Prove scritte di Analisi funzionale

dal gennaio 2002 in poi

Prova scritta del 16 gennaio 2002

Esercizio 1 Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Fissata $h \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$, si consideri la misura $d\nu = |h| d\mu$. Si provi che per $p \in [1, \infty[$ vale l'inclusione

$$L^p(X, \mathcal{F}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathcal{F}, \nu)$$

se e solo se risulta $h \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Esercizio 2 Sia $f \in L^1(-1, 1)$ tale che

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ x^n\ dx = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

si provi che $f = 0$ q.o. in $[-1, 1]$. Se ne deduca che se $g \in L^1(0, 1)$ è una funzione tale che

$$\int_0^1 g(x)\ x^{2n}\ dx = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

oppure

$$\int_0^1 g(x)\ x^{2n+1}\ dx = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

allora $g = 0$ q.o. in $[0, 1]$.

Esercizio 3 Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare.

(i) Si provi che se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\lambda I - A$ sia bigettivo con inverso in $\mathcal{L}(X)$, allora A è un operatore chiuso.

(ii) Posto $X = C[a, b]$ e

$$D(A) = \{u \in C^1[a, b] : u(a) = u(b) = 0\}, \qquad A = \frac{d}{dt},$$

si mostri che A è chiuso ma che $\rho(A) = \emptyset$.

Esercizio 4 Sia $f \in AC[a, b]$. Si provi che $1/f \in AC[a, b]$ se e solo se $f \neq 0$ in $[a, b]$.

Prova scritta del 7 febbraio 2002

Esercizio 1 Per ogni $k \in \mathbb{N}$ dimostrare l'uguaglianza

$$\frac{1}{k!}\int_0^1 \frac{|\log x|^k}{1+x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}}\ .$$

Esercizio 2 **(i)** Fissato $m \in \mathbb{N}$, si scriva la proiezione P_{K_m} sul convesso chiuso

$$K_m = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : |x_k| \le 1 \text{ per } k = 0, 1, \ldots, m\}.$$

(ii) Si scriva la proiezione P_K sul convesso chiuso $K = \bigcap_{m=0}^{\infty} K_m$.

Esercizio 3 Si consideri l'operatore lineare $T : \ell^2 \to \ell^2$ definito da

$$(Tx)_n = x_{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad x \in \ell^2.$$

(i) Si calcoli la norma di T.

(ii) Si scriva l'operatore aggiunto T^*.

(iii) Si trovino gli autovalori di T.

Esercizio 4 Siano $f \in BV[a,b]$ e $x_0 \in [a,b]$. Si provi che f è continua in x_0 se e solo se la funzione $x \mapsto T_a^x(f)$ è continua in x_0.

Prova scritta del 12 aprile 2002

Esercizio 1 Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice *microscopico* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ di E, costituito da intervalli aperti, tale che $m(I_n) < \varepsilon^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Si dimostri che:

(i) se E è al più numerabile, allora E è microscopico;

(ii) se E è microscopico, allora E è misurabile e $m(E) = 0$;

(iii) se $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è una successione di insiemi microscopici, allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ è microscopico.

Esercizio 2 Sia X uno spazio normato reale. Su $X^2 = X \times X$ consideriamo le operazioni di somma e di prodotto per scalari complessi così definite:

$$(x,y) + (u,v) = (x+u, y+v), \qquad (\alpha + i\beta)(x,y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y).$$

(i) Si definisca $x + iy = (x, y)$ e si verifichi che

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v), \qquad \forall x, y, u, v \in X,$$

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in X.$$

(ii) Posto $X_{\mathbb{C}} = \{x + iy : (x, y) \in X^2\}$, si provi che

$$\|x + iy\|_{X_{\mathbb{C}}} = \sup_{\vartheta \in [0,2\pi[} \|x \cos\vartheta + y \sin\vartheta\|_X$$

è una norma su $X_{\mathbb{C}}$ e che X si immerge isometricamente in $X_{\mathbb{C}}$ (lo spazio normato $(X_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{X_{\mathbb{C}}})$ costituisce la *complessificazione* di $(X, \|\cdot\|_X)$).

(iii) Si mostri che, in generale, la funzione $p(x + iy) = \|x\|_X + \|y\|_X$ non è una norma su $X_{\mathbb{C}}$.

Esercizio 3 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisca

$$T_n f = n \left[\int_0^1 x^n f(x)\ dx + \int_1^\infty e^{-nx} f(x)\ dx \right], \quad f \in L^\infty(0, \infty).$$

(i) Si calcoli la norma del funzionale T_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Si determini, se esiste, un funzionale T tale che $T_n \overset{*}{\rightharpoonup} T$ per $n \to \infty$.

Prova scritta del 31 maggio 2002

Esercizio 1 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{2\sqrt{x}} + ne^{\sqrt{x}}}{e^x + n\sqrt{x}e^{4\sqrt{x}}}\ dx.$$

Esercizio 2 Dimostrare l'uguaglianza

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\ dx = \frac{\pi}{2}\ .$$

Esercizio 3 Sia X uno spazio normato, sia $x \in X$ e sia $\omega : [0, \infty[\to [0, \infty[$ una funzione tale che

$$|\varphi x| \le \omega(\|\varphi\|_{X^*}) \qquad \forall \varphi \in X^*.$$

Si provi che:

(i) $\limsup_{t\to+\infty} \frac{\omega(t)}{t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0;$

(ii) $\liminf_{t\to 0^+} \frac{\omega(t)}{t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$

Prova scritta del 21 giugno 2002

Esercizio 1 Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Si provi che E è misurabile secondo Lebesgue se e solo se

$$m^*(E) = \sup\{m(K) : \ K \text{ compatto } \subseteq E\}.$$

Esercizio 2 Per $f \in L^1(\mathbb{R})$ definiamo

$$f_A = \frac{1}{m(A)} \int_A f(x)\, dx \qquad \forall A \in \mathcal{M} \text{ con } m(A) > 0,$$

$$[f]_{x_0,R} = \frac{1}{2R} \int_{x_0-R}^{x_0+R} |f(x) - f_{]x_0-R,x_0+R[}|\, dx \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall R > 0.$$

Si provi che:

(i) $X = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \sup_{x_0\in\mathbb{R}} \sup_{R>0} [f]_{x_0,R} < \infty\}$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_X = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \sup_{x_0\in\mathbb{R}} \sup_{R>0} [f]_{x_0,R}\ ;$$

(ii) $X_0 = \{f \in X : \lim_{R\to 0^+} [f]_{x_0,R} = 0 \ \forall x_0 \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio chiuso di X;

(iii) valgono le inclusioni $L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \subseteq X$ e $C^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \subseteq X_0$.

Esercizio 3 Sia $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ una funzione reale. Si consideri l'operatore T definito da

$$(Tf)(x) = f(x)g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

(i) Si calcoli la norma di T.

(ii) Si determini lo spettro di T.

Esercizio 4 Sia $f \in AC[a,b]$. Se $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ è una funzione monotona e assolutamente continua, si provi che $f \circ \varphi \in AC[c,d]$ e si deduca la formula di cambiamento di variabile

$$\int_a^b f'(x)\, dx = \int_c^d f'(\varphi(t))|\varphi'(t)|\, dt.$$

Prova scritta del 15 luglio 2002 con risoluzione

Esercizio 1 Per ogni funzione misurabile $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ poniamo

$$I_\alpha(f) = \inf\{t > 0 : m(\{x \in [a,b] : |f(x)| > t\}) < \alpha\}, \qquad \alpha \in]0, b-a].$$

Si provi che:

(i) se $0 < \beta < \alpha \le b - a$ allora $I_\beta(f) \ge I_\alpha(f)$;

(ii) $I_\alpha(\lambda f) = |\lambda| I_\alpha(f)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;

(iii) $I_\alpha(f+g) \le I_\vartheta(f) + I_{\alpha-\vartheta}(g)$ per ogni $\vartheta \in]0, \alpha[$;

(iv) $f_n \to f$ in misura se e solo se $I_\alpha(f_n - f) \to 0$ per ogni $\alpha \in]0, b-a]$.

Esercizio 2 Siano $p, r \in [1, \infty[$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \le 1$. Si provi che se $f_n \to f$ in L^p e $g_n \to g$ in L^r, allora $f_n g_n \to fg$ in L^s, ove $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$.
Esercizio 3 Sia

$$K = \left\{ x \in \ell^1 : \sum_{n=0}^{\infty} x_n = 0 \right\}.$$

(i) Si provi che K è un sottospazio chiuso di ℓ^1.

(ii) Si trovino tutti gli elementi $y \in \ell^\infty$ tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n x_n = 0 \qquad \forall x \in K.$$

(iii) Si dimostri che $K \cap \ell^2$ è un sottospazio denso in ℓ^2.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Osserviamo anzitutto che gli insiemi $\{x \in [a,b] : |f(x)| > t\}$ sono decrescenti rispetto a t, e che di conseguenza il numero $I_\alpha(f)$ è l'estremo inferiore di un intervallo: dunque

$$t > I_\alpha(f) \quad \Longrightarrow \quad m(\{x \in [a,b] : |f(x)| > t\}) < \alpha \quad \Longrightarrow \quad t \ge I_\alpha(f).$$

Sia $\beta < \alpha$ e prendiamo $t > I_\beta(f)$. Allora

$$m(\{x \in [a,b] : |f(x)| > t\}) < \beta < \alpha,$$

da cui $t \geq I_\alpha(f)$; in altre parole abbiamo provato che

$$t > I_\beta(f) \qquad \Longrightarrow \qquad t > I_\alpha(f),$$

il che significa $I_\beta(f) \geq I_\alpha(f)$.

(ii) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned}
I_\alpha(\lambda f) &= \inf\{t > 0 : m(\{x \in [a,b] : |\lambda f(x)| > t\}) < \alpha\} = \\
&= \inf\left\{t > 0 : m\left(\left\{x \in [a,b] : |f(x)| > \frac{t}{|\lambda|}\right\}\right) < \alpha\right\} = \\
&= |\lambda| \inf\left\{\frac{t}{|\lambda|} > 0 : m\left(\left\{x \in [a,b] : |f(x)| > \frac{t}{|\lambda|}\right\}\right) < \alpha\right\} = \\
&= |\lambda| \inf\{s > 0 : m(\{x \in [a,b] : |f(x)| > s\}) < \alpha\} = |\lambda| I_\alpha(f).
\end{aligned}$$

(iii) Si ha per ogni $t, \tau > 0$

$$\begin{aligned}
&\{x \in [a,b] : |f(x) + g(x)| > t + \tau\} \subseteq \\
&\quad \subseteq \{x \in [a,b] : |f(x)| > t\} \cup \{x \in [a,b] : |g(x)| > \tau\}.
\end{aligned}$$

Quindi se $\vartheta < \alpha$ e se $t > I_\vartheta(f)$, $\tau > I_{\alpha-\vartheta}(g)$, allora otteniamo

$$m(\{x \in [a,b] : |f(x) + g(x)| > t + \tau\}) \leq \vartheta + (\alpha - \vartheta = \alpha,$$

ossia $t + \tau \geq I_\alpha(f+g)$. In altre parole abbiamo provato che

$$t > I_\vartheta(f), \quad \tau > I_{\alpha-\vartheta}(g) \quad \Longrightarrow \quad t + \tau \geq I_\alpha(f+g),$$

il che significa $I_\alpha(f) \leq I_\vartheta(f) + I_{\alpha-\vartheta}(g)$.

(iv) Se $f_n \to f$ in misura, allora per definizione per ogni $t > 0$ e per ogni $\alpha \in]0, b-a]$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$m(\{x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| > t\}) < \alpha \qquad \forall n > \nu.$$

Ciò implica $I_\alpha(f_n - f) \leq t$ per ogni $n > \nu$: poiché t è arbitrariamente piccolo, deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} I_\alpha(f_n - f) = 0 \qquad \forall \alpha \in]0, b-a].$$

Viceversa, supponiamo che valga questa condizione: allora per ogni $\alpha \in]0, b-a]$ e per ogni $t > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$I_\alpha(f_n - f) < t \qquad \forall n \geq \nu,$$

da cui
$$m(\{x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| > t\}) < \alpha \qquad \forall n > \nu.$$
Poiché α è arbitrariamente piccolo, ciò implica
$$\lim_{n\to\infty} m(\{x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| > t\}) = 0 \qquad \forall t > 0,$$
ossia $f_n \to f$ in misura.

Esercizio 2 Poiché gli esponenti p/s e r/s sono coniugati, si ha
$$\begin{aligned}\int_X |f_n g_n - fg|^s d\mu &\le 2^{s-1} \int_X [|f_n - f|^s |g_n|^s + |f|^s |g_n - g|^s]\, d\mu \le \\ &\le 2^{s-1} \left[\int_X |f_n - f|^p d\mu\right]^{\frac{s}{p}} \left[\int_X |g_n|^r d\mu\right]^{\frac{s}{r}} + \\ &\quad + \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{\frac{s}{p}} \left[\int_X |g_n - g|^r d\mu\right]^{\frac{s}{r}};\end{aligned}$$
dato che la successione $\{g_n\}$ è limitata in L^r, ne segue
$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n g_n - fg|^s d\mu = 0.$$

Esercizio 3 (i) La verifica che K è un sottospazio di ℓ^1 è banale. Proviamo che K è chiuso in ℓ^1. Sia $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ tale che $x^{(k)} \to x$ in ℓ^1: allora
$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right| &\le \left|\sum_{n=0}^{\infty} (x_n - x_n^{(k)})\right| + \left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n^{(k)}\right| \le \\ &\le \|x - x^{(k)}\|_1 + 0 = \|x - x^{(k)}\|_1 \to 0 \quad \text{per } n \to \infty;\end{aligned}$$
quindi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 0$, ossia $x \in K$.

(ii) Sia $y \in \ell^\infty$ tale che $\sum_{n=0}^{\infty} y_n x_n = 0$ per ogni $x \in K$: allora, scelto $x = e^{(i)} - e^{(0)}$, si ha $x \in K$ e di conseguenza
$$y_i - y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} y_n (e_n^{(i)} - e_n^{(0)}) = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{N},$$
ovvero $y = \lambda \mathbf{1}$, ove $\mathbf{1}$ è la successione costante $\{1,1,1,\ldots\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Viceversa è chiaro che se $y = \lambda\mathbf{1}$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} y_n x_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} x_n = 0$ per ogni $x \in K$. Ciò prova che
$$\{y \in \ell^\infty : \sum_{n=0}^{\infty} y_n x_n = 0\} = [\mathbf{1}].$$

(iii) Sia $x \in \ell^2$ tale che $x \in :\perp\ K \cap \ell^2$. Per quanto visto in **(ii)**, si ha $x \perp e^{(i)} - e^{(0)}$, da cui $x_n = \lambda x_0$. Ma allora affinché sia $x \in \ell^2$ deve essere $\lambda = 0$: quindi $x = 0$. Se ne deduce che $\overline{K \cap \ell^2} = \ell^2$.

Prova scritta del 20 settembre 2002

Esercizio 1 Dimostrare le uguaglianze

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\log x)^2}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\,, \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\log x)^2}{1-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}\,.$$

Esercizio 2 Si consideri la famiglia di funzioni $\{\chi_{[k,k+1[}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ in $L^2(\mathbb{R})$.

(i) Si verifichi che essa è un sistema ortonormale.

(ii) Si descriva il sottospazio M da essa generato.

(iii) Si determini un elemento non nullo di $M^{\perp}$.

Esercizio 3 Fissata $a \in \ell^{\infty}$, si definisca per ogni $x \in \ell^2$

$$(Tx)_n = a_n x_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Si verifichi che $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ e se ne calcoli la norma.

(ii) Si mostri che T è un operatore autoaggiunto se e solo se $a_n \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Si provi che T è un operatore compatto se e solo se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esercizio 4 Sia $f \in AC[a,b]$.

(i) Se $\inf |f| > 0$, si provi che $\sqrt{|f|} \in AC[a,b]$.

(ii) Se $\inf |f| = 0$, si mostri che in generale $\sqrt{|f|} \notin AC[a,b]$.

Prova scritta del 22 novembre 2002

Esercizio 1 Per ogni funzione crescente e continua a sinistra $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, sia μ_g la corrispondente misura di Lebesgue-Stieltjes. Si provi che:

(i) μ_g è una misura regolare, nel senso che per ogni $E \in \mathcal{M}_g$ si ha

$$\begin{aligned} &\inf\{\mu_g(E \setminus F) : \ F \subseteq E, \ F \text{ chiuso}\} = \\ &\quad = \inf\{\mu_g(A \setminus E) : \ A \supseteq E, \ A \text{ aperto}\} = 0; \end{aligned}$$

(ii) detta $\mathcal{M}_g$ la classe degli insiemi μ_g-misurabili, esiste una g tale che $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_g \neq \emptyset$;

(iii) se g è costante in un sottointervallo $[c, d] \subset [a, b]$, allora $\mathcal{M}_g \setminus \mathcal{M} \neq \emptyset$.

Esercizio 2 Sia $M = \{g \in L^2(a, b) : \ g(x) = px + q, \ p, q \in \mathbb{R}\}$.

(i) Si verifichi che M è un sottospazio chiuso di $L^2(a, b)$;

(ii) Si caratterizzi il sottospazio $M^\perp$ e si scriva la proiezione ortogonale P_M.

Esercizio 3 Sia $a = \{a_n\}$ una fissata successione di numeri positivi, e poniamo per $p \in [1, \infty[$

$$\ell^p_a = \left\{ x = \{x_n\} : \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n |x_n|^p < +\infty \right\}.$$

(i) Si verifichi che ℓ^p_a è uno spazio di Banach con la norma

$$\|x\| = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n |x_n|^p \right]^{1/p}.$$

(ii) Quali condizioni su $\{a_n\}$ assicurano la validità dell'una o dell'altra fra le inclusioni $\ell^p_a \subseteq \ell^p$, $\ell^p \subseteq \ell^p_a$?

(iii) Si mostri che $\ell^\infty \subseteq \ell^p_a$ se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Prova scritta del 20 dicembre 2002

Esercizio 1 Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 x \, d\mu_g$$

ove μ_g è la misura di Lebesgue-Stieltjes associata alla funzione

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{8} & \text{se } x \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ t^2 & \text{se } x \in]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Esercizio 2 Sia $M = \{f \in L^p(0,1) : \ f(x) = f(1-x) \text{ per q.o. } x \in [0,1]\}$.

(i) Per ogni $p \in [1, \infty]$ si provi che M è un sottospazio chiuso di $L^p(0,1)$.

(ii) Per ogni $p \in [1, \infty[$ si caratterizzi l'insieme

$$M^0 = \{\varphi \in L^p(0,1)^* : \varphi f = 0 \ \forall f \in M\}.$$

Esercizio 3 Siano X uno spazio normato separabile e Y uno spazio di Banach riflessivo. Se $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in $\mathcal{L}(X, Y)$, si provi che esiste una sottosuccessione $\{F_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\{F_{n_k}x\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in Y per ogni $x \in X$.

Prova scritta del 14 gennaio 2003

Esercizio 1 In uno spazio misurato $(X, \mathcal{F}, \mu)$ siano $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ due successioni di funzioni misurabili tali che:

(i) $f_n \to f$ in misura,

(ii) $|f_n(x)| \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in X$,

(iii) $g_n \to g$ in L^1.

Si provi che $f_n g_n \to fg$ in L^1; si mostri poi che il risultato è falso se si sopprime l'ipotesi **(ii)**.

Esercizio 2 Per $\alpha > 0$ definiamo

$$C_\alpha(]a,b]) = \{f :]a,b] \to \mathbb{R} : \ f \text{ è continua e } \sup_{a<x\leq b} (x-a)^\alpha |f(x)| < \infty\}.$$

Si provi che:

(i) $C_\alpha(]a,b])$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_\alpha = \sup_{a<x\le b}(x-a)^\alpha |f(x)|;$$

(ii) se $0<\alpha<1/p\le 1$ allora $C_\alpha(]a,b])$ è un sottospazio denso di $L^p(a,b)$;

(iii) se $0<\alpha<\beta$ si ha $C_\alpha(]a,b])\subset C_\beta(]a,b])$, e la chiusura di $C_\alpha(]a,b])$ in $C_\beta(]a,b])$ è lo spazio

$$h_\beta(]a,b]) = \{f\in C_\beta(]a,b]) : \lim_{x\to a^+}(x-a)^\beta f(x) = 0\}.$$

Esercizio 3 Sia $T: C[a,b]\to C[a,b]$ l'operatore lineare definito da

$$[Tf](x) = \int_a^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt, \quad x\in[a,b], \qquad \forall f\in C[a,b].$$

(i) Si verifichi che T è continuo e se ne calcoli la norma.

(ii) Si provi che T è compatto.

(iii) Si mostri che $\sigma(T)=\{0\}$.

Esercizio 4 Sia $\{f_n\}\subset AC[a,b]$ una successione tale che $\|f_n'\|_{L^1(a,b)}\le M$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $f_n(x)\to f(x)$ per ogni $x\in[a,b]$. Dimostrare o confutare le seguenti asserzioni:

(i) $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$,

(ii) $f\in BV[a,b]$,

(iii) $f\in AC[a,b]$.

Prova scritta del 3 febbraio 2003

Esercizio 1 Sia C l'insieme ternario di Cantor.

(i) Si mostri che per ogni $c\in[-1,1]$ esistono $x,x'\in C$ tali che $x-x'=c$.

(ii) Si provi che esiste un sottoinsieme E di $[0,1]\times[0,1]$ tale che:

(a) $m_2(E) = 0$;

(b) per ogni $p, q \in [0,1]$ esiste un rettangolo R, con lati paralleli agli assi e di lunghezza p e q, tale che $\partial R \subset E$.

Esercizio 2 Sia $p \in [1, \infty[$. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

(i) se $f_n \to f$ in $L^p(a,b)$, allora $\int_a^b f_n(t) \sin nt \, dt \to 0$;

(ii) se $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(a,b)$, allora $\int_a^b f_n(t) \sin nt \, dt \to 0$.

Esercizio 3 Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$.

(i) Detto T^* l'operatore aggiunto di T, definito dalla relazione

$$(Tx, y)_H = (x, T^*y)_H \qquad \forall x, y \in H,$$

si provi che $T^* \in \mathcal{L}(H)$ e che $\|T^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$.

(ii) Si verifichi che $I + T^*T$ è un operatore autoaggiunto, cioè $(I + T^*T)^* = I + T^*T$.

(iii) Si provi che $I + T^*T$ è invertibile.

(iv) Si mostri che $\|(I + T^*T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Prova scritta del 4 aprile 2003

Esercizio 1 Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{x^{n-2}}{e^{\frac{1}{nx}} + x^n} \arctan\left(\frac{n}{x^2} \sin \frac{x}{n}\right) dx.$$

Esercizio 2 Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$ e sia $\{\mu_n\}$ una successione di misure finite definite su $\mathcal{F}$. Si provi che sono fatti equivalenti:

(i) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(E) = \mu(E)$ per ogni $E \in \mathcal{F}$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_X f \, d\mu_n = \int_X f \, d\mu$ per ogni funzione f misurabile e limitata in X.

Esercizio 3 Si costruisca un funzionale lineare e continuo F su ℓ^∞ tale che non esista alcun elemento $a \in \ell^1$ per cui valga la rappresentazione

$$Fx = \sum_{n=0}^\infty x_n a_n \qquad \forall x \in \ell^\infty.$$

Prova scritta del 3 giugno 2003

Esercizio 1 Sia $F \subset [0,1]$ un insieme misurabile secondo Lebesgue ma non boreliano. Si provi che l'insieme

$$E = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in F\}$$

è misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^2$, e verifica:

(i) $E_x \in \mathcal{B}$ per ogni $x \in [0,1]$, $E^y \in \mathcal{B}$ per ogni $y \in [0,1]$,

(ii) $E \notin \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

Esercizio 2 Si verifichi che per $1 \leq p < q \leq \infty$ vale l'inclusione stretta $\ell^p \subset \ell^q$, e che tale immersione è continua con norma uguale a 1. Qualcuna di queste immersioni è compatta?

Esercizio 3 Siano P e Q proiezioni ortogonali in uno spazio di Hilbert H. Si provi che i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) $\|Px\| \leq \|Qx\|$ per ogni $x \in H$;

(ii) $R(P) \subseteq R(Q)$;

(iii) $PQ = QP = P$;

(iv) $Q - P$ è la proiezione ortogonale su $R(P)^\perp \cap R(Q)$.

Prova scritta del 9 luglio 2003

Esercizio 1 Sia $E \subset [0,1]$ un insieme non misurabile secondo Lebesgue. Si provi che:

(i) $0 < m^*(E) \leq 1$;

(ii) esiste $\delta > 0$ tale che $m(A) < m^*(E) - \delta$ per ogni insieme misurabile $A \subset E$;

(iii) se E è l'insieme di Vitali, allora ogni sottoinsieme misurabile $A \subset E$ ha misura nulla.

Esercizio 2 Siano $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ due successioni tali che $\{f_n\} \subset L^2(a,b)$ e $\{g_n\} \subset L^\infty(a,b)$. Si dimostri che:

(i) se $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(a,b)$, $g_n(x) \to 0$ q.o. in $[a,b]$ e $\|g_n\|_\infty \le K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $f_n g_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(a,b)$;

(ii) l'implicazione sopra scritta è falsa se si toglie l'ipotesi $\|g_n\|_\infty \le K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3 Sia H uno spazio normato. Si provi che la norma di H è indotta da un prodotto scalare se e solo se per ogni $n \ge 2$ e per ogni n-pla di vettori $x_1, \ldots, x_n \in H$ vale la relazione

$$\sum_{1 \le j < k \le n} \|x_j - x_k\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|^2 = n \cdot \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

Prova scritta dell'11 settembre 2003

Esercizio 1 Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia

$$\mathcal{F}_1 = \{E \subseteq X : E \cap A \in \mathcal{F} \text{ per ogni } A \in \mathcal{F} \text{ con } \mu(A) < \infty\}.$$

(i) Si verifichi che $\mathcal{F}_1$ è una σ-algebra contenente $\mathcal{F}$;

(ii) Si provi che l'estensione di μ definita su $\mathcal{F}_1$ da

$$\mu_1(E) = \begin{cases} \mu(E) & \text{se } E \in \mathcal{F} \\ +\infty & \text{se } E \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

è una misura su $\mathcal{F}_1$;

(iii) Si mostri che se μ è σ-finita allora $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$;

(iv) Si determinino $\mathcal{F}_1$ e μ_1 nel caso in cui $X = \mathbb{R}$, con

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ oppure } A^c \text{ è numerabile}\},$$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ è numerabile,} \\ +\infty & \text{se } A^c \text{ è numerabile.} \end{cases}$$

Esercizio 2 Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su $\mathbb{R}$, tali che

$$f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^p(\mathbb{R}), \qquad f_n \rightharpoonup g \text{ in } L^r(\mathbb{R}),$$

ove $p, r \in [1, \infty]$. Si provi che $f = g$ q.o. in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 Sia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale completo in uno spazio di Hilbert H.

(i) Se $T \in \mathcal{L}(H)$ e $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$, si verifichi che $\|Te_n\|_H \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(ii) Si provi che per ogni $N > 0$ esiste un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ tale che $\|Te_n\|_H \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} > N$.

Prova scritta del 10 ottobre 2003

Esercizio 1 Posto per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \frac{2 \arctan nx}{\pi + x^n}\,, \qquad x \geq 0,$$

si provi che f_n converge in $L^p(0,\infty)$ per ogni $p \in [1,\infty[$ e se ne determini la funzione limite.

Esercizio 2 Sia T l'operatore definito da

$$Tf(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t)\, dt, \qquad x \in [0,1].$$

(i) Si verifichi che $T \in \mathcal{L}(C[0,1])$ e se ne calcoli la norma.

(ii) Si dica se T è iniettivo e se ne determini l'immagine $R(T)$.

Esercizio 3 Si definisca

$$K = \left\{ f \in L^2(0,1) : \int_0^1 |f(x)|^n dx \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(i) Provare che K è un convesso chiuso di $L^2(0,1)$.

(ii) Dimostrare che $K = \{f \in L^\infty(0,1) : \|f\|_\infty \leq 1\}$.

(iii) Scrivere la proiezione ortogonale P_K.

Prova scritta del 20 gennaio 2004

Esercizio 1 Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-x^2/n^2} \frac{x^{n-2}}{n + x^n}\, dx.$$

Esercizio 2 Sia $H = \{f \in AC[-\pi,\pi] : f' \in L^2(\pi,\pi)\}$.

(i) Si verifichi che H è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(f,g)_H = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)g(x) + f'(x)g'(x)]dx \qquad \forall f,g \in H.$$

(ii) Si provi che la famiglia di funzioni

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi(1+n^2)}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi(1+n^2)}} \sin nx,\ n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

è un sistema ortonormale in H.

(iii) Si mostri che $\overline{[S]} = \{f \in H : f(\pi) = f(-\pi)\}$ e che quindi il sistema S non è completo in H.

(iv) Si provi che, posto $g(x) = \dfrac{x}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(1+n^2)} \sin nx$, si ha $g \perp S$.

Esercizio 3 Posto $U = \left\{x \in \ell^\infty : \exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \in \mathbb{R}\right\}$, si consideri il funzionale $F : U \to \mathbb{R}$ definito da

$$Fx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \forall x \in U.$$

Si dimostri che esiste $L \in (\ell^\infty)^*$ dotato delle seguenti proprietà:

(i) $\|L\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$ e $L|_U = F$,

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \le Lx \le \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ per ogni $x \in \ell^\infty$,

(iii) $Lx = L(\tau x)$ per ogni $x \in \ell^\infty$, ove si è indicato con $\tau : \ell^\infty \to \ell^\infty$ l'operatore di shift $(\tau x)_n = x_{n+1}$.

Prova scritta del 18 febbraio 2004

Esercizio 1 Per ogni $u \in L^1(\mathbb{R})$ e $r > 0$ sia

$$u_r(x) = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} u(\xi)\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che:

(i) $u_r \in C(\mathbb{R})$ e $\lim_{|x|\to\infty} u_r(x) = 0$ per ogni $r > 0$;

(ii) $u_r \in L^1(\mathbb{R})$ e $\|u_r\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$ per ogni $r > 0$;

(iii) $u_n \rightharpoonup u$ in $L^1(\mathbb{R})$ per $r \to 0^+$.

Esercizio 2 Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Sia inoltre X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore con norma $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} < R$. Si provi che

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n x, \qquad x \in X,$$

è un operatore ben definito, lineare e continuo, con norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|T^n\|_{\mathcal{L}(H)}\,;$$

si verifichi anche che A commuta con T.

Esercizio 3 Sia H uno spazio di Hilbert. Si provi che la norma dello spazio $\mathcal{L}(H)$ non è (in generale) hilbertiana.

Prova scritta del 7 aprile 2004

Esercizio 1 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\frac{1}{n}-1}\, e^{-\frac{n+x^2}{n+1}}\, \frac{\log|x|}{1+(\log|x|)^4}\, dx.$$

Esercizio 2 Fissato $p \in [1, \infty[$, si considerino gli spazi di Banach

$$X_1 = L^p(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx), \qquad X_2 = L^p(\mathbb{R}, e^{-x^4}dx).$$

(i) Si provi che $X_1 \subseteq X_2$ con inclusione continua.

(ii) Si determini un elemento di $X_2 \setminus X_1$.

(iii) Si mostri che X_1 è denso in X_2.

Esercizio 3 Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$.

(i) Si dimostri che T è un'isometria su H se e solo se $T^*T = I$.

(ii) Si verifichi che in tal caso T non è necessariamente surgettivo e che risulta in effetti $TT^* = P_{\overline{R(T)}}$.

Prova scritta del 16 giugno 2004

Esercizio 1 Si consiedri la successione di funzioni $\{f_n\}$ definite da

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{\sqrt{x}(n+x)} & \text{se } x > 1, \\ \dfrac{n}{n+1} & \text{se } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

(i) Si calcoli $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(ii) Si dica se $f_n \to f$ in misura (rispetto alla misura di Lebesgue su $[0, \infty[$).

(iii) Si determinino gli esponenti $p \ge 1$ tali che $f_n \to f$ in $L^p(0, \infty)$.

Esercizio 2 Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$. Supponiamo che valga l'una o l'altra delle seguenti condizioni:

(a) $\exists T^{-1} = T^*$,

(b) $T = T^*$ e $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty$.

Si provi che:

(i) $\ker(I - T) = \ker(I - T^*) = \overline{R(I - T)}^{\perp}$;

(ii) posto $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} T^k$, risulta $\lim_{n\to\infty} T_n x = Px$ per ogni $x \in H$, ove P è la proiezione ortogonale sul sottospazio $\ker(I - T)$.

Esercizio 3 Per ogni $\alpha > 0$ si definisca

$$c_\alpha = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} : \{n^\alpha x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \in c_0\}.$$

(i) Si verifichi che c_α è uno spazio di Banach con la norma

$$\|x\|_{c_\alpha} = \sup_{n\in\mathbb{N}^+} n^\alpha |x_n|.$$

(ii) Si provi che per ogni $\varphi \in c_\alpha^*$ esiste un unico $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ tale che $\sum_{n=1}^\infty \frac{|y_n|}{n^\alpha} < \infty$ e $\varphi x = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ per ogni $x \in c_\alpha$, e che in particolare $\|\varphi\|_{c_\alpha} = \sum_{n=1}^\infty \frac{|y_n|}{n^\alpha}$.

Prova scritta del 13 luglio 2004

Esercizio 1 Si calcoli l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{xe^x}\, dx.$$

Esercizio 2 Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue e limitate in I. Supponiamo che esista $f : I \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \to f$ uniformemente in I; si provi che

$$\lim_{n\to\infty} m(f_n(I)\Delta f(I)) = 0,$$

ove m è la misura di Lebesgue.

Esercizio 3 Sia X uno spazio di Banach, sia $p \in]1, \infty[$ e sia q l'esponente coniugato di p. Si consideri l'insieme

$$Y = \left\{ x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X : \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|_X^p < \infty \right\}.$$

(i) Si verifichi che Y è uno spazio di Banach con la norma

$$\|x\|_Y = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) Si provi che il duale di Y è isomorfo allo spazio

$$Z = \left\{ F = \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X^* : \sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k\|_{X^*}^q < \infty \right\},$$

munito della norma

$$\|F\|_Z = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k\|_{X^*}^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

mediante l'applicazione

$$Fy = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k x_k \qquad \forall F = \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in Z, \quad \forall y = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in Y.$$

Prova scritta del 9 settembre 2004

Esercizio 1 Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty x^n e^{-n^x}\, dx.$$

Esercizio 2 Sia $\varphi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione bigettive e crescente, tale che $\varphi \in AC[0, b]$ per ogni $b > 0$ e $\varphi' \in L^1(\mathbb{R})$. Si provi che se $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio σ-finito e $u : X \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile, allora

$$\int_X (\varphi \circ |u|)(x)\, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : |u(x)| > t\})\, \varphi'(t)\, dt.$$

Esercizio 3 Sia X uno spazio normato e sia $x \in X \setminus \{0\}$.

(i) Si verifichi che per ogni $v \in X$ si ha

$$-\|v\| \le \liminf_{t\to 0} \frac{\|x + tv\| - \|x\|}{t} \le \limsup_{t\to 0} \frac{\|x + tv\| - \|x\|}{t} \le \|v\|\,.$$

(ii) Si mostri con un esempio che se $v \in X \setminus \{0\}$ in generale si ha

$$\liminf_{t\to 0} \frac{\|x + tv\| - \|x\|}{t} < \limsup_{t\to 0} \frac{\|x + tv\| - \|x\|}{t}\,.$$

(iii) Si provi che se la norma di X è hilbertiana allora

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{\|x + tv\| - \|x\|}{t} \qquad \forall v \in X,$$

e in tal caso lo si calcoli.

Prova scritta del 28 settembre 2004

Esercizio 1 Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{(2\sin t)^n}{t + (2\sin t)^{2n}}\, dt.$$

Esercizio 2 Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale completo in H. Posto

$$K = \{x \in K : |(x, e_n)_H| \le 2^{-n} \ \forall n \in \mathbb{N}\},$$

si verifichi che K è un convesso chiuso di H e se ne determini esplicitamente la proiezione P_K.

Esercizio 3 Sia $g \in C[0,2]$ una funzione non negativa e sia T l'operatore definito da

$$Tf(x) = \int_x^{2-x} f(t)g(t)\,dt, \qquad x \in [0,2].$$

(i) Si verifichi che $T \in \mathcal{L}(L^\infty(0,2))$ e se ne calcoli la norma.

(ii) Si provi che $T \in \mathcal{L}(L^1(0,2))$ e se ne calcoli la norma.