Versione: 13 febbraio 2004

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Elementi di Analisi Matematica I e II
a.a. 2002/03

docenti: G. Alberti, A. Briani

GIOVANNI ALBERTI
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Questa è una raccolta dei testi degli scritti d'esame per i due moduli di Elementi di Analisi Matematica del corso di laurea in Matematica, a.a. 2002/03. Questi scritti si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda parte con tre o più problemi per cui invece si deve dare una soluzione articolata e spiegata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte, e di due ore per la seconda. Per la sufficienza piena sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questi appunti consta dei testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, i cosiddetti "compitini", in tutte le varianti presentate, mentre la seconda sezione contiene una breve traccia delle soluzioni.

A questo punto è oppportuna una precisazione sull'uso di questi appunti. Le tracce delle soluzioni date nella seconda parte sono spesso ridotte all'essenziale, e comprenderle può richiedere talvolta un notevole sforzo. Nella fase di preparazione dell'esame, è probabilmente meglio non ricorrere a queste soluzioni se non per confrontarle con quelle ottenute per conto proprio, o quando proprio non si riesce a venire a capo di un esercizio. Infine, è bene ricordare che il livello di difficoltà degli esercizi proposti varia moltissimo, ed alcune delle domande sono decisamente difficili. Non è quindi il caso di allarmarsi se non si riesce a trovare sempre una soluzioni (suggerisco però di fare sempre almeno un tentativo).

Gli esercizi si basano sui seguenti argomenti, che costituiscono il programma d'esame tipo.

Programma del corso.

Sono in corsivo gli argomenti non essenziali.

PRIMO MODULO: CALCOLO

1. Funzioni: grafico, surgettività, iniettività. Funzioni reali di una variabile reale: monotonia e convessità, funzioni pari, dispari, periodiche, funzione inversa, interpretazione geometrica.
2. Grafici delle funzioni elementari (potenze, esponenziali, logaritmo, funzioni trigonometriche). Visualizzazione grafica di alcune trasformazioni.
3. Definizione di derivata e sua interpretazione geometrica; calcolo delle derivate. Relazione con monotonia e convessità; studio qualitativo del grafico di una funzione.
4. Regole di de L'Hôpital. Confronto di esponenziali, potenze e logaritmi (all'infinito ed in zero). Sviluppo di Taylor; applicazioni al calcolo dei limiti di forme indeterminate; sviluppi di Taylor delle funzioni fondamentali.
5. Infiniti ed infinitesimi asintoticamente equivalenti; principio di sostituzione degli infinitesimi; notazione di Landau ("o" piccolo); parte principale e ordine di un infinito e di un infinitesimo.
6. Primitiva di una funzione (integrale indefinito); calcolo delle primitive; primitive delle funzioni razionali.
7. Calcolo dell'area del sottografico tramite la primitiva (integrale definito); l'area di una figura piana come integrale delle lunghezze delle sezioni unidimensionali; il volume di una figura solida come integrale delle aree delle sezioni bidimensionali; lunghezza del grafico di una funzione.
8. Equazioni differenziali del primo ordine: problema di Cauchy ed enunciato del teorema di esistenza ed unicità locale, equazioni a variabili separabili, equazioni lineari del primo ordine (formula risolutiva generale).
9. Equazioni differenziali del secondo ordine: problema di Cauchy ed enunciato del teorema di esistenza ed unicità locale, equazioni lineari (omogenea e non), soluzione delle equazioni omogenee a coefficienti costanti, riduzione dell'ordine, ricerca di una soluzione particolare in alcuni casi speciali.

Secondo modulo: analisi

10. Numeri reali: reali estesi, massimo e minimo, estremo inferiore e superiore, esistenza di estremo inferiore e superiore.
11. Numeri complessi: interpretazione geometrica, esponenziale complesso, calcolo di potenze e radici di un numero complesso.
12. Definizione di limite di una successione e sue proprietà; convergenza delle successioni monotone e delle successioni di Cauchy; teorema di Bolzano-Weierstrss. Successioni definite per ricorrenza.
13. Teoria degli insiemi: prodotto infinito, insieme delle parti, insieme potenza. Esempi fondamentali: interi, razionali ed algebrici sono numerabili, i reali sono più che numerabili.
14. Definizione di limite di una funzione e sue proprietà; funzioni continue; teorema di esistenza dei valori intermedi; Teorema di Weierstrass.
15. Definizione di derivata. Derivabilità implica continuità. Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Dimostrazione delle regole di de L'Hôpital.
16. Integrale secondo Riemann di una funzione limitata e teorema fondamentale del calcolo integrale. Sviluppo di Taylor con resto integrale, di Lagrange e di Peano.
17. Integrali impropri di funzioni positive: criteri di convergenza (confronto asintotico). Serie a termini positivi: criterio del rapporto, della radice, del confronto, dell'integrale. Integrali impropri di funzioni a segno variabile, convergenza e convergenza assoluta. Serie a termini reali: convergenza e convergenza assoluta. Criterio di Leibniz per le serie a segni alterni. *Riordinabilità delle serie.*
18. Serie di potenze: raggio di convergenza, derivabilità.
19. Funzioni convesse.
20. *Dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.*

Elementi di Analisi Matematica, I modulo, a.a. 2002/03 - Testi

Compitino di prova, 14 novembre 2002

Prima parte

1. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 5}}$.
2. Dire se la funzione $f(x) = \sin^2(x) + |\cos x|$ è periodica.
3. Determinare i numeri reali a per cui $f(x) = \dfrac{x + a}{x - a}$ è una funzione pari.
4. Determinare a e b in modo che la funzione $f(x) = e^{-x(ax+b)}$ abbia un punto di massimo o minimo in $x = -1/2$.
5. Determinare l'insieme degli $x \in [0, \pi]$ tali che $\sin(2x) \geq \frac{1}{2}$.
6. Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan x + \arctan(1/x)$.
7. Determinare i punti di massimo e minimo della funzione $f(x) = ||x + 5| - 2|$.
8. Scrivere un intervallo in cui sia possibile definire l'inversa della funzione $f(x) = 4x^2 - 4$, e calcolarla.

Seconda parte

1. Determinare i valori del parametro reale a tali che
$$e^{|x|} - |x| + \cos(x) \geq a \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$
2. Tracciare un grafico approssimativo della funzione
$$f(x) = (x - 2)e^{\frac{x}{x-1}}.$$
3. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione
$$\frac{x}{x + \log(x + 1)} = \alpha x.$$

Primo compitino, 28 novembre 2002

Prima parte, gruppo A

1. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\log(x+1)+1}$.
2. Risolvere la disequazione $\cos(4x) \leq 1/2$ nell'intervallo $x \in [0, 2\pi]$.
3. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha che $x^4 e^x \sin(x^2) \ = \ o(x^a)$ per $x \to 0$?
4. Disegnare il grafico di $f(x) := 2 + \dfrac{1}{x-1}$.
5. Determinare i valori di a e b per cui $f(x) = ax^3 + 2bx^2 + 1$ ha un punto di flesso in $x = 1/6$.
6. Calcolare la derivata prima e seconda di $f(x) := \dfrac{e^{\log(x^2-1)}}{x+1}$.
7. Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 2^{-x}$.
8. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos(1 + x^5 \log x)}{e^{1/x}}$.

Prima parte, gruppo B

1. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\log(x+2)+2}$.
2. Risolvere la disequazione $\cos(3x) \leq 1/2$ nell'intervallo $x \in [0, 2\pi]$.
3. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha che $x^4 e^x \cos(x^2) = o(x^a)$ per $x \to 0$?
4. Disegnare il grafico di $f(x) := 2 + \dfrac{1}{x+1}$.
5. Determinare i valori di a e b per cui $f(x) = ax^3 + 4bx^2 + 1$ ha un punto di flesso in $x = 1/6$.
6. Calcolare la derivata prima e seconda di $f(x) := \dfrac{e^{\log(x^2-4)}}{x-2}$.
7. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} x^5 \log x$.
8. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(\pi/3 + x^5 \log x)}{e^{1/x}}$.

Seconda parte

1. Studiare la funzione $f(x) := \dfrac{x^2 - 2x}{x+1}$.
2. Calcolare, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, il limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\cos x - be^x + \sin x}{x^2}$.
3. a) Determinare il primo termine non nullo nello sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) := (\sin x)^2 - \sin(x^2)$.
   b) Lo stesso, con $f(x) := (\sin x)^n - \sin(x^n)$, $n \geq 2$ intero.
4. a) Dimostrare che la funzione $f(x) := x \log x$ è invertibile per $x \geq 1$.
   b) Calcolare il limite del rapporto $f^{-1}(y)/y$ per $y \to +\infty$, dove f^{-1} è l'inversa di f.
   c) Trovare una funzione elementare $h(y)$ per cui $f^{-1}(y) = h(y) + o(h(y))$ per $y \to +\infty$.
   d) Trovare una funzione elementare $h(y)$ per cui $f^{-1}(y) = h(y) + o(y/\log^2 y)$ per $y \to +\infty$.

Secondo compitino, 19 dicembre 2002

Prima parte, gruppo A

1. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1$.
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 10 in 0 di $f(x) := \sin(2x^2)$.
3. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{10}2^{-x}$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 2^x$.
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx$.
5. Determinare una primitiva di xe^{3x}.
6. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \leq x \leq 2$ e $x \leq y \leq \sqrt{2x}$, e calcolarne l'area.
7. Risolvere il problema ai dati iniziali $\begin{cases} y' = (3x^2+1)(y^2+1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
8. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = 0$.

Prima parte, gruppo B

1. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$.
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 12 in 0 di $f(x) := e^{-x^3}$.
3. Calcolare $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x)^{10}2^{-x}$ e $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+\sin x)^4 \log(x^3+1)$.
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-3}{x^2+1}\,dx$.
5. Determinare una primitiva di $x\cos(2x)$.
6. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \leq x \leq 1$ e $x \leq y \leq \sqrt{x}$, e calcolarne l'area.
7. Risolvere il problema ai dati iniziali $\begin{cases} y' = e^x(y^2+1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
8. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Seconda parte, gruppo A

1. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{|3e^{2x} - e^x|}{e^{2x} - e^x - 6}dx$.
2. Calcolare il volume dell'insieme A dei punti (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 + z^4 \leq 1$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/10} e^{-x^2}dx$ con un errore inferiore a 10^{-7}.
4. Dato a parametro reale, si consideri l'equazione differenziale
$$y'' + (a^2-4)y' + (a+1)y = c(x)\ . \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di $(*)$ per $a = 3$ e $c(x) = 2e^x + \sin x$.
b) Per $a = 3$ e $c(x) = 2x^2$, determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.
c) Come al punto b), con $c(x)$ un generico polinomio di grado k.
d) Per $c(x) = 0$, determinare i valori di a per cui le soluzioni di $(*)$ sono tutte limitate.

Secondo compitino, 19 dicembre 2002

Seconda parte, gruppo B

1. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{|-2e^{2x}+e^{x}|}{e^{2x}+e^{x}-6}dx.$
2. Calcolare il volume dell'insieme A dei punti (x,y,z) tali che $x^2+y^2+z^6 \leq 1$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_{0}^{1/10} e^{-x^2}dx$ con un errore inferiore a 10^{-7}.
4. Dato a parametro reale, si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + (a^2-4)y' + (a+1)y = c(x) \ . \tag{$*$}$$

a) Trovare la soluzione generale di $(*)$ per $a=3$ e $c(x) = 2e^{-x} + \sin x$.
b) Per $a=3$ e $c(x) = x^2$, determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.
c) Come al punto b), con $c(x)$ un generico polinomio di grado k.
d) Per $c(x) = 0$, determinare i valori di a per cui le soluzioni di $(*)$ sono tutte limitate.

Scritto del primo appello, 13 gennaio 2003

Prima parte, gruppo A

1. Determinare il campo di esistenza di $f(x) := \sqrt{1 - 2\sin x}$.
2. Tracciare il grafico di $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. Determinare una primitiva di $9x^2 \log x$.
4. Mettere in ordine crescente i seguenti numeri: $100!$, 1000^{10}, 10^{300}.
5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin(ax) - e^{3x}}{x^2}$ è finito, e calcolarlo.
6. Risolvere $y' - y\sin x = \sin x$ con dato iniziale $y(0) = 0$.
7. Trovare la soluzione generale di $y'' + 3y' + 2y = 6e^x$.
8. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x^7+1)^{1/5} - (x^7+1)^{1/5}}{(2x^{35}+1)^{1/25} - (x^{21}+1)^{1/15}}$.

Prima parte, gruppo B

1. Determinare il campo di esistenza di $f(x) := \log(1 - 2\sin x)$.
2. Tracciare il grafico di $f(x) = -e^{1-x}$.
3. Determinare una primitiva di $16\, x^3 \log x$.
4. Mettere in ordine crescente i seguenti numeri: $100!$, 1000^{20}, 10^{1000}.
5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin(ax) - e^{3x}}{x^2}$ è finito, e calcolarlo.
6. Risolvere $y' - y\, \sin x = \sin x$ con dato iniziale $y(0) = 0$.
7. Trovare la soluzione generale di $y'' + 2y' + y = 4e^x$.
8. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x^7+1)^{1/5} - (x^7+1)^{1/5}}{(2x^{35}+1)^{1/25} - (x^{21}+1)^{1/15}}$.

Seconda parte, gruppo A

1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} = a$.
2. Si consideri l'equazione differenziale
$$y'' - 2y' - 3y = f(x)\ . \tag{$*$}$$
Determinare la parte principale della soluzione con ordine di infinitesimo più alto in 0 nei seguenti casi:
a) $f(x) := 2x + 5$;
b) $f(x) := x^n$ con n intero positivo assegnato;
c) $f(x)$ una generica funzione infinitamente derivabile di $\mathbb{R}$.
3. Siano C e C' gli insiemi di punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che, rispettivamente, $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x^2 + z^2 \leq 1$.
a) Disegnare sommariamente C, C', e, se possibile, $C'' := C \cap C'$.
b) Descrivere le intersezioni di C'' con il piano di equazione $x = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

c) Calcolare il volume di C''.

4. a) Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $\tan x = ax$ contenute nell'intervallo $(0, \pi/2)$.
b) Studiare il comportamento di queste soluzioni per $a \to +\infty$.

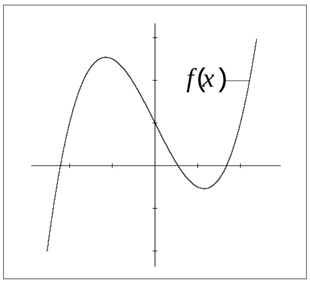
Seconda parte, gruppo B

1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}} = a$.
2. Si consideri l'equazione $y'' + 2y' + 3y = f(x)$. Determinare la parte principale della soluzione con ordine di infinitesimo più alto in 0 nei seguenti casi: a) $f(x) := 2x + 1$; b) $f(x) := x^n$ con n intero positivo assegnato; c) $f(x)$ una generica funzione infinitamente derivabile di $\mathbb{R}$.
3. Siano C e C' gli insiemi di punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che, rispettivamente, $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x^2 + z^2 \leq 1$.
a) Disegnare sommariamente C, C', e, se possibile, $C'' := C \cap C'$.
b) Descrivere le intersezioni di C'' con il piano di equazione $x = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
c) Calcolare il volume di C''.
4. a) Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $\tan x = ax$ contenute nell'intervallo $(0, \pi/2)$.
b) Studiare il comportamento di queste soluzioni per $a \to +\infty$.

SCRITTO DEL SECONDO APPELLO, 7 FEBBRAIO 2003

PRIMA PARTE

1. Trovare una primitiva di $e^{|x|}$.
2. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \log\left(1 + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.
3. Determinate la parte principale di $\dfrac{\sin(x^8)}{\log(1+x^4)}$ per $x \to 0$.
4. Determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax) - x}{x^2}$ esiste ed è finito, e calcolarlo.
5. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^4 2^x$.
6. Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{6} \sqrt[3]{x+2}\, dx$.
7. Risolvere $y'' + 4y = 0$ con dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.
8. Sia $f(x)$ la funzione in figura. Disegnare il grafico di $f(|x|)$ e di $|f(x)|$.



SECONDA PARTE

1. a) Dato $\lambda \in (0,1)$, calcolare il valore minimo di $f(x) := x^{1-\lambda} + x^{-\lambda}$ per $x \in (0, +\infty)$.
   b) Trovare la più grande costante C per cui vale la seguente disuguaglianza:
   $$a + b \geq C a^{\lambda} b^{1-\lambda} \quad \text{per ogni } a, b \text{ reali positivi.}$$
   c) Come nel punto b), ma con a, b interi positivi.
   d) Come nel punto b), ma con a, b potenze (intere positive) di 2 e $\lambda = 3/4$.
2. Si consideri, per $x > 0$, l'equazione lineare del secondo ordine
   $$y'' + \frac{y'}{x} - a\frac{y}{x^2} = c(x) \qquad (*)$$
   a) Risolvere (*) per $a = 1$ e $c(x) = 0$ (suggerimento: cercare soluzioni della forma $y = x^{\lambda}$).
   b) Risolvere (*) per a reale e $c(x) = 0$.
   c) Risolvere (*) per $a > 0$ e $c(x) = x$.
3. Calcolare il numero $\log(12/10)$ con un errore inferiore a 10^{-3}.
4. Calcolare, al variare di $a \in [0, +\infty)$, l'area della regione limitata del piano compresa tra la curva di equazione $y = (-x^2 + 4x - 3)^{-1}$ e la retta di equazione $y = a$.

Scritto del terzo appello, 12 giugno 2003

Prima parte

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{\log(x^3+1)}$.
2. Calcolare la primitiva di $\dfrac{x}{1+x^2}$.
3. Calcolare la derivata di $x^{1-x}x^{1+x}$.
4. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $xy \geq 1$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1} x \cos x \, dx$.
6. Trovare i punti critici di $f(x) := e^{x^3-3x^2-9x+1}$ e determinarne la natura.
7. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{y} + 2xy^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.
8. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x+e^{x-x^2})}{\log x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\,(\log x)^2$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\sin(1/x)$.

Seconda parte

1. Calcolare il volume dell'insieme V dei punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $0 \leq z \leq e^{-x^2-y^2}$. [*Suggerimento: le intersezioni di V con i piani paralleli al piano xy sono cerchi.*]
2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ le soluzioni del problema $\begin{cases} \ddot{y} + 4y = \sin(ax) \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$ sono illimitate.
3. Trovare il punto del grafico di $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ che minimizza la distanza dall'origine.
4. Sia a un numero reale positivo diverso da 0 e da 1.
   a) Trovare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 in 0 di $(1+x)^a$.
   b) Calcolare la parte principale per $x \to +\infty$ di $(x+1)^a + (x-1)^a - 2x^a$.
   c) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3+1)^a + (x^3-1)^a - 2x^{3a}}{x^5}$.

Scritto del quarto appello, 10 luglio 2003

Prima parte

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{2-|x+1|}$.
2. Calcolare la derivata di $f(x) := \log(x^x)$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$.
4. Trovare una primitiva di $\dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$.
5. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x\,\sin x}$, $\quad\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\log\log x}$, $\quad\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x+\sin x}$.
6. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 9 incluso di $f(x) = \sin(x^3 + x^9)$.
7. Scrivere la soluzione generale dell'equazione $xy' + y = e^x$.
8. Disegnare il grafico di $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Seconda parte

1. Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la parte principale di $e^{-1/x} - \cos(a/\sqrt{x})$ per $x \to +\infty$.
2. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{\sin x}\right]$.
3. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \sin x\ , \\ y(0) = y'(0) = 0\ . \end{cases}$

Scritto del quinto appello, 8 settembre 2003

Prima parte

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{2+|x+1|}$.
2. Calcolare la derivata di $f(x) := x^x \cdot x^{-x}$ (per $x > 0$).
3. Risolvere $y'' - 4y = 0$ con dati iniziali $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
4. Calcolare la primitiva di $\dfrac{x^2}{1+x^3}$.
5. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)}{x^2}$, $\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x \log x$, $\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(x^{-20} + e^{-x})$.
6. Trovare i punti critici di $f(x) := e^{x^3-3x^2-9x+1}$ e determinarne la natura.
7. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 12 in 0 di $f(x) := \cos(-x^3)$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $xy \le 1$.

Seconda parte

1. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|-2e^{-2x} + e^{-x}|}{e^{-2x} + e^{-x} - 6} dx$.
2. Trovare il punto del grafico di $f(x) := \dfrac{2}{1+x^2}$ che minimizza la distanza dall'origine.
3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ le soluzioni del problema $\begin{cases} \ddot{y} + 4y = \sin(ax) \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$ sono illimitate.

Elementi di Analisi Matematica, II modulo, a.a. 2002/03 - Testi

Primo compitino, 3 aprile 2003

Prima parte, gruppo A

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f definita da
$$f(x) := \begin{cases} ae^x & \text{per } x \le 0 \\ \frac{e^{bx}-1}{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$
è continua su tutto $\mathbb{R}$.
2. Calcolare (in forma cartesiana) il numero $(1-i)^{10}$.
3. Dire quali dei seguenti insiemi infiniti sono numerabili e quali no:
a) l'insieme dei numeri primi;
b) l'insieme dei numeri irrazionali;
c) l'insieme delle radici quadrate di numeri razionali.
4. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $1 \le |z+1-i| \le \sqrt{2}$.
5. Calcolare il limite di $\sqrt[n^2]{n!}$ per $n \to +\infty$.
6. Dare un'esempio (anche con un disegno) di funzione continua f su $(0,1]$ che
a) non ammette massimo;
b) non ammette né massimo né minimo.
7. Determinare l'estremo superiore ed inferiore di $A := \Big\{ \exp\Big(\dfrac{4n^2-1}{4n^2}\Big) : \ n = 1, 2, \dots \Big\}$.
8. Scrivere la definizione di successione di Cauchy.

Prima parte, gruppo B

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f definita da
$$f(x) := \begin{cases} a\sin x & \text{per } x \le 0 \\ \frac{e^{bx}-1}{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$
è continua su tutto $\mathbb{R}$.
2. Calcolare (in forma cartesiana) il numero $(i-1)^{10}$.
3. Dire quali dei seguenti insiemi infiniti sono numerabili e quali no:
a) l'insieme delle potenze intere di due;
b) l'insieme delle radici cubiche di numeri razionali;
c) l'insieme dei numeri reali non interi.
4. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $1 \le |z+1+i| \le \sqrt{2}$.
5. Calcolare il limite di $\sqrt[n^3]{n!}$ per $n \to +\infty$.
6. Dare un'esempio (anche con un disegno) di funzione continua f su $[0,1)$ che
a) non ammette minimo;
b) non ammette né massimo né minimo.
7. Determinare l'estremo superiore ed inferiore di $A := \Big\{ \log\Big(\dfrac{4n^2-1}{4n^2}\Big) : \ n = 1, 2, \dots \Big\}$.
8. Scrivere la definizione di maggiorante e di estremo superiore di un insieme.

PRIMO COMPITINO, 3 APRILE 2003

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. Dire quali dei seguenti insiemi infiniti sono numerabili e quali no:
a) la famiglia X_1 dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con 5 elementi;
b) la famiglia X_2 dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$;
c) l'insieme X_3 delle successioni (x_n) tali che $x_n \in \mathbb{Z}$ per ogni n, e $x_n \to 0$;
d) l'insieme X_4 delle successioni definite come in c) sostituendo a $\mathbb{Z}$ l'insieme dei reciproci dei numeri naturali.

2. Dato un numero reale y e due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y^- := \max\{-y, 0\}$ è la parte negativa di y, e $\min\{f, g\}$ la funzione data da $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$.
a) Dimostrare che se f è continua allora $|f|$ ed f^- sono continue.
b) È vero che se $|f|$ è continua allora f è continua?
c) È vero che se $|f|$ ed f^- sono continue allora f è continua?
d) Dimostrare che se f e g sono continue, allora $\min\{f, g\}$ è continua.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data data da $f(x) := x^5 + 3x^3 + 2x - 6$. Dimostrare che f è iniettiva e surgettiva e calcolare $\lim f^{-1}(1/\log y)$ per $y \to +\infty$.

4. Sia a un numero positivo, e sia (x_n) la successione definita per ricorrenza come segue:
$$x_1 := 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} := x_n + a^n e^{-x_n} \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$
Dimostrare che (x_n) è crescente per ogni a. Dire quindi se il limite di (x_n) è finito o infinito nei seguenti casi: a) $a = 1$; b) $a > 1$; c) $a < 1$.

5. Sia L un numero finito, e sia (x_n) una successione di numeri reali. Poniamo
$$y_n := \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \quad \text{e} \quad z_n := \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{4n}}{3n} .$$
a) Dimostrare che $x_n \to L$ implica $y_n \to L$ e $z_n \to L$.
b) Far vedere che se y_n (o z_n) converge non è detto che x_n converga.
c) Dimostrare che $y_n \to L$ implica $z_n \to L$.
d) Far vedere che in generale se z_n converge non è detto che y_n converga.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Dire quali dei seguenti insiemi infiniti sono numerabili e quali no:
a) la famiglia X_1 dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con 6 elementi;
b) la famiglia X_2 dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$;
c) l'insieme X_3 delle successioni (x_n) tali che $x_n \in \mathbb{N}$ per ogni n, e $x_n \to 0$;
d) l'insieme X_4 delle successioni definite come in c) sostituendo a $\mathbb{N}$ l'insieme delle potenze intere negative di 2.

2. Dato un numero reale y e due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y^+ := \max\{y, 0\}$ è la parte positiva di y, e $\max\{f, g\}$ la funzione data da $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$.
a) Dimostrare che se f è continua allora $|f|$ ed f^+ sono continue.
b) È vero che se $|f|$ è continua allora f è continua?
c) È vero che se $|f|$ ed f^+ sono continue allora f è continua?
d) Dimostrare che se f e g sono continue, allora $\max\{f, g\}$ è continua.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data data da $f(x) := x^7 + 4x^3 + x + 6$. Dimostrare che f è iniettiva e surgettiva e calcolare $\lim f^{-1}(e^{-y})$ per $y \to +\infty$.

4. Sia a un numero positivo, e sia (x_n) la successione definita per ricorrenza come segue:

$$x_0 := 0 \;\text{ e }\; x_{n+1} := x_n + a^n e^{-x_n} \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

   Dimostrare che (x_n) è crescente per ogni a. Dire quindi se il limite di (x_n) è finito o infinito nei seguenti casi: a) $a = 1$; b) $a > 1$; c) $a < 1$.

5. Sia L un numero finito, e sia (x_n) una successione di numeri reali. Poniamo

$$y_n := \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \quad \text{e} \quad z_n := \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{4n}}{3n} \;.$$

   a) Dimostrare che $x_n \to L$ implica $y_n \to L$ e $z_n \to L$.
   b) Far vedere che se y_n (o z_n) converge non è detto che x_n converga.
   c) Dimostrare che $y_n \to L$ implica $z_n \to L$.
   d) Far vedere che in generale se z_n converge non è detto che y_n converga.

SECONDO COMPITINO, 22 MAGGIO 2003

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Sia $f_a(x) := x^{-a} \arctan(e^x)$. Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il limite di f_a a $+\infty$ è zero, e per quali l'integrale di f_a da 1 a $+\infty$ risulta finito.
2. Sia $n \geq 2$ un intero fissato. Per ciascuno dei seguenti insiemi di matrici $n \times n$, dire se è finito, numerabile o più che numerabile:
   a) matrici con coefficienti 0 oppure 1;
   b) matrici con coefficienti reali e traccia nulla;
   c) matrici con coefficienti complessi e determinante nullo;
   d) matrici con coefficienti interi.
3. Dire quali delle seguenti serie risultano convergenti
$$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{2^n n} \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{2^n}{n} \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \;.$$
4. Calcolare, per $t > 0$, l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-tx} dx$.
5. Sia A l'insieme dei numeri e^{-n} con $n \in \mathbb{N}$. Determinarne estremo inferiore e superiore, e dire se si tratta di minimo e massimo.
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_0^{+\infty} 2^n (2 + \cos n)\, x^n$.
7. Calcolare (in forma cartesiana) il numero $\big(1 + \sqrt{3}i\big)^6$.
8. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Sia $f_a(x) := x^a e^{-x}$. Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il limite di f_a a $+\infty$ è zero, e per quali l'integrale di f_a da 1 a $+\infty$ risulta finito.
2. Sia $n \geq 2$ un intero fissato. Per ciascuno dei seguenti insiemi di matrici $n \times n$, dire se è finito, numerabile o più che numerabile:
   a) matrici con coefficienti razionali;
   b) matrici con coefficienti ± 1 e traccia nulla;
   c) matrici triangolari superiori con coefficienti complessi;
   d) matrici con coefficienti reali e invertibili.
3. Dire quali delle seguenti serie risultano convergenti
$$\sum_1^{+\infty} \frac{3^n}{(2n)!} \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{1}{3^n 2n} \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{3^n}{2n} \;.$$
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{|\log x|^a}{x}\, dx$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
5. Sia A l'insieme dei valori di e^x con $x \in (-\infty, 1]$. Determinarne estremo inferiore e superiore, e dire se si tratta di minimo e massimo.

SECONDO COMPITINO, 22 MAGGIO 2003

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_0^{+\infty} n(2-\cos n)\,x^n$.

7. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^4 = -4$.

8. Dare un esempio di serie a termini reali che non diverge a $\pm\infty$ né converge.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie $\displaystyle\sum_2^{+\infty} \big[(n^2-1)^a - (n^2+1)^a\big]$.

2. Dati $\alpha, \beta > 0$, si ponga

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0, \\ x^\alpha \sin(1/x^\beta) & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

   Dire per quali α e β si verificano le seguenti condizioni:
   a) $f(x)$ è continua in $[0,+\infty)$,
   b) $f(x)$ è derivabile in $[0,+\infty)$,
   c) $f'(x)$ è continua in $[0,+\infty)$,
   d) $f(x)$ è derivabile due volte in $[0,+\infty)$.
   Fissato $\beta = 1$ ed n intero con $n \geq 2$, dire per quali α si ha che:
   e) $f(x)$ è derivabile n volte in $[0,+\infty)$,
   f) $D^n f(x)$ è continua in $[0,+\infty)$.

3. Sia $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   a) Dimostrare che se f è di classe C^1 ed esiste $L := \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x)$, allora $L = 0$.
   b) Far vedere con un esempio che se f è di classe C^1 non è detto che L esista.
   c) Dimostrare che se f è di classe C^2 e $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f''(x)|\,dx < +\infty$, allora L deve esistere.
   d) Dimostrare che se f è di classe C^2 e $|f''(x)| \leq 1$, allora L deve esistere.

4. a) Sia $q := \underbrace{9\,9\cdots 9\,9}_{h \text{ cifre}}$ con $h \geq 1$. Dimostrare che $1/q = 0{,}\underbrace{0\,0\cdots 0\,1}_{h \text{ cifre}}\underbrace{0\,0\cdots 0\,1}_{h \text{ cifre}}\cdots$
   b) Dimostrare che ogni numero con rappresentazione decimale periodica è razionale.
   c) Dimostrare che la rappresentazione decimale di ogni numero razionale è periodica.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie $\displaystyle\sum_1^{+\infty} \big[(n+2)^a - n^a\big]$.

2. Uguale al gruppo A

3. Uguale al gruppo A

4. Uguale al gruppo A

Scritto del I appello, 12 giugno 2003

Prima parte

1. Dei seguenti insiemi, dire se sono finiti, numerabili o più che numerabili:
   a) polinomi a coefficienti interi;
   b) soluzioni dell'equazione differenziale $y' + y = 0$ definite su $\mathbb{R}$;
   c) soluzioni dell'equazione $\sin(x^2) = 0$.
2. Dare un'esempio di funzione continua e derivabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la cui derivata non si annulla nel punto di massimo.
3. Per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a \sin\Big(\frac{1}{x+x^2}\Big) dx$ è finito?
4. Calcolare il valore di $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n e^{-n}$.
5. Calcolare la derivata di $f(x) := \displaystyle\int_0^{2x} te^{t+1}\, dt$.
6. Calcolare i raggi di convergenza delle serie di potenze $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{x^n}{1+n^2}$ e $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{x^{2n}}{2^n}$.
7. Dare un'esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ma non C^2.
8. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $1 \geq |z| \geq |z - 1 + i|$.

Seconda parte

1. a) Dato $a \in \mathbb{R}$, determinare la parte principale in 0 di
$$f_a(x) := x^a \sin(x^3 + x^4) \sin(e^{-x}) .$$
   b) Dire per quali a l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty f_a(x)\, dx$ risulta finito.
2. Sia data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con limite $+\infty$ a $\pm\infty$. Dimostrare che f ammette un punto di minimo su $\mathbb{R}$. Com'è fatta l'immagine di f?
3. a) Calcolare il raggio di convergenza R della serie
$$f(x) := \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad . \tag{1}$$
   b) Determinare il comportamento della serie (1) per *ogni* punto $x \in \mathbb{R}$.
   c) Determinare esplicitamente f', e quindi f, per $x \in (-R, R)$.
   d) Provare a calcolare $f(\pm R)$. Qual è la difficoltà?
4. Sia X l'insieme delle successioni di numeri reali (x_n) con $n = 0, 1, 2, \ldots$ che soddisfano la seguente condizione:
$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{per ogni } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$
   a) Dimostrare che X è uno spazio vettoriale.
   b) Dimostrare che dati $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ esiste una ed una sola successione $(x_n) \in X$ tale che $x_0 = a_0$ ed $x_1 = a_1$. Qual è la dimensione di X?
   c) Trovare tutte le successioni $(x_n) \in X$ della forma $x_n = \lambda^n$ con $\lambda \neq 0$ numero reale.
   d) Dare una formula esplicita per la successione $(x_n) \in X$ tale che $x_0 = x_1 = 1$.

Scritto del secondo appello, 10 luglio 2003

Prima parte

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{|x+1|-2}$.
2. Dire quali tra le seguenti funzioni sono derivabile su tutto $\mathbb{R}$: $e^{|x|}$, $|e^x|$, e^{x^2}.
3. Dire per quali x la serie $\sum_0^{+\infty}(-1)^n|x|^{n/2}$ converge, e calcolarne la somma.
4. Trovare una primitiva di $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.
5. Dare un esempio di funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continua, con limite $+\infty$ a $+\infty$, ma che non sia definitivamente crescente.
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_1^{+\infty} n^n(3+\sin n)\,x^n$.
7. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $e^z=-1$.
8. Enunciare il teorema di Rolle.

Seconda parte

1. Studiare, al variare di $a\in\mathbb{R}$, la convergenza di $\displaystyle\int_1^\infty \left[e^{-1/x}-\cos(a/\sqrt{x})\right]dx$.
2. Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_2^\infty \frac{x^n}{n(n-1)}$.
   a) Determinarne il raggio di convergenza;
   b) discutere il comportamento della serie al variare di $x\in\mathbb{R}$;
   c) calcolare esplicitamente il valore.
3. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che:
   a) dati due zeri distinti (cioè punti in cui f si annulla), esiste un punto di massimo o minimo relativo tra essi strettamente compreso;
   b) se f è derivabile due volte con f'' strettamente positiva, allora f ha al più due zeri;
   c) se f è derivabile n volte con D^nf strettamente positiva, allora f ha al più n zeri.
4. Dei seguenti insiemi di funzioni, dire quali hanno cardinalità numerabile, quali del continuo (cioè di $\mathbb{R}$), quali ancora maggiore:
   a) funzioni da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$;
   b) funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$;
   c) funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue;
   d) funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive.
   e) funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ bigettive.

Scritto del terzo appello, 8 settembre 2003

Prima parte

1. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ ax^2 + b & \text{se } x < 0 \end{cases}$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$
2. Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} \int_0^x e^{-t^2} dt$.
3. Per quali numeri reali $a > 0$ l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(1/x^a)}{x^2} dx$ è finito?
4. Calcolare una primitiva di $(\sin(x))^2$.
5. Sia X un insieme di 5 elementi. Quante sono le funzioni da X in X?
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_1^{\infty} n^{3n+5} x^n$.
7. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $|z - 2i + 1| \leq 1$.
8. Enunciare il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Seconda parte

1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie $\sum_1^{+\infty} \left[e^{1/n} + a \sin(1/n) - 1 \right]$.
2. Siano $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continue. Dimostrare che
   a) $h(x) := f(g(x))$ è uniformemente continua.
   b) Se inoltre f e g sono limitate allora $u(x) := f(x)g(x)$ è uniformemente continua.
3. Studiare al variare di $\alpha \geq 0$, la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \dfrac{4 \log(1 + a_n)}{\log(5)} \end{cases}$$

   Cosa succede per $-1 < \alpha < 0$?

Scritto del quarto appello, 13 gennaio 2004

Prima parte

1. Scrivere lo sviluppo di Taylor in zero all'ordine n di $(1+x)^{-1}$ e di $\log(1-x)$.
2. Calcolare il valore di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3. Disegnare il grafico della funzione $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.
4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{a+1} + x^a}\, dx$ è finito.
5. Calcolare le radici quarte complesse di -4.
6. Calcolare $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} x \cos x \, dx$.
7. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(e^{3x} + e^{-3x})}{\log x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x \log x}$.
8. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Seconda parte

1. Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che sia massimo l'ordine di infinitesimo in 0 della funzione

$$f(x) = \int_0^x 1 + \alpha e^t + \beta \sin(\beta t)\, dt \ .$$

Per tali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, indicare poi la parte principale di f.

2. a) Dato $n \geq 1$ intero, calcolare $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leq h \leq n \\ h \text{ pari}}} \binom{n}{h}$.

b) Dato $n \geq 1$ intero, calcolare $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leq h \leq n \\ h \equiv 0 \mod(4)}} \binom{n}{h}$.

[*Suggerimento per a): sviluppare* $(1+1)^n$ *e* $(1-1)^n$ *con il binomio di Newton.*]

3. Si definisce il prodotto infinito di una successione di numeri reali a_n come il limite (se esiste)

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{m\to\infty} \prod_{n=0}^{m} a_n \ . \tag{1}$$

Dimostrare che:
a) se $a_n \geq 1$ per ogni n allora il limite in (1) esiste ed appartiene a $[1, +\infty]$;
b) se $a_n \neq 0$ per ogni n ed il limite in (1) esiste ed è finito, allora $a_n \to 1$.
c) data una successione di numeri reali $b_n \geq 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \prod_{n=0}^{\infty} (1 + b_n) < +\infty \ . \tag{2}$$

Scritto del V appello, 11 febbraio 2004

Prima parte

1. Scrivere lo sviluppo di Taylor in zero all'ordine n di e^{-x} e di $\dfrac{1}{1-x^2}$.
2. Calcolare la derivata di $f(x) = 4^{-x}e^{2x\,\log 2}$.
3. Disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{1-x}$.
4. Dire per quali valore di $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2 + x^a + \sin(ax)}\, dx$ è finito.
5. Calcolare $z = \big(1 + i\sqrt{3}\big)^{-3}$.
6. Determinare l'intersezione $\displaystyle\bigcap_{r>0} Q_r$ dove $Q_r := [0, 2r] \times [-r, r]$, con r numero reale positivo.
7. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^3)}{x^2 \cos x}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^x$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \log x$.
8. Enunciare il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Seconda parte

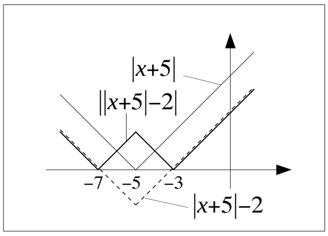
1. Discutere, al variare del parametro reale $a > 0$ la convergenza assoluta o meno della serie
$$\sum_1^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{n^a}\right) - \tan\left(\frac{1}{n^a}\right)\right] .$$
2. a) Dimostrare che $\cos(\sqrt{x})$ è derivabile in $[0, \infty[$ e calcolarne la derivata.
b) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari e di classe $C^2(\mathbb{R})$, dimostrare che $f(\sqrt{x})$ è derivabile in $[0, \infty[$, e calcolarne la derivata.
3. Dati $a, b > 0$, sia $T_{a,b}$ il triangolo rettangolo (chiuso) di vertici $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$.
a) Dire per quali a, b il triangolo $T_{a,b}$ è contenuto in $S := \{(x, y) :\ 0 \le y \le e^{-x}\}$.
b) Tra i triangoli di cui al punto a), determinare quelli di area massima (se esistono).

Elementi di Analisi Matematica, I modulo, a.a. 2002/03 - Soluzioni

Compitino di prova, 14 novembre 2002

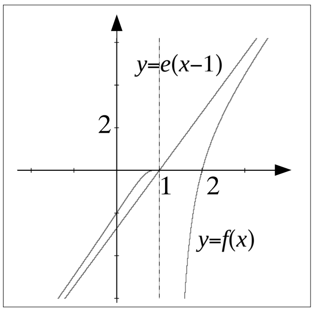
Prima parte

1. Il dominio è $(-5, 1] \cup [2. + \infty)$.
2. Sì!
3. f è singolare solo per $x = a$, e quindi, per essere pari, deve necessariamente essere $a = 0$ (che è chiaramente sufficiente).
4. Siccome la funzione e^{-x} è strettamente decrescente, basta risolvere il problema per $f(x) = x(ax + b)$, per cui i punti di minimo o massimo assoluti coincidono con quelli per cui si annulla la derivata. Dunque deve essere $f'(-1/2) =$, ovvero $a = b \neq 0$.
5. $\dfrac{\pi}{12} \le x \le \dfrac{5\pi}{12}$.
6. $f'(x) = 0$. Notare che infatti $f(x) = \pi/2$ per $x > 0$ e $f(x) = -\pi/2$ per $x < 0$.
7. Disegnando il grafico di f (a lato) si vede che $x = -7$ e $x = -3$ sono punti di minimo (assoluto) di f, mentre $x = -5$ è un punto di massimo locale.
8. Vanno bene sia la semiretta $(-\infty, 0]$ che la semiretta $[0, +\infty)$, dove $f^{-1}(y) = \sqrt{1 + y/4}$ e $f^{-1}(y) = -\sqrt{1 + y/4}$, rispettivamente.



Seconda parte

1. Siccome il termine di sinistra della disequazione è una funzione pari di x, possiamo limitarci agli x positivi. Ponendo $f(x) := e^x - x + \cos x$, vogliamo dunque calcolare il valore minimo di f. Osserviamo che $f''(x) = e^x - \cos x \ge 0$ per $x \ge 0$ (perché $e^x \ge 1$ e $\cos x \le 1$), e quindi f è convessa. Inoltre $f'(0) = 0$, e quindi 0 è il punto di minimo assoluto di f (ristretta alla semiretta $x \ge 0$). Pertanto $\min f = f(0) = 2$, e la disequazione è verificata se e solo se $a \le 2$.
2. La funzione f è definita (e derivabile) per $x \neq 1$, tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, tende a $-\infty$ per $x \to 1^+$, e tende a 0 per $x \to 1^-$. Inoltre, facendo i conti (tanti) si ottiene
$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}}$$
$$f''(x) = -\frac{x}{(x-1)^4} e^{\frac{x}{x-1}} \ ,$$
quindi la funzione è sempre strettamente crescente, convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$. Usando l'approssimazione $e^y \simeq 1 + y + o(y)$ per $y \to 0$ si ottiene inoltre $f(x) = e(x-1) + o(1)$ per $x \to \pm\infty$, che dà gli asintoti di f. Osserviamo infine che $f'(x)$ tende a 0 per $x \to 1^-$. Questo permette di ottenere il disegno riportato in figura.



3. Si osservi innanzitutto che il termine di sinistra dell'equazione non è definito per $x = 0$, perché si annulla il denominatore, e quindi possiamo assumere che sia $x \neq 0$. In questo caso, per $\alpha = 0$, l'equazione non ha soluzioni. Per $\alpha \neq 0$, invece, l'equazione diventa $x + \log(x + 1) = 1/\alpha$. Si vede ora che la funzione $f(x) := x + \log(x + 1)$ è definita per $x > -1$, strettamente crescente, ed ha limite $+\infty$ in $+\infty$ e $-\infty$ in -1^+, e quindi c'è sempre una ed una sola soluzione.

Primo compitino, 28 novembre 2002

Prima parte, gruppo A

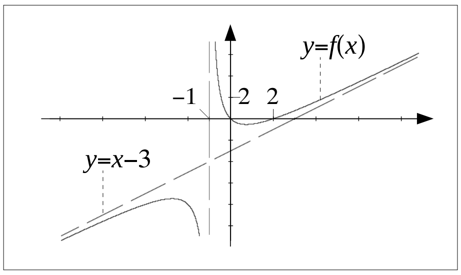
1. Deve essere $\log(x+1)+1 \geq 0$, ovvero $x \geq 1/e - 1$.
2. $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right]$.
3. Essendo $e^x \sim 1$ e $\sin x \sim x$, si ha $x^4 e^x \sin(x^2) \sim x^6$ che è $o(x^a)$ se e solo se $a < 6$.
4. Si tratta del ben noto grafico della funzione $1/x$ traslato a destra di 1 ed in alto di 2.
5. Siccome $f''(x) = 6ax + 4b$, deve essere $f'(1/6) = a + 4b = 0$, ovvero $a = -4b$ (e $a \neq 0$).
6. All'interno del campo di esistenza, la funzione si semplifica a $f(x) = x - 1$, per cui $f(x) = 1$ e $f''(x) = 0$.
7. Per $x \to +\infty$, ogni potenza è "o piccolo" di ogni esponenziale con base maggiore di 1, quindi il limite è 0.
8. Siccome numeratore è limitato, ed il denominatore tende a $+\infty$, il limite è 0.

Prima parte, gruppo B

1. Deve essere $\log(x+2)+2 \geq 0$, ovvero $x \geq 1/e^2 - 2$.
2. $x \in \left[\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}\right]$.
3. Essendo $e^x \sim 1$ e $\cos x \sim 1$, si ha $x^4 e^x \sin(x^2) \sim x^4$ che è $o(x^a)$ se e solo se $a < 4$.
4. Si tratta del ben noto grafico della funzione $1/x$ traslato a sinistra di 1 ed in alto di 2.
5. Siccome $f''(x) = 6ax + 8b$, deve essere $f'(1/6) = a + 8b = 0$, ovvero $a = -8b$ (e $a \neq 0$).
6. All'interno del campo di esistenza, la funzione si semplifica a $f(x) = x + 2$, per cui $f(x) = 1$ e $f''(x) = 0$.
7. Per $x \to 0^+$, il logaritmo è "o piccolo" di ogni potenza negativa, quindi il limite è 0.
8. Siccome numeratore è limitato, ed il denominatore tende a $+\infty$, il limite è 0.

Seconda parte

1. La funzione f è definita per $x \neq -1$, positiva in $(-1,0) \cup (2,+\infty)$, nulla in 0 e 2, e negativa altrove; $f(x) = x - 3 + o(1)$ per $x \to \pm\infty$ ed $f(x) = 3/(x+1) + o(1/(x+1))$ per $x \to -1$, e quindi $f(\pm\infty) = \pm\infty$, $f(1^\pm) = \pm\infty$.
   Inoltre $f'(x) = (x^2 + 2x - 2)(x+1)^{-2}$ si annulla in $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$; dallo studio del segno si ottiene che f è crescente negli intervalli $(-\infty, x_1]$ e $[x_2, +\infty)$, e decrescente negli intervalli $[x_1, -1)$ e $(-1, x_2]$; in particolare x_1 ed x_2 sono punti di massimo e minimo locale, rispettivamente. La derivata seconda è $f''(x) = 3(x+1)^{-3}$, e quindi f è concava nell'intervallo $(-\infty, -1)$ e convessa in $(-1, +\infty)$.



2. Siccome il denominatore è x^2, ci basta determinare l'espansione di Taylor all'ordine 2 (per $x \to 0$) del denominatore. Usando gli sviluppi noti:

$$a\cos x - be^x + \sin x = (a-b) + (1-b)x - \frac{a+b}{2}x^2 + o(x^3) \ .$$

Si presentano quindi tre casi:
1) se $a - b \neq 0$ (ovvero $a \neq b$), allora il limite è $+\infty$ per $a > b$ e $-\infty$ per $a < b$;
2) se $a - b = 0$ e $1 - b \neq 0$ (ovvero $a = b \neq 1$) allora il limite non esiste (per essere precisi, è $+\infty$ da un lato e $-\infty$ dall'altro);
3) se $a - b = 0$ e $1 - b + = 0$ (ovvero $a = b = 1$) allora il limite è $\frac{a+b}{2} = 1$.

3. a) Usiamo lo sviluppo di $\sin x$. Lo sviluppo $\sin t = t + o(t^2)$ (con $t = x$ nel primo termine e $t = x^2$ nel secondo) dà $f(x) = o(x^3)$ e dunque non è sufficiente. Proviamo allora $\sin t = t - t^3/6 + o(t^4)$:

$$\begin{aligned}(\sin x)^2 - \sin(x^2) &= \big(x - x^3/6 + o(x^4)\big)^2 - \big(x^2 - x^6/6 + o(x^8)\big)\\ &= \big(x^2 - x^4/3 + o(x^5)\big) - \big(x^2 + o(x^5)\big)\\ &= -x^4/3 + o(x^5)\ .\end{aligned}$$

b) Si procede come per a):

$$\begin{aligned}(\sin x)^n - \sin(x^n) &= \big(x - x^3/6 + o(x^4)\big)^n - \big(x^n - x^{2n}/6 + o(x^{4n})\big)\\ &= \big(x^n - nx^{n+2}/6 + o(x^{n+2})\big) - \big(x^n + o(x^{2n-1})\big)\\ &= -nx^{n+2}/6 + o(x^{n+2})\ .\end{aligned}$$

Il punto delicato è sviluppare la potenza n-esima nella prima riga: un modo è raccogliere x e usare lo sviluppo $(1+t)^n = 1 + nt + o(t)$:

$$\begin{aligned}\big[x - x^3/6 + o(x^4)\big]^n &= x^n\,\big[1 + \underbrace{-x^2/6 + o(x^2)}_{t}\big]^n\\ &= x^n\,\big[1 + n(-x^2/6 + o(x^2)) + o(-x^2/6 + o(x^2))\big]\\ &= x^n\,\big[1 - nx^2/6 + o(x^2)\big]\ .\end{aligned}$$

Un conto più accurato mostra in effetti che il resto nello sviluppo di f è $o(x^{n+3})$.

4. a) f è ben definita per $x \geq 1$, $f(1) = 0$ e $f(+\infty) = +\infty$. Inoltre $f'(x) = 1 + \log x \geq 1$ per $x \geq 1$, quindi f è crescente nell'intervallo $[1, +\infty)$ ed è quindi invertibile. Siccome f mappa $[1, +\infty))$ su $[0, +\infty)$, f^{-1} mappa $[0, +\infty)$ su $[1, +\infty))$. Inoltre $f^{-1}(+\infty) = +\infty$.

b) Indichiamo ora con $x = x(y)$ l'inversa di f (come funzione di y). Siccome $x \log x = y$ e $x \to +\infty$ per $y \to +\infty$,

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{x(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\log(x(y))} = \frac{1}{+\infty} = 0\ .$$

c) Più difficile. Siccome $x = y/\log x$, dobbiamo esplicitare $\log x$ in funzione di y (almeno approssimativamente). Ora, $y = x \log x$ implica

$$\log y = \log x + \log\log x = \log x + o(\log x) \tag{1}$$

(perché $\log\log x = o(\log x)$ per $x \to +\infty$ e quindi anche per $y \to +\infty$). In particolare $\log y \sim \log x$, quindi la precedente equazione diventa

$$\log x = \log y - o(\log y) = \log y\,(1 + o(1))\ . \tag{2}$$

Pertanto

$$x = \frac{y}{\log x} = \frac{y}{\log y}(1 + o(1))^{-1} = \frac{y}{\log y}(1 + o(1)) = \frac{y}{\log y} + o\Big(\frac{y}{\log y}\Big)\ .$$

d) Andando oltre, dalla (2) si ottiene $\log\log x = \log\log y + o(1)$, e sostituendo nella (1)

$$\log x = \log y + \log\log y + o(1)$$

e poi

$$\begin{aligned} x = \frac{y}{\log x} &= \frac{y}{\log y + \log\log y + o(1)} \\ &= \frac{y}{\log y}\Big[1 + \frac{\log\log y}{\log y} + o\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big]^{-1} \\ &= \frac{y}{\log y}\Big[1 - \frac{\log\log y}{\log y} + o\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big] = \frac{y}{\log y} - \frac{y\log\log y}{\log^2 y} + o\Big(\frac{y}{\log^2 y}\Big)\ . \end{aligned}$$

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 2: molte "distrazioni" nella discussione del limite. In alcuni casi, sono stati semplicemente enunciati i risultati.
- Seconda parte, esercizio 3: la semplificazione degli errori è stata fatta spesso in modo approssimativo.
- Seconda parte, esercizio 4b): molte pseudo-dimostrazioni che alla fine si possono riassumere in "si vede a occhio che le cose vanno proprio così".
- Seconda parte, esercizio 4b: usando de L'Hôpital, alcuni hanno sbagliato ad applicare la formula per la derivata della funzione inversa.

SECONDO COMPITINO, 19 DICEMBRE 2002

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Si tratta della circonferenza (piena!) di centro $(1, -1)$ e raggio 1.
2. Usando $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + o(t^6)$ si ottiene $\sin(2x^2) = 2x^2 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{4}{15}x^{10} + o(x^{12})$.
3. 1 e 0.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 1 + \frac{2}{x^2+1}dx = \Big|x + 2\arctan x\Big|_0^1 = 1 + \frac{\pi}{2}$.
5. Per parti: $\dfrac{3x-1}{9}e^{3x}$.
6. $\displaystyle A = \int_0^2 \sqrt{2x} - x\,dx = \left|\frac{(2x)^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{2}\right|_0^2 = \frac{2}{3}$.
7. $\dfrac{y'}{y^2+1} = 3x^2 + 1$, $\arctan y = x^3 + x + c$; $y(0) = 0$ implica $c = 0$, e quindi $y = \tan(x^3 + x)$.
8. $y = e^{-x}(\alpha + \beta x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Si tratta della circonferenza (piena!) di centro $(-1, 1)$ e raggio 1.
2. Usando $e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4+o(t^4)$ si ottiene $e^{-x^3} = 1-x^3+\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{6}x^9+\frac{1}{24}x^{12}+o(x^{12})$.
3. 0 e $+\infty$.
4. $\displaystyle\int_0^1 1 - \frac{4}{x^2+1}dx = \Big|x - 4\arctan x\Big|_0^1 = 1 - \pi$.
5. Per parti: $\dfrac{x}{2}\sin(2x) + \dfrac{1}{4}\cos(2x)$.
6. $\displaystyle A = \int_0^1 \sqrt{x} - x\,dx = \left|\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{6}$.
7. $\dfrac{y'}{y^2+1} = e^x$, $\arctan y = e^x + c$; $y(0) = 0$ implica $c = -1$, e quindi $y = \tan(e^x - 1)$.
8. $y = e^{-x}(\alpha\cos x + \beta\sin x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

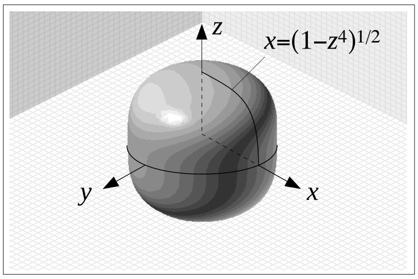
SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. Tramite il cambio di variabile $e^x = t$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{|3e^{2x} - e^x|}{e^{2x} - e^x - 6}dx &= \int_0^1 \frac{|3t-1|}{t^2-t-6}dt \\ &= \int_0^{1/3} \frac{1-3t}{t^2-t-6}dt + \int_{1/3}^1 \frac{3t-1}{t^2-t-6}dt\end{aligned}$$

e siccome $\dfrac{3t-1}{t^2-t-6} = \dfrac{8/5}{t-3} + \dfrac{7/5}{t+2}$ ha come primitiva $\dfrac{8}{5}\log|t-3| + \dfrac{7}{5}\log|t+2|$,

$$\begin{aligned}&= -\left|\frac{8}{5}\log|t-3| + \frac{7}{5}\log|t+2|\right|_0^{1/3} + \left|\frac{8}{5}\log|t-3| + \frac{7}{5}\log|t+2|\right|_{1/3}^1 \\ &= 9\log 3 - \frac{33}{5}\log 2 - \frac{14}{5}\log 7 \simeq -0,136\ .\end{aligned}$$



2. Conviene considerare le sezioni di A lungo l'asse z. Infatti, fissato $z \in \mathbb{R}$, A_z è l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 + y^2 \le 1 - z^4$, e dunque si tratta dell'insieme vuoto se $1 - z^4 < 0$, ovvero se $|z| > 1$, e del cerchio (pieno) di centro l'origine e raggio $\sqrt{1 - z^4}$ se $|z| \le 1$. Questo permette di tracciare una raffigurazione sommaria di A (figura a lato); si noti tuttavia che per calcolare il volume questo non è necessario, ed infatti

$$\mathrm{vol}(A) = \int_{-1}^{1} \mathrm{area}(A_z)\, dz = \int_{-1}^{1} \pi(1 - z^4)\, dz = \frac{8\pi}{5} \ .$$

3. Usiamo lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange di e^t all'ordine 2:

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{e^\xi}{6}t^3 \ .$$

Per $t \le 0$ si ha $t \le \xi \le 0$, e quindi $0 \le e^\xi \le 1$ e

$$\left| e^t - \Big(1 + t + \frac{t^2}{2}\Big) \right| \le \left| \frac{t^3}{6} \right| \ .$$

Sostituendo $t = -x^2$, ed integrando per x compreso tra 0 e 1/10 otteniamo

$$\left| \int_0^{1/10} e^{-x^2} dx - \int_0^{1/10} 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} dx \right| \le \int_0^{1/10} \frac{x^6}{6}\, dx$$

ovvero

$$\left| \int_0^{1/10} e^{-x^2} dx - \Big(\frac{1}{10} - \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{10^6}\Big) \right| \le \frac{1}{42 \cdot 10^7} < \frac{1}{10^8} \ .$$

Pertanto l'integrale vale $\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{3 \cdot 10^3} + \dfrac{1}{10^6} \pm 10^{-8} = 0,0996676 \pm 10^{-8}$.

4. a) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea $y'' + 5y' + 4y = 0$ è $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 4)(\lambda + 1)$, e quindi la soluzione generale è

$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = 2e^x$ della forma $a\, e^x$, e si ottiene $a = 1/5$. Si cerca poi una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = \sin x$ della forma $a \sin x + b \cos x$, e si ottiene $a = 3/34$ e $b = -5/34$. Dunque la soluzione generale dell'equazione (*) con $a = 3$ e $c(x) = 2e^x + \sin x$ è

$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} + \frac{e^x}{5} + \frac{3 \sin x - 5 \cos x}{34} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = 2x^2$ della forma $ax^2 + bx + c$, e si ottiene l'identità $4ax^2 + (10a + 4b)x + (2a + 5b + c) = 2x^2$, che dà luogo al sistema

$$\begin{cases} 4a = 2 \\ 4b = -10a \\ 4c = -2a - 5b \end{cases} , \qquad \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -5/4 \\ c = 21/16 \end{cases} .$$

Quindi la soluzione generale di (*) con $a = 3$ e $c(x) = 2x^2$ è

$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} + \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{4} + \frac{21}{16} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Siccome e^{-x} ed e^{-4x} convergono entrambi a zero per $x \to +\infty$, la parte principale di *tutte* le soluzioni è $x^2/2$.

c) Siccome le soluzioni dell'equazione omogenea tendono a zero come degli esponenziali per $x \to +\infty$, la parte principale di *tutte* le soluzioni è la stessa, e corrisponde a quella di una soluzione particolare. Dato $c(x) = \sum_0^k c_h x^h$ polinomio di grado k (per cui $c_k \neq 0$), cerchiamo una soluzione particolare tra i polinomi di grado k, ovvero della forma $\bar{y} = \sum_0^k a_h x^h$. L'equazione si riduce allora alla seguente identità di polinomi:

$$\sum_{h=0}^{k} \big[(h+2)(h+1)a_{h+2} + 5(h+1)a_{h+1} + 4a_h\big]x^h = \sum_{h=0}^{k} c_h x^h \ ,$$

dove si è posto $a_h = 0$ quando $h > k$. Otteniamo pertanto il sistema

$$\begin{cases} 4a_k = c_k \\ 4a_{k-1} = c_{k-1} - 5ka_k \\ 4a_{k-2} = c_{k-2} - 5(k-1)a_{k-1} - k(k-1)a_k \\ \quad \vdots \\ 4a_h = c_h - 5(h+1)a_{h+1} - (h+2)(h+1)a_{h+2} \\ \quad \vdots \\ 4a_0 = c_0 - 5a_1 - 2a_2 \ . \end{cases}$$

Questo sistema è chiaramente risolubile, e quindi esiste una soluzione particolare della forma cercata. Inoltre, la prima equazione permette di determinare il termine di ordine più alto di $\bar{y}$, e cioè $\frac{c_k}{4}x^k$, che risulta essere la parte principale per $x \to +\infty$ di *tutte* le soluzioni.

d) Data l'equazione omogenea $y'' + Ay' + By = 0$, le soluzioni sono sempre combinazioni lineari di (I) $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$, (II) $e^{\lambda x}$ e $xe^{\lambda x}$, (III) $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$.
Nel primo e nel secondo caso le soluzioni non sono mai tutte limitate. Nel terzo caso, le soluzioni sono limitate se e solo se $\alpha = 0$, cioè se il polinomio caratteristico ha soluzioni immaginarie pure, vale a dire è della forma $\lambda^2 + \beta^2$, cosa che si verifica per $A = 0$ e $B > 0$. Imponendo queste condizioni nell'equazione $(*)$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a^2 - 4 = 0 \\ a + 1 > 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} a^2 = \pm 2 \\ a + 1 > 0 \end{cases} , \quad a = 2 \ .$$

Seconda parte, gruppo B

1. Come per il gruppo A: tramite il cambio di variabile $e^x = t$ otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} \frac{|-2e^{2x} + e^x|}{e^{2x} + e^x - 6}dx &= \int_0^1 \frac{|-2t+1|}{t^2+t-6}dt \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1-2t}{t^2+t-6}dt + \int_{1/2}^{1} \frac{2t-1}{t^2+t-6}dt \end{aligned}$$

e siccome $\dfrac{2t-1}{t^2+t-6} = \dfrac{7/5}{t+3} + \dfrac{3/5}{t-2}$ ha come primitiva $\dfrac{7}{5}\log|t+3| + \dfrac{3}{5}\log|t-2|$,

$$= -\Big|\frac{7}{5}\log|t+3| + \frac{3}{5}\log|t-2|\Big|_0^{1/2} + \Big|\frac{7}{5}\log|t+3| + \frac{3}{5}\log|t-2|\Big|_{1/2}^{1}$$
$$= \frac{1}{5}\log 3 + \frac{37}{5}\log 2 - \frac{14}{5}\log 7 \simeq -0,099\ .$$

2. Si procede come per il gruppo A:
$$\mathrm{vol}(A) = \int_{-1}^{1} \mathrm{area}(A_z)\, dz = \int_{-1}^{1} \pi(1-z^6)\, dz = \frac{12\pi}{7}\ .$$

3. Uguale al gruppo A.

4. a) La soluzione generale dell'equazione omogenea $y'' + 5y' + 4y = 0$ è $y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = 2e^{-x}$ della forma $a\, xe^{x}$ (perché e^{-x} già risolve l'equazione omogenea), e si ottiene $a = 2/3$. Poi si procede come per il gruppo A, e si ottiene che la soluzione generale di (*) con $a = 3$ e $c(x) = 2e^{-x} + \sin x$ è
$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} + \frac{2x\, e^{x}}{3} + \frac{3\sin x - 5\cos x}{34} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
b) Si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = x^2$ della forma $ax^2 + bx + c$, e alla fine si ottiene che la soluzione generale di (*) con $a = 3$ e $c(x) = x^2$ è
$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} + \frac{x^2}{4} - \frac{5x}{8} + \frac{21}{32} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$
la cui parte principale è $x^2/4$.
c) e d) sono uguali al gruppo A.

COMMENTI

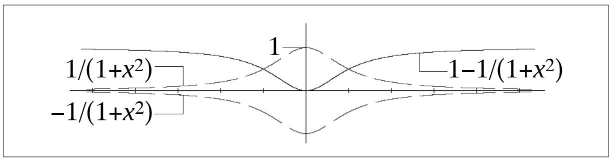
- Prima parte: molti errori nell'esercizio 1.
- Seconda parte, esercizio 1: alcuni non si sono accorti che per liberarsi del modulo che appare al numeratore dell'integranda basta spezzare l'intervallo di integrazione in due (oppure hanno ignorato il problema, decidendo che il segno è costante nell'intervallo di integrazione).
- Seconda parte, esercizio 3: il punto dell'esercizio è, sostanzialmente, trovare l'espansione di Taylor di e^{-x^2} di grado *più basso* il cui integrale differisce da quello di e^{-x^2} per meno di 10^{-7}, giustificando rigorosamente la risposta. In effetti basta usare i primi tre termini dello sviluppo, vale a dire, $1 - x^2 + x^4/2$. Prendere invece i primi quattro o cinque termini e dichiarare che "ovviamente" l'errore è nei limiti richiesti, vuol dire mancare il punto dell'esercizio (pur essendo la risposta corretta).
- Seconda parte, esercizio 4a): alcuni si sono limitati ad esibire una soluzione particolare. Per quanto questo sia formalmente corretto, il punto dell'esercizio sarebbe invece di spiegare COME si è arrivati a tale soluzione ...
- Seconda parte, esercizio 4b: alcuni hanno calcolato la parte principale della soluzione per $x \to 0$ invece che per $x \to +\infty$. Altri non si sono accorti che la parte principale di tutte le soluzioni è la stessa, e che quindi non c'è bisogno di calcolare la soluzione che soddisfa i dati iniziali indicati. Altri ancora hanno calcolato detta soluzione e poi hanno omesso di indicarne la parte principale.

- Seconda parte, esercizio 4b): è opinione diffusa che $9 + 25 = 36 \ldots$
- Seconda parte, esercizio 4c): se si parte dall'assunto che *di sicuro* c'è una soluzione particolare tra i polinomi di grado k, è allora facile vedere che il termine di grado massimo deve essere uguale a quello di $c(x)$ diviso per 4. Dimostrare quest'assunto è più difficile.

Scritto del primo appello, 13 gennaio 2003

Prima parte, gruppo A

1. $\sin x \le 1/2$, ovvero $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Big[\Big(\dfrac{5}{6}+2n\Big)\pi, \Big(\dfrac{13}{6}+2n\Big)\pi\Big]$.
2. Si tratta del (ben noto!) grafico di $1/(1+x^2)$ riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato in basso di 1.



3. $\displaystyle\int 9x^2 \log x\, dx = 3x^2 \log x - \int 3x^3 \frac{1}{x}\, dx = 3x^3 \log x - x^3 = x^3(3\log x - 1)$.
4. $1000^{10} = 10^{30} < 100! < 100^{150} = 10^{300}$.
5. $1 + \sin(ax) - e^{3x} = (a-3)x - \dfrac{9}{2}x^2 + o(x^2)$. Il limite è finito per $a = 3$, e vale $-\frac{9}{2}$.
6. $\dfrac{y'}{1+y} = \sin x$, $\log|1+y| = c - \cos x$ e deve essere $c = 1$. Quindi $e^{1-\cos x} - 1$.
7. $y = \alpha^{-2x} + \beta e^{-x} + e^x$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
8. $\frac{(2x^7+1)^{1/5}-(x^7+1)^{1/5}}{(2x^{35}+1)^{1/25}-(x^{21}+1)^{1/15}} = \frac{\big(1+\frac{2}{5}x^7+o(x^7)\big)-\big(1+\frac{1}{5}x^7+o(x^7)\big)}{\big(1+\frac{2}{25}x^{35}+o(x^{35})\big)-\big(1+\frac{1}{15}x^{21}+o(x^{21})\big)} = \frac{\frac{1}{5}x^7+o(x^7)}{-\frac{1}{15}x^{21}+o(x^{21})} \sim -\frac{3}{x^{14}}$.
   Quest'ultima funzione tende a $-\infty$ in per $x \to 0$ (la potenza è pari!).

Prima parte, gruppo B

1. $\sin x < 1/2$, ovvero $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Big]\Big(\dfrac{5}{6}+2n\Big)\pi, \Big(\dfrac{13}{6}+2n\Big)\pi\Big[$.
2. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'origine (oppure del grafico di e^{-x} riflesso rispetto all'asse delle y) e traslato a destra di 1.
3. $x^4(4\log x - 1)$.
4. $1000^{20} = 10^{60} < 100! < 100^{500} = 10^{1000}$.
5. Come il gruppo A.
6. Come il gruppo A.
7. $y = (\alpha + \beta x)e^{-x} + e^x$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
8. Come il gruppo A.

Seconda parte, gruppo A

1. Ponendo $f(x) := x^3/(x-1)$, l'equazione può essere riscritta come $f(x) = a^2$. Siccome $f'(x) = x^2(2x-3)/(x-1)^2$, possiamo studiare gli intervalli di monotonia della funzione: f è (strettamente) decrescente in $(-\infty, 1)$, con limiti $\pm\infty$ agli estremi (e quindi l'equazione $f(x) = a^2$ ha una ed una sola soluzione per ogni a), f è decrescente in $(1, 3/2]$ con limite $+\infty$ in 1, e valore $27/4$ in $3/2$ (quindi l'equazione ha una ed una sola soluzione per $a^2 \ge 27/4$), infine f è crescente in $(3/2, +\infty)$ (quindi l'equazione ha una ed una sola soluzione per

$a^2 > 27/4$). Concludendo, l'equazione ha una soluzione per $a^2 < 27/4$, due per $a = 27/4$ e tre per $a > 27/4$.

2. a) La soluzione generale dell'equazione omogenea è $y = ae^{-x} + be^{3x}$ con $a, b \in \mathbb{R}$; cercando una soluzione particolare del tipo $y = ax + b$ otteniamo $a = -2/3$ e $b = -11/9$, e dunque la soluzione della non omogenea è

$$y = ae^{-x} + be^{3x} - \frac{6x + 11}{9}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, ed il suo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine 2 è

$$y = \Big(a + b - \frac{11}{9}\Big) + \Big(- a + 3b - \frac{2}{3}\Big)x + \frac{a + 9b}{2}x^2 + o(x^2) \ .$$

Dunque l'ordine di infinitesimo è massimo quando si annullano i primi due termini, vale a dire, per $a = 3/4$ e $b = 17/36$, nel qual caso la parte principale di y è $5x^2/2$.

b) – c) Esiste tuttavia un'approccio più semplice che funziona per g qualunque e che non consiste nel risolvere esplicitamente l'equazione. Infatti, data una funzione $y(x)$, il suo sviluppo di Taylor al secondo ordine in 0 è $y(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)x^2/2 + o(x^2)$, ed in particolare abbiamo un'infinitesimo di ordine 2 (o più) solo se

$$y(0) = y'(0) = 0 \ . \tag{$**$}$$

D'altra parte, c'è solo una soluzione dell'equazione $(*)$ che soddisfa queste condizioni, ed è necessariamente quella con ordine di infinitesimo maggiore. Inoltre, una volta noti $y(0)$ ed $y'(0)$, la $(*)$ permette di ottenere $y''(0)$:

$$y''(0) = f(0) + 3y(0) + 2y'(0) = g(0) \ .$$

e ricordando la $(**)$, lo sviluppo al secondo ordine di y diventa

$$y(x) = \frac{g(0)}{2}x^2 + o(x^2) \ .$$

Questo risolve il problema quando $g(0) \neq 0$. Se invece $g(0) = 0$, sappiamo solo che y ha ordine di infinitesimo tre o più, e dobbiamo quindi calcolare le successive derivate di y. Per fare questo, basta osservare che derivando k volte l'equazione $(*)$ si ottiene

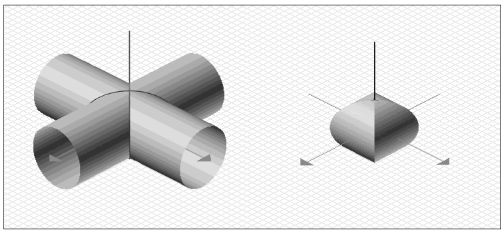
$$y(k + 2)(0) = g^{(k)}(0) + 3y^{(k)}(0) + 2y^{(k+1)}(0) \ .$$

Se allora g ha tutte le derivate in 0 nulle fino all'n-esima esclusa, si vede che y ha tutte le derivate in 0 nulle fino all'$(n + 2)$-esima esclusa, mentre la $(n + 2)$-esima è uguale a $g^{(n)}(0)$. Quindi

$$y(x) = \frac{g^{(n)}(0)}{(n + 2)!}x^{n+2} + o(x^{n+2}) \ .$$

In particolare, per $g(x) = x^n$ otteniamo $y(x) = (n + 2)(n + 1)x^{n+2} + o(x^{n+2})$. Infine, se g ha tutte le derivate in 0 nulle (e questo può succedere anche se g non è la funzione zero), lo stesso vale per y, che ha quindi ordine di infinitesimo $+\infty$.

3. Gli insiemi C e C' sono due cilindri illimitati (pieni) di raggio 1 ed assi z e y, rispettivamente. Il solido C'', viceversa, è difficile da disegnare (vedi figura sotto).



Tuttavia si vede immediatamente che l'intersezione di C'' con il piano di equazione $x = a$ consiste dei punti (a, y, z) tali che $y^2 \leq 1 - a^2$ e $z^2 \leq 1 - a^2$. Nel piano yz, queste due disuguaglianze descrivono il quadrato con centro l'origine e lato $2\sqrt{1 - a^2}$ (se $|a| \leq 1$, altrimenti si ha l'insieme vuoto). Quindi

$$\mathrm{vol}(C'') = \int_{-1}^{1} \mathrm{area}(C''_a)\, da = \int_{-1}^{1} 4(1 - a^2)\, da = \frac{16}{3}\ .$$

4. Studiamo la funzione $f(x) = \tan x - ax$ nell'intervallo $[0, \pi/2)$. Si vede facilmente che per $a \leq 1$, $f'(x) = 1/\cos^2 x - a > 0$ per ogni $x > 0$, e quindi la funzione è strettamente crescente, e siccome $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x > 0$. Invece, se $a > 1$, $f'(x)$ è negativa per $x \leq \arccos(1/\sqrt{a})$ e positiva altrimenti, e quindi la funzione è strettamente decrescente in $I_1 := [0, \arccos(1/\sqrt{a})]$, e strettamente crescente in $I_2 := [\arccos(1/\sqrt{a}), \pi/2)$. In particolare, siccome $f(0) = 0$, f è negativa nel resto di I_1, assume un valore negativo nell'estremo sinistro di I_2 e tende a $+\infty$ in quello destro, e quindi assume il valore 0 una ed una sola volta in I_2.

   Riassumendo, il numero di soluzioni dell'equazione $\tan x = ax$ in $(0, \pi/2)$ è zero per $a \leq 1$, ed uno per $a > 1$. Inoltre, per $a > 1$, la soluzione x_a soddisfa $x_a > \arccos(1/\sqrt{a})$ e quindi tende a $\pi/2$ per $a \to +\infty$.

   Volendo precisare ulteriormente, se scriviamo x come $\pi/2 - y$, l'equazione diventa

$$g(y) = \frac{1}{a} \quad \text{dove si è posto } g(y) := \Big(\frac{\pi}{2} - y\Big) \tan y\ .$$

   Sostituendo a $g(y)$ il suo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine 1, e cioè $\pi y/2$, otteniamo $y \sim 2/(\pi a)$ per $a \to +\infty$ (rendere rigoroso quest'ultimo passaggio non è però così facile). Concludendo,

$$x_a = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi a} + o(1/a)\ .$$

Seconda parte, gruppo B

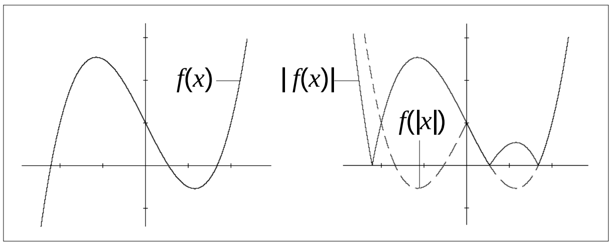
1. Prendo $f(x) := x^3/(x-1)$, come per il gruppo A, e l'equazione diventa $f(x) = -a^2$. Siccome $-a^2 < 27/4$ per ogni a, l'equazione ha sempre una ed una sola soluzione.
2. Si procede come per il gruppo A. Anzi, le domande b) e c) sono le stesse, mentre per la a) si ottiene $y(x) = x^2/2 + o(x^2)$.
3. Uguale al gruppo A.
4. Uguale al gruppo A.

Commenti

- Prima parte, esercizio 5: molti hanno calcolato il limite applicando de L'Hôpital due volte, ed ottenendo quindi $-9/2$ qualunque sia a. Il problema è questo: dopo il primo passaggio si ha di nuovo una forma indeterminata solo quando $a = 3$; in tutti gli altri casi non si può più applicare de L'Hôpital.
- Prima parte, esercizio 6: molti hanno posto automaticamente a zero la costante che appare nella soluzione dell'equazione a variabili separabili, invece di usare la condizione iniziale per determinare quella giusta.
- Seconda parte, esercizio 2a): molti hanno calcolato la soluzione generale dell'equazione omogenea, ne hanno scritto lo sviluppo di Taylor all'ordine 2, ma poi non hanno determinato per quali valori del parametro il suo ordine di infinitesimo risultava massimo.
- Seconda parte, esercizio 3b): in molti hanno cercato di determinare la sezione di C'' a partire dal disegno. Invece, si trattava di procedere analiticamente. Altri sono stati messi in crisi dal sistema di disequazioni $y^2 \leq 1 - a^2$ e $z^2 \leq 1 - a^2$, e se la sono cavata osservando che questo implica (giustamente) $y^2 + z^2 \leq 2 - 2a^2$. Purtroppo questo significa che la sezione cercata è *contenuta* in un cerchio pieno di raggio $\sqrt{2 - 2a^2}$, ma non che è uguale!
- Seconda parte, esercizio 4: si poteva cercare di risolvere l'esercizio dimostrando che la funzione $f(x) := \tan x/x$ è crescente. Per quanto ne so, questo è però difficile da dimostrare.

PRIMA PARTE

1. Una primitiva f è data da $f(x) := e^x - 1$ per $x \geq 0$ e $f(x) := -e^{-x} + 1$ per $x < 0$. Infatti f deve essere della forma $e^x + a$ per $x \geq 0$ e della forma $-e^{-x} + b$ per $x \leq 0$, quindi a e b devono essere scelti in modo tale che le due funzioni coincidano in 0, vale a dire $a+1 = b-1$.
2. Deve essere $x^2 - 1 \geq 0$, ovvero $x \geq 1$ e $x \leq -1$.
3. $\dfrac{\sin(x^8)}{\log(1+x^4)} = \dfrac{x^8 + o(x^{23})}{x^4 + o(x^7)} \sim x^4$.
4. $\dfrac{\sin(ax) - x}{x^3} = \dfrac{(a-1)x + o(x^2)}{x^2}$. Il limite è finito solo per $a = 1$, e in tal caso vale 0.
5. Sono $+\infty$ e 0, rispettivamente.
6. $\displaystyle\int_{-2}^{6} \sqrt[3]{x+2}\, dx = \int_0^8 t^{1/3}\, dt = \left| \frac{3}{4} t^{4/3} \right|_0^8 = 12.$
7. La soluzione generale dell'equazione è $y = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Le condizioni iniziali danno $y = \cos(2x) - \sin(2x)$.
8.



SECONDA PARTE

1. a) La funzione f tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$, e studiandone la derivata si vede che è strettamente decrescente per $x \leq x_\lambda$, e strettamente crescente per $x \geq x_\lambda$, dove $x_\lambda := \lambda/(1-\lambda)$. Dunque il valore minimo viene assunto in x_λ, ed è

$$C_\lambda := f(x_\lambda) = \frac{1}{\lambda^\lambda (1-\lambda)^{1-\lambda}}$$

b) Dividendo entrambe i termini per b e ponendo $a/b = x$, la disequazione $a + b \geq C a^\lambda b^{1-\lambda}$ può essere riscritta come $x + 1 \geq C x^\lambda$, ovvero $f(x) \geq C$. La miglior costante è dunque il minimo dei valori $f(x)$ per $x > 0$, e cioè C_λ.

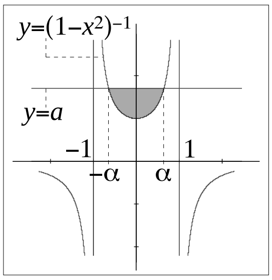
c) Si procede come nel punto b): la costante migliore è allora il minimo dei valori $f(x)$ con x rapporto di interi positivi, ovvero con x razionale positivo. Siccome f è continua ed i razionali approssimano i reali, tale valore minimo è di nuovo C_λ (per essere precisi, dovremmo parlare in questo caso dell'estremo inferiore dei valori $f(x)$ con x razionale positivo, in quanto il punto x_λ in cui f raggiunge il valore C_λ potrebbe non essere razionale).

d) Si procede come nel punto b): la costante migliore è allora il minimo dei valori $f(x)$ con x rapporto di potenze intere positive di 2, ovvero con x della forma 2^n con n intero relativo. Per $\lambda = 3/4$, $x_\lambda = 3$, che non è una potenza di 2. Dunque il valore minimo viene raggiunto in 2 oppure in 4. Siccome $f(2) = 2^{1/4}/2$ è minore di $f(4) = 2^{1/2} \cdot 3/4$, la costante cercata è $f(2) = 2^{1/4}/2$.

2. b) Per $c = 0$, l'equazione $(*)$ è lineare omogenea del secondo ordine, e dunque l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2; basta dunque trovarne due linearmente indipendenti (cioè che non siano una multipla dell'altra). Prendendo y della forma x^λ, l'equazione diventa $(\lambda^2 - a)x^{\lambda-2} = 0$, ed è verificata se e solo se $\lambda^2 = a$. Dunque, per $a > 0$, due soluzioni di $(*)$ sono $x^{\pm\sqrt{a}}$, e la soluzione generale è
$$y = \alpha x^{\sqrt{a}} + \beta x^{-\sqrt{a}} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Per $a < 0$, le radici di a sono immaginarie: $\pm i\sqrt{-a}$. Quindi
$$x^{\pm i\sqrt{-a}} = e^{\pm i\sqrt{-a}\,\log x} = \cos(\sqrt{-a}\,\log x) \pm i \sin(\sqrt{-a}\,\log x)\ .$$
La soluzione generale di $(*)$ è
$$y = \alpha \cos(\sqrt{-a}\,\log x) + \beta \sin(\sqrt{-a}\,\log x) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Per $a = 0$, l'equazione diventa $y'' - y/x = 0$, e ponendo $y' = z$ otteniamo l'equazione a variabili separabili $z' = z/x$, che ha per soluzione $z = \alpha/x$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Infine
$$y = \alpha \log x + \beta \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
c) Per risolvere l'equazione non omogenea, basta trovare una soluzione particolare. Prendendo y della forma $y = \gamma x^3$, l'equazione diventa $(9 - a)\gamma x = x$ (la scelta dell'esponente 3 è obbligata dal fatto che il termine a sinistra dell'equazione deve essere un multiplo di x). Dunque, per $a \neq 9$, la soluzione generale è
$$y = \alpha x^{\sqrt{a}} + \beta x^{-\sqrt{a}} + \frac{1}{9-a}x^3 \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Per $a = 9$, si può ricorrere alla riduzione dell'ordine (omettiamo i conti).

3. Usando lo sviluppo di Taylor di $\log(1 + x)$ all'ordine 3 per $x := 2/10$ otteniamo
$$\log\Big(\frac{12}{10}\Big) = \frac{2}{10} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{100} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{1000} + R_3\Big(\frac{2}{10}\Big)$$
e
$$\Big|R_3\Big(\frac{2}{10}\Big)\Big| = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^4}\cdot\frac{16}{10^4} \leq \frac{4}{10^4} < 10^{-3}\ .$$

4. Siccome $-x^2+4x-3 = -(x-2)^2+1$, ed il problema è chiaramente invariante per traslazioni orizzontali, possiamo sostituire la curva $y = (-x^2+4x-3)^{-1}$ con $y = (1-x^2)^{-1}$. Poiché $1-x^2$ è positiva nell'intervallo $(-1, 1)$, nulla in ± 1 e negativa altrove, il grafico di $(1-x^2)^{-1}$ risulta essere come in figura. A questo punto, la regione che ci interessa è vuota per $a < 1$, mentre per $a \geq 1$ la sua area è data dal seguente integrale, dove si è posto $\alpha := \sqrt{1 - 1/a}$:

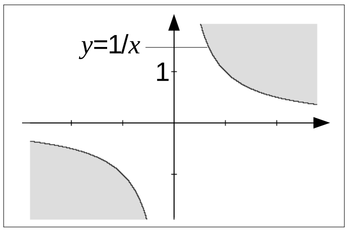


$$A = \int_{-\alpha}^{\alpha} a - \frac{1}{1-x^2}\,dx = 2\alpha a + \int_0^\alpha \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= 2\alpha a + \log\Big(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\Big)\ .$$

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 1: moltissimi errori.
- Seconda parte, esercizio 2: una soluzione più elegante si ottiene con il cambio di variabile $t = \log x$. Ponendo infatti $z(t) = z(\log x) = y(x)$, l'equazione $(*)$ diventa $z'' - az = c(e^t)\,e^{2t}$, che è lineare a coefficienti costanti.

PRIMA PARTE



1. Deve essere $\log(x^3+1) \geq 0$, cioè $x^3+1 \geq 1$, cioè $x \geq 0$.
2. Usando il cambio di variabli $y = x^2$ si ottiene $\frac{1}{2}\log(1+x^2)$.
3. La funzione è uguale a x^2, ed ha derivata $2x$.
4. Si tratta della zona in grigio nella figura accanto.
5. La funzione $x\cos x$ è dispari, quindi l'integrale è 0.
6. $f'(x) = 3(x^2-2x-3)e^{x^3-3x^2-9x+1}$ si annulla in -1 (massimo locale) e 3 (minimo locale).
7. Si tratta dell'equazione a variabili separabili $\dot{y}/y^2 = -2x$, per cui $-1/y = c-x^2$. Ricordando che $y = 1$ per $x = 0$, abbiamo allora $-1/y = 1-x^2$, ovvero $y = 1/(x^2-1)$.
8. Rispettivamente 0, 0 e 1.

SECONDA PARTE

1. L'intersezione V_z di V con il piano parallelo al piano xy e passante per il punto $z > 0$ è l'insieme dei punti (x, y, z) tali che $z \leq e^{-x^2-y^2}$, ovvero $x^2+y^2 \leq -\log z$. In altre parole, l'insieme vuoto per $z > 1$, ed un cerchio (pieno) di raggio $\sqrt{-\log z}$ per $0 < z < 1$. Pertanto il volume di V è

$$\mathrm{vol}(V) = \int_0^1 \mathrm{area}(V_z)\, dz = \int_0^1 \pi(-\log z)\, dz = \pi \Big| z(1-\log z) \Big|_0^1 = \pi \ .$$

2. La soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{y} + 4y = 0$ è $y = \alpha\sin(2x) + \beta\cos(2x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. A questo punto, le soluzioni dell'equazione non omogenea

$$\ddot{y} + 4y = \sin(ax) \tag{1}$$

sono della forma

$$y = \bar{y} + \alpha\sin(2x) + \beta\cos(2x)$$

dove $\bar{y}$ è una qualunque soluzione particolare della (1). Pertanto, se $\bar{y}$ è limitata (risp. illimitata), allora *tutte* le soluzioni della (1) sono limitate (risp. illimitate) a prescindere dai dati iniziali. Cerchiamo ora una soluzione particolare della (1) del tipo

$$\bar{y} = \gamma\sin(ax) + \delta\cos(ax) \ .$$

L'equazione diventa allora

$$(\gamma(-a^2+4) - 1)\sin(ax) + \delta(-a^2+4)\cos(ax) = 0 \tag{2}$$

che è verificata se (e solo se) γ e δ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \gamma(-a^2+4) - 1 = 0 \ , \\ \delta(-a^2+4) = 0 \ . \end{cases}$$

Per $a = \pm 2$ il sistema non è risolubile perché la prima equazione diventa $-1 = 0$. Per $a \neq \pm 2$, invece, il sistema ammette una ed una sola soluzione $\gamma = 1/(4-a^2)$ e $\delta = 0$. Ma allora $\bar{y}$, e di conseguenza *tutte* le soluzioni della (1), sono limitate.

Non resta che considerare i casi $a = \pm 2$. Proviamo a cercare una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y} = \gamma x \sin(ax) + \delta x \cos(ax) \ .$$

Ricordando che $a^2 = 4$, l'equazione diventa allora

$$-(2a\delta + 1)\sin(ax) + 2a\gamma\cos(ax) = 0$$

che è verificata per $\gamma = 0$ e $\delta = -1/(2a)$. Siccome $\bar{y}$ è una funzione illimitata, ne deduciamo che per $a = \pm 2$ *tutte* le soluzioni di (1) sono illimitate.

3. I punti del grafico di ascissa x sono della forma $(x, 1/(1+x^2))$, e la loro distanza dall'origine (al quadrato) è

$$g(x) = x^2 + \frac{1}{(1+x^2)^2} \ .$$

Osserviamo ora che minimizzare la distanza o il suo quadrato è la stessa cosa. Inoltre, essendo g una funzione pari, possiamo limitarci a trovare i punti di minimo per $x \geq 0$. La derivata di g è

$$g'(x) = 2x\left(1 - \frac{2}{(1+x^2)^3}\right)$$

che si annulla per $x = 0$ e per $(1+x^2)^3 = 2$, ovvero $x = \sqrt{\sqrt[3]{2} - 1}$, e dallo studio del segno si vede che g decresce prima di quest'ultimo punto, e cresce dopo, e quindi si tratta del punto di minimo assoluto. Pertanto i punti del grafico di f che minimizzano la distanza dall'origine sono quelli di ascissa

$$\pm\sqrt{\sqrt[3]{2} - 1} \ .$$

4. a) Un calcolo diretto dà $(1+x)^a = 1 + ax + \dfrac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$.

b) Raccogliendo x^a ed utilizzando lo sviluppo al punto a) otteniamo

$$\begin{aligned}
&(x+1)^a + (x-1)^a - 2x^a = \\
&\quad = x^a\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^a + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^a - 2\right] \\
&\quad = x^a\left[1 + \frac{a}{x} + \frac{a(a-1)}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 1 - \frac{a}{x} + \frac{a(a-1)}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\right] \\
&\quad = a(a-1)\, x^{a-2} + o(x^{a-2}) \ .
\end{aligned}$$

Quindi la parte principale cercata è $a(a-1)\, x^{a-2}$.

c) Usando il punto b) ed il principio di sostituzione degli infinitesimi si ottiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^3+1)^a + (x^3-1)^a - 2x^{3a}}{x^5} = \lim_{x \to +\infty} a(a-1)x^{a-7} = \begin{cases} +\infty & \text{per } a > 7, \\ 42 & \text{per } a = 7, \\ 0 & \text{per } a < 7. \end{cases}$$

Commenti

- Prima parte: molti errori negli esercizi 1 e 4, e questo è grave perché si tratta di nozioni di base! Stranamente, quasi nessuno ha fatto il 6, che pure è molto semplice.
- Seconda parte, esercizio 2: alcuni hanno risolto l'equazione omogenea, e poi hanno trovato una soluzione particolare della non omogenea della forma $\bar{y} = \gamma \sin(ax) + \delta \cos(ax)$ senza accorgersi che qualcosa ve storto per $a = \pm 2$.
- Seconda parte, esercizio 3: alcuni hanno studiato la funzione $f(x)$, cosa che non era minimamente richiesta, e alla fine hanno detto che il punti di minima distanza dall'origine del grafico era quello di ascissa 0 (che non è vero) senza neanche darsi la pena di giustificarlo.
- Seconda parte, esercizio 4: tutti hanno fatto il punto a) – e ci mancherebbe! – senza poi capire come usarlo per fare i punti b) e c).

SCRITTO DEL QUARTO APPELLO, 10 LUGLIO 2003

PRIMA PARTE

1. Deve essere $2 - |x+1| \geq 0$, ovvero $-3 \leq x \leq 1$.
2. Siccome $D(\log(x^x)) = D(x \log x) = \log x + 1$.
3. Per parti: $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx = \Big| - xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = \Big| - e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$.
4. $\log|\sin x - 1|$.
5. rispettivamente 1, $+\infty$, 0.
6. $dps \sin(x^3+x^9) = (x^3+x^9) - \frac{1}{6}(x^3+x^9)^3 + o\big((x^3+x^9)^4\big) = x^3 + \frac{5}{6}x^9 + o(x^{12})$.
7. L'equazione si riscrive come $(xy)' = e^x$, ovvero $xy = e^x + a$, ovvero $y = \dfrac{e^x + a}{x}$ con $a \in \mathbb{R}$.

SECONDA PARTE

1. Usando gli sviluppi di Taylor in 0 di e^t e $\cos t$ all'ordine 2 e 4 rispettivamente otteniamo

$$e^{-1/x} - \cos\Big(\frac{a}{\sqrt{x}}\Big) = \Big[1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big] - \Big[1 - \frac{a^2}{2x} + \frac{a^4}{24x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big]$$

$$= \frac{a^2-2}{2x} + \frac{12-a^4}{24x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) \sim \begin{cases} \dfrac{a^2-2}{2x} & \text{per } a \neq \pm\sqrt{2}, \\ \dfrac{1}{3x^2} & \text{per } a = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

2. Usando lo sviluppo di Taylor di $\sin x$ all'ordine 1 in 0 otteniamo

$$\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x(1+x)}{x(1+x)\sin x} = \frac{-x^2 + o(x^2)}{x(1+x)\sin x}$$

e per il principio di sostituzione degli infinitesimi

$$\lim_{x\to 0}\Big[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{\sin x}\Big] = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x \cdot 1 \cdot x} = -1 \ .$$

3. Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea è $\lambda^2 + 2\lambda + 2$, con zeri $\lambda = -1 \pm i$. La soluzione generale dell'omogenea è dunque

$$y = e^{-x}(a\cos x + b\sin x) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della non omogenea del tipo $\bar{y} = c\sin x + d\cos x$. Sostituendo nell'equazione si ottiene che c e d devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} c - 2d = 1 \\ 2c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1/5 \\ d = -2/5 \end{cases}$$

Quindi una soluzione particolare è $\bar{y} = \frac{1}{5}(\sin x - 2\cos x)$, e la soluzione generale

$$y = e^{-x}(a\cos x + b\sin x) + \frac{\sin x - 2\cos x}{5} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

A questo punto si vede facilmente che le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ sono soddisfatte prendendo $a = 2/5$ e $b = 1/5$.

Scritto del quinto appello, 8 settembre 2003

Prima parte

1. Tutto $\mathbb{R}$.
2. 0, perché $f(x) = x^0 = 1$ per $x > 0$.
3. $y = e^{2x} + e^{-2x}$.
4. $\dfrac{1}{3}\log|1+x^3|$.
5. 0, $+\infty$, 1.
6. $f'(x) = e^{(\dots)}3(x^2-2x-3)$ si annulla in -1 (massimo locale) e 3 (minimo locale).
7. $f(x) = 1 - \dfrac{x^6}{2} + \dfrac{x^{12}}{24} + o(x^{17})$.
8. Si tratta dell'insieme dei punti compresi tra i due rami dell'iperbole $y = 1/x$.

Seconda parte

1. Tramite il cambio di variabile $e^{-x} = t$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{|3e^{-2x}-e^{-x}|}{e^{-2x}-e^{-x}-6}dx &= \int_0^1 \frac{|3t-1|}{t^2-t-6}dt \\ &= \int_0^{1/3} \frac{1-3t}{t^2-t-6}dt + \int_{1/3}^1 \frac{3t-1}{t^2-t-6}dt\end{aligned}$$

e siccome $\dfrac{3t-1}{t^2-t-6} = \dfrac{8/5}{t-3} + \dfrac{7/5}{t+2}$ ha come primitiva $\dfrac{8}{5}\log|t-3| + \dfrac{7}{5}\log|t+2|$,

$$\begin{aligned}&= -\Big|\frac{8}{5}\log|t-3| + \frac{7}{5}\log|t+2|\Big|_0^{1/3} + \Big|\frac{8}{5}\log|t-3| + \frac{7}{5}\log|t+2|\Big|_{1/3}^1 \\ &= 9\log 3 - \frac{33}{5}\log 2 - \frac{14}{5}\log 7 \simeq -0,136\ .\end{aligned}$$

2. I punti del grafico di ascissa x sono della forma $(x, 2/(1+x^2))$, ed il quadrato della distanza dall'origine è

$$g(x) = x^2 + \frac{4}{(1+x^2)^2}\ .$$

Osserviamo ora che i punti di minimo della distanza, cioè $\sqrt{g(x)}$ o di $g(x)$ sono gli stessi. Inoltre, essendo g una funzione pari, possiamo limitarci a trovare i punti di minimo per $x \geq 0$. La derivata di g è

$$g'(x) = 2x\left(1 - \frac{8}{(1+x^2)^3}\right)$$

che si annulla per $x = 0$ e per $(1+x^2)^3 = 8$, ovvero $x = \sqrt{\sqrt[3]{8}-1} = 1$. Dallo studio del segno si vede che g decresce prima di quest'ultimo punto, e cresce dopo, e quindi si tratta del punto di minimo assoluto. Pertanto i punti del grafico di f che minimizzano la distanza dall'origine sono $(\pm 1, 1)$.

3. La soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{y} + 4y = 0$ è $y = \alpha\sin(2x) + \beta\cos(2x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. A questo punto, le soluzioni dell'equazione non omogenea

$$\ddot{y} + 4y = \sin(ax) \tag{1}$$

sono della forma

$$y = \bar{y} + \alpha \sin(2x) + \beta \cos(2x)$$

dove $\bar{y}$ è una qualunque soluzione particolare della (1). Pertanto, se $\bar{y}$ è limitata (risp. illimitata), allora *tutte* le soluzioni della (1) sono limitate (risp. illimitate) a prescindere dai dati iniziali. Cerchiamo ora una soluzione particolare della (1) del tipo

$$\bar{y} = \gamma \sin(ax) + \delta \cos(ax) \ .$$

Si vede che una tale soluzione esiste se e solo se γ e δ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \gamma(-a^2+4) - 1 = 0 \ , \\ \delta(-a^2+4) = 0 \ . \end{cases}$$

Per $a \neq \pm 2$ il sistema è risolubile, e di conseguenza *tutte* le soluzioni della (1), sono limitate. Per $a = \pm 2$, invece, il sistema non è risolubile. Si riesce tuttavia a trovare una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y} = \gamma x \ \sin(ax) + \delta x \ \cos(ax) \ ,$$

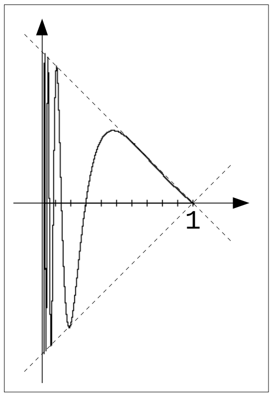
e dunque *tutte* le soluzioni di (1) sono illimitate.

Elementi di Analisi Matematica, II modulo, a.a. 2002/03 - Soluzioni

Primo compitino, 3 aprile 2003

Prima parte, gruppo A

1. Deve essere $ae^0 = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{bx}-1}{x}$, ovvero $a = b$.
2. $(1-i)^{10} = \big(\sqrt{2}\, e^{-\pi i/4}\big)^{10} = 2^5 e^{-5\pi i/2} = 32\, e^{-\pi i/2} = -32\, i$.
3. a) e c) sono numerabili, b) è più che numerabile.
4. Si tratta dei punti z la cui distanza dal punto $z_0 = i - 1$ è compresa tra 1 e $\sqrt{2}$: in altre parole, è una corona circolare con centro di coordinate $(-1, 1)$ e raggi 1 e $\sqrt{2}$.
5. Si ha $\sqrt[n^2]{n!} \le \sqrt[n^2]{n^n} = (n^n)^{1/n^2} = n^{1/n} = e^{\log n/n}$ che tende a 1 perché $\log n/n$ tende a 0. D'altra parte $\sqrt[n^2]{n!} \ge 1$ e dunque il limite cercato è 1.
6. a) $f(x) := -x$. Per b) l'esempio è più complicato, e serve una funzione che oscilli vicino a 0 in modo da assumere sia l'estremo superiore che l'estremo inferiore dei valori quando x tende a 0. Ad esempio, $f(x) := (1-x)\sin(1/x)$ (figura accanto)



7. $(4n^2-1)/(4n^2) = 1 - 1/(4n^2)$ è una successione crescente che parte dal valore $3/4$ ed ha limite 1. Siccome l'esponenziale è una funzione crescente, $e^{3/4}$ è il minimo di A, mentre e è l'estremo superiore (ma non massimo).

Prima parte, gruppo B

1. Deve essere $a \sin 0 = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{bx}-1}{x}$, ovvero a qualunque e $b = 0$.
2. $(i-1)^{10} = \big(\sqrt{2}\, e^{3\pi i/4}\big)^{10} = 2^5 e^{15\pi i/2} = 32\, e^{-\pi i/2} = -32\, i$.
3. a) e b) sono numerabili, c) è più che numerabile.
4. Si tratta dei punti z la cui distanza dal punto $z_0 = -i - 1$ è compresa tra 1 e $\sqrt{2}$: in altre parole, è una corona circolare con centro di coordinate $(-1, -1)$ e raggi 1 e $\sqrt{2}$.
5. Si ha $\sqrt[n^3]{n!} \le \sqrt[n^3]{n^n} = (n^n)^{1/n^3} = n^{1/n^2} = e^{\log n/n^2}$ che tende a 1 perché $\log n/n^2$ tende a 0. D'altra parte $\sqrt[n^3]{n!} \ge 1$ e dunque il limite cercato è 1.
6. a) $f(x) := -x$; b) $f(x) := x\sin(1/(1-x))$.
7. $(4n^2-1)/(4n^2) = 1 - 1/(4n^2)$ è una successione crescente che parte dal valore $3/4$ ed ha limite 1. Siccome il logaritmo è una funzione crescente, $\log(3/4)$ è il minimo di A, mentre 0 è l'estremo superiore (ma non massimo).

Seconda parte, gruppo A

1. a) X_1 è numerabile. Siccome X_1 è infinito, basta costruire una mappa ϕ da X_1 in $\mathbb{N}^5$ iniettiva, e ricordare che $\mathbb{N}^5$ è numerabile (in quanto prodotto finito di numerabili). Dato dunque $A \in X_1$, ordiniamo i suoi 5 elementi in senso crescente: $x_1 < x_2 < \cdots < x_5$, e poniamo quindi $\phi(A) := (x_1, \ldots, x_5)$.

   b) Generalizzando la dimostrazione di a) si vede che la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con k-elementi è numerabile per ogni k intero, e dunque X_2, che è unione di queste famiglie, è anch'essa numerabile (unione numerabile di numerabili è numerabile).

c) X_3 è numerabile. Il punto è osservare che una successione (x_n) a valori interi converge a zero se e solo se esiste k tale che $x_n = 0$ per ogni $n \geq k$. Indicando dunque con Y_k l'insieme delle successioni (x_n) tali che $x_n = 0$ per $n \geq k$, abbiamo che X_3 è unione degli insiemi Y_k, e basta quindi dimostrare che ciascun Y_k è numerabile. Per far questo, basta considerare l'applicazione $\phi : Y_k \to \mathbb{Z}^k$ che associa ad ogni successione $(x_n) \in Y_k$ la successione troncata $(x_0, \ldots, x_{k-1})$: chiaramente ϕ è iniettiva (ed anche surgettiva, ma non ci serve), e siccome $\mathbb{Z}^k$ è numerabile, lo è pure Y_k.

d) X_4 è più che numerabile. Per dimostrarlo costruiamo un'applicazione iniettiva da $2^{\mathbb{N}}$, che sappiamo essere più che numerabile, in X_4. Ad ogni successione (y_n) in $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ associamo la successione (x_n) in X_4 così definita:

$$x_n := \frac{y_n}{2^n} \; .$$

Non è difficile vedere che l'applicazione $\phi : (y_n) \mapsto (x_n)$ è iniettiva. Volendo (ma non era richiesto) si può anche dimostrare che $X_4 \sim 2^{\mathbb{N}}$; infatti $X_4 \preceq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \preceq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}}$.

2. a) Siccome $y \mapsto |y|$ è continua, $|f|$ è composizione di funzioni continue, e dunque è continua. Dall'identità $y^- = \frac{1}{2}(|y| - y)$ otteniamo

$$f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \tag{1}$$

che dunque è una funzione continue (usiamo il fatto che $|f|$ è continua, che somma di funzioni continue è continua, etc.).

b) Se $|f|$ è continua, non è detto che lo sia f: si prenda ad esempio la funzione f definita come segue: $f(x) := 1$ per $x \geq 0$ ed $f(x) := -1$ per $x < 0$.

c) Se $|f|$ ed f^- sono continue, allora lo è anche f, infatti dalla (1) otteniamo

$$f = |f| - 2f^- \; .$$

d) Il punto chiave è osservare che $\min\{y_1, y_2\} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - |y_1 - y_2|)$, da cui si ottiene

$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \tag{2}$$

che è dunque una funzione continua.

3. La funzione f è continua e strettamente crescente in quanto somma di funzioni che sono *notoriamente* continue e strettamente crescenti. Quindi f è iniettiva, e l'immagine di f è un intervallo perché il dominio di f è un intervallo (tutto $\mathbb{R}$). Siccome f tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, l'immagine di f deve essere tutto $\mathbb{R}$, e quindi f è surgettiva.
A questo punto sappiamo che $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è ben definita e continua, e siccome $1/\log y \to 0$ per $y \to +\infty$, il limite di $f^{-1}(1/\log y)$ è $x = f^{-1}(0)$. Per trovare il valore di x non resta ora che risolvere l'equazione $x^5 + 3x^3 + 2x - 6 = 0$, e si vede facilmente (cercando tra le soluzioni razionali) che $x = 1$.

4. Il fatto che x_n è strettamente crescente segue immediatamente dal fatto che $a^n e^{-x_n}$ è sempre positivo. Pertanto la successione x_n ammette sicuramente limite L, finito o infinito.

a) Dimostriamo ora che L deve essere infinito per $a = 1$. Infatti, supponendo per assurdo che L sia finito, passando al limite nell'identità $x_{n+1} = x_n + a^n e^{-x_n}$ otterremmo $L = L + e^{-L}$, e quindi $0 = e^{-L}$, che non si verifica mai.

b) Similmente, passando a limite per $a > 1$ otteniamo $L = L + \infty = \infty$.

c) Per $a < 1$ il precedente ragionamento porta all'identità $L = L$, che non ci dice nulla di significativo. Siccome $x_n \geq x_0 = 1$ per ogni n, abbiamo tuttavia la maggiorazione

$$x_{n+1} = x_n + a^n e^{-x_n} \leq x_n + a^n$$

e ricordando che $x_1 = 1$, si deduce

$$x_{n+1} \leq 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \leq \frac{1}{1 - a} \ ,$$

e dunque L deve essere finito.

5. a) Siccome $x_n \to L$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si ha

$$L - \varepsilon \leq x_n \leq L + \varepsilon \ . \tag{3}$$

In particolare, preso $n \geq n_\varepsilon$, tutti i valori $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$, soddisfano la (3). Quindi

$$n(L - \varepsilon) \leq x_{2n+1} + \cdots + x_{2n} \leq n(L + \varepsilon)$$

e dividendo per n

$$L - \varepsilon \leq y_n \leq L + \varepsilon \ ,$$

e dunque $y_n \to L$. Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che dato una insieme di numeri reali tutti maggiori di a (risp. minori di b), anche la media aritmetica risulta maggiore di a (risp. minore di b). La dimostrazione del fatto che $z_n \to L$ è identica.

b) Prendendo ad esempio $x_n := (-1)^n$ – che non converge! – si ha

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ 1/n & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} \qquad \text{e} \quad z_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ 1/(3n) & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

ed entrambe convergono a 0.

c) Il punto chiave è scrivere z_n in termini di y_n:

$$z_n = \frac{1}{3n} \sum_{k=n+1}^{4n} x_k = \frac{1}{3n} \sum_{n+1}^{2n} x_k + \frac{1}{3n} \sum_{2n+1}^{4n} x_k = \frac{1}{3} \Big(\frac{1}{n} \sum_{n+1}^{2n} x_k \Big) + \frac{2}{3} \Big(\frac{1}{n} \sum_{2n+1}^{4n} x_k \Big)$$

ovvero

$$z_n = \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} y_{2n} \ . \tag{4}$$

Da questa identità (e dalle proprietà dei limiti) segue immediatamente che se y_n converge ad L allora z_n converge a $\frac{1}{3}L + \frac{2}{3}L = L$.

d) Difficile. Prima di tutto facciamo vedere che (y_n) può essere una qualunque successione. In altre parole, facciamo vedere che assegnati arbitrariamente i valori di y_n possiamo trovare degli x_n che risolvono il sistema di (infinite) equazioni lineari

$$\begin{cases} y_1 = x_2 \\ y_2 = (x_3 + x_4)/2 \\ y_3 = (x_4 + x_5 + x_6)/3 \\ y_4 = (x_5 + x_6 + x_7 + x_8)/4 \\ \quad \vdots \\ y_n = (x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n})/n \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Per dimostrare che il sistema è risolubile, si procede per induzione. La prima equazione è chiaramente risolubile, e determina x_2. Supponendo poi di aver già risolto le prime n equazioni, trovando $x_2, \dots x_{2n}$, si vede subito che possiamo risolvere anche la $(n+1)$-esima equazione, perché abbiamo ben due variabili libere (x_{2n+1} e x_{2n+2}).
Per concludere la dimostrazione, facciamo vedere che presa una successione convergente (z_n) a piacere. possiamo costruire (y_n) non convergente in modo tale che valga la (4) per ogni $n \geq 1$, vale a dire

$$y_{2n} = \frac{3}{2} z_n - \frac{1}{2} y_n \ . \tag{5}$$

Infatti possiamo prendere y_d in modo arbitrario per ogni d dispari, e poi utilizzare la (5) per definire $y_{2^k d}$ per ogni k intero (per ricorrenza), ottenendo quindi una successione (y_n) che soddisfa la (5) e quindi anche la (4). Inoltre, avendo posto $y_d := 1$ quando $d \equiv 1 \pmod 4$, e $y_d := -1$ quando $d \equiv -1 \pmod 4$, abbiamo la certezza che y_n non converge.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Si procede come per il gruppo A. Nel punto d), l'applicazione iniettiva $\phi : 2^{\mathbb{N}} \to X_4$ è quella che ad ogni successione (y_n) in $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ associa la successione (x_n) in X_4 data dalla formula $x_n := y_n/(2n)$.
2. Si procede come per il gruppo A, con opportune modifiche: per a) si usa l'identità $f^+ = \frac{1}{2}(|f|+f)$; per c) si usa l'identità $f = 2f^+ - |f|$; per d) si usa $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$.
3. Come per il gruppo A: il limite è dato dalla soluzione dell'equazione $x^7 + 4x^3 + x + 6 = 0$ (che sappiamo già essere unica), ovvero $x = -1$.
4. Uguale al gruppo A.
5. Uguale al gruppo A.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1a): in molti hanno scritto che X_1 è uguale a $\mathbb{N}^5$ (ovvero $\mathbb{N}^6$ per il gruppo B). Questo è un errore: i sottoinsiemi di di $\mathbb{N}$ con 5 elementi non sono ordinati mentre per i vettori in $\mathbb{N}^5$ l'ordine delle coordinate conta – in altre parole, $\{1,3,4,8,9\} = \{3,1,8,9,4\}$, mentre $(1,3,4,8,9) \neq (3,1,8,9,4)$. Inoltre gli elementi di un insieme in X_1 sono (per definizione) cinque e tutti distinti, mentre le coordinate di un vettore in $\mathbb{N}^5$ possono essere tutte uguali – in altre parole, $(1,1,1,2,1) \in \mathbb{N}^5$, ma l'insieme delle sue coordinate è $\{1,2\}$ che non appartiene a X_1.
- Seconda parte, esercizio 1b): tra le soluzioni proposte, una molto elegante è questa: ad ogni $A = \{i_1, \dots, i_k\}$ sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$ associamo il numero intero $x_A = 2^{i_1} + \dots + 2^{i_k}$, ovvero il numero intero la cui i-esima cifra in base 2 è 1 se $i \in A$ ed è 0 altrimenti (poniamo anche $x_A = 0$ quando A è vuoto). La mappa $A \mapsto x_A$ da X_2 in $\mathbb{N}$ è bigettiva!
- Seconda parte, esercizio 2a): molti hanno cercato di dimostrare la continuità di $|f|$ distinguendo i punti x in tre classi a seconda che sia $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ oppure $f(x) = 0$, in modo da poter dire esplicitamente quanto vale $|f|$; così facendo, però, la dimostrazione può diventare molto complicata per i punti della terza classe che non siano punti isolati (e ce ne sono!).
- Seconda parte, esercizio 2d): come per il punto a), molti hanno cercato di dimostrare la continuità di $\min\{f,g\}$ ($\max\{f,g\}$ per il gruppo B) distinguendo i punti x in tre classi a

seconda che sia $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$ oppure $f(x) = g(x)$, andando incontro alle stesse difficoltà indicate nel punto precedente. In realtà è possibile dimostrare la continuità di $\min\{f, g\}$ anche senza usare l'identità (2): dato $x_0 \in \mathbb{R}$, essendo f e g continue in x_0, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\delta', \delta'' > 0$ tali che

$$|x - x_0| \le \delta' \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon \le f(x) \le f(x_0) + \varepsilon \ ,$$
$$|x - x_0| \le \delta'' \Rightarrow g(x_0) - \varepsilon \le g(x) \le g(x_0) + \varepsilon \ .$$

Ma allora, posto $\delta := \min\{\delta', \delta''\}$, $|x - x_0| \le \delta$ implica

$$\max\{f(x_0), g(x_0)\} - \varepsilon \le \max\{f(x), g(x)\} \le \max\{f(x_0), g(x_0)\} + \varepsilon \ .$$

- Seconda parte, esercizio 3: l'unica difficoltà di questo esercizio consiste nel dare delle dimostrazioni *complete* degli enunciati. Quindi, per far vedere che f è surgettiva, non basta dire che f ha limite $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, ma bisogna anche sottolineare il ruolo della continuità e del fatto che f è definita su un intervallo (intervallo in senso lato, in questo caso tutta la retta). Analogamente, anche la continuità dell'inversa di f segue dal fatto che il dominio è un intervallo.
- Seconda parte, esercizio 4: in molti hanno cercato di dimostrare la monotonia della successione per induzione, mentre in realtà l'induzione non serve, e basta osservare che $x_{n+1} - x_n = a^n e^{-x_n}$, che è sempre un numero positivo. Per dimostrare c) alcuni hanno osservato che $|x_{n+1} - x_n| \le a^n$, e siccome per n sufficientemente grande a^n è più piccolo di un qualunque ε positivo assegnato, ne hanno dedotto che la successione è di Cauchy (e dunque convergerebbe). Purtroppo la definizione di successione di Cauchy richiede un controllo su tutte le differenze $|x_m - x_n|$, che è più complicato da dimostrare.
- Seconda parte, esercizio 5a): alcuni hanno inspiegabilmente sostenuto che (y_n) e (z_n) sono sottosuccessioni di x_n. Altri hanno usato la seguente dimostrazione: siccome $x_n \to L$, anche $x_{n+k} \to L$ per ogni k e dunque, siccome il limite della somma è la somma dei limiti,

  $$y_n = \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \to \frac{nL}{n} = L \ .$$

  Questo è un errore grave, perché la regola sui limite delle somme si applica solo a successioni che si scrivono come somma di un numero *finito e costante* di successioni, mentre in questo caso il numero degli addendi è n, che non è costante.
- Seconda parte, esercizio 5c): molti hanno utilizzato la formula $z_n = (y_n + y_{2n} + y_{3n})/3$, che però è sbagliata. L'errore nasce dall'aver scritto y_{2n} come media dei valori $x_{2n+1}, \ldots, x_{3n}$ invece che di $x_{2n+1}, \ldots, x_{4n}$. Per inciso, una volta ottenuta la formula corretta, si può applicare il fatto che il limite della somma è la somma dei limiti, invece di ridimostrarlo come hanno fatto alcuni!
- Seconda parte, esercizio 5d): una soluzione molto semplice ed elegante abbozzata in uno degli scritti consiste nel costruire x_n per ricorrenza come segue: per n è multiplo di 4 si prende

  $$x_n := -\sum_{k=n/4+1}^{n-1} x_k \ , \qquad (6)$$

  per n è multiplo di 2 ma non di 4

  $$x_n := n - \sum_{k=n/2+1}^{n-1} x_k \ , \qquad (7)$$

infine, per n dispari si prende x_n come si vuole. Ora è facile vedere che la (6) implica $z_n = 0$ per ogni n, mentre la (7) implica $y_n = 1$ per ogni n dispari. Dunque z_n converge a 0, ma se per assurdo convergesse anche y_n, dovrebbe convergere a 1, e questo contraddirrebbe quanto dimostrato al punto c).

Prima parte, gruppo A

1. f_a converge a 0 per $a > 0$ ed è integrabile per $a > 1$.
2. a) finito, b) più che numerabile, c) più che numerabile, d) numerabile.
3. Le seconda no e le altre due sì (per esempio, per il criterio del rapporto).
4. $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-tx}dx = \Big|x\frac{e^{-tx}}{-t}\Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{e^{-tx}}{-t}dx = \Big|x\frac{e^{-tx}}{t}\Big|_\infty^1 + \Big|\frac{e^{-tx}}{t^2}\Big|_\infty^1 = \frac{e^{-tx}(1+t)}{t^2}.$
5. Siccome la successione e^{-n} è *strettamente* decrescente, $e^0 = 1$ è il massimo valore raggiunto, mentre $e^{-\infty} = 0$ è l'estremo inferiore (mai raggiunto).
6. Siccome $1 \le 2 + \cos n \le 3$, allora $2 \le \sqrt[n]{2^n(2+\cos n)} \le 2\sqrt[n]{3} \to 2$ e dunque $R = 1/2$.
7. $\big(1+\sqrt{3}i\big)^6 = \big(2e^{i\pi/3}\big)^6 = 2^6 e^{2\pi i} = 64$.
8. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f.

Prima parte, gruppo B

1. f_a converge a 0 ed è integrabile per ogni a reale (e.g., perché $x^a e^{-x} = o(1/x^2)$ per ogni a).
2. a) numerabile, b) finito, c) più che numerabile, d) più che numerabile.
3. Le prime due sì e l'ultima no (per esempio, per il criterio del rapporto).
4. $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{|\log x|^a}{x}dx = \int_{-\infty}^{-1} |t|^a dt = \int_1^\infty t^a dt = \begin{cases} +\infty & \text{per } a \ge -1 \\ -1/(a+1) & \text{per } a < -1 \end{cases}.$
5. Siccome la funzione e^x è crescente, $e^1 = e$ è il massimo valore raggiunto, mentre $e^{-\infty} = 0$ è l'estremo inferiore (mai raggiunto).
6. Siccome $1 \le 2 - \cos n \le 3$, allora $\sqrt[n]{n} \le \sqrt[n]{n(2-\cos n)} \le \sqrt[n]{3n}$ e convergono tutti a 1. Dunque $R = 1$.
7. Posto $z = \rho e^{i\theta}$, $z^4 = 14$ diventa $\rho^4 e^{i4\theta} = 4e^{i\pi}$. Dunque $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \pi/4 + k\pi/2$ con $k = 0,1,2,3$. Ovvero $z = \pm 1 \pm i$.
8. $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n$.

Seconda parte, gruppo A

1. Per prima cosa determiniamo il comportamento asintotico del termine generico $x_n := (n^2 - 1)^a - (n^2+1)^a$. Raccogliendo n^{2a} ed applicando quindi la formula $(1+x)^b = 1 + bx + o(x)$ per $x \to 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} x_n &= n^{2a}\Big[\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)^a - \Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^a\Big] \\ &= n^{2a}\Big[1 - \frac{a}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)^a - 1 - \frac{a}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)^a\Big] \\ &\sim -2an^{2(a-1)}\,. \end{aligned}$$

Escludendo il caso $a = 0$, che da luogo alla serie nulla, si vede dunque che il segno di x_n è definitivamente costante (positivo per $a < 0$ e negativo per $a > 0$) ed è dunque possibile applicare i teoremi di confronto asintotico (con le serie armoniche). In particolare $\sum x_n$ converge quando $2(a-1) < -1$, ovvero $a < 1/2$, e diverge a $-\infty$ quando $2(a-1) \geq -1$, ovvero $a \geq 1/2$.

2. L'osservazione da tenere a mente è che il limite di $x^\gamma \sin(1/x^\beta)$ per $x \to 0^+$ esiste se e solo se $\gamma > 0$, ed in tal caso è uguale a 0. Lo stesso discorso vale per $x^\gamma \cos(1/x^\beta)$. Inoltre, siccome la funzione f è di classe C^∞ su $(0, +\infty)$, basta solo verificare derivabilità e continuità in 0. Detto questo si vede facilmente che:

   a) f continua in 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$;

   b) f derivabile in 0 $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)/x \Leftrightarrow \alpha > 1$ (ed allora $f'(0) = 0$).

   Inoltre, tenendo conto della formula

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\beta x^{\alpha-\beta-1} \cos(1/x^\beta) + \alpha x^{\alpha-1} \sin(1/x^\beta)) \\ &= -\beta x^{\alpha-\beta-1} \cos(1/x^\beta) + o(x^{\alpha-\beta-1}) \ , \end{aligned}$$

   c) f' continua in 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha > \beta + 1$.

   d) f' derivabile in 0 $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)/x \Leftrightarrow \alpha > \beta + 2$ (ed allora $f''(0) = 0$).

   Per affrontare il caso generale, abbiamo bisogno di un'espressione maneggevole della derivata n-esima di f. Facendo un po' di tentativi, ci si rende conto che

$$D^n f(x) = \begin{cases} +\beta^n x^{\alpha-n\beta-n} \sin(1/x^\beta) + R_n(x) & \text{per } n \text{ pari,} \\ -\beta^n x^{\alpha-n\beta-n} \cos(1/x^\beta) + R_n(x) & \text{per } n \text{ dispari,} \end{cases} \tag{1}$$

   con $R_n(x) = o(x^{\alpha-n\beta-n})$. Prima di dimostrare la formula (1), facciamo vedere che ci basta per concludere l'esercizio. In effetti, per induzione su n vediamo subito che

   e) $D^n f$ derivabile in 0 $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0^+} D^{n-1} f(x)/x \Leftrightarrow \alpha > n(\beta+1) - \beta$ (ed allora $D^n f(0) = 0$);

   f) $D^n f$ continua in 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} D^n f(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha > n(\beta + 1)$.

   Per concludere, non ci resta che dimostrare la (1). Sfortunatamente, cosí com'è enunciata, non possiamo dimostrarla per induzione, perché sapere che R_n è trascurabile rispetto a $x^{\alpha-n(\beta+1)}$ non ci da alcuna informazione sulla derivata di R_n. Consideriamo quindi un enunciato più preciso sulla struttura del resto, e cioè R_n è della forma

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{\alpha-k\beta-n} P_{n,k}(1/x^\beta)$$

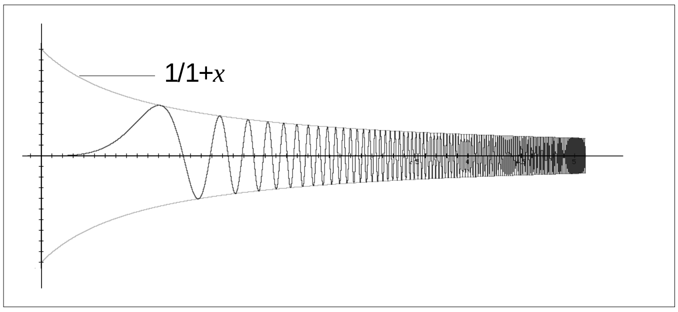
   con $P_{n,k}$ combinazione lineare di seni e coseni. Ora la dimostrazione di uno (1) viene facilmente per induzione su n.

3. a) Per il teorema di Lagrange, per ogni n intero esiste x_n compreso tra n e $2n$ tale che

$$f'(x_n) = \frac{f(2n) - f(n)}{n}$$

   e siccome f tende a 0 a $+\infty$, ne deduciamo che $f'(x_n)$ tende a 0, e quindi L, *se esiste*, deve essere 0. Un'altra dimostrazione è questa: supponiamo per assurdo che sia $L > 0$. Allora esiste x_0 tale che $f'(x) \geq L/2 > 0$ per $x \geq x_0$, e dunque $f(x) \geq f(x_0) + L(x - x_0)/2$ che tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, contraddicendo l'ipotesi che f tenda a 0. Analogamente si dimostra che L non può essere negativo.

b) Ad esempio $f(x) := \dfrac{\sin(x^4)}{1+x}$.



c) Se $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f''(x)|\,dx$ è finito, allora deve esiste l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f''(x)\,dx = \Big| f'(x) \Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} f'(x) - f'(0)\ .$$

d) dall'esempio nel punto b) si intuisce che il limite della derivata f' può non esistere solo in presenza di oscillazioni sempre più frequenti (anche se di ampiezza sempre minore) nella funzione f, cosa che richiede sempre più frequenti cambi di segni di f'. Il fatto che f'' è limitata dovrebbe quindi prevenire questo fenomeno. Come faremo vedere ora, basta di meno, e cioè che f' sia uniformemente continua (ricordiamoci che f'' limitata implica infatti f' Lipschitziana).

Fissiamo $d > 0$, e consideriamo un punto x tale che $f'(x) \geq d$. Applicando la definizione di uniforme continuità con $\varepsilon = d/2$, otteniamo che deve esistere $\delta > 0$, che dipende da d ma non da x, tale che

$$|f'(t) - f(x)| \leq d/2 \quad \text{per } t \in [x-\delta, x+\delta];$$

in particolare $f'(t) \geq f'(x) - d/2 \geq d/2$ per $t \in [x, x+\delta]$, e per il teorema di Lagrange

$$f(x+\delta) - f(x) \geq d\delta/2\ . \tag{2}$$

Siccome $f(x) - f(x+\delta)$, tende a 0 per $x \to +\infty$, mentre invece $d\delta/2$ è un numero positivo fissato, la (2) implica che $f'(x)$ non può assumere valori maggiori di d da un certo punto in poi. Un discorso analogo vale per i valori minori di un qualunque d negativo; se ne deduce quindi che $f'(x)$ tende a 0.

4. a) Dato $h > 0$ intero, poniamo

$$q_h := \big[\underbrace{9\,9\cdots 9\,9}_{h\text{ cifre}}\big] \quad \text{e} \quad y_q := \big[0,\underbrace{0\,0\cdots 0\,1}_{h\text{ cifre}}\underbrace{0\,0\cdots 0\,1}_{h\text{ cifre}}\cdots\big]$$

(per evitare confusione, mettiamo l'espressione decimale di un numero reale tra parentesi quadre). Allora

$$y_h = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-nh} = 10^{-h}\sum_{n=0}^{\infty}(10^{-h})^n = \frac{10^{-h}}{1-10^{-h}} = \frac{1}{10^h - 1} = \frac{1}{q_h}\ .$$

b) Per numero periodico (positivo) intendiamo un numero reale x la cui espressione decimale si ripete *da un certo un punto in poi* con periodo di lunghezza h, cioè un numero della forma

$$x = \big[b_0,\underbrace{b_1\,b_2\cdots b_k}_{k\text{ cifre}}\underbrace{a_1\,a_2\cdots a_h}_{h\text{ cifre}}\underbrace{a_1\,a_2\cdots a_h}_{h\text{ cifre}}\cdots\big]$$

con b_0 intero, b_i ed a_i cifre tra 0 e 9, k intero positivo o nullo. Posti dunque

$$b := \big[b_0, b_1 \cdots b_k\big] = b_0 + \sum_1^k b_i 10^{-i} \quad \text{e} \quad a := \big[a_1 \cdots a_n\big] = \sum_1^h a_i 10^{h-i} \ ,$$

x si scrive come $x = b + 10^{-k} a\, y_h$ ed è quindi razionale.

c) Ogni numero razionale x si può scrivere come

$$x = \frac{m}{10^k n} = m \cdot 10^{-k} \cdot n^{-1}$$

con m intero, k intero positivo o nullo, ed n intero positivo primo con 10. Supponiamo ora di sapere che n divide q_h per qualche h, ovvero $q_h = n \cdot m'$: allora

$$x = m \cdot m' \cdot 10^{-k} \cdot q_h^{-1} = m \cdot m' \cdot 10^{-k} \cdot y_h$$

ed essendo y_h un numero periodico, anche x resta periodico (stiamo usando il fatto che moltiplicare un numero periodico per una potenza di 10 oppure per un numero intero dà un numero periodico).

Non ci resta che dimostrare che dato n intero positivo primo con 10 esiste h tale che n divide $q_h = 10^h - 1$, ovvero $10^h \equiv 1 \pmod{n}$. Ma questo segue dal fatto che l'insieme dei numeri interi compresi tra 0 ed $n-1$ e primi con n è un gruppo finito rispetto alla moltiplicazione modulo n. In particolare, basta prendere h uguale all'ordine del gruppo (un numero sicuramente minore di n).

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Si procede come per il gruppo A, ottenendo, per $a \neq 0$, $x_n = [(n+2)^a - n^a] \sim 2an^{a-1}$ (per $a = 0$ si ha la serie nulla). Dunque la serie converge per $a \leq 0$ e diverge a $+\infty$ per $a > 0$. In questo caso, inoltre, il valore della serie può essere calcolato esattamente, infatti

$$\begin{aligned}\sum_1^m x_n &= (3^a - 1) + (4^a - 2^a) + (5^a - 3^a) + (6^a - 4^a) + \cdots \\ &= -1 - 2^a + (m+1)^a + (m+2)^a \ .\end{aligned}$$

   che converge a $-1 - 2^a$.
2. Uguale al gruppo A.
3. Uguale al gruppo A.
4. Uguale al gruppo A.

COMMENTI

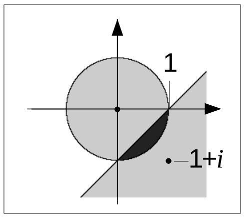
- Gruppo A, prima parte, esercizio 4: la presenza del modulo nell'integrale sembra aver creato molti (inspiegabili?) problemi.
- Gruppo A, prima parte, esercizio 8: si potevano dare diverse risposte, ma molti hanno scritto enunciati troppo approssimativi, omettendo ad esempio l'ipotesi (essenziale) che f sia continua.
- Seconda parte, esercizio 1, seconda parte: pochi scrivono sviluppo asintotico di del termine generico della serie, che pure darebbe facilmente la risposta cercata.

- Seconda parte, esercizio 2: i punti e) ed f) sono facili da dimostrare una volta trovata l'espressione giusta per la derivata n-esima di f. Questa espressione si indovina facilmente, ma resta difficile da dimostrare in modo rigoroso.
- Seconda parte, esercizio 3: nessuno ha dimostrato il punto d), anche se in due hanno suggerito che la chiave di tutto è l'uniforme continuità di f' (cosa di cui noi non ci eravamo accorti).
- Seconda parte, esercizio 4: per il punto a), il trucco è scrivere y_h come serie geometrica, invece di cominciare da q_h. Una volta ottenuto a), quasi tutti hanno dimostrato anche b), anche se spesso in modo un po' impreciso (ad esempio, dimenticando che un numero periodico può avere un antiperiodo) o farraginoso. I pochi che hanno dimostrato il punto c) hanno fatto ricorso all'algoritmo della divisione, con le inevitabili difficoltà che questa scelta comporta.

Scritto del I appello, 12 giugno 2003

Prima parte

1. a) numerabile, b) più che numerabile, c) numerabile.
2. Ad esempio $f(x) := x$.
3. Per $x \to +\infty$ si ha $x^a \sin\big(1/(x+x^2)\big) \sim x^a/(x+x^2) \sim x^{a-2}$, e dunque l'integrale risulta finito se e solo se $a < 1$.
4. $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n e^{-n} = \sum_0^\infty (-1/e)^n = \frac{1}{1-(-1/e)} = \frac{e}{e+1}$.
5. $f'(x) = 4x\, e^{2x+1}$.
6. $R_1 = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{1+n^2}}\right)^{-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+n^2} = 1;$
   $R_2 = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{\dfrac{1}{2^n}}\right)^{-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{2^n} = \sqrt{2}.$
7. Ad esempio $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{per } x \ge 0, \\ -x^2 & \text{per } x < 0. \end{cases}$
8. Le soluzioni della disequazione $1 \ge |z|$ sono i punti (del piano complesso) con distanza da 0 inferiore a 1, ovvero il cerchio di centro l'origine e raggio 1, mentre le soluzioni di $|z| \ge |z - 1 + i|$ sono i punti più vicini a $1 - i$ che a 0, ovvero il semipiano sotto la retta $y = x - 1$. Le soluzioni sono l'intersezione di queste due regioni, ovvero la zona in grigio scuro nella figura accanto.



Seconda parte

1. a) Per x che tende a 0 si ha $\sin(x^3 + x^4) \sim x^3 + x^4 \sim x^3$, mentre $\sin(e^{-x}$ converge a $\sin(1)$, che è un numero diverso da 0. Quindi
$$f_a(x) \sim \sin(1)\, x^{a+3} \; . \tag{3}$$
   b) Siccome f_a è continua in $(0, +\infty)$ ma per certi a può avere un asintoto in 0, l'integrale si spezza in due integrali impropri elementari: quello da 0 a 1, e quello da 1 a $+\infty$. Per via della (3) e del teorema del confronto asintotico, f_a è (assolutamente) integrabile su $(0, 1)$ se e solo se $a + 3 > -1$, ovvero $a > -4$. Si osservi che la (3) implica anche che f_a è positiva in un intorno di 0, e quindi si può applicare il teorema del confronto asintotico nei due sensi. Per il secondo integrale improprio usiamo la stima
$$|f_a(x)| \le x^a \sin(e^{-x}) \le x^a e^{-x}$$
   (valida per $e^{-x} \le \pi/2$, e quindi anche per $x \ge 0$), e siccome $x^a e^{-x}$ è "o" piccolo di qualunque potenza di x per qualunque a, per il teorema del confronto asintotico $x^a e^{-x}$ – e quindi anche f_a – sono assolutamente integrabile su $(1, +\infty)$ per ogni a.
   Concludendo, l'integrale improprio di f_a su $(0, +\infty)$ è finito se e solo se $a > -4$.
2. Si prenda $M > \inf f$. Siccome f ha limite $+\infty$ a $\pm\infty$, devono esistere x_1 ed x_2 finiti tale che $f(x) \ge M$ per $x \le x_1$ e per $x \ge x_2$. Ora, f deve certamente avere un punto di minimo x_m sull'intervallo chiuso $I := [x_1, x_2]$, ed è facile verificare che questo è anche un punto di minimo su $\mathbb{R}$. Infatti, per la scelta di M, f deve assumere anche valori inferiori ad M, e può farlo solo nell'intervallo I (tra l'altro, questo implica che I non è vuoto, ovvero che

$x_1 \leq x_2$), per cui il valore minimo di f su I è certamente inferiore ad M, e quindi anche ad ogni valore assunto da f fuori da I.

3. a) $R = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}} \right)^{-1} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m} = 1.$

   b) dal punto a) sappiamo già che la serie (1) converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$. Restano i casi $x = \pm 1$. In entrambi i casi la serie converge per il criterio di Leibniz per le serie a segno alterno.

   c) Dalla teoria delle serie di potenze sappiamo che per ogni $x \in (-1, 1)$ si ha

$$f'(x) = \sum_0^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_0^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \ .$$

Trovando la primitiva che vale 0 in 0 (perché $f(0) = 0$) otteniamo infine

$$f(x) = \arctan x \quad \text{per } x \in (-1,1). \tag{4}$$

   d) Dalla (4) uno vorrebbe dedurre che $f(\pm 1) = \arctan(\pm 1) = \pm\pi/2$. La difficoltà è che la teoria delle serie di potenze garantisce la validità della (4) solo all'interno dell'intervallo di convergenza $(-1, 1)$. Per poter estendere questa identità agli estremi $x = \pm 1$, basterebbe dimostrare che $f(x)$ è continua a sinistra in 1 e a destra in -1, ma questo non è facile. Un modo per farlo, è osservare che le funzioni f_m date dalle somme parziali della serie (1), sono tutte Lipschitziane con costante di Lipschitz minore o uguale a 2, e dunque lo stesso deve valere per il limite f. Infatti, posto

$$f_m(x) := \sum_0^m \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \ ,$$

abbiamo

$$f'_m(x) = \sum_0^m (-1)^n x^{2n} = \frac{1 - (-x^2)^{m+1}}{1+x^2} \ .$$

Dunque

$$|f'_m(x)| \leq \frac{1 + (x^2)^{m+1}}{1+x^2} \leq 2$$

da cui si deduce che per ogni $x, y \in [-1, 1]$ con $x \neq y$ vale

$$|f_m(x) - f_m(y)| \leq 2|x - y| \ ,$$

e questa condizione passa al limite per $m \to +\infty$, dimostrando che f ha costante di Lipschitz minore o uguale a 2, ed in particolare è continua.

4. a) Si tratta di verificare che X è un sottospazio dello spazio vettoriale delle successioni, ovvero che è chiuso per somma e moltiplicazione per costante.

   b) Chiaramente, posto $x_0 := a_0$ e $x_1 := a_1$, x_2 risulta univocamente determinato dalla condizione $x_2 = x_1 + x_0$; a sua volta, x_3 risulta univocamente determinato dalla condizione $x_3 = x_2 + x_1$, e così via. La versione formalizzata di quest'argomentazione è la seguente. Unicità: date (x_n) ed (x'_n) in X tali che $x_0 = x'_0$ e $x_1 = x'_1$, si dimostra per induzione che

$$x_n = x'_n \tag{6}$$

per ogni n; infatti, supponendo che la (6) sia vero per tutti gli indici minori o uguali ad n, con $n \geq 1$, si ottiene dalla (2) che deve essere vero pure per $n+1$. Esistenza: solita costruzione per induzione.
Per concludere, osserviamo che l'applicazione lineare da X in $\mathbb{R}^2$ che associa ad ogni successione (x_n) il vettore (x_0, x_1) è, per quanto visto, iniettiva e surgettiva, e dunque X ha dimensione 2.

c) Imponendo $x_n = \lambda^n$, la condizione (2) diventa $\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n$ per ogni n, che dividendo λ^n dà luogo all'equazione $\lambda^2 = \lambda + 1$, risolta da

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \ . \tag{5}$$

d) X è uno spazio vettoriale di dimensione 2, e le successioni (λ_1^n) e (λ_2^n) trovate in c) sono linearmente indipendenti – perché lo sono i vettori $(1, \lambda_1)$ e $(1, \lambda_2)$ – e quindi sono una base di X. Pertanto ogni successione (x_n) in X è combinazione lineare di queste due, ovvero devono esistere α_1 e α_2 tali che $x_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$ per ogni n. Per trovare questi due parametri, basta limitarsi a imporre l'identità per $n = 0, 1$. Nel nostro caso otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 1 = x_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \ , \\ 1 = x_1 = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 \ . \end{cases}$$

Risolvendolo con $\lambda_{1,2}$ dati in (5) otteniamo

$$\alpha_{1,2} := \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$$

e dunque la successione cercata è

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \ .$$

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 4: quasi nessuno si è accorto che si tratta di una serie geometrica, una delle poche che può essere calcolata esplicitamente.
- Prima parte, esercizio 6: ad essere precisi, la seconda serie di potenze andrebbe riscritta come $\sum a_m x^m$ con $a_m = 0$ per m dispari e $a_m = 1/2^{m/2}$ per m pari. Pertanto il raggio di convergenza è dato da

  $$R_2 = \Big(\limsup_{m \to +\infty} \sqrt[m]{|a_m|} \Big)^{-1}$$

  ma trascurando gli m dispari, che non influiscono sul limsup, e facendo il cambio di variabile $m = 2n$, ritorniamo al conto fatto in precedenza.
- Prima parte, esercizio 8: solo una persona l'ha risolto correttamente!
- Seconda parte, esercizio 3a): per il calcolo del raggio di convergenza della serie (1) vale lo stesso discorso fatto per la seconda serie dell'esercizio 6 della prima parte: ad essere precisi la serie andrebbe riscritta come $\sum a_m x^m$ con $a_m = 0$ per m pari e $a_m = (-1)^{(n-1)/2}/m$ per m dispari, e il raggio di convergenza sarebbe dato da

  $$R = \Big(\limsup_{m \to +\infty} \sqrt[m]{|a_m|} \Big)^{-1}$$

ma di nuovo ci si riconduce al conto fatto in precedenza. Notare che applicare il criterio del rapporto per trovare R, come molti hanno fatto, non è del tutto corretto, perché $|a_m|/|a_{m+1}|$ non è definito per m pari, ed è 0 per m dispari. La versione corretta del criterio del rapporto in questo caso sarebbe questa:

$$R = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{2n-1}|}{|a_{2n+1}|}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-1}} = \sqrt{1} = 1 \ .$$

(Notare la presenza della radice quadrata, dovuta al fatto che si sta considerando il rapporto non di due coefficienti consecutivi, ma intervallati di 2.)

- Seconda parte, esercizio 3c): quasi nessuno si è accorto che la serie di potenze derivata è una serie geometrica, e pertanto può essere calcolata esplicitamente.
- Seconda parte, esercizio 4d): la successione in questione è quella di Fibonacci, di cui abbiamo dato così una formula esplicita.

SCRITTO DEL SECONDO APPELLO, 10 LUGLIO 2003

PRIMA PARTE

1. $|x+1|-2 \geq 0$, ovvero $x \geq 1$ e $x \leq -3$.
2. La seconda e la terza.
3. La serie si scrive come $\sum_0^\infty \big(-\sqrt{|x|}\big)^n$, e converge per $-1 < x < 1$ a $\dfrac{1}{1+\sqrt{|x|}}$.
4. $\log(1+\sin x)$.
5. Ad esempio $x + 2\sin x$.
6. Il raggio di convergenza è 0.
7. Posto $z = x + iy$, deve essere $e^x e^{iy} = e^{\pi i}$, ovvero $x = 0$ e $y = \pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

SECONDA PARTE

1. La funzione $f(x) := e^{-1/x} - \cos(a/\sqrt{x})$ è continua su $[0, +\infty)$ e per $x \to +\infty$ la parte principale è data da

$$\begin{aligned} f(x) &= \Big[1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big] - \Big[1 - \frac{a^2}{2x} + \frac{a^4}{24x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big] \\ &= \frac{a^2-2}{2x} + \frac{12-a^4}{24x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) \sim \begin{cases} \dfrac{a^2-2}{2x} & \text{per } a \neq \pm\sqrt{2}, \\ \dfrac{1}{3x^2} & \text{per } a = \pm\sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

   Dunque f ha segno definitivamente costante, ed applicando il teorema di confronto asintotico otteniamo che l'integrale di f è finito se e solo se $a = \pm\sqrt{2}$.

2. a) Il raggio di convergenza è 1.
   b) Quindi la serie converge assolutamente per $-1 < x < 1$, e non converge per $x > 1$ (allorché diverge a $+\infty$) e per $x < -1$. Per $x = \pm 1$ la serie converge assolutamente per confronto con la serie $\sum 1/n^2$.
   c) Sia $f(x)$ corrispondente alla somma della serie. La derivata seconda di f è allora data da

$$f''(x) = D^2\Big[\sum_2^\infty \frac{x^n}{n(n-1)}\Big] = \sum_2^\infty x^{n-2} = \sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{per } -1 < x < 1.$$

   Integrando due volte, e ricordando che $f(0) = 0$ ed $f'(0) = 0$, otteniamo infine

$$f(x) = \sum_2^\infty \frac{x^n}{n(n-1)} = (1-x)\log(1-x) + x \quad \text{per } -1 < x < 1.$$

   L'uguaglianza vale anche per $x = \pm 1$ perché la funzione f è continua su tutto $[-1, 1]$. La dimostrazione è delicata, e si basa sul fatto che le somme parziali della serie sono equi-Lipschitziane. Un modo alternativo è calcolare direttamente $f(\pm 1)$. Infatti, per $x = 1$ abbiamo la serie telescopica

$$f(1) = \sum_2^\infty \frac{1}{n(n-1)} = \sum_2^\infty \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \cdots = 1$$

mentre per $x = -1$ abbiamo

$$f(-1) = \sum_2^\infty \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \sum_2^\infty \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -1 + 2\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

e ricordando che l'ultima serie converge a $\log 2$ (senza però dimostrarlo!) otteniamo $f(-1) = -1 + 2\log 2$.

3. a) Siano $x_0 < x_1$ i punti in cui f si annulla. Abbiamo allora due possibilità: almeno uno tra il punto di massimo ed il punto di minimo di f nell'intervallo $[x_0, x_1]$ è interno all'intervallo stesso, oppure f è costante sull'intervallo. In entrambe i casi abbiamo la tesi. (In effetti, questa è parte della dimostrazione del teorema di Rolle).
c) Indichiamo con $N(f)$ il numero di zeri della funzione f (ammettendo ovviamente il valore $+\infty$). L'osservazione base è la seguente: se f è derivabile ovunque, tra due zeri distinti di f esiste sempre un punto in cui si annulla la derivata (teorema di Rolle, oppure punto precedente), ovvero $N(Df) \geq N(f)-1$. Se f è derivabile due volte, allora possiamo applicare lo stesso ragionamento due volte di seguito, ed otteniamo $N(D^2f) \geq N(Df)-1 \geq N(f)-2$. Procedendo a questo modo si dimostra quindi che per una funzione f derivabile n volte si ha
$$N(D^n f) \geq N(f) - n \ .$$
Ora, $D^n f > 0$ implica $N(D^n f) = 0$, da cui segue $0 \geq N(f) - n$, ovvero $N(f) \leq n$.

4. a) Sia X_1 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Siccome $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}$ e $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, abbiamo
$$X_1 = \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R} \ .$$
b) D'altra parte, detto X_2 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$,
$$X_2 \sim \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \succeq 2^{\mathbb{R}} \succ \mathbb{R} \ .$$
c) Sia X_3 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue. L'applicazione $\phi : X_3 \to X_1$ che ad ogni $f \in X_3$ associa la sua restrizione ai razionali è iniettiva. Questo segue dal fatto che due funzioni *continue* che coincidono sui razionali devono coincidere ovunque. Ma allora $X_3 \preceq X_1$, che ha la cardinalità del continuo. D'altra parte, X_3 contiene l'insieme delle funzioni costanti, che pure ha la cardinalità del continuo. Quindi
$$X_3 \sim \mathbb{R} \ .$$
d) Sia X_4 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive. Per ogni $A \subset \mathbb{R}$, definiamo la funzione $f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come segue:
$$f_a(x) := \begin{cases} e^x & \text{se } x \in A, \\ -e^x & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$
Si verifica facilmente che f_A è iniettiva, ovvero appartiene a X_4. Inoltre, A coincide con l'insieme dei punti in cui f_A è positiva, e dunque l'applicazione ϕ che associa ad ogni $A \subset \mathbb{R}$ la funzione $f_A \in X_4$ è necessariamente iniettiva. Abbiamo quindi dimostrato che X_4 ha cardinalità maggiore o uguale a quella delle parti di $\mathbb{R}$, ovvero
$$X_4 \succeq \mathbb{R} \ .$$
e) Difficile. Definiamo i seguenti insiemi: X_5 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ bigettive, X la famiglia dei sottoinsiemi A di $\mathbb{R}$ tali che $A \sim \mathbb{R}$, e $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dato $A \in X$,

abbiamo $A \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^*$, e dunque esiste $\phi_A : A \to \mathbb{R}^*$ corrispondenza bigettiva. Definiamo ora $f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come segue:

$$f_A(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \notin A, \\ \phi_A^{-1}(-\phi_A(x)) & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

In altre, f_A lascia fisso ogni punto che non appartiene ad A, e manda ogni punto di A nel suo "opposto" (cioè quello corrispondente al suo opposto nell'identificazione di A con $\mathbb{R}^*$). Dunque f_A è una bigezione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, ovvero appartiene ad X_5. Inoltre l'insieme dei punti che f_A non lascia in se stessi coincide con A, e quindi l'applicazione che ad ogni A associa f_A è iniettiva. Abbiamo dunque dimostrato che $X \preceq X_5$, e per concludere non resta che far vedere che la famiglia X ha la cardinalità delle parti di $\mathbb{R}$. Per fare questo basta osservare che X è in corrispondenza bigettiva con la famiglia X' dei complementari degli insiemi in X, e l'unione di X ed X' coincide con le parti di $\mathbb{R}$.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 2: nessuno sembra essersi accorto del fatto che la derivata seconda di questa serie dà luogo ad una serie nota.
- Seconda parte, esercizio 3a): tutti (più o meno) hanno applicato il Teorema di Weierstrass all'intervallo determinato dai due zeri per trovare un punto di massimo ed uno di minimo. Non molto hanno chiarito però che questi punti sono anche di massimo e minimo relativo su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se sono interni all'intervallo (cosa che deve essere vera per almeno uno dei due, altrimenti ...). La funzione $\sin x$ ha come zeri 0 e π, e compreso tra essi c'è solo il massimo locale $\pi/2$, mentre 0 e π, che sono i punti di minimo della restrizione della funzione all'intervallo $[0, \pi]$, non sono punti di minimo locale su $\mathbb{R}$.
- Seconda parte, esercizio 4: abbiamo usato senza dimostrarlo il fatto che $(A^B)^C \sim A^{B\times C}$. In effetti, un elemento di $A^{B\times C}$ è una funzione f da $B \times C$ in A. A questa f possiamo dunque associare $F : C \to A^B$
- Seconda parte, esercizio 4: volendo andare oltre, si noti che $X_5 \subset X_4 \subset X_2$, e quindi $X_5 \preceq X_4 \preceq X_2$, ed inoltre

  $$X_2 = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{R}}$$

  e dunque $X_5 \sim X_4 \sim X_2 \sim 2^{\mathbb{R}}$.

Prima parte

1. Siccome $e^{x^2} = 1 + o(x)$, f è continua in 0 se $b = 0$, e risulta poi derivabile per ogni a.
2. Applicando la regola di de l'Hôpital, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} \int_0^x e^{-t^2} dt = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}}{\cos x} = 1$.
3. Tutti, perché il numeratore dell'integranda è limitato e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$.
4. $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} = \frac{x - \sin x \cos x}{2}$.
5. 5^5.
6. Siccome $\sqrt[n]{n^{3n+5}} = n^{3+5/n} \geq n^3 \to +\infty$, il raggio di convergenza è 0.
7. Si tratta delle circonferenza (piena) di centro $-1 + 2i = (-1, 2)$ e raggio 1.

Seconda parte

1. Usando gli sviluppi di Taylor di e^x e $\sin x$ in 0 otteniamo
$$e^{1/n} + a \sin(1/n) - 1 = \frac{1+a}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) .$$
Quindi, se $a \neq -1$, i termini della serie sono asintoticamente equivalenti a $(1 + a)/n$ ed in particolare hanno segno definitivamente costante (positivo per $a > -1$ e negativo per $a < -1$). Per il teorema del confronto asintotico, la serie diverge a $+\infty$ per $a > -1$ e a $-\infty$ per $a < -1$. Per $a = -1$ i termini sono asintoticamente equivalenti a $1/n^2$, ed in particolare sono definitivamente positivi. Per il teorema del confronto asintotico, la serie converge.
2. a) Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome f è uniformemente continua, esiste $\gamma > 0$ tale che
$$|y_1 - y_2| \leq \gamma \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)| \leq \varepsilon . \tag{1}$$
Siccome g è uniformemente continua, esiste anche $\delta > 0$ tale che
$$|x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leq \gamma . \tag{2}$$
Combinando la (1) e la (2) otteniamo subito che
$$|x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |f(g(x_1)) - f(g(x_2))| \leq \varepsilon .$$
b) In ultima analisi, abbiamo bisogno di stimare il modulo della differenza tra $f(x_1)g(x_1)$ e $f(x_2)g(x_2)$ usando $|f(x_1) - f(x_2)|$ e $|g(x_1) - g(x_2)|$. Applichiamo allora il solito trucco:
$$\begin{aligned} \big|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)\big| &= \\ &= \big|f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)\big| \\ &\leq \big|f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2)\big| + \big|f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)\big| \\ &= |f(x_1)| \cdot |g(x_1) - g(x_2)| + |g(x_2)| \cdot |f(x_1) - f(x_2)| . \end{aligned} \tag{3}$$
Siccome f e g sono limitate, esiste una costante M finita che maggiora $|f|$ e $|g|$. Quindi la (3) diventa
$$\big|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)\big| \leq M\big(|f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)|\big) . \tag{4}$$

Siccome f e g sono uniformemente continue, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\delta' > 0$ e $\delta'' > 0$ tali che

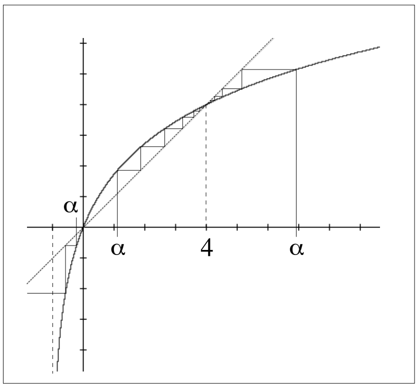
$$|x_1 - x_2| \le \delta' \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \le \frac{\varepsilon}{2M} \ , \tag{5}$$

$$|x_1 - x_2| \le \delta'' \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \le \frac{\varepsilon}{2M} \ . \tag{6}$$

Posto allora $\delta := \min\{\delta', \delta''\}$, abbiamo che (4), (5) e (6) implicano

$$|x_1 - x_2| \le \delta \Rightarrow \big|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)\big| \le M\Big(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\Big) = \varepsilon \ .$$

3. Disegnando la funzione $f(x) := 4\log(1+x)/\log 5$ (figura accanto) si vede subito che l'equazione $f(x) = x$ ha soluzioni $x = 0, 4$, e che 0 è un punto fisso repulsivo, mentre 4 è un punto attrattivo. In particolare, se $\alpha > 4$, si dimostra facilmente per induzione che a_n resta maggiore di 4, è decrescente (ed è pertanto definita per tutti gli indici n) e quindi converge a 4. Viceversa, se $0 < \alpha < 4$, allora a_n resta minore di 4 ed è crescente, e pure in questo caso converge a 4. Ovviamente, per $\alpha = 0, 4$ abbiamo successioni costanti. Infine, per $\alpha < 0$ la successione risulta decrescente ed è ben definita solo per un numero finito di indici.



Verifichiamo solo il primo di questi enunciati: siccome $4 < f(x) < x$ per $x > 4$, $a_n > 4$ implica $a_n > f(a_n) = a_{n+1} > 4$. Dunque, per induzione su n, $\alpha = a_1 > 4$ implica che a_n è ben definita, decrescente, e maggiore di 4 per tutti gli n.

Scritto del quarto appello, 13 gennaio 2004

Prima parte

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2}$.

3. Siccome $\sin(2x+\pi/2)=\cos(2x)$, si tratta del grafico della funzione coseno “compresso” orizzontalmente di un fattore 2.

4. La parte principale dell'integrando per $x\to 0$ è $1/x^a$, mentre per $x\to+\infty$ è $1/x^{a+1}$. L'integrabilità in 0 si ha per $a<1$, mentre l'integrabilità a $+\infty$ si ha per $a+1>1$. Quindi l'integrale è finito per $0<a<1$.

5. Siccome $-4=re^{\pi i}$, le radici quarte sono $z=\sqrt{2}e^{k\pi i/4}$ con $k=0,\dots,3$, ovvero $z=\pm1\pm i$.

6. $x\cos x$ è una funzione dispari, e quindi l'integrale è nullo.

7. 0, 0, $-\infty$.

Seconda parte

1. Calcoliamo lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di $f'(x)$:
$$f'(x)=1+\alpha e^x+\beta\sin(\beta x)=(1+\alpha)+(\alpha+\beta^2)x+\frac{\alpha}{2}x^2+o(x^2)$$
e quindi, tenuto conto del fatto che $f(0)=0$,
$$f(x)=(1+\alpha)x+\frac{\alpha-\beta^2}{2}x^2+\frac{\alpha}{6}x^3+o(x^3)\ .$$
L'ordine di infinitesimo massimo lo si ottiene imponendo che i primi due termini di questo sviluppo siano nulli:
$$\begin{cases}1+\alpha=0\\ \alpha+\beta^2=0\end{cases}\quad\text{ovvero}\quad\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=\pm1\end{cases}$$
In entrambi i casi la parte principale di $f(x)$ è $-x^3/6$.

2. a) Fissato $n\geq 1$, indichiamo con S_p e S_d la somma di $\binom{n}{h}$ su tutti gli $h=0,1,\dots,n$ rispettivamente pari e dispari. Sviluppando quindi $(1+1)^n$ e $(1-1)^n$ con la formula di Newton otteniamo
$$2^n=(1+1)^n=\sum_0^n\binom{n}{h}=S_p+S_d\ ,$$
$$0=(1-1)^n=\sum_0^n\binom{n}{h}(-1)^h=S_p-S_d\ .$$
Le incognite S_p ed S_d risolvono il sistema
$$\begin{cases}S_p+S_d=2^n\\ S_p-S_d=0\end{cases}\quad\text{ovvero}\quad\begin{cases}S_p=2^{n-1}\\ S_d=2^{n-1}\end{cases}$$
ed in particolare $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq h\leq n\\ h\text{ pari}}}\binom{n}{h}=S_p=2^{n-1}$.

b) Per ogni $n\geq 1$, indichiamo con S_0, S_1, S_2 ed S_3 la somma di $\binom{n}{h}$ su tutti gli $h=0,1,\dots,n$ rispettivamente congrui a 0, 1, 2 e 3 modulo 4. Per quanto visto al punto b)
$$2^{n-1}=S_p=S_0+S_2\ ,\quad 2^{n-1}=S_d=S_1+S_3\ . \tag{3}$$

Per determinare le incognite S_0, S_1, S_2 ed S_3 ci mancano altre due equazioni. Le otteniamo sviluppando $(1+i)^n$ con la formula di Newton:

$$2^{n/2}e^{in\pi/4} = (1+i)^n = \sum_0^n \binom{n}{h} i^h = S_0 - S_2 + i(S_1 - S_3)$$

ovvero

$$2^{n/2}\cos(n\pi/4) = \mathrm{Re}(1+i)^n = S_0 - S_2\ , \quad 2^{n/2}\sin(n\pi/4) = \mathrm{Im}(1+i)^n = S_1 - S_3\ .$$

Ricordando la (3) otteniamo quindi i due sistemi

$$\begin{cases} S_0 + S_2 = 2^{n-1} \\ S_0 - S_2 = 2^{n/2}\cos(n\pi/4) \end{cases}, \quad \begin{cases} S_1 + S_3 = 2^{n-1} \\ S_1 - S_3 = 2^{n/2}\sin(n\pi/4) \end{cases};$$

infine

$$\begin{cases} S_0 = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\cos(n\pi/4) \\ S_1 = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\sin(n\pi/4) \\ S_2 = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}}\cos(n\pi/4) \\ S_3 = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}}\sin(n\pi/4) \end{cases}$$

ed in particolare $\displaystyle\sum_{\substack{0\le h\le n \\ h\equiv 0 \bmod(4)}} \binom{n}{h} = S_0 = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\cos(n\pi/4).$

3. a) Se $a_n \ge 1$ la successione $\displaystyle\prod_{n=0}^m a_n$ è crescente in m, e quindi ammette limite.

b) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} \frac{\prod_{n=0}^m a_n}{\prod_{n=0}^{m-1} a_n} = \frac{\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^m a_n}{\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^{m-1} a_n} = 1.$

c) Osserviamo innanzitutto che per ogni $m \ge 1$

$$(1+b_1)\cdots(1+b_m) = 1 + b_1 + \cdots + b_n + \text{vari prodotti dei numeri } b_n,$$

quindi $\displaystyle\prod_1^m (1+b_n) \ge \sum_1^m b_n$, e passando al limite per $m \to +\infty$

$$\prod_1^\infty (1+b_n) \ge \sum_1^\infty b_n\ . \tag{4}$$

D'altra parte, la disuguaglianza $1 + x \le e^x$ implica che per ogni $m \ge 1$,

$$\prod_{n=0}^m (1+b_n) \le \prod_{n=0}^m e^{b_n} \le \exp\Big(\sum_{n=0}^m b_n\Big)$$

da cui segue immediatamente

$$\prod_{n=0}^\infty (1+b_n) \le \exp\Big(\sum_{n=0}^\infty b_n\Big)\ . \tag{5}$$

La (4) e la (5) implicano l'equivalenza in (2).

SCRITTO DEL V APPELLO, 11 FEBBRAIO 2004

PRIMA PARTE

1. $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!}x^n + o(x^n)$; $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n})$.
2. $f(x) = 4^{-x}(e^{2\log 2})^x = 4^{-x}4^x = 1$, e quindi $f'(x) = 0$.
3. Si tratta dell'iperbole $y = 1/x$ riflessa rispetto all'asse delle y e poi traslata a destra di 1.
4. La funzione integranda è continua e positiva su $[0, +\infty[$, ed asintoticamente equivalente a x^a per $x \to +\infty$, per cui l'integrale è finito se e solo se $a > 1$.
5. $\big(1 + i\sqrt{3}\big)^{-3} = \big(2e^{i\pi/3}\big)^{-3} = 2^{-3}e^{-i\pi} = -1/8$.
6. Si tratta dell'origine (o meglio, dell'insieme il cui unico elemento è $(0,0)$).
7. 0, $+\infty$, $+\infty$.

SECONDA PARTE

1. Usando gli sviluppi di Taylor in 0 di $\sin x$ e $\cos x$ si ottiene

$$\sin x - \tan x = \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x(\cos x - 1)}{\cos x} \sim \frac{x(-x^2/2)}{1} = -\frac{x^3}{2}$$

e quindi, per n che tende a $+\infty$

$$\sin\left(\frac{1}{n^a}\right) - \tan\left(\frac{1}{n^a}\right) \sim -\frac{1}{2n^{3a}} \;.$$

Ne consegue che il segno del termine generico della successione è costante (negativo) da un certo punto in poi (in realtà sempre), ed è quindi possibile applicare il teorema del confronto asintotico: la serie converge per $a > 1/3$ e diverge a $-\infty$ altrimenti.

2. b) La funzione $g(x) := f(\sqrt{x})$ è chiaramente derivabile in $]0, +\infty[$, con derivata data dalla formula

$$g'(x) := \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \quad \text{per } x > 0.$$

Siccome f è pari, deve essere $f'(0) = 0$, e quindi possiamo calcolare il limite di $g'(x)$ per $x \to 0$ usando de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(t)}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{f''(t)}{2} = \frac{f''(0)}{2} \;.$$

Pertanto f è derivabile anche in 0, con derivata uguale a $f''(0)/2$.

3. a) Il triangolo $T_{a,b}$ è contenuto in S se e solo se il segmento di estremi $(0,b)$ e $(a,0)$ giace al di sotto del grafico della funzione e^{-x}, ovvero

$$b(1 - x/a) \le e^{-x} \quad \text{per } x \ge 0 \tag{1}$$

(la disuguaglianza è automaticamente verificata per $x \ge a$, e quindi imporla per $0 \le x \le a$ oppure per $0 \le x$ è la stessa cosa, e la seconda scelta risulta più comoda).
Fissato $a > 0$, vogliamo determinare i valori di b per cui vale la (1). Cerchiamo quindi di calcolare il valore minimo della funzione $f(x) := e^{-x} - b(1 - x/a)$ sulla semiretta $x \ge 0$: la derivata è $f'(x) = -e^{-x} + b/a$ e risulta positiva per $x \ge \log(a/b)$ e negativa altrimenti.

Abbiamo quindi due possibilità: i) se $\log(a/b) \leq 0$, ovvero $b \geq a$, allora f è crescente nell'intervallo $[0, a]$ e raggiunge il minimo in 0, quindi il minimo vale $f(0) = 1 - b$ e la (1) si riduce a $b \leq 1$; ii) Se $0 < \log(a/b)$, ovvero $b < a$, allora f raggiunge il minimo in $\log(a/b)$, quindi il minimo vale $(b/a) - b + (b/a)\log(a/b)$, e la (1) si riduce, con un po' di conti, a $b \leq ae^{1-a}$. Mettendo insieme le due soluzioni, otteniamo che per $a \leq 1$ i valori di b ammissibili sono quelli per cui $b \leq 1$, mentre per $a > 1$ i valori di b ammissibili sono quelli per cui $b \leq ae^{1-a}$.
b) Per $0 < a \leq 1$ il triangolo di area massima tra quelli ammissibili si ha per $b = 1$, ed ha area $a/2$. Invece per $a > 1$, il triangolo di area massima tra quelli ammissibili si ha per $b = ae^{a-1}$, ed ha area $a^2e^{a-1}/2$. Si tratta ora di trovare il massimo della funzione

$$g(a) := \begin{cases} a/2 & \text{per } 0 < a \leq 1, \\ \\ a^2 e^{a-1}/2 & \text{per } 1 < a. \end{cases}$$

La funzione $g(a)$ è continua per $a > 0$ e chiaramente crescente per $a \leq 1$; studiandone la derivata $g'(a) = a(2 - a)e^{1-a}/2$ per $a > 1$, si vede anche che g è crescente per $a \leq 2$ e decrescente poi. Quindi g ha massimo per $a = 2$, ed il massimo vale $g(2) = 2e$. In conclusione, il triangolo di area massima si ha per $a = 2$ e $b = 2e$.