Corso di Matematica per Scienze geologiche: prove scritte dal 2004 in poi

Prova scritta del 14 gennaio 2004

Esercizio 1 Date le rette $y = \pm 3x$ e fissato il punto $P = (-5, -12)$, trovare due numeri positivi a e b tali che l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

passi per P ed abbia tali rette come asintoti.

Esercizio 2 Si consideri la successione definita da

$$a_n = n^2 \left(\sqrt{1 + n^4} - \sqrt{5 + n^\alpha} \right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

e se ne calcoli il limite (se esiste) al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x) = e^{100x} \left| \frac{x^2}{100} - 1 \right|, \qquad x \in \mathbb{R},$$

se ne determinino:

(i) i punti di massimo e di minimo relativo,

(ii) i limiti a $\pm\infty$,

(iii) gli eventuali asintoti.

Esercizio 4 Calcolare l'integrale

$$\int_5^{10} \frac{1}{x - 2\sqrt{x - 1}}\, dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La prima condizione da imporre è che l'iperbole passi per P: quindi deve essere

$$\frac{25}{a^2} + \frac{144}{b^2} = 1.$$

Gli asintoti si trovano osservando che l'equazione dell'iperbole si scinde nelle due seguenti:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \qquad |x| \geq a.$$

Analizziamo la prima equazione, cioè quella col segno $+$, relativa al ramo superiore dell'iperbole. Per $x \to +\infty$ si ha, essendo $x = \sqrt{x^2}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{b}{a}\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(y - \frac{b}{a}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0.$$

Analogamente, per $x \to -\infty$ si ha, essendo $x = -\sqrt{x^2}$,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{b}{a}\left(-\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}\right) = -\frac{b}{a}\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(y + \frac{b}{a}x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - |x|\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + |x|} = 0.$$

Dunque il ramo superiore dell'iperbole ($y > 0$) ha per asintoti obliqui la retta $y = \frac{b}{a}x$ per $x \to +\infty$ e la retta $y = -\frac{b}{a}x$ per $x \to -\infty$.
Il ramo inferiore ($y < 0$), per motivi di simmetria rispetto all'asse x, avrà per asintoti obliqui la retta $y = -\frac{b}{a}x$ per $x \to +\infty$ e la retta $y = \frac{b}{a}x$ per $x \to -\infty$.
In definitiva, dobbiamo richiedere ai coefficienti a e b la condizione

$$\frac{b}{a} = 3.$$

Dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{25}{a^2} + \dfrac{144}{b^2} = 1 \\ \dfrac{b}{a} = 3, \end{cases}$$

ricordando che si richiede $a > 0$, $b > 0$. La soluzione è $a = 3$ e $b = 9$.

Esercizio 2 Si ha

$$n^2\left(\sqrt{1+n^4}-\sqrt{5+n^\alpha}\right)=n^2\frac{-4+n^4-n^\alpha}{\sqrt{1+n^4}+\sqrt{1+n^\alpha}}\,.$$

Se $\alpha<4$ il limite è $+\infty$ in quanto la frazione si comporta come $n^{2+4-4/2}$, ossia come n^4. Se $\alpha=4$ il denominatore va come $2n^2$ e il numeratore è $-4n^2$, per cui il limite è -2. Infine se $\alpha>4$ l'intera frazione si comporta come $-n^{2+\alpha-\alpha/2}$ e quindi il limite è $-\infty$.

Esercizio 3 (i) Si ha

$$f(x)=\begin{cases} e^{100x}\left(\dfrac{x^2}{100}-1\right) & \text{se } |x|>10,\\ e^{100x}\left(1-\dfrac{x^2}{100}\right) & \text{se } x\in[-10,10]. \end{cases}$$

La funzione è sempre non negativa ed è nulla per $x=\pm10$: tali punti sono quindi punti di minimo assoluto, quindi anche relativo.
Cerchiamo i punti di massimo relativo. In $[-10,10]$ si ha

$$f'(x)=e^{100x}\left(100-x^2-\frac{x}{50}\right);$$

quindi in tale intervallo si ha $f'(x)\geq 0$ se e solo se

$$-x^2-\frac{x}{50}+100\geq 0$$

cioè se e solo se

$$\frac{-1-\sqrt{1000001}}{100}\leq x\leq\frac{-1+\sqrt{1000001}}{100}.$$

Poiché

$$\frac{-1-\sqrt{1000001}}{100}<-\frac{\sqrt{1000000}}{100}=-10,$$

$$0<\frac{-1+\sqrt{1000001}}{100}=\frac{1000000}{100(1+\sqrt{1000001})}<\frac{1000000}{100\cdot1000}=10,$$

la funzione ha un massimo relativo in $x_1=\frac{-1+\sqrt{1000001}}{100}$.
In $[10,\infty[\cup]-\infty,-10]$ si ha

$$f'(x)=e^{100x}\left(x^2-100+\frac{x}{50}\right);$$

quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se

$$x \leq \frac{-1-\sqrt{1000001}}{100} \quad \text{oppure} \quad x \geq \frac{-1+\sqrt{1000001}}{100};$$

essendo, come sappiamo,

$$\frac{-1-\sqrt{1000001}}{100} < -10, \quad 0 < \frac{-1+\sqrt{1000001}}{100} < 10,$$

il punto $x_2 = \frac{-1-\sqrt{1000001}}{100}$ è di massimo relativo.

(ii)-(iii) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim x \to +\infty f(x) = +\infty,$$

e quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Per $x \to \infty$ si ha anche

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

e quindi non ci sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$.

Esercizio 4 Calcoliamo l'integrale: con la sostituzione $t = \sqrt{x-1}$ si ha $x = 1 + t^2$, $dx = 2t\,dt$ e quindi

$$\begin{aligned}
\int_5^{10} \frac{1}{x-2\sqrt{x-1}}\,dx &= \int_2^3 \frac{2t}{1+t^2-2t}\,dt = \int_2^3 \frac{2t}{(t-1)^2}\,dt = \\
&= \int_2^3 \frac{2t-2}{(t-1)^2}\,dt + \int_2^3 \frac{2}{(t-1)^2}\,dt = \\
&= \left[2\ln(t-1) - \frac{2}{t-1}\right]_2^3 = 2\ln 2 - 1 + 2 = \\
&= 4\ln 2 + 1.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 10 febbraio 2004

Esercizio 1 Stabilire per quali numeri $x \in \mathbb{R}$ è verificata la disequazione

$$\log_2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) \geq \log_2(1-x).$$

Esercizio 2 Uno scommettitore espertissimo di calcio gioca al Totogol, vincendo ogni settimana un premio pari a un multiplo λ della puntata ($\lambda > 1$). Si suppone che il giocatore alla prima giornata punti 100 euro, e che poi settimanalmente punti l'intero guadagno netto della settimana precedente.

(i) Se a_n è la quantità di denaro vinta dallo scommettitore dopo n settimane, si fornisca una espressione esplicita di a_n.

(ii) Se $\lambda = 3$, si dica dopo quante settimane il giocatore diventa milionario.

Esercizio 3 Determinare due numeri reali α e β tali che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0 \\ 4xe^{-\frac{2}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 4 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) + 8y'(x) - 20y(x) = x^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Anzitutto, affinché la disequazione abbia senso, occorre imporre le condizioni

$$\text{(a) } x^2 - \frac{5}{2}x + 1 > 0, \qquad \text{(b) } 1 - x > 0,$$

il che fornisce le limitazioni

$$\text{(a) } x < \frac{1}{2} \ \text{ oppure } \ x > 2, \qquad \text{(b) } x < 1.$$

Se ne deduce che le soluzioni della disequazione vanno ricercate nella semiretta $x < \frac{1}{2}$. Trasformiamo la disequazione passando all'esponenziale di base 2: si trova la relazione equivalente

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \geq 1 - x,$$

ovvero

$$x^2 - \frac{3}{2}x \geq 0,$$

le cui soluzioni sono tutti i numeri reali x tali che

$$x \geq \frac{3}{2} \ \text{ oppure } \ x \leq 0.$$

Ma dovendo essere $x < \frac{1}{2}$ si conclude che la disequazione originale è risolta da tutti i numeri reali x tali che $x \leq 0$.

Esercizio 2 (i) La prima settimana il giocatore vince 100λ e dunque il suo guadagno netto è $100(\lambda-1)$; la seconda settimana, egli punterà $\lambda\cdot 100(\lambda-1)$, guadagnando quindi $100(\lambda-1)^2$. La terza settimana punterà $\lambda\cdot 100(\lambda-1)^2$ e vincerà $100(\lambda-1)^3$. Una facile induzione mostra allora che il guadagno netto della n-sima settimana sarà $100(\lambda-1)^n$. Il denaro vinto dallo scommettitore in n settimane sarà pertanto

$$a_n = \sum_{h=1}^{n} 100(\lambda-1)^h = 100(\lambda-1)\frac{(\lambda-1)^n - 1}{(\lambda-1)-1} = \frac{100(\lambda-1)[(\lambda-1)^n-1]}{\lambda-2}.$$

(ii) Se $\lambda = 3$, lo scommettitore diventerà milionario nella settimana in cui $a_n \geq 1000000$, ossia quando

$$2\cdot 100(2^n - 1) \geq 1000000;$$

ciò equivale a

$$2^n \geq 5001,$$

ed essendo $2^{12} = 4096$, $2^{13} = 8192$, il nostro eroe sarà milionario alla tredicesima settimana.

Esercizio 3 La funzione f è sicuramente continua e derivabile in tutti i punti $x \neq 0$, con

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + \alpha & \text{se } x < 0 \\ \left(4 + \frac{8}{x}\right) e^{-\frac{2}{x}} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Per avere la continuità in $x = 0$ occorre che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

Essendo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \beta, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,$$

dobbiamo scegliere $\beta = 0$.
Essendo inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} (x+\alpha) = \alpha, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} 4e^{-\frac{2}{x}} = 0,$$

dobbiamo scegliere $\alpha = 0$. Si noti che con queste scelte la derivata $f'(x)$ non solo esiste in ogni punto, ma è a sua volta una funzione continua su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4 Risolviamo dapprima l'equazione omogenea

$$y''(x) + 8y'(x) - 20y(x) = 0 :$$

cercando soluzioni del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$, si arriva all'equazione algebrica

$$\lambda^2 + 8\lambda - 20 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda = 2, \qquad \lambda = -10.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-10x},$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Cerchiamo adesso una soluzione dell'equazione non omogenea: poiché il secondo membro è un monomio di secondo grado, cerchiamo una soluzione della forma $y(x) = ax^2 + bx + c$: si ha allora $y'(x) = 2ax + b$, $y''(x) = 2a$ e dunque tale funzione sarà soluzione se e solo se

$$\begin{aligned} x^2 &= y''(x) + 8y'(x) - 20y(x) = 2a + 8(2ax + b) - 20(ax^2 + bx + c) = \\ &= -20ax^2 + (16a - 20b)x + 2a + 8b - 20c. \end{aligned}$$

Ciò è vero se e solo se

$$\begin{cases} -20a = 1 \\ 16a - 20b = 0 \\ 2a + 8b - 20c = 0, \end{cases}$$

ossia se e solo se $a = -\frac{1}{20}$, $b = -\frac{1}{25}$, $c = -\frac{21}{1000}$.
In definitiva, le soluzioni dell'equazione differenziale data sono le funzioni

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-10x} - \frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{25}x - \frac{21}{1000}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Prova scritta dell'8 giugno 2004

Esercizio 1 Si consideri la successione $\{a_n\}$ definita da

$$a_n = \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Si provi che:

(i) $\{a_n\}$ è decrescente e infinitesima;

(ii) $\{e^{n^2} a_n\}$ è limitata, anzi infinitesima;

(iii) esiste finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x^2} dx.$$

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x) = \sqrt[4]{1 + x^4}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Si verifichi che f è pari e derivabile (almeno) due volte;

(ii) Si provi che f è convessa.

(iii) Si calcoli il minimo assoluto di f.

(iv) Si determinino, se esistono, gli asintoti di f per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 3 Si calcoli l'integrale

$$\int_0^1 x^2 \arctan x \, dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Poiché l'integrando e^{-x^2} è decrescente nella semiretta $x > 0$, si ha

$$a_{n+1} = \int_{n+1}^{n+2} e^{-x^2} dx \leq \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre

$$0 \leq a_n = \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx \leq \int_n^{n+1} e^{-n^2} dx = e^{-n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui, per confronto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(ii) La relazione precedente implica

$$0 \leq e^{n^2} a_n \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi $\{e^{n^2}a_n\}$ è limitata. Ma si ha anche

$$0 \le a_n = \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx \le \int_n^{n+1} e^{-nx} dx = \frac{1}{n}\left(e^{-n^2} - e^{-(n+1)^2}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui

$$0 \le e^{n^2} a_n \le \frac{1}{n}\left(1 - e^{n^2-(n+1)^2}\right) \le \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} e^{n^2} a_n = 0.$$

(iii) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,.$$

La serie all'ultimo membro, essendo a termini positivi, converge o diverge a $+\infty$. Ma essendo $a_k \le e^{-k^2}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \le \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2} \le \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{1-e^{-1}} < \infty.$$

Dunque il limite proposto esiste finito.

Esercizio 2 (i) Il fatto che f sia una funzione pari, ossia che $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è immediato:

$$f(-x) = \sqrt[4]{1+(-x)^4} = \sqrt[4]{1+x^4} = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poi, f è derivabile infinite volte perché è il risultato della composizione di due funzioni di classe C^∞: la funzione $t \mapsto \sqrt[4]{1+t}$, ristretta alla semiretta $t \ge 0$, e il monomio $x \mapsto x^4$, che è a valori in tale semiretta.

(ii) Per provare che f è convessa è sufficiente far vedere che la sua derivata seconda è sempre positiva. E infatti si verifica che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$f'(x) = \frac{1}{4}(1+x^4)^{-3/4} \cdot 4x^3 = \frac{x^3}{(1+x^4)^{3/4}}\,,$$

$$f''(x) = 3x^2 \frac{1}{(1+x^4)^{3/4}} - \frac{3x^2}{4} x^3 \frac{1}{(1+x^4)^{7/4}} \cdot 4x^3 = \frac{3}{(1+x^4)^{7/4}} \ge 0.$$

(iii) La derivata $f'(x)$ è nulla se e solo se $x = 0$. Questo è certamente un punto di minimo (perché f, essendo convessa, non può avere massimi relativi), e quindi è punto di minimo assoluto. Si ha pertanto

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 1.$$

(iv) Poiché

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}} = 1,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[4]{1+x^4} - \sqrt[4]{x^4}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^4} - \sqrt{x^4}}{\sqrt[4]{1+x^4} + \sqrt[4]{x^4}} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^4-x^4}{(\sqrt{1+x^4} + \sqrt{x^4})(\sqrt[4]{1+x^4} + \sqrt[4]{x^4})} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+x^4} + x^2)(\sqrt[4]{1+x^4} + x)} = 0,
\end{aligned}$$

si ottiene che f ha per $x \to +\infty$ l'asintoto obliquo $y = x$.
Analogamente, in virtù della parità di f,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty} f(t) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = -1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) = \lim_{t\to\infty} (f(t) - t) = 0,$$

cosicché f ha anche, per $x \to -\infty$, l'asintoto $y = -x$.

Esercizio 3 Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \arctan x \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} \arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3+x-x}{1+x^2} dx = \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 x\,dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{\ln 2}{6}\,.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 20 gennaio 2005

Esercizio 1 Determinare, se esiste, una ellisse simmetrica rispetto ai due assi coordinati, che sia tangente alle due rette di equazioni $y = 1 - x$ e $y = 3x + 2$.

Esercizio 2 Stabilire, al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$, il comportamento per $n \to +\infty$ della successione

$$a_n = \frac{x^n \cdot \sqrt{1+n^4}}{n^2 - n + 1}\,.$$

Esercizio 3 Descrivere qualitativamente il grafico della funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2} - e^{-|x|}\right), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Esercizio 4 Calcolare gli integrali

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x \; dx, \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\arccos x)^2 \; dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La generica ellisse simmetrica rispetto agli assi coordinati ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La condizione che garantisce che la retta $y = 1 - x$ sia tangente all'ellisse è che il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

abbia una sola soluzione; ciò a sua volta equivale a richiedere che, una volta sostituita $y = 1 - x$ nell'equazione dell'ellisse, l'equazione nella sola x risultante, ossia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(1-x)^2}{b^2} = 1,$$

abbia discriminante nullo. Sviluppando i calcoli si trova l'equazione

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) x^2 - \frac{2}{b^2} x + \left(\frac{1}{b^2} - 1\right) = 0$$

il cui discriminante è

$$\Delta = \frac{4}{b^4} - 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - 1\right) = 4\left(-\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Dunque $\Delta = 0$ se e solo se

$$\frac{1}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

ossia $a^2 + b^2 = 1$.
In maniera esattamente analoga, la condizione che garantisce che la retta $y = 3x + 2$ sia tangente all'ellisse equivale a richiedere, dopo gli stessi calcoli, che $9a^2 + b^2 = 4$. Risolvendo il sistema di due equazioni in a^2 e b^2 si ottengono i valori

$$a^2 = \frac{3}{8}, \qquad b^2 = \frac{5}{8},$$

cosicché l'ellisse cercata è

$$\frac{8x^2}{3} + \frac{8y^2}{5} = 1.$$

Esercizio 2 Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+n^4}}{n^2 - n + 1} = 1,$$

il limite della successione a_n coincide con il limite della successione x^n, quando quest'ultimo esiste. Se ne conclude che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } |x| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

Esercizio 2 La funzione f è pari, ma non è a priori chiaro in quali punti di $\mathbb{R}$ sia definita. Occorre che

$$\frac{1}{x^2} - e^{-|x|} > 0,$$

ovvero $x^2 e^{-|x|} < 1$. Dato che la funzione $t^2 e^{-t}$, sulla semiretta $[0, +\infty[$, ha massimo nel punto $x = 2$ con massimo uguale a $4e^{-2} < 1$, si deduce che f è definita per ogni $x \neq 0$.
Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.$$

Possiamo limitarci all'analisi del grafico sulla semiretta $x > 0$: grazie alla parità di f, il grafico sarà simmetrico rispetto all'asse y.
Poiché
$$f'(x) = \frac{d}{dx} \ln\left(\frac{1}{x^2} - e^{-x}\right) = \frac{-\frac{2}{x^3} + e^{-x}}{\frac{1}{x^2} - e^{-x}},$$
risulterà $f'(x) \geq 0$ se e solo se $-\frac{2}{x^3} + e^{-x} \geq 0$, ovvero $x^3 e^{-x} \geq 2$. Il massimo di $x^3 e^{-x}$ si ha nel punto $x = 3$ e vale $\left(\frac{3}{e}\right)^3$, numero che è minore di 2: ne segue che $f'(x) < 0$ per ogni $x > 0$ e quindi f è decrescente in $]0, \infty[$ e, simmetricamente, è crescente in $] - \infty, 0[$.
Si tralascia lo studio della derivata seconda perché troppo intricato.

Esercizio 3 Integrando per parti si verifica che una primitiva di $\arcsin x$ è
$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2};$$
dunque
$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x \, dx &= \left[x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1).
\end{aligned}$$
Similmente, integrando due volte per parti si trova che una primitiva di $(\arccos x)^2$ è
$$x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1 - x^2} \arccos x - 2x;$$
pertanto
$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\arccos x)^2 \, dx = \left[x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1 - x^2} \arccos x - 2x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3}^2 \cdot \frac{1}{2} = \\
&= -\frac{\pi^2}{18}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - 1\right) + \pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\right) - (\sqrt{3} - 1).
\end{aligned}$$

Prova scritta del 7 febbraio 2005

Esercizio 1 Determinare il luogo dei punti del piano che sono equidistanti dalle due rette di equazioni

$$y - \sqrt{3}\,x - 1 = 0, \qquad \sqrt{3}\,y - x + 4 = 0.$$

Esercizio 2 Trovare le radici terze del numero complesso $8i$.

Esercizio 3 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-4x} - \sqrt[4]{1-3x}}{\sqrt[3]{1+4x} - \sqrt[4]{1+3x}}\,.$$

Esercizio 4 Tracciare approssimativamente il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x3^{-x}}{3 + x3^{-x}}$$

trascurando l'analisi della derivata seconda.

Risoluzione

Esercizio 1 Il luogo cercato è costituito da due rette, e precisamente dalle bisettrici dei settori individuati dalle rette date. Per determinarne le equazioni, conviene esprimere le rette date in forma parametrica. É facile verificare che il punto di intersezione fra le due rette date è

$$A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2, -\frac{1}{2} - 2\sqrt{3} \right),$$

mentre le direzioni sono date da vettori ortogonali rispettivamente ai vettori $(-\sqrt{3}, 1)$ e $(-1, \sqrt{3})$, ossia, ad esempio, dai vettori $(1, \sqrt{3})$ e $(\sqrt{3}, 1)$. Pertanto si ha

$$y - \sqrt{3}x - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A + \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\sqrt{3}y - x + 4 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Avendo scelto come direzioni delle rette date due vettori di pari lunghezza, le direzioni delle due bisettrici cercate sono date dalla somma e dalla differenza dei vettori che determinano le direzioni delle rette date. Dunque le equazioni parametriche delle due bisettrici sono

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A + \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R},$$

o anche, più semplicemente,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Le equazioni cartesiane di tali rette sono

$$y - x = -\frac{3}{2}(\sqrt{3}-1), \qquad y + x = -\frac{5}{2}(\sqrt{3}+1).$$

Esercizio 2 Il numero $8i$ ha modulo pari a 8 e argomento pari a $\pi/2$. Quindi le tre radici terze di $8i$ sono date dalla formula

$$\sqrt[3]{8}(\cos(\pi/6 + 2k\pi/3) + i\sin(\pi/6 + 2k\pi/3)), \quad k = 0, 1, 2,$$

ovvero

$$2(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6), \quad 2(\cos 5\pi/6 + i\sin 5\pi/6), \quad 2(\cos 3\pi/2 + i\sin 3\pi/2);$$

pertanto le tre radici sono

$$\sqrt{3} + i, \qquad -\sqrt{3} + i, \qquad -2i.$$

Esercizio 3 Lo sviluppo di Taylor della funzione $(1+t)^\alpha$ è

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \mathrm{o}(t), \qquad \text{ove } \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{o}(t)}{t} = 0.$$

Quindi si ha, per $x \to 0$,

$$\frac{\sqrt[3]{1-4x}-\sqrt[4]{1-3x}}{\sqrt[3]{1+4x}-\sqrt[4]{1+3x}} = \frac{1-\frac{4}{3}t-1+\frac{3}{4}t+\mathrm{o}(x)}{1+\frac{4}{3}t-1-\frac{3}{4}+\mathrm{o}(x)}\,,$$

da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-4x}-\sqrt[4]{1-3x}}{\sqrt[3]{1+4x}-\sqrt[4]{1+3x}} = \frac{-\frac{4}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}} = -1.$$

Esercizio 4 La funzione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. La retta $x=-1$ è un asintoto verticale e si ha

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty.$$

Vi sono poi due asintoti orizzontali a $\pm\infty$, essendo

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

La derivata prima di f è data da

$$f'(x) = \frac{3^{-x}(1-x\ln 3)(3+x3^{-x})-x3^{-x}3^{-x}(1-x\ln 3)}{(3+x3^{-x})^2}\,,$$

quindi

$$f'(x)\geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1-x\ln 3\geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x\geq \frac{1}{\ln 3}\,.$$

Dunque f cresce su $]-\infty,-1[$ da 1 a $+\infty$, e su $]-1,\frac{1}{\ln 3}]$ da $-\infty$ al massimo relativo $f(\frac{1}{\ln 3}) = \frac{e^{-1}}{3\ln 3+e^{-1}}$, per poi decrescere in $[\frac{1}{\ln 3},+\infty[$ da tale valore fino a 0.

Prova scritta dell'8 giugno 2005

Esercizio 1 Determinare i vertici A, B, C, D del parallelogramma $ABCD$ circoscritto all'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,$$

ed avente i lati AB, CD paralleli all'asse X e i lati BC, AD paralleli alla retta di equazione $y=x$.

Esercizio 2 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{2x^2})\cdot \sin\frac{1}{x}}{x+\ln x}\,.$$

Esercizio 3 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1+x-x^2}{1=x^2}\,.$$

(i) Si tracci un grafico approssimativo di f, determinando in particolare gli eventuali asintoti e i punti di massimo e minimo relativo;

(ii) si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 É chiaro che i lati AB e CD appartengono rispettivamente alla retta $y = 3$ e alla retta $y = -3$. La generica retta tangente all'ellisse in un suo punto (x_0, y_0) ha equazione

$$\frac{2x_0}{4}(x-x_0) + \frac{2y_0}{9}(y-y_0) = 0,$$

ossia

$$y = -\frac{9x_0}{4y_0}(x-x_0) + y_0\,;$$

affinché questa retta sia parallela alla retta $y = x$, deve essere

$$-\frac{9x_0}{4y_0} = 1.$$

Inoltre si ha la condizione che esprime l'appartenenza di (x_0, y_0) all'ellisse:

$$\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{9} = 1.$$

Mettendo a sistema queste due equazioni otteniamo facilmente i due punti di tangenza:

$$(x_0, y_0) = \pm\left(\frac{4}{\sqrt{13}}\,, -\frac{9}{\sqrt{13}}\right),$$

e le rette tangenti all'ellisse in tali punti sono rispettivamente

$$y = x - \sqrt{13}, \qquad y = x + \sqrt{13}.$$

I vertici del parallelogrammo sono i punti di intersezione delle varie rette, prese a due a due. In particolare: A è l'intersezione fra $y = x + \sqrt{13}$ e $y = 3$, ed ha coordinate $(3 - \sqrt{13}, 3)$; B è l'intersezione fra $y = 3$ e $y = x - \sqrt{13}$, ed ha coordinate $(3 + \sqrt{13}, 3)$; C è l'intersezione fra $y = x - \sqrt{13}$ e $y = -3$, ed ha coordinate $(-3 + \sqrt{13}, -3)$; infine D è l'intersezione fra $y = -3$ e $y = x + \sqrt{13}$, ed ha coordinate $(-3 - \sqrt{13}, -3)$.

Esercizio 2 Si può scrivere

$$\frac{\ln(1 + e^{2x^2}) \sin \frac{1}{2x}}{x + \ln x} = \frac{(2x^2 + \ln(e^{-2x^2} + 1)) \sin \frac{1}{2x}}{x + \ln x},$$

e poiché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}} = 1,$$

otteniamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(2x^2 + \ln(e^{-2x^2} + 1)) \sin \frac{1}{2x}}{x + \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 \cdot \frac{1}{2x}}{x} = 1.$$

Esercizio 3 (i) La funzione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -1,$$

la retta $y = -1$ è un asintoto orizzontale di f sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$.
La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{(1 - 2x)(1 + x^2) - (1 + x - x^2)2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - 4x - x^2}{(1 + x^2)^2},$$

e si ha

$$f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 4x - 1 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 - \sqrt{5} \leq x \leq -2 + \sqrt{5}.$$

Dunque $-2 - \sqrt{5}$ è un punto di minimo relativo per f, con minimo relativo pari a $f(-2 - \sqrt{5}) = -\frac{10 + 5\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}}$, mentre $-2 + \sqrt{5}$ è un punto di massimo relativo per f, con massimo relativo uguale a $f(-2+\sqrt{5}) = -\frac{10-5\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}}$. Ma poiché f tende a -1 per $x \to \pm\infty$, tali punti sono anche di minimo assoluto e di massimo assoluto rispettivamente. In definitiva, f decresce da -1 a $-\frac{10+5\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}$ nella semiretta sinistra $]-\infty, -2-\sqrt{5}]$, cresce da $-\frac{10+5\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}$ a $-\frac{10-5\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}}$ nell'intervallo $[-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}]$, e infine decresce da $-\frac{10-5\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}}$ a -1 nella semiretta destra $[-2+\sqrt{5}, \infty[$.

(ii) Si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+x-x^2}{1+x^2}\,dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2-(1+x^2)+x}{1+x^2}\,dx = \\
&= \left[2\arctan x - x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{\sqrt{3}} = \\
&= \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} + \ln 2.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 7 luglio 2005

Esercizio 1 Calcolare le radici terze del numero complesso $-i$.

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x+4}{x^2-4}},$$

se ne tracci un grafico approssimativo, determinando in particolare gli eventuali asintoti di f e i punti di massimo e minimo relativo (tralasciando lo studio della concavità e convessità).

Esercizio 3 Fra tutte le primitive $G(x)$ della funzione

$$g(x) = \frac{1}{x^3}\,e^{\frac{1}{x}}, \qquad x > 0,$$

si determini, se esiste, quella tale che

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Stiamo cercando i numeri complessi z tali che $z^3 = -i$. Scrivendo $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, cosicché $z^3 = r^3\cos 3\vartheta + i\sin 3\vartheta$, ed utilizzando il fatto che $-i = cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$, si esprime la condizione $Z^3 = -i$

nel modo seguente:

$$\begin{cases} r^3 = 1 & \text{(i moduli sono uguali)}, \\ 3\vartheta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) & \text{(gli argomenti sono uguali)}. \end{cases}$$

Se ne deduce

$$r = 1, \qquad \vartheta = \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi, \ \ k = 0, 1, 2.$$

Si hanno così le tre radici seguenti:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$z_2 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$
$$z_3 = \cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Esercizio 2 La funzione f è definita in $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ ed è sempre positiva. In tali punti risulta

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -2^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty,$$

mentre all'infinito si ha

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1^-, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1^+.$$

Vi sono dunque due asintoti verticali per $x \to -2$ e per $x \to 2$, e un asintoto orizzontale, di equazione $y = 1$, sia per $x \to \infty$ che per $x \to -\infty$. Non ci sono pertanto asintoti obliqui.
Cerchiamo i punti di massimo e minimo relativo. Si ha

$$f'(x) = e^{\frac{x+4}{x^2-4}} \cdot \frac{x^2 - 4 - 2x(x+4)}{(x^2-4)^2} = e^{\frac{x+4}{x^2-4}} \cdot \frac{-x^2 - 8x - 4}{(x^2-4)^2},$$

quindi

$$f'(x) \geq 0 \quad \iff \quad x^2 + 8x + 4 \leq 0 \quad \iff \quad -4 - \sqrt{14} \leq x \leq -4 + \sqrt{14}.$$

Dunque f è decrescente per $x \leq -4 - \sqrt{14}$, è crescente per $-4 - \sqrt{14} \leq x < -2$ e per $-2 < x \leq -4 + \sqrt{14}$, è decrescente per $-4 + \sqrt{14} \leq x < 2$ e per

$x > 2$. In particolare, $-4-\sqrt{14}$ è punto di minimo relativo per f e $-4+\sqrt{14}$ è punto di massimo relativo per f, con

$$f(-4-\sqrt{14}) = e^{\frac{-\sqrt{14}}{26+8\sqrt{14}}}, \qquad f(-4+\sqrt{14}) = e^{\frac{\sqrt{14}}{26-8\sqrt{14}}}.$$

Esercizio 3 Fissato $a > 0$, per ogni $x > 0$ si ha, con la sostituzione $\frac{1}{t} = s$,

$$\int_a^x \frac{1}{t^3} e^{\frac{1}{t}}\, dt = -\int_{1/a}^{1/x} t\, e^t\, dt = [(1-t)e^t]_{1/a}^{1/x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} + c,$$

ove c è una costante dipendente da a; si ottiene pertanto che le primitive di g sono date da

$$G(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Se vogliamo che $G(x) \to 0$ per $x \to \infty$, dobbiamo imporre che

$$0 = \lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} + c = 1 + c,$$

per cui la scelta giusta è $c = -1$, ossia

$$G(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} - 1.$$