Elementi di analisi matematica

Prove in itinere dal 2006

Prova in itinere del 21 dicembre 2006

Esercizio 1 Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \cdot \ln(1 + \sin 2x) - \sin x \cdot \ln(1 + 2x)}{x^2 \, \sin x^2}.$$

Esercizio 2 Si descrivano le principali proprietà della funzione

$$f(x) = \ln(3^{2x} - 3^x + 1),$$

tracciandone un grafico qualitativo.
Esercizio 3 Si calcoli, se esiste,

$$\int_1^2 (x - 3) \arctan(x - 1) \, dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Il limite proposto è

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \ln(1 + \sin 2x) - \sin x \cdot \ln(1 + 2x)}{x^2 \sin x^2}.$$

Esso si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per risolvere l'indeterminazione utilizziamo la formula di Taylor, con punto iniziale $x_0 = 0$. Osserviamo anzitutto che il denominatore si comporta come x^4 per $x \to 0$, in quanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1.$$

Dunque il limite proposto equivale a

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \ln(1 + \sin 2x) - \sin x \cdot \ln(1 + 2x)}{x^4}.$$

Valutiamo ora il comportamento per $x \to 0$ del numeratore. Si ha per $y \to 0$

$$\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + o(y^3),$$

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3).$$

Sostituendo nelle due relazioni $y = ax$ otteniamo per $x \to 0$

$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}\,x^3 + o(x^3),$$

$$\sin 2x = 2x - \frac{4}{3}\,x^3 + o(x^3).$$

Sostituendo invece $y = \sin 2x$ nello sviluppo del logaritmo, abbiamo per $x \to 0$

$$\ln(1+\sin 2x) = \sin 2x - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2 + \frac{1}{3}(\sin 2x)^3 + o((\sin 2x)^3),$$

mentre rimpiazzando al posto di $\sin 2x$ il suo sviluppo già calcolato, otteniamo per $x \to 0$

$$\begin{aligned} \ln(1+\sin 2x) &= 2x - \frac{4}{3}\,x^3 + o(x^3) - \frac{1}{2}\left[2x - \frac{4}{3}\,x^3 + o(x^3)\right]^2 + \\ &+ \frac{1}{3}\left[2x - \frac{4}{3}\,x^3 + o(x^3)\right]^3 + o\left(\left[2x - \frac{4}{3}\,x^3 + o(x^3)\right]^3\right). \end{aligned}$$

Notiamo che per $x \to 0$ risulta

$$\left[2x - \frac{4}{3}\,x^3 + o(x^3)\right]^2 = 4x^2 - \frac{16}{3}\,x^4 + o(x^4),$$

$$\left[2x - \frac{4}{3}\,x^3 + o(x^3)\right]^3 = 8x^3 + o(x^4),$$

ed anche

$$o\left(\left[2x - \frac{4}{3}\,x^3 + o(x^3)\right]^3\right) = o(x^3).$$

Sostituendo nello sviluppo di $\ln(1+\sin 2x)$ si ottiene allora, per $x \to 0$,

$$\ln(1+\sin 2x) = 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}\,x^3 + o(x^3).$$

Possiamo scrivere infine

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \ln(1+2x) &= \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right]\left[2x - 2x^2 + \frac{8}{3}\,x^3 + o(x^3)\right] = \\ &= 2x^2 - 2x^3 + \frac{7}{3}\,x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Siamo ora in grado di concludere: utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi si ha

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \ln(1+\sin 2x) - \sin x \cdot \ln(1+2x)}{x^4} = \\ &\quad = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 2x^3 + \frac{4}{3}\,x^4 - 2x^2 + 2x^3 - \frac{7}{3}\,x^4 + o(x^4)}{x^4} = \\ &\quad = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4 + o(x^4)}{x^4} = -1.\end{aligned}$$

Esercizio 2 La funzione da analizzare è

$$f(x) = \ln\left(3^{2x} - 3^x + 1\right).$$

Essa è definita su tutto $\mathbb{R}$. Infatti l'insieme di definizione è dato dall'insieme dove è positivo l'argomento del logaritmo: la disuguaglianza

$$3^{2x} - 3^x + 1 > 0$$

equivale, posto $y = 3^x$, a

$$y^2 - y + 1 > 0,$$

la quale è verificata per ogni $y \in \mathbb{R}$, essendo il discriminante uguale a -3. Quindi

$$3^{2x} - 3^x + 1 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Analizziamo il segno della funzione e le eventuali intersezioni del suo grafico con l'asse delle x. Si ha

$$\begin{aligned}&\ln(3^{2x} - 3^x + 1) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3^{2x} - 3^x + 1 \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \\ &\quad \Longleftrightarrow \quad 3^x(3^x - 1) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3^x \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 0.\end{aligned}$$

Quindi f si annulla nel solo punto $x = 0$ ed è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$.
Calcoliamo i limiti a $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(3^{2x} - 3^x + 1) = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(3^{2x} - 3^x + 1) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left[3^{2x}(1 - 3^{-x} + 3^{-2x})\right] = +\infty.$$

L'asse x è quindi un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Vediamo se esiste un asintoto obliquo, di equazione $y = mx + q$, per $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[3^{2x}(1 - 3^{-x} + 3^{-2x})\right]}{x} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\ln 3 + \ln(1 - 3^{-x} + 3^{-2x})}{x} = 2\ln 3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2\ln 3 \cdot x) &= \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{3^{2x} - 3^x + 1}{3^{2x}} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \ln(1 - 3^{-x} + 3^{-2x}) = 0.\end{aligned}$$

Ciò prova che la funzione f ha l'asintoto $y = 2\ln 3 \cdot x$ per $x \to +\infty$.
Determiniamo gli intervalli di monotonia della funzione studiando il segno della derivata prima: si ha

$$f'(x) = \frac{(2 \cdot 3^{2x} - 3^x)\ln 3}{3^{2x} - 3^x + 1} \geq 0$$

se e solo se il numeratore della frazione è non negativo. Dunque,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \cdot 3^{2x} - 3^x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq \log_3 \frac{1}{2} = -\frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Quindi $x_0 = -\frac{\ln 2}{\ln 3}$ è l'unico punto di minimo relativo per la funzione f, che decresce in $]-\infty, x_0]$ e cresce in $[x_0, +\infty[$; in particolare, x_0 è punto di minimo assoluto per f, con

$$\min_{\mathbb{R}} f = f(x_0) = \ln \frac{3}{4}.$$

Determiniamo gli intervalli di convessità e concavità della funzione e gli eventuali punti di flesso, studiando il segno della derivata seconda. Si ha

$$f''(x) = -3^x(\ln 3)^2 \frac{3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1}{(3^{2x} - 3^x + 1)^2},$$

da cui

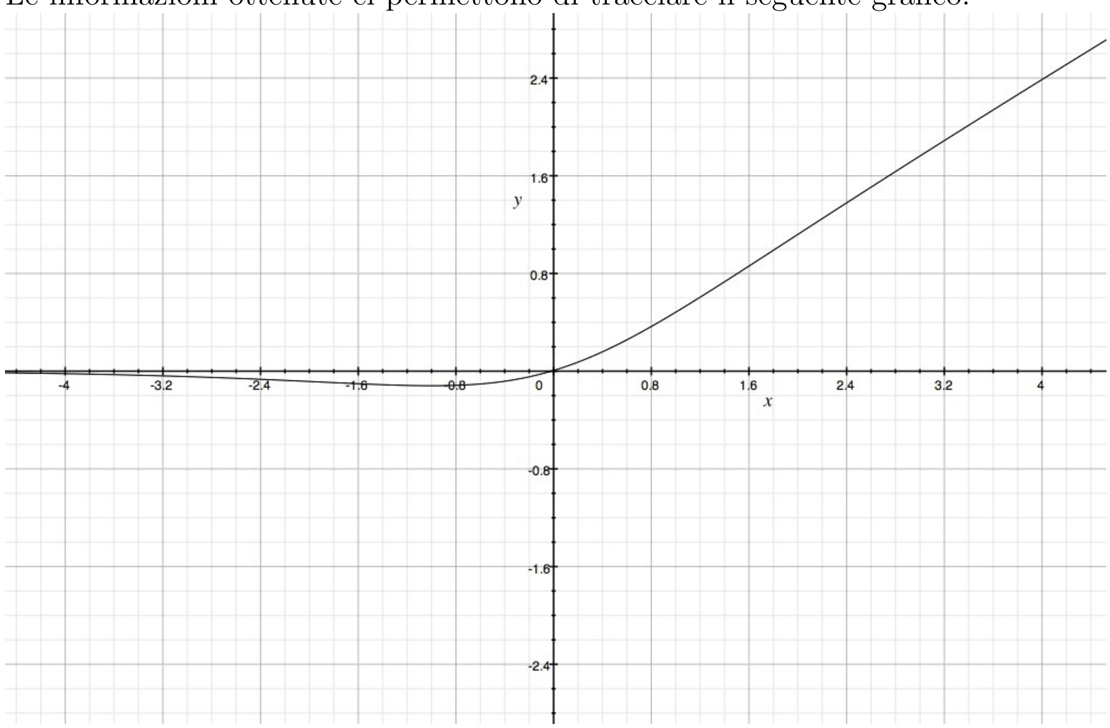
$$\begin{aligned} f''(x) \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 - \sqrt{3} < 3^x < 2 + \sqrt{3} \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \log_3(2 - \sqrt{3}) < x < \log_3(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

La funzione f è dunque convessa in $[\log_3(2-\sqrt{3}), \log_3(2+\sqrt{3})]$ ed è concava nelle due semirette esterne a tale intervallo. Pertanto $x_1 = \log_3(2-\sqrt{3})$ e $x_2 = \log_3(2+\sqrt{3})$ sono punti di flesso. Si ha

$$f(x_1) = \ln(6 - 3\sqrt{3}), \quad f'(x_1) = \ln 3 \cdot \ln \frac{12 - 7\sqrt{3}}{6 - 3\sqrt{3}} < 0,$$

$$f(x_2) = \ln(6 + 3\sqrt{3}), \quad f'(x_2) = \ln 3 \cdot \ln \frac{12 + 7\sqrt{3}}{6 + 3\sqrt{3}} > 0.$$

Le informazioni ottenute ci permettono di tracciare il seguente grafico:



Esercizio 3 Dobbiamo calcolare, se esiste,

$$\int_1^2 (x-3) \cdot \arctan(x-1)\, dx.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti:

$$
\begin{aligned}
&\int_1^2 (x-3)\arctan(x-1)\,dx = \\
&\quad = \int_1^2 (x-1)\arctan(x-1)\,dx - 2\int_1^2 \arctan(x-1)\,dx = \\
&\quad = \left[\frac{1}{2}(x-1)^2\arctan(x-1)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{1+(x-1)^2}\,dx - \\
&\qquad -2\left[(x-1)\arctan(x-1)\right]_1^2 + 2\int_1^2 \frac{x-1}{1+(x-1)^2}\,dx = \\
&\quad = \left[\frac{1}{2}(x-1)^2\arctan(x-1)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \left[1-\frac{1}{1+(x-1)^2}\right]\,dx - \\
&\qquad -2\left[(x-1)\arctan(x-1)\right]_1^2 + \left[\ln(1+(x-1)^2)\right]_1^2 = \\
&\quad = \left[\frac{1}{2}(x-1)^2\arctan(x-1) - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}\arctan(x-1)\, + \right. \\
&\qquad \left. -\, 2(x-1)\arctan(x-1) + \ln(1+(x-1)^2)\right]_1^2 = \\
&\quad = \frac{1}{2}\arctan 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\arctan 1 - 2\arctan 1 + \ln 2 = \\
&\quad = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \ln 2.
\end{aligned}
$$

Prova in itinere del 20 aprile 2007

Esercizio 1 Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^{nx}}{(2n)!}$$

al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$.
Esercizio 2 Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{8} \\ a_{n+1} = 7a_n^2 - 6a_n^3\,, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che la successione è infinitesima.

(ii) Determinare il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Esercizio 3 Sia

$$a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n+5}{n+1}\,.$$

(i) Calcolare

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n\,, \qquad \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n\,, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n\,, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n\,.$$

(ii) Esibire due sottosuccessioni della successione data, convergenti a due limiti differenti.

Risoluzione

Esercizio 1 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)^{nx}}{(2n)!};$$

Essa è a termini positivi. Utilizziamo il criterio del rapporto: si ha

$$\frac{\dfrac{(3(n+1))^{(n+1)x}}{(2(n+1))!}}{\dfrac{(3n)^{nx}}{(2n)!}} = \left(\frac{3n+3}{3n}\right)^{nx} \frac{3^x(n+1)^x}{(2n+2)(2n+2-1)\cdot\ldots\cdot(2n+1)} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} \frac{3^x n^x \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x}{2^2 n^2 \left(1+\dfrac{2}{2n}\right)\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)}\,,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(3(n+1))^{(n+1)x}}{(2(n+1))!}}{\dfrac{(3n)^{nx}}{(2n)!}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 2 \\ \frac{9}{4}\,e^2 & \text{se } x = 2 \\ 0 & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

Dunque si ha convergenza per $x < 2$ e divergenza per $x \geq 2$.

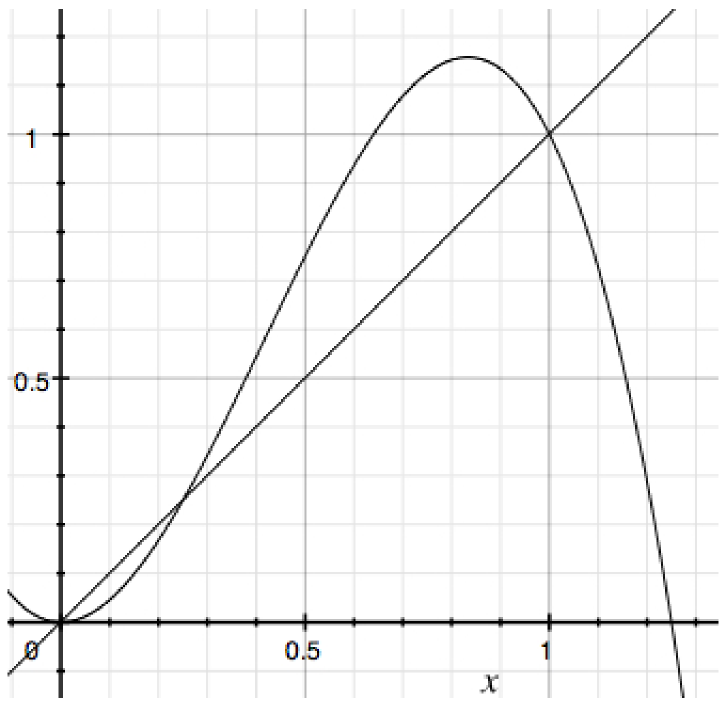
Esercizio 2 **(i)** La successione è della forma

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{8} \\ a_{n+1} = 7a_n^2 - 6a_n^3\,; \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La funzione
$$f(x) = 7x^2 - 6x^3$$
si annulla per $x = 0$ e per $x = \frac{7}{6}$, ed è positiva in $]0, 7/6[$; per valori positivi di x si ha $f(x) = x$ se e solo se $7x - 6x^2 = 1$, ossia, risolvendo l'equazione di secondo grado, se e solo se $x = 1$ oppure $x = \frac{1}{6}$. In particolare

$$f(x) > x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{6} < x < 1,$$

$$0 < f(x) < x \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x < \frac{1}{6} \text{ oppure } 1 < x < \frac{7}{6}.$$



Proviamo per induzione che la successione $\{a_n\}$ è positiva e decrescente. Poiché il dato iniziale è $a_0 = \frac{1}{8} \in]0, 1/6[$, risulta $a_1 = f(a_0) \in]0, a_0[$. Poi, se supponiamo che $a_k \in]0, a_{k-1}[$ per ogni naturale $k \leq n$, allora a maggior ragione si ha $a_n \in]0, 1/6[$, e quindi $0 < f(a_n) < a_n$, ossia $a_{n+1} \in]0, a_n[$. Ciò dimostra la nostra asserzione.
In particolare la successione $\{a_n\}$ converge. Sia L il suo limite: passando al limite nella relazione che definisce a_{n+1}, si trova $L = 7L^2 - 6L^3$, equazione soddisfatta se e solo se $L = 0$ oppure $L = \frac{1}{6}$. Ma, essendo $a_n < a_0 < \frac{1}{6}$, non può che essere $L = 0$.

(ii) Poiché $\{a_n\}$ è positiva, si ha $a_{k+1} < 7a_k^2$ per ogni $k \in \mathbb{N}$; dunque risulta successivamente

$$a_{n+1} < 7a_n^2 < 7^3 a_{n-1}^4 < 7^7 a_{n-2}^8 < \ldots < 7^{2^n-1} a_1^{2^n} < 7^{2^{n+1}-1} a_0^{2^{n+1}},$$

ossia

$$a_n < \frac{1}{7}(7a_0)^{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Essendo $7a_0 < 1$, il criterio del rapporto ci dice immediatamente che la serie $\sum (7a_0)^{2^n}$ è convergente; ne segue, per confronto, che anche la serie $\sum a_n$ è convergente.

Esercizio 3 (i) Si ha

$$a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n+5}{n+1}.$$

La sequenza dei segni è +,−,−,+,+,−,−,+,+,... ; inoltre il rapporto $\frac{n+5}{n+1}$ è decrescente con limite 1. Si ha pertanto

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = a_0 = 5, \qquad \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = a_1 = -3,$$

mentre

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = 1, \qquad \liminf_{n \to \infty} a_n = -1.$$

(ii) Le successioni

$$a_{4n} = \frac{4n+5}{4n+1}, \qquad a_{4n+2} = -\frac{4n+6}{4n+2}$$

convergono rispettivamente a 1 e a −1.

Prova in itinere del 30 maggio 2007

Esercizio 1 Determinare il raggio di convergenza e la somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1-(-2)^n)x^{3n}.$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 + \sqrt[3]{\frac{4}{3}} & \text{se } x > 2 \\ \sqrt[3]{x - \frac{x^3}{12}} & \text{se } -2 \le x \le 2 \\ -(x+2)^2 - \sqrt[3]{\frac{4}{3}} & \text{se } x < -2\,. \end{cases}$$

(i) Determinare l'immagine di f.

(ii) Stabilire in quali punti f^{-1} è continua.

(iii) Trovare i punti nei quali f^{-1} è derivabile.

(iv) **(facoltativo)** Calcolare $f^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$ a meno di $1/20$.

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x,y) = 2x^4 - 2^y x^2 + 2^{4y},$$

determinare i punti stazionari di f e stabilirne la natura.

Risoluzione

Esercizio 1 I coefficienti della serie di potenze sono

$$a_m = \begin{cases} \dfrac{1}{n}(1-(-2)^n) & \text{se } m = 3n \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{se } m \neq 3n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Quindi

$$|a_m| = \begin{cases} \dfrac{2^n - 1}{n} & \text{se } m = 3n \text{ con } n \text{ intero positivo pari} \\ \dfrac{2^n + 1}{n} & \text{se } m = 3n \text{ con } n \text{ intero positivo dispari} \\ 0 & \text{se } m \text{ non è multiplo di 3.} \end{cases}$$

Perciò otteniamo

$$\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[6k+3]{\frac{2^{2k+1}+1}{2k+1}} = \sqrt[3]{2},$$

cosicché il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
Nota. Si potevano prendere altre due strade, forse più semplici: la prima consiste nel porre $y = x^3$ e nello studio della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1-(-2)^n)y^n,$$

per la quale si ottiene il raggio di convergenza $R = \frac{1}{2}$; di conseguenza la serie converge per $|y| < \frac{1}{2}$ e non converge per $|y| > \frac{1}{2}$. Ne segue che la serie originale converge per $|x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ e non converge per $|x| > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$: dunque il raggio di convergenza della serie originale è $R = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
La seconda strada consiste nell'uso diretto del criterio del rapporto: dato che, per $n \to \infty$,

$$\frac{\frac{1}{n+1}|1-(-2)^{n+1}||x|^{3(n+1)}}{\frac{1}{n}|1-(-2)^n||x|^{3n}} = \frac{n}{n+1}\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^n-(-1)^n}|x|^3 \to 2|x|^3,$$

si conclude che la serie converge per $2|x|^3 < 1$ e non converge per $2|x|^3 > 1$, da cui si ottiene nuovamente $R = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
Calcoliamo la somma $f(x)$ della serie. Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1-(-2)^n)x^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2x^3)^n}{n},$$

da cui

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-x^3)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x^3)^n}{n} = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x^3)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x^3)^n}{n} = \\ &= -\ln(1-x^3) + \ln(1+2x^3) = \ln\frac{1+2x^3}{1-x^3}. \end{aligned}$$

La convergenza ha luogo nell'intervallo $]-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}]$. Infatti, la serie assegnata converge nel secondo estremo, essendo la somma di due serie di cui la prima converge assolutamente e la seconda verifica le ipotesi del criterio di Leibniz.
Esercizio 2 Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(x-2)^2 + \sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[-(x+2)^2 - \sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right] = -\infty.$$

Inoltre f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$: l'unica verifica da fare riguarda i punti ± 2, dove si incollano le diverse espressioni di f. Si ha

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left[(x-2)^2 + \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \right] = +\sqrt[3]{\frac{4}{3}},$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt[3]{x - \frac{x^3}{12}} = +\sqrt[3]{\frac{4}{3}},$$

e dunque f è continua in 2; inoltre

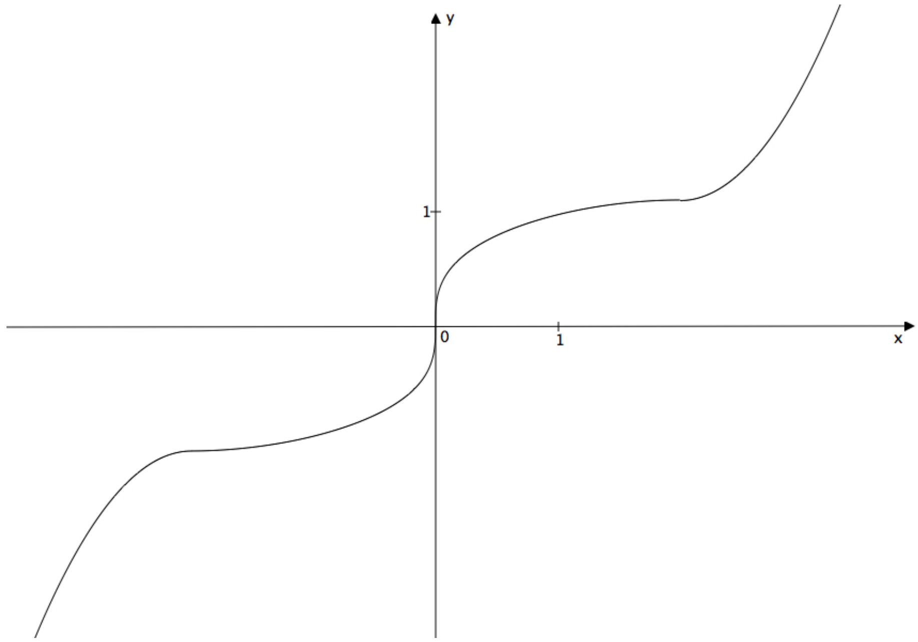
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \sqrt[3]{x - \frac{x^3}{12}} = -\sqrt[3]{\frac{4}{3}},$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \left[-(x+2)^2 - \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \right] = -\sqrt[3]{\frac{4}{3}},$$

e dunque f è continua in -2.
La funzione f, perciò, ha per immagine l'intera retta reale. Ciò risponde alla domanda **(i)**.
Proviamo che f è strettamente crescente: la derivata di f vale

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-2) & \text{se } x > 2 \\[2ex] \dfrac{1 - \frac{x^2}{4}}{3(x - \frac{x^3}{12})^{2/3}} & \text{se } 0 < |x| < 2 \\[2ex] -2(x+2) & \text{se } x < -2, \end{cases}$$

mentre la derivata non esiste nel punto $x = 0$ ove la tangente è verticale e il rapporto incrementale tende a $+\infty$. È facile riconoscere che $f'(x) > 0$ in tutti i punti $x \notin \{\pm 2, 0\}$. Nulla sappiamo ancora sull'esistenza della derivata nei punti ± 2, ma le informazioni ottenute ci bastano per stabilire la stretta crescenza di f.



Di conseguenza, f^{-1} è ben definita, strettamente crescente e continua su tutto $\mathbb{R}$. Ciò risponde alla domanda **(ii)**. Inoltre f^{-1} sarà derivabile in tutti i punti $y \neq f(\pm 2)$, compreso il punto $y = f(0) = 0$: in quest'ultimo punto la derivata è nulla, poiché, per la continuità di f^{-1},

$$\lim_{y \to 0} \frac{f^{-1}(y)}{y} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{f(x)} = 0.$$

In definitiva, f^{-1} è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{\pm \sqrt[3]{4/3}\}$.
Vediamo se esiste la derivata di f nei punti ± 2. Utilizzando il teorema di Lagrange, si ha

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\xi \to 2^+} 2(\xi - 2) = 0,$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\xi \to 2^-} \frac{1 - \frac{\xi^2}{4}}{3(\xi - \frac{\xi^3}{12})^{2/3}} = \lim_{\xi \to 2^-} \frac{\frac{3}{2}(1 - \frac{\xi}{2})}{3\sqrt[3]{4/3}} = 0;$$

quindi $f'(2) = 0$. Analogamente si verifica che

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\xi \to -2^+} \frac{1 - \frac{\xi^2}{4}}{3(\xi - \frac{\xi^3}{12})^{2/3}} = \lim_{\xi \to -2^+} \frac{\frac{3}{2}(\xi + \frac{1}{2})}{3\sqrt[3]{4/3}} = 0,$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{\xi\to -2^-}[-2(\xi+2)]=0;$$

quindi $f'(-2)=0$. Si conclude allora che f^{-1} non è derivabile nei punti $\pm\sqrt[3]{5/3}$, nei quali il rapporto incrementale tende a $+\infty$. Ciò risponde alla domanda **(iii)**.

(iv) L'equazione $x=f^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$ equivale, essendo $-\sqrt[3]{\frac{4}{3}}<\sqrt[3]{\frac{1}{3}}<\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$, a $x^3-12x+4=0$. Posto

$$g(x)=x^3-12x+4=0,$$

si ha

$$g'(x)=3x^2-12,\qquad g''(x)=6x.$$

Andiamo ad applicare il metodo di Newton. Dato che

$$g(0)=4,\qquad g(1)=-7,$$

scegliamo $[a,b]=[0,1]$ e notiamo che in tale intervallo l'equazione $g(x)=0$ ha esattamente una soluzione ξ, dato che g è decrescente. Si ha inoltre

$$g'(x)\le 9,\quad |g''(x)|\le 6\qquad \forall x\in[0,1].$$

Scelto $\delta=1$, e posto $m=9$, $M=6$, per la successione

$$\begin{cases} x_1=0\\ x_{n+1}=x_n-\frac{g(x_n)}{g'(x_n)}\quad \forall n\ge 1\end{cases}$$

valgono le stime

$$x_n\le x_{n+1}\le\xi,\quad \xi-x_n\le\frac{2m}{M}\left[\frac{M(\xi-x_1)}{2m}\right]^{2^{n-1}}\le 3\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}\qquad \forall n\in\mathbb{N}^+.$$

Affinché sia $\xi-x_n<\frac{1}{20}$ basta dunque scegliere $n=3$. Risulta successivamente

$$x_1=0,\quad x_2=\frac{1}{3}\simeq 0.33333333,\quad x_3=\frac{106}{315}\simeq 0.33650794,$$

con

$$0<\xi-x_3<\frac{1}{27}<\frac{1}{20}.$$

Esercizio 3 La funzione f è certamente di classe C^2 (anzi C^∞) su tutto $\mathbb{R}^2$. Cerchiamo i punti stazionari di f. Essendo

$$f(x,y) = 2x^4 - 2^y x^2 + 2^{4y},$$

i punti stazionari sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 8x^3 - 2x \cdot 2^y = 0 \\ f_y(x,y) = -2^y x^2 \ln 2 + 4\, 2^{4y} \ln 2 = 0, \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} 2x(4x^2 - 2^y) = 0 \\ -x^2 + 4\, 2^{3y} = 0. \end{cases}$$

Nella prima equazione non può essere $x = 0$, poiché dalla seconda otterremmo $4\, 2^{3y} = 0$ che è impossibile. Dunque il sistema equivale al seguente:

$$\begin{cases} 4x^2 - 2^y = 0 \\ -x^2 + 4\, 2^{3y} = 0. \end{cases}$$

Facili calcoli mostrano che

$$x^2 = \frac{1}{16}, \qquad 2^y = \frac{1}{4}\,,$$

cosicché i punti stazionari sono $(\frac{1}{4}, -2\log_2 2)$ e $(-\frac{1}{4}, -2\log_2 2)$.
Calcoliamo la matrice Hessiana:

$$\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 2\,2^y & -2x \cdot 2^y \ln a \\ -2x \cdot 2^y \ln 2 & -2^y x^2 (\ln 2)^2 + 16\, 2^{4y} (\ln 2)^2 \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\mathbf{H}_f\left(\frac{1}{4}, -2\log_2 2\right) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{8}\ln 2 \\ -\frac{1}{8}\ln 2 & \frac{3}{64}(\ln 2)^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_f\left(-\frac{1}{4}, -2\log_2 2\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8}\ln 2 \\ \frac{1}{8}\ln a & \frac{3}{64}(\ln 2)^2 \end{pmatrix},$$

risulta in entrambi i casi

$$\det \mathbf{H}_f = \frac{1}{32}(\ln 2)^2 > 0, \qquad \operatorname{tr} \mathbf{H}_f = 1 + \frac{3}{64}(\ln 2)^2 > 0.$$

Ora, in dimensione 2, risulta

$$\det(\mathbf{H}_f - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{H}_f)\lambda + \det\mathbf{H}_f,$$

cosicché

$$\det(\mathbf{H}_f - \lambda\mathbf{I}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \frac{\operatorname{tr}\mathbf{H}_f \pm \sqrt{(\operatorname{tr}\mathbf{H}_f)^2 - 4\det\mathbf{H}_f}}{2}\,;$$

si può concludere perciò che i due autovalori di $\mathbf{H}_f$, nei punti indicati, sono positivi. Pertanto entrambi i punti stazionari sono punti di minimo relativo.

Prova in itinere del 18 dicembre 2008

Esercizio 1 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{7/4} + \log(n^5+1)}{n\,\log n! + \sqrt{1+n^3}}\,.$$

Esercizio 2 Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2n}{3an+7}\right)^n.$$

Esercizio 3 Sia $\sum a_n$ una serie a termini reali.

(i) Supponendo che gli a_n siano tutti non negativi, si provi che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ è convergente} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1+a_n^3) \text{ è convergente.}$$

(ii) Supponendo gli a_n di segno qualunque, si mostri con esempi che entrambe le implicazioni precedenti sono false in generale.

Esercizio 4 Sia data una funzione $f(x)$ definita sull'intervallo $[0,1]$ a valori in $\mathbb{R}$. Supponiamo di sapere che

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1.$$

(i) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 2x\, f(x^2/3)\, dx$.

(ii) Sapendo che $f(1) = 2$ e che $f \in C^1$, calcolare $\displaystyle\int_0^1 3x\, f'(x)\, dx$.

(iii) Sapendo che $f(0) = 0$, che $f(1) = 1$ e che $f \in C^1$, calcolare

$$\int_0^1 \frac{\arctan f(x)}{1 + f(x)^2}\, f'(x)\, dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La frazione è chiaramente non negativa. Sia a numeratore che a denominatore sono presenti dei termini divergenti a $+\infty$ per $n \to +\infty$: dobbiamo identificare quelli che divergono più velocemente. A numeratore, è chiaro che $n^{7/4}$ diverge più rapidamente che $\log(n^5 + 1)$. A denominatore, ricordando la stima del fattoriale

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq n^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

deduciamo che l'andamento di $n \log n!$ è almeno dell'ordine di $n^2(\log n - 1)$ e al più dell'ordine di $n^2 \log n$; quindi $n \log n!$ ha divergenza più rapida rispetto a $\sqrt{1 + n^3}$, il quale si comporta invece come $n^{3/2}$. In conclusione

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^{7/4} + \log(n^5 + 1)}{n\, \log n! + \sqrt{1 + n^3}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{7/4}\left(1 + \frac{1}{n^{7/4}} \log(n^5 + 1)\right)}{n\, \log n! \left(1 + \frac{1}{n \log n!}\sqrt{1 + n^3}\right)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{7/4}}{n\, \log n!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^{7/4}}{n^2(\log n - 1)} = 0. \end{aligned}$$

Esercizio 2 Anzitutto osserviamo che la serie non è definita per i valori di a che annullano il denominatore di *qualunque* termine della serie: quindi escludiamo i valori

$$a = -\frac{7}{3n}, \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

Detto allora A l'insieme $\{-\frac{7}{3n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, e fissato $a \in \mathbb{R} \setminus A$, analizziamo l'assoluta convergenza della serie utilizzando il criterio della radice. Posto $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2n}{3an+7}\right)^n$, si ha

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2n}}} \frac{2n}{|3an + 7|}$$

e quindi
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{3|a|}\,.$$
Se ne deduce che la serie converge assolutamente quando $|a| > \frac{2}{3}$, ossia $a \in \big(]-\infty, -\frac{2}{3}[\setminus A\big) \cup]\frac{2}{3}, +\infty[$, mentre non converge, essendo il termine generale non infinitesimo, per $|a| < \frac{2}{3}$, ossia $a \in]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$. In particolare essa diverge a $+\infty$ se $a \in [0, \frac{2}{3}[$ (perchè in tal caso $a_n > 0$) mentre è indeterminata se $a \in]-\frac{2}{3}, 0[$ (perchè a_n ha segni definitivamente alterni).
Vediamo cosa accade quando $a = \pm\frac{2}{3}$: se $a = \frac{2}{3}$ il termine a_n diventa
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2n}{2n+7}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{7}{2n}\right)^n}$$
e quindi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{7}{2n}\right)^n} = e^{-7/2},$$
da cui deduciamo, in virtù del criterio del confronto asintotico, che la serie diverge. Se invece $a = -\frac{2}{3}$, si ha analogamente
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2n}{-2n+7}\right)^n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{2n}{2n-7}\right)^n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 - \frac{7}{2n}\right)^n}$$
e quindi $|a_n|$ tende a 0 in modo decrescente (dato che $\left(1 - \frac{7}{2n}\right)^n$ converge crescendo a $e^{-7/2}$): dunque, per il criterio di Leibniz, la serie converge.
In conclusione, possiamo dire che la serie converge assolutamente per $a \in \big(]-\infty, -\frac{2}{3}[\setminus A\big) \cup]\frac{2}{3}, +\infty[$, converge (ma non assolutamente) per $a = -\frac{2}{3}$, è indeterminata per $a \in]-\frac{2}{3}, 0[$ e diverge a $+\infty$ per $a \in [0, \frac{2}{3}]$.
Esercizio 3 (i) Supponiamo che la serie $\sum a_n$ sia a termini non negativi e convergente. Allora, in particolare, $\{a_n\}$ è una successione infinitesima, dunque definitivamente minore di 1; ne segue che
$$a_n(1 + a_n^3) < a_n(1 + 1) = 2a_n \qquad \text{definitivamente},$$
da cui, per confronto, $\sum a_n(1 + a_n^3)$ è convergente.
Viceversa, se gli a_n sono non negativi e se $\sum a_n(1 + a_n^3)$ è convergente, allora banalmente
$$a_n \le a_n + a_n^4 = a_n(1 + a_n^3) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui, per confronto, $\sum a_n$ è convergente.
(ii) Posto $a_n = -1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si vede subito che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\sum_{n=0}^{\infty} 1 = -\infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1+a_n^3) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$$

Posto invece $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n+1}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si vede subito che $\sum a_n$ converge a un certo valore $c \in \mathbb{R}$ in virtù del criterio di Leibniz, mentre

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1+a_n^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = c + \infty = +\infty.$$

Esercizio 4 (i) Posto $\frac{x^2}{3} = t$, si ha $dt = \frac{2}{3}x\,dx$, da cui

$$\int_0^{\sqrt{3}} 2x\, f(x^2/3)\,dx = 3\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{3}x\, f(x^2/3)\,dx = 3\int_0^1 f(t)\,dt = 3.$$

(ii) Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 3x\, f'(x)\,dx &= [3x\, f(x)]_0^1 - \int_0^1 3\, f(x)\,dx = \\ &= 3f(1) - 3\int_0^1 f(x)\,dx = 6 - 3 = 3.\end{aligned}$$

(iii) Posto $f(x) = t$, si ha $dt = f'(x)\,dx$ e dunque

$$\int_0^1 \frac{\arctan f(x)}{1+f(x)^2}\, f'(x)\,dx = \int_{f(0)}^{f(1)} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t^2}\,dt;$$

posto adesso $u = \arctan t$, risulta $du = \frac{dt}{1+t^2}$ e quindi

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t^2}\,dt = \int_{\arctan 0}^{\arctan 1} u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32},$$

cosicché, in conclusione,

$$\int_0^1 \frac{\arctan f(x)}{1+f(x)^2}\, f'(x)\,dx = \frac{\pi^2}{32}.$$

Prova in itinere del 21 aprile 2009

Esercizio 1 Si consideri la successione $\{a_n\}$ definita da

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n^2} - 1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si provi che $\{a_n\}$ è monotona e limitata, e se ne calcoli il limite.
Esercizio 2 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sin(x+1)} \cdot \frac{\ln x}{\ln(x+1)}, \qquad (b) \lim_{x \to \pi} \frac{\tan x}{e^x - e^\pi}.$$

Esercizio 3 Si consideri la funzione $f(x) = x^3 + 5x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Dimostrare che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è bigettiva.

(ii) Calcolare il limite

$$\lim_{y \to 2} \frac{f^{-1}(y)}{y - 2}.$$

(iii) (facoltativo) Provare che esiste un'unica coppia di valori $(a, \ell) \in \mathbb{R}^2$, con $\ell \neq 0$, tale che

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{f^{-1}(y)}{y^a} = \ell,$$

e determinarla.

Risoluzione

Esercizio 1 La successione è del tipo

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = f(a_n), \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ove f è la funzione $f(x) = \sqrt{2 + x^2} - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Si vede facilmente che $f(x) = x$ se e solo se $x = 1/2$; dato che, inoltre, $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, i possibili limiti della successione a_n sono $1/2$ e $+\infty$.
Osserviamo però che $f(x) \geq \sqrt{2} - 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per cui la successione a_n è sempre non negativa (anzi, strettamente positiva per $n \geq 1$). Notiamo inoltre che f è strettamente crescente per $x \geq 0$: infatti, da $0 \leq x < x'$

segue $x^2 < (x')^2$ e pertanto $\sqrt{2+x^2}-1 < \sqrt{2+(x')^2}-1$; pertanto, essendo $a_0 = 0 < a_1$, per induzione si ottiene che a_n è strettamente crescente. Infine osserviamo che $a_n < 1/2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: infatti $a_0 = 0 < 1/2$ e, se $a_n < 1/2$, allora $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n^2}-1 < \sqrt{2+1/4}-1 = 1/2$.
In definitiva, a_n è crescente e limitata superiormente da $1/2$, quindi converge e l'unico limite possibile è $1/2$.
Esercizio 2 (a) Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)} = 1.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sin(x+1)}\cdot\frac{\ln x}{\ln(x+1)} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\ln(x+1)}\cdot\frac{\ln x}{\sin(x+1)} = \\ &= \frac{1}{\sin 1}(-\infty) = -\infty,\end{aligned}$$

ove abbiamo usato il fatto che $\sin 1 > 0$, dato che $0 < 1 < \pi/2$.
(b) Possiamo scrivere, con la sostituzione $x - \pi = y$,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{e^x - e^\pi} = \lim_{y\to 0}\frac{\tan(y+\pi)}{e^{y+\pi}-e^\pi};$$

essendo la funzione tangente π-periodica, si ha anche

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{e^x-e^\pi} = e^{-\pi}\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{e^y-1} = e^{-\pi}\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}\cdot\frac{y}{e^y-1} = e^{-\pi},$$

grazie ai due limiti notevoli

$$\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y} = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} = 1.$$

Esercizio 3 (i) La funzione f è continua, essendo un polinomio, ed è surgettiva, grazie al teorema dei valori intermedi ed al fatto che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre f è iniettiva, essendo somma delle due funzioni strettamente crescenti $f_1(x) = x^3$ e $f_2(x) = 5x+2$. Dunque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è bigettiva.
(ii) La funzione inversa f^{-1} è definita su $\mathbb{R}$ ed è anch'essa strettamente

crescente e continua. Osservato che $f(0) = 2$, si ha, con la sostituzione $y = f(x)$,

$$\lim_{y\to 2} \frac{f^{-1}(y)}{y-2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{f(x)-2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3+5x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+5} = \frac{1}{5}\,.$$

(iii) Dato che $f^{-1}(y) \to +\infty$ per $y \to +\infty$, se $a \in \mathbb{R}$ verifica la tesi deve essere $a > 0$. Fissiamo dunque $a > 0$: utilizzando ancora la sostituzione $y = f(x)$, si ha

$$\lim_{y\to +\infty} \frac{f^{-1}(y)}{y^a} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{f(x)^a} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^{3a}(1+5x^{-2}+2x^{-3})^a} = \lim_{x\to +\infty} x^{1-3a}.$$

Questo limite è finito e diverso da 0 se e solo se $1 - 3a = 0$, ossia $a = 1/3$, ed in tal caso il limite vale 1. Quindi l'unica coppia di valori che verifica la tesi è $(1/3, 1)$.

Prova in itinere del 28 maggio 2009

Esercizio 1 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1-x^2} - \sqrt{\cos x}}{\arctan^4 x}\,.$$

Esercizio 2 **(i)** Descrivere le principali proprietà (comportamento agli estremi del dominio, intervalli di crescenza e di convessità, eventuali asintoti) della funzione

$$f(x) = \ln(1 + 2e^{3x}),$$

tracciandone un grafico qualitativo.

(ii) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) - \lambda x = 0$, per ogni scelta del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Calcolare gli integrali

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} x\,\arctan(4-x^2)\,dx, \qquad \int_0^{1/2} \sqrt{x-x^2}\,dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Si tratta di una forma indeterminata del tipo 0/0. Il denominatore $\arctan^4 x$ chiaramente si comporta come x^4 per $x \to 0$. Andiamo a scrivere gli sviluppi di Taylor dei termini del numeratore. Si ha:

$$\sqrt[4]{1+t} = 1 + \frac{1}{4}\,t - \frac{3}{32}\,t^2 + \mathrm{o}(t^2) \quad \text{per} \;\; t \to 0,$$

da cui

$$\sqrt[4]{1-x^2} = 1 - \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{3}{32}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4) \quad \text{per} \;\; x \to 0;$$

inoltre

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}\,t - \frac{1}{8}\,t^2 + \mathrm{o}(t^2) \quad \text{per} \;\; t \to 0,$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \mathrm{o}(x^5) \quad \text{per} \;\; x \to 0,$$

da cui

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos x} &= \sqrt{1+(\cos x - 1)} = \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \mathrm{o}(x^5)\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \mathrm{o}(x^5)\right)^2 + \\
&\qquad +\mathrm{o}\left(\left(-\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \mathrm{o}(x^5)\right)^2\right) = \\
&= 1 - \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{1}{96}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4) \quad \text{per} \;\; x \to 0.
\end{aligned}$$

In definitiva il numeratore si comporta così:

$$\sqrt[4]{1-x^2} - \sqrt{\cos x} = -\frac{1}{12}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4) \quad \text{per} \;\; x \to 0,$$

cosicché il limite proposto vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1-4x^2} - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}\,.$$

Esercizio 2 (i) La funzione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo, se esistono, i limiti a $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} \ln(1+2e^{3x}) = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln(1+2e^{3x}) = +\infty.$$

Vi è dunque un asintoto orizzontale, di equazione $y = 0$, per $x \to -\infty$. La funzione è sempre positiva, con $f(0) = \ln 3$. Per vedere se f ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+2e^{3x})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\ln(2+e^{-3x})}{x} = 3,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\ln(1+2e^{3x}) - 3x\right] = \lim_{x\to+\infty} \ln(2+e^{-3x}) = \ln 2;$$

se ne deduce che per $x \to +\infty$ vi è l'asintoto di equazione $y = 3x + \ln 2$.
Calcoliamo la derivata prima: si ha

$$f'(x) = \frac{6e^{3x}}{1+2e^{3x}}\,,$$

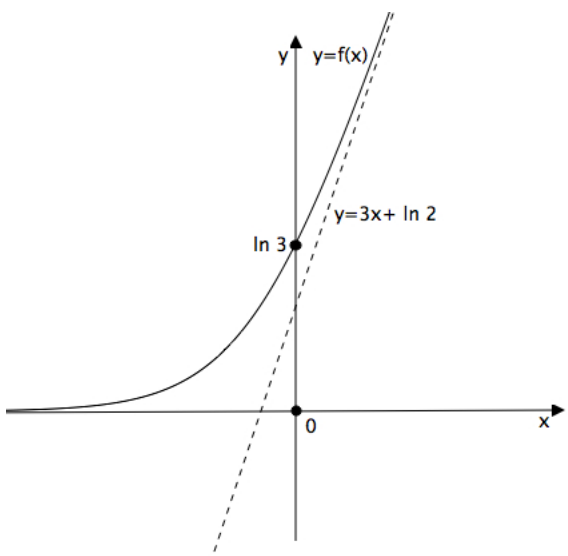
quindi

$$f'(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

dunque f è crescente su $\mathbb{R}$.
Calcoliamo la derivata seconda: si trova

$$f''(x) = \frac{18e^{3x}}{(1+2e^{3x})^2} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

dunque f è convessa su $\mathbb{R}$.
Sulla base delle informazioni ricavate, il grafico di f è qualitativamente il seguente:



(ii) Ricordiamo anzitutto che, per convessità, il grafico di f sta sempre sopra i propri asintoti. Le rette di equazione $y = \lambda x$ passano per l'origine. Se $\lambda > 0$ esse giacciono nel primo e terzo quadrante, ed incontrano la curva $y = f(x)$ se e solo se la loro pendenza è superiore a quella dell'asintoto, ossia $\lambda > 3$, ed in tal caso il numero di intersezioni fra le due curve è esattamente 1: infatti, la funzione $g(x) = f(x) - \lambda x$ è strettamente decrescente, essendo $g'(x) = f'(x) - \lambda < 3 - \lambda < 0$, ed è positiva per $x = 0$ mentre tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$. Per $0 \le \lambda \le 3$ non vi sono intersezioni. Infine, per $\lambda < 0$ le rette giacciono nel secondo e quarto quadrante ed incontrano la curva $y = f(x)$ in un solo punto (perchè f cresce mentre $x \mapsto \lambda x$ decresce).
Esercizio 3 Per il primo integrale si ottiene, con la sostituzione $t = 4 - x^2$,

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} x \ \arctan(4 - x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \arctan t \, dt;$$

dunque, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{3}}^{2} x \ \arctan(4 - x^2)\, dx &= \frac{1}{2} \left[t \ \arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\, dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[t \ \arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{4} \left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}\,. \end{aligned}$$

Il secondo integrale, con la sostituzione $t = \sqrt{x}$, diventa

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \sqrt{x - x^2}\, dx &= \int_0^{1/\sqrt{2}} 2t^2 \sqrt{1 - t^2}\, dt = \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} 2 \left[-(1-t^2)^{3/2} + (1-t^2)^{1/2}\right] dt. \end{aligned}$$

Posto allora $t = \sin u$, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \sqrt{x - x^2}\, dx &= -2 \int_0^{\pi/4} \cos^2 u \,(1 - \cos^2 u)\, du = \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} \cos^2 u \ \sin^2 u \, du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin^2 2u \, du = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 s \, ds = \left[\frac{s - \sin s \cos s}{8}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}\,. \end{aligned}$$