Categorie di L-insiemi costruiti su reticoli strutturati

Anna Frascella* and Cosimo Guido†

Department of Mathematics “E.De Giorgi”-University of Lecce

P.O.Box 193-University of Lecce 73100 Lecce (Italy)

Abstract

Un aspetto della teoria degli insiemi fuzzy, che consiste nel descrivere in termini di logica tradizionale la fondamentale idea di costruire gli insiemi tenendo conto dell'incertezza che questa costruzione frequentemente comporta, utilizza come "struttura di supporto minimale" un reticolo L (possibilmente completo ed eventualmente arricchito di ulteriori operazioni) come insieme dei valori della funzione appartenenza.

Cosí si parla ora in molti contesti, a partire da [4] di *categorie di L-insiemi* la cui classe degli oggetti é

$$\bigcap\{L^X|X insieme\}$$

ed i cui morfismi sono opportune funzioni tra insiemi.

Un problema rilevante per le applicazioni di tali categorie a vari contesti, in particolare alla topologia, é quello di poter associare ad ogni morfismo due operatori (*operatori powerset diretto e inverso*) tra i reticoli dei sottooggetti del dominio e del codominio nell'ambito della categoria ordinata di tutti gli L-insiemi.

Un approccio recentemente sviluppato in [2, 3] utilizza il concetto di *reticolo strutturato*, definito come una coppia

$$(L, \Phi)$$

dove L é un reticolo completo e

$$\Phi = \{\phi_a | a \in L, a \neq \perp\}, \phi_a : L \to [\perp, a]$$

é una famiglia di funzioni che conservano *inf* arbitrari. Tale struttura su L consente di costruire gli operatori powerset diretto e inverso di una qualsiasi

*e-mail addresses: anna.frascella@unile.it

†e-mail addresses: cosimo.guido@unile.it

funzione tra due insiemi X e Y pensata come morfismo tra un L-insieme su X e un L-insieme su Y. Questa costruzione utilizza gli operatori definiti in [6], la cui adeguatezza é stata ampiamente giustificata (si veda ad esempio [1, 5]), ed é applicabile a situazioni molto piú generali di quelle finora considerate: in effetti costituisce uno strumento per approfondire alcuni aspetti fondamentali della teoria degli insiemi fuzzy che, in questa ottica, possono essere considerati come una sorta di "fasci di reticoli completi".

La struttura sopra considerata si basa essenzialmente sul requisito "minimo" dell'esistenza di un ordinamento "sufficientemente buono" (nel senso della completezza) su L, che é sufficiente, con deboli restrizioni sulla scelta delle funzioni e poche richieste aggiuntive sui morfismi ϕ_a, di costruire categorie di L-insiemi con "abbastanza" morfismi aventi "buoni" operatori powerset.

Ma la famiglia Φ, esclusivamente caratterizzata dall'ordinamento di L, puó anche essere utilizzata per arricchire L con una struttura di tipo moltiplicativo ottenuta ponendo, $\forall a \in L, a \neq \perp$ e $\forall b \in L$

$$a \cdot b = \phi_a(b)$$

estendibile a tutto L

I risultati ottenuti in [2, 3], che rispondono ad esigenze di tipo insiemistico, non richiedono quasi nulla delle tradizionali condizioni (commutativitá, associativitá, ...) che caratterizzano la struttura monoidale delle *t-norme* o quella moltiplicativa presente in vari tipi di algebre utilizzate nella logica a piú valori. La possibilitá di utilizzare la struttura moltiplicativa determinata, nel modo sopra descritto, da Φ, arricchendola di ulteriori proprietá di tipo "algebrico", per le applicazioni ai contesti specifici della logica non é stata ancora considerata, ma si puó pensare che non si tratti semplicemente di dire le cose in un diverso modo ma piuttosto di modificare la prioritá degli strumenti utilizzati e le loro interconnessioni.

References

[1] C. De Mitri and C. Guido, *Some remarks on fuzzy powerset operators*, Fuzzy Sets and System **126** (2002) 241-251.

[2] A. Frascella and C. Guido, *Structured lattices and ground categories of L-sets*, In corso di pubblicazione.

[3] A. Frascella and C. Guido, *Topological categories of L-sets and* (L, M)*-topological spaces based on structured lattices*, XXVI Linz Seminar on Fuzzy Set Theory: Abstracts, Linz 2005.

[4] J. A. Goguen, *Categories of V-sets*, Bull. Amer. Math. Soc. **75**(1969), 622-624.

[5] S. E. Rodabaugh, *Powerset operator foundations for poslat fuzzy set theories and topologies* in U. Hölhe, S. E. Rodabaugh,eds, *Mathematics of*

Fuzzy Sets: Logic, Topology, and Measure Theory, the handbook of Fuzzy Sets Series, Vol. 3 (1999), Kluwer Academic Publishers (Dordrecht), 91-116.

[6] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and control **8**(1965), 338-353.