\quad = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\int_0^1 (2-t)t^4\, dt = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{11\pi}{60}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 L'insieme A è una piramide con vertice in $(0,0,1)$ e base triangolare nel piano $z = 0$, con vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(1,1,0)$. Il bordo ∂A è quindi costituito da quattro facce triangolari: la base, due facce verticali e una obliqua.



Per calcolare l'integrale superficiale proposto, conviene utilizzare il teorema della divergenza, in virtù del quale risulta

$$\int_{\partial A} \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\boldsymbol{\sigma} = \int_A \operatorname{div} \mathbf{x} \, d\mathbf{x} = 3m_3(A).$$

Poiché

$$m_3(A) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x} dzdydx = \int_0^1 x(1-x)\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

si conclude che

$$\int_{\partial A} \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}.$$

Naturalmente si poteva fare il (noioso) calcolo dell'integrale superficiale. Denotiamo con Σ_j, $j = 1, 2, 3, 4$, le facce che compongono ∂A:

- $\Sigma_1 = \partial A \cap \{z = 0\} = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0, \end{cases} \qquad x \in [0, 1],\ y \in [0, x];$

- $\Sigma_2 = \partial A \cap \{y = 0\} = \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = z, \end{cases} \qquad x \in [0, 1],\ z \in [0, 1-x];$

- $\Sigma_3 = \partial A \cap \{y = x\} = \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = z, \end{cases} \qquad x \in [0, 1],\ z \in [0, 1-x];$

- $\Sigma_4 = \partial A \cap \{z = 1-x\} = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1-x, \end{cases} \qquad x \in [0, 1],\ y \in [0, x].$

Allora il vettore normale esterno a ∂A risulta, secondo le parametrizzazioni scelte:

$$\mathbf{n} = \begin{cases} (0, 0, -1) & \text{su } \Sigma_1 \\ (0, -1, 0) & \text{su } \Sigma_2 \\ (1, -1, 0) & \text{su } \Sigma_3 \\ (1, 0, 1) & \text{su } \Sigma_4 . \end{cases}$$

Pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\boldsymbol{\sigma} &= \sum_{j=1}^{4} \int_{\Sigma_j} \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\boldsymbol{\sigma} = \\ &= 0 + 0 + 0 + \int_0^1 \int_0^x 1 \, dydx = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 4 La ricerca dei pezzi difettosi in una produzione giornaliera di 10.000 pezzi si può descrivere come una sequenza di $n = 10.000$ esperimenti indipendenti, in cui, paradossalmente, si ha successo se il pezzo è difettoso e si ha insuccesso se il pezzo è ben fatto. Il successo avviene con probabilità $p = \frac{32}{1.000} = \frac{4}{125}$: dunque, la v.a. X, che conta i pezzi difettosi, è binomiale con legge $\mathcal{B}(n, p)$, e dobbiamo calcolare

$$P(X < 300) = \sum_{k=0}^{299} \binom{10.000}{k} \left(\frac{4}{125}\right)^k \left(\frac{121}{125}\right)^{10.000-k}.$$

Si tratta di un calcolo abbastanza complicato!
Usiamo invece l'approssimazione normale, lecita perché n è molto grande: la v.a. X, essendo binomiale, ha media $\mu = np = 320$ e varianza $\sigma^2 = np(1-p) = 320\left(\frac{121}{125}\right) = \frac{7744}{25}$; dunque la deviazione standard è

$$\sigma = \sqrt{\frac{7744}{25}} = \frac{88}{5}.$$

Possiamo considerare X come una v.a. gaussiana di legge $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: di conseguenza, la v.a. $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ha legge normale $\mathcal{N}(0, 1)$m e si ha pertanto

$$\begin{aligned} P(X < 300) &= P\left(Y < -\frac{20}{\frac{88}{5}}\right) = P\left(Y < -\frac{25}{22}\right) = \\ &= \Phi\left(-\frac{25}{22}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{25}{22}\right). \end{aligned}$$

Osservato che

$$\frac{25}{22} = 1.1\overline{36},$$

utilizzando le tavole si ricava

$$P(X < 300) \simeq 1 - \Phi(1.14) \simeq 1 - 0.87 = 0.13.$$

Prova scritta del 19 febbraio 2019

Esercizio 1 Determinare, se esistono, il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 - y^2 - 4y + 1, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

sull'insieme

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_E y \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy,$$

ove E è l'insieme definito da

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ y \leq -|x|\}.$$

Esercizio 3 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, xy, -yz), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

si determini il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie Σ definita da

$$\Sigma = \{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; y \leq 0\},$$

orientata secondo il versore normale $\mathbf{n}$ che ha seconda componente negativa in ogni punto di Σ.

Esercizio 4 Un'urna contiene 20 palline rosse, 15 palline blu. e 18 palline verdi. Se ne estraggono due in sequenza (senza reinserimento della prima). Determinare la probabilità che:

(i) la prima pallina estratta sia rossa;

(ii) le palline estratte abbiano lo stesso colore;

(iii) una almeno delle due palline sia blu.

Risoluzione

Esercizio 1 Poiché la funzione f è continua e l'insieme C è chiuso e limitato, il massimo ed il minimo di f su C esistono. Per determinarli, annulliamo il gradiente di f:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x = 0 \\ f_y(x, y) = -2y - 4 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x, y) = (0, -2).$$

Questo punto però non è interno a C, quindi per adesso lo trascuriamo: lo ritroveremo comunque come punto stazionario vincolato.
Il bordo di C è composto dalle due circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e 2. Sulla prima, si ha

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

e di conseguenza la funzione da ottimizzare è

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = 2\cos^2 t - \sin^2 t - 4\sin t + 1.$$

Dato che

$$g'(t) = -4\sin t \cos t - 2\sin t \cos t - 4\cos t,$$

si ha

$$g'(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos t(-6\sin t - 4) = 0;$$

ciò accade per $t = \frac{\pi}{2}$, ossia $(x, y) = (0, 1)$, per $t = \frac{3\pi}{2}$, ossia $(x, y) = (0, -1)$, e ancora per $\sin t = -\frac{2}{3}$, da cui $\cos t = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. In tali punti risulta

$$f(0, 1) = -4, \quad f(0, -1) = 4, \quad f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{13}{3}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{13}{3}.$$

Sulla seconda circonferenza, si ha

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

e di conseguenza la funzione da ottimizzare è

$$h(t) := f(2\cos t, 2\sin t) = 8\cos^2 t - 4\sin^2 t - 8\sin t + 1.$$

Dato che

$$h'(t) = -16\sin t\cos t - 8\sin t\cos t - 8\cos t,$$

si ha

$$h'(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos t(-24\sin t - 8) = 0;$$

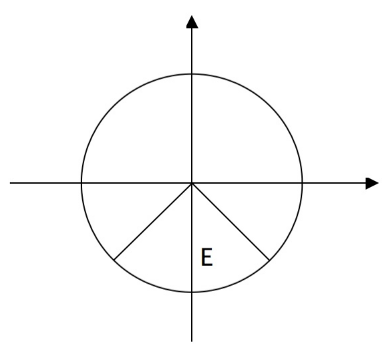
ciò accade per $t = \frac{\pi}{2}$, ossia $(x, y) = (0, 2)$, per $t = \frac{3\pi}{2}$, ossia $(x, y) = (0, -2)$, e ancora per $\sin t = -\frac{1}{3}$, da cui $\cos t = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. In tali punti risulta

$$f(0,2) = -11, \quad f(0,-2) = 5, \quad f\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{31}{3}, \quad f\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{31}{3}.$$

Confrontando tutti i valori trovati si ricava

$$\max_C f = f\left(\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{31}{3}, \qquad \min_C f = f(0,2) = -11.$$

Esercizio 2 L'insieme E è descritto qua sotto.



Per calcolare l'integrale conviene utilizzare le coordinate polari $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$: si ha

$$(x,y) \in E \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \le r \le 1, \quad \frac{5\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{7\pi}{4}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\int_E y \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy &= \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int_0^1 r\sin\vartheta \,\ln\frac{r|\cos\vartheta|}{r}\, r\,drd\vartheta = \\
&= \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sin\vartheta\,\ln|\cos\vartheta|\,d\vartheta \int_0^1 r^2\,dr = \\
&= \frac{1}{3}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sin\vartheta\,\ln|\cos\vartheta|\,d\vartheta.
\end{aligned}$$

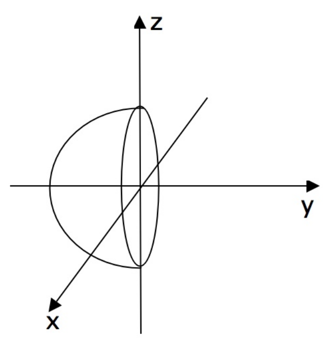
Ponendo ora $t = \cos\vartheta$, si trova $dt = -\sin\vartheta\, d\vartheta$ e pertanto

$$\begin{aligned}\int_E y \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy &= \frac{1}{3}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sin\vartheta \ \ln|\cos\vartheta|\, d\vartheta. = \\ &= -\frac{1}{3}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \ln|t|\, dt = -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \ln t\, dt = \\ &= -\frac{2}{3}\Big[t\ \ln t - t\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right].\end{aligned}$$

Esercizio 3 La superficie Σ è le semisfera unitaria contenuta nel semipiano $y \le 0$; dunque essa si rappresenta in coordinate sferiche nel modo seguente:

$$(x,y,z) \in \Sigma \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = \cos\vartheta\cos\varphi \\ y = \cos\vartheta\sin\varphi \\ z = \sin\vartheta, \end{cases}$$

ove $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in [\pi, 2\pi]$.



Il vettore normale a Σ, indotto da questa parametrizzazione, si ottiene dalla matrice delle derivate, che è

$$\begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\varphi & -\cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & 0 \end{pmatrix};$$

si ha, calcolando i tre minori 2×2,

$$\mathbf{n} = (-\cos^2\vartheta\cos\varphi, -\cos^2\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta\cos\vartheta).$$

Questo vettore normale è orientato al contrario di come richiesto: infatti si ha $n_2 \ge 0$, essendo $\sin\varphi \le 0$.
Calcoliamo adesso il rotore di $\mathbf{F}$: si ha

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ xz & xy & -yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Il flusso del rotore richiesto è allora, cambiando di segno l'integrale per via dell'orientazione,

$$\int_\Sigma \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3\, d\boldsymbol{\sigma} = -\int_\pi^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[-\sin\vartheta(-\cos^2\vartheta\cos^2\varphi)+$$

$$+\cos\vartheta\cos\varphi(-\cos^2\vartheta\sin\varphi) + \cos\vartheta\sin\varphi(-\sin\vartheta\cos\vartheta)\Big]\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta \int_\pi^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi +$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\vartheta\, d\vartheta \int_\pi^{2\pi} \cos\varphi\, \sin\varphi\, d\varphi +$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta \int_\pi^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0+0+0 = 0.$$

Naturalmente si poteva anche utilizzare il teorema di Stokes, calcolando invece il lavoro del campo $\mathbf{F}$ lungo la curva $b\Sigma$, che è la circonferenza

$$x = \cos t, \quad y = 0, \quad z = \sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

la quale va orientata nel verso delle t decrescenti. Si ottiene allora, essendo $\boldsymbol{\tau} = (-\sin t, 0, \cos t)$,

$$\begin{aligned}\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3\, ds &= -\int_0^{2\pi} \Big[\cos t \sin t(-\sin t) + 0 + 0\Big] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos t\, dt = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 4 (i) L'urna contiene 53 palline, delle quali 20 sono rosse. La probabilità che la prima pallina estratta sia rossa è dunque pari a $\frac{20}{53}$.

(ii) Per $j = 1, 2$ consideriamo gli eventi

$$\begin{aligned} R_j &= \{\text{la } j\text{-esima pallina estratta è rossa}\}, \\ B_j &= \{\text{la } j\text{-esima pallina estratta è blu}\}, \\ V_j &= \{\text{la } j\text{-esima pallina estratta è verde}\}. \end{aligned}$$

e notiamo che R_1, B_1 e V_1 sono mutuamente esclusivi. L'evento A, che descrive il fatto che le due palline estratte abbiano ugual colore, è allora

$$A = (R_1 \cap R_2) \cup (B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2).$$

Risulta allora, per la formula di disintegrazione,

$$P(A) = P(A|R_1)P(R_1) + P(A|B_1)P(B_1) + P(A|V_1)P(V_1).$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} P(A|R_1) &= P(R_2|R_1) = \frac{19}{52}, \\ P(A|B_1) &= P(B_2|B_1) = \frac{14}{52}, \\ P(A|V_1) &= P(V_2|V_1) = \frac{17}{53}, \end{aligned}$$

mentre

$$P(R_1) = \frac{20}{53}, \quad P(B_1) = \frac{15}{53}, \quad P(V_1) = \frac{18}{53}.$$

Perciò

$$P(A) = \frac{19 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 17 \cdot 18}{52 \cdot 53} = \frac{896}{2756} = \frac{224}{689} \simeq 0.3251.$$

(iii) L'evento B, che descrive il fatto che una almeno fra le due palline estratte sia blu, può vedersi come

$$B = B_1 \cup (B_1^c \cap B_2).$$

Allora possiamo scrivere, utilizzando nuovamente la formula di disintegrazione,

$$P(B) = P(B|B_1)P(B_1) + P(B|B_1^c)P(B_1^c);$$

osservato però che $P(B|B_1) = 1$, mentre $P(B|B_1^c) = P(B_2|B_1^c) = \frac{15}{52}$, si ottiene

$$P(B) = P(B_1) + \frac{15}{52}P(B_1^c) = \frac{15}{53} + \frac{15}{52}\frac{38}{53} = \frac{675}{1378} \simeq 0.48984.$$

Prova scritta del 12 aprile 2019

Esercizio 1 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = y^2 \ln(1 + x) + x^2y^2$$

sull'insieme

$$E = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Esercizio 2 Posto per $n \in \mathbb{N}^+$

$$f_n(x) = \sqrt{(n + 10)x} - \sqrt{nx}, \qquad x \geq 0,$$

stabilire:

(i) in quali sotto-intervalli di $[0, \infty[$ esiste il limite puntuale $f(x)$ della successione $\{f_n\}$;

(ii) in quali sotto-intervalli di $[0, \infty[$ la convergenza è uniforme.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_C (xy^2 - 3xy + z^2)\, dxdydz,$$

ove

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \ |y| \geq x, \ 0 \leq z \leq 4\}.$$

Esercizio 4 Supponiamo che il tempo di reazione di un individuo, sottoposto ad uno stimolo visivo, sia una variabile aleatoria continua T, espressa in secondi, dotata della densità

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ a\, e^{-at} & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

(i) Calcolare la probabilità che l'individuo impieghi più di 1.5 sec. per reagire.

(ii) Avendo sperimentalmente stimato con 0.3 la probabilità trovata in (i), si determini in questa ipotesi il valore del parametro a che descrive l'esperimento.

(iii) Determinare il tempo medio di reazione.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è definita sul semipiano $x > -1$ ed è di classe C^∞. Cerchiamo i punti stazionari di f interni al quadrato E. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y^2\left(\dfrac{1}{1+x} + 2x\right) = 0 \\[2ex] 2y(\ln(1+x) + x^2) = 0. \end{cases}$$

Se $y = 0$ entrambe le equazioni sono soddisfatte: dunque sono punti stazionari interni tutti i punti $(x,0)$ con $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Non ve ne sono altri con $y \neq 0$: infatti, nella prima equazione, il fattore

$$\frac{1}{1+x} + 2x = \frac{1+2x+2x^2}{1+x} = \frac{(1+x)^2 + x^2}{1+x}$$

è sempre positivo; quindi per annullare anche solo la prima equazione del sistema occorre che sia $y = 0$.
Risulta evidentemente

$$f(x,0) = 0 \qquad \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[.$$

Vediamo adesso la situazione sulla frontiera del quadrato. I valori di f nei vertici sono

$$f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{16}, \qquad f\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{16}.$$

Si noti che $f(x,y) = f(x,-y)$, quindi possiamo limitarci alla ricerca dei punti stazionari vincolati sui tre segmenti aperti

$$\Gamma_1 = \left\{-\frac{1}{2}\right\} \times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad \Gamma_2 = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\times \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \quad \Gamma_3 = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[.$$

Sul primo segmento si ha

$$f\left(-\frac{1}{2}, y\right) = y^2\left(\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right);$$

questa funzione ha l'unico punto stazionario in $y = 0$, dove risulta

$$f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = 0.$$

Sul secondo segmento si ha

$$f\left(x,-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\ln(1+x)+\frac{1}{4}x^2;$$

questa funzione non ha punti stazionari perché ha derivata strettamente positiva. Sul terzo segmento si ha

$$f\left(\frac{1}{2},y\right)=y^2\left(\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right);$$

questa funzione ha l'unico punto stazionario in $y=0$, dove risulta

$$f\left(-\frac{1}{2},0\right)=0.$$

In conclusione, confrontando tutti i valori trovati, si ottiene che

$$\max_E f=\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{16}\simeq 0.163866277,\quad \min_E f=\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\simeq -0.110786795.$$

Esercizio 2 Possiamo scrivere per $x>0$

$$f_n(x)=\sqrt{(n+10)x}-\sqrt{nx}=\frac{10x}{\sqrt{(n+10)x}+\sqrt{nx}}=\frac{10\sqrt{x}}{\sqrt{n+10}+\sqrt{n}},$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \qquad \forall x>0.$$

Per $x=0$ si ha direttamente

$$f_n(0)=0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+.$$

In definitiva la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente in $[0,\infty[$ alla funzione $f(x)=0$. Quanto alla convergenza uniforme, poiché, per ogni fissato $n\in\mathbb{N}$,

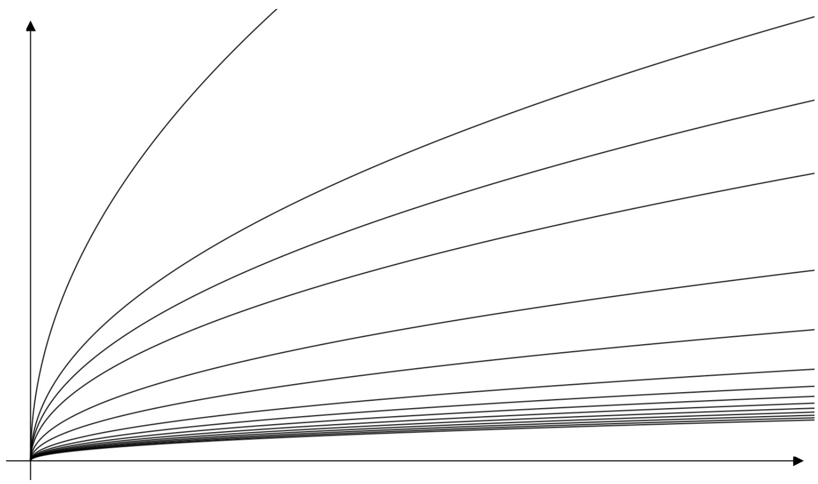
$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty,$$

essa non ci può essere in alcuna semiretta della forma $[c,+\infty[$ con $c\geq 0$. Invece su ogni intervallo limitato della forma $[0,b]$ si ha convergenza uniforme in quanto

$$0\leq f_n(x)\leq \frac{10\sqrt{b}}{\sqrt{n+10}+\sqrt{n}} \qquad \forall x\in[0,b],$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|\leq b} f_n(x)=0.$$

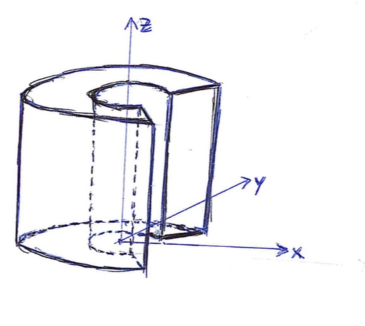


Esercizio 3 L'insieme C è disegnato nella figura sottostante. Esso si descrive, utilizzando le coordinate cilindriche

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta, \qquad z = z,$$

con le seguenti relazioni:

$$(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, z) \in E \iff \begin{cases} 1 \le r \le 3 \\ \frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{7\pi}{4} \\ 0 \le z \le 4. \end{cases}$$



Infatti la relazione $|y| \ge x$ è sempre vera quando $x \le 0$, cioè quando $\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{3\pi}{2}$, mentre quando $x > 0$ essa vale solo per $\frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{3\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{7\pi}{4}$. Dunque

$$\int_C (xy^2 - 3xy + z^2)\, dxdydz =$$

$$= \int_0^4 \int_1^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (r^3\cos\vartheta\sin^2\vartheta - 3r^2\cos\vartheta\sin\vartheta + z^2) r\, d\vartheta dr dz =$$

$$= \int_0^4 \left[\int_1^3 r^4 \frac{1}{3}\left[\sin^3\vartheta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\right] drdz - 3\int_0^4 \int_1^3 r^3 \left[\frac{1}{2}\left[\sin^2\vartheta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\right] drdz +$$

$$+ \frac{3\pi}{2}\int_0^4 z^2\, dz \int_1^3 r\, dr = -\frac{81}{5}\sqrt{2} - 0 + 128\pi.$$

Esercizio 4 (i) La probabilità che l'individuo impieghi più di 1.5 sec. per reagire è semplicemente $P(T \ge 1.5)$. Poiché T è dotata della densità f_T, si ha

$$P(T \ge 1.5) = \int_{1.5}^{\infty} f_T(t)\, dt = \int_{1.5}^{\infty} a\, e^{-at}\, dt = e^{-1.5a}.$$

(ii) Se risulta $e^{-1.5a} = 0.3$, deve essere $-1.5a = \ln 0.3$, da cui

$$a = \frac{1}{1.5}\ln\frac{10}{3} = \frac{2}{3}\ln\frac{10}{3}.$$

(iii) Il tempo medio di reazione è la speranza della v.a. T: dunque esso è dato da

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty t\, a\, e^{-at}\, dt = [t\, e^{-at}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-at}\, dt = \frac{1}{a}.$$

Prova scritta di Analisi 2 - 18 settembre 2020

Esercizio 1 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = t\, e^{-t} \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x\, e^z, y\, e^x, z\, e^y)$$

attraverso la superficie (regolare a tratti)

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} :\ x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq |y|\}$$

orientata secondo la normale $\mathbf{n}$ tale che $\mathbf{n}(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.
Esercizio 3 Si lancia 50 volte un dado equilibrato. Si calcoli la probabilità:

(i) che il primo 6 esca al trentunesimo lancio;

(ii) che il 6 esca 10 volte;

(iii) che il 6 esca solo 2 volte e consecutivamente.

Risoluzione

Esercizio 1 Risolviamo l'equazione omogenea associata, che essendo a coefficienti costanti ha soluzioni di tipo esponenziale $e^{\lambda x}$, con λ radice dell'equazione algebrica

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Dato che $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$, si ha la radice doppia $\lambda = 2$, cui corrispondono le due soluzioni linearmente indipendenti

$$y_1(t) = e^{-2t}, \qquad y_2(t) = t\, e^{-2t}.$$

Dunque le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni dell'insieme

$$V_0 = \{c_1\, e^{-2t} + c_2\, t\, e^{-2t} :\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Cerchiamo adesso una soluzione v dell'equazione non omogenea. Poiché il termine noto è $t\, e^{-t}$, possiamo cercare una v della forma

$$v(t) = (At + B)e^{-t},$$

con $A, B \in \mathbb{C}$ da determinare. Risulta

$$v'(t) = (A - B - At)e^{-t}, \qquad v''(t) = (-2A + B + At)e^{-t},$$

e dunque

$$\begin{aligned} t\,e^{-t} &= v''(t) + 4v'(t) + 4v(t) = (-2A + B + At + 4A - 4B - 4At + 4At + 4B)e^{-t} = \\ &= (2A + B + At)e^{-t}. \end{aligned}$$

Pertanto deve essere $2A + B = 0$ e $A = 1$, da cui $B = -2$. Dunque

$$v(t) = (t - 2)e^{-t}.$$

Dunque l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è

$$V = \{c_1\, e^{-2t} + c_2\, t\, e^{-2t} + (t - 2)e^{-t} : \ c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Imponiamo infine le condizioni per $t = 0$: posto

$$y(t) = c_1\, e^{-2t} + c_2\, t\, e^{-2t} + (t - 2)e^{-t},$$

si ha

$$y'(t) = -2c_1\, e^{-2t} + c_2(1 - 2t)e^{-2t} + (3 - t)e^{-t},$$

e deve essere

$$-1 = y(0) = c_1 - 2, \qquad 0 = y'(0) = -2c_1 + c_2 + 3,$$

da cui

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = -1.$$

La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$y(t) = e^{-2t} - \ t\, e^{-2t} + (t - 2)e^{-t}.$$

Esercizio 2 Il campo $\mathbf{F}$ è di classe C^∞; il suo rotore è

$$\mathbf{rotF}(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ x\, e^z & y\, e^x & z\, e^y \end{pmatrix} = (z\, e^y, x\, e^z, y\, e^x).$$

La superficie S si rappresenta, in coordinate cilindriche, nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = \cos\vartheta & \qquad \vartheta \in [0, 2\pi], \\ y = \sin\vartheta & \\ z = z, & \qquad z \in [0, |\sin\vartheta|]. \end{cases}$$

La matrice Jacobiana è

$$D\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta & 0 \\ \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha allora

$$\boldsymbol{\sigma}_\vartheta \times \boldsymbol{\sigma}_z = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0),$$

e il verso di questo vettore è quello giusto, poiché nel punto $(1,0,0)$, che corrisponde a $\vartheta = 0$, esso vale $(1,0,0)$ come richiesto. Pertanto il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso S è

$$\begin{aligned}\int_{+S} \langle \mathbf{rot F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\boldsymbol{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{|\sin\vartheta|} (\cos\vartheta \, z \, e^{\sin\vartheta} + \sin\vartheta \, \cos\vartheta \, e^z) dz \, d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\cos\vartheta \sin^2\vartheta \, e^{\sin\vartheta} + \sin\vartheta \, \cos\vartheta (e^{|\sin\vartheta|} - 1) \right) d\vartheta.\end{aligned}$$

Il secondo integrale è nullo perché la funzione $\sin\vartheta \, \cos\vartheta(e^{|\sin\vartheta|} - 1)$ è dispari e 2π-periodica. Il primo integrale è anch'esso nullo, in quanto la funzione $\frac{1}{2}\cos\vartheta\sin^2\vartheta \, e^{\sin\vartheta}$ è 2π-periodica e ha grafico simmetrico rispetto al punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$: dunque, scrivendo $\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}$ in luogo di $\int_0^{2\pi}$, il coseno ha segni opposti e l'integrale si decompone in due addendi che si cancellano tra loro. Si conclude che il flusso cercato è nullo.

Osservazione Naturalmente possiamo anche utilizzare il teorema di Stokes: il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso S è uguale al lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il bordo di S, che è l'unione di due curve: la prima è la circonferenza Γ al livello $z = 0$, la seconda è la curva chiusa γ al livello $z = |y|$: quest'ultima è regolare a tratti. Precisamente si ha

$$\Gamma: \quad x = \cos\vartheta, \quad y = \sin\vartheta, \quad z = 0, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi];$$

$$\gamma: \quad x = \cos\vartheta, \quad y = \sin\vartheta, \quad z = |\sin\vartheta|, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Affinché il verso di percorrenza lungo le due curve sia coerente con quello della normale esterna a S, occorre percorrere Γ nel verso delle ϑ crescenti, mentre γ va percorsa nel verso opposto. Manterremo allora per γ il verso delle ϑ crescenti, con un segno meno davanti all'integrale. Lungo $+\Gamma$ si ha $x' = -\sin\vartheta$, $y' = \cos\vartheta$, $z' = 0$, mentre lungo $+\gamma$ si ha $x' = -\sin\vartheta$, $y' = \cos\vartheta$, $z' = \pm\cos\vartheta$ (vale il segno $+$ su $[0,\pi]$ e il segno $-$ su $[\pi, 2\pi]$. In definitiva il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo ∂S è dato da

$$\begin{aligned}\int_{+\partial S} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3 \, ds &= \int_{+\Gamma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3 \, ds - \int_{+\gamma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3 \, ds = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin\vartheta\cos\vartheta + \cos\vartheta\sin\vartheta \, e^{\cos\vartheta}) d\vartheta - \\ &\quad - \int_0^{2\pi} (-\sin\vartheta\cos\vartheta \, e^{|\sin\vartheta|} + \cos\vartheta\sin\vartheta \, e^{\cos\vartheta} \pm \cos\vartheta |\sin\vartheta| \, e^{\sin\vartheta}) d\vartheta.\end{aligned}$$

Osserviamo che $\pm\cos\vartheta|\sin\vartheta| = \cos\vartheta\sin\vartheta$ per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$; dunque

$$\begin{aligned}\int_{+\partial S} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3 \, ds &= \int_0^{2\pi} (-\sin\vartheta\cos\vartheta + \cos\vartheta\sin\vartheta \, e^{\cos\vartheta}) d\vartheta - \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (\sin\vartheta\cos\vartheta \, e^{|\sin\vartheta|} + \cos\vartheta\sin\vartheta \, e^{\cos\vartheta} - \cos\vartheta\sin\vartheta \, e^{\sin\vartheta}) d\vartheta.\end{aligned}$$

Nel primo integrale, l'integrando è 2π-periodico e dispari, quindi si annulla; nel secondo integrale, l'integrando è 2π-periodico ed inoltre i primi due termini sono dispari, mentre il terzo, posto $t = \cos\vartheta$, si trasforma in un integrale con entrambi gli estremi uguali a 0. Quindi anch'esso si annulla. Dunque il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo ∂S è nullo.

Esercizio 3 (i) Se T è la variabile aleatoria che misura la prima uscita del 6 (successo) contro tutte le altre uscite (insuccesso), allora T segue le legge geometrica $\mathcal{G}(p)$ con $p = \frac{1}{6}$: dunque

$$P(T = 31) = pq^{31-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{30} = \frac{5^{30}}{6^{31}}.$$

(ii) Se X è la variabile aleatoria che conta le uscite del 6, allora X segue la legge binomiale $\mathcal{B}\left(50, \frac{1}{6}\right)$: dunque

$$P(X = 10) = \binom{50}{10}\frac{1}{6^{10}}\left(\frac{5}{6}\right)^{40}.$$

(iii) Se fosse stato chiesto di calcolare la probabilità che il 6 esca 2 volte, come in (ii) avremmo il risultato

$$\binom{50}{2}\frac{1}{6^2}\left(\frac{5}{6}\right)^{48},$$

dove il binomiale conta tutti i sottoinsiemi di due elementi scelti in un insieme di 50. Invece a noi ora interessano solo i sottoinsiemi di due elementi che siano consecutivi: e questi, in un insieme di 50, sono esattamente 49 (vale a dire $\{1,2\}$,$\{2,3\}$, $\ldots$, $\{49,50\}$). La probabilità che in uno di qusti sottoinsiemi escano due 6 è $\frac{1}{6^2}$. Perciò la probabilità che cerchiamo è

$$P = 49 \cdot \frac{1}{6^2}\left(\frac{5}{6}\right)^{48}.$$