Versione: 10 febbraio 2008

Università di Pisa
Corso di laurea in Scienze Biologiche Molecolari

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Matematica e Statistica, corso C

a.a. 2007/08

docenti: G. Alberti, C. Carminati

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Gli scritti d'esame per il corso di Matematica e Statistica C si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre o più problemi per cui invece si deve dare una soluzione articolata e spiegata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza piena sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso.

Gli argomenti appena accennati o non fondamentali sono riportati in corsivo.

1. Funzioni, grafici, numeri

   1.1 Funzioni e grafici di funzioni: dominio, immagine, funzione inversa. Funzioni elementari: potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.

   1.2 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni. Rappresentazione grafica di un insieme di dati.

2. Elementi di probabilità e statistica descrittiva

   2.1 Permutazioni, combinazioni, disposizioni. Coefficienti binomiali. Fattoriale. Applicazione alla risoluzione di alcuni problemi di probabilità elementare.

   2.2 Definizione di probabilità su uno spazio di eventi elementari finito. Eventi indipendenti e probabilità condizionata. Formula di Bayes. Esempi classici di modelli probabilistici (lancio di due dadi, lancio di n monete, etc.).

   2.3 Variabili aleatorie. Valore atteso e varianza. Indipendenza e covarianza. Valore atteso e varianza per la somma di due o più variabili aleatorie (indipendenti e non). Media campionaria e versione debole del teorema dei grandi numeri.

   2.4 Distribuzione di Bernoulli, distribuzione binomiale e distribuzione geometrica.

   2.5 Media e varianza di un insieme finito di dati. Medie pesate. Relazione tra la media e la media di un campione casuale.

3. Calcolo differenziale ed integrale

   3.1 Derivata di una funzione: significato geometrico ed interpretazione fisica. Regole per il calcolo delle derivate. Derivate delle funzioni elementari. Studio dei grafici di funzioni.

   3.2 Calcolo dei limiti di funzioni. Metodo di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponeziali, potenze e logaritmi. Notazione di Landau ("o" piccoli). Sviluppo di Taylor di una funzione. Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari. Parte principale di un infinito e di un infinitesimo.

   3.3 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive (integrale indefinito) delle funzioni elementari; regole per il calcolo delle primitive. *Calcolo di aree e volumi.*

   3.4 Esempi di equazioni differenziali. Significato dei dati iniziali. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo e del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee.

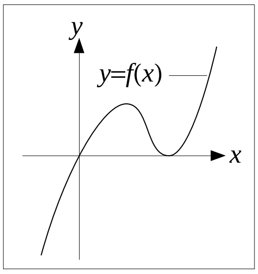
   3.5 Esempi di probabilità su spazi di eventi elementari infiniti (intervalli). Distribuzione di probabilità. Definizione di valore atteso e varianza di una variabile aleatoria. *Distribuzione uniforme, esponenziale e normale (o Gaussiana).*

Testi

Compitino di prova, 14 novembre 2007

Prima parte

1. Si estrae a caso una sequenza di tre lettere dell'alfabeto italiano. Qual è la probabilità che le prime due lettere siano due R?
2. Si tirano due dadi. Qual è la probabilità che la somma sia pari sapendo che il primo dado ha dato un numero dispari?
3. Un sacchetto contiene 10 biglie rosse, 20 nere e 20 bianche. Estraendo una biglia a caso, Qual è la probabilità che non sia nera?
4. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(e^x - 2)$.
5. Sia $f(x)$ la funzione data nella figura accanto. Risolvere graficamente la disequazione $-f(x) \le x$.



6. Scrivere l'espressione $\dfrac{\sqrt{a^{b+2}}}{\sqrt[3]{a^{b+3}}}$ come un'unica potenza di a.
7. Trovare le soluzioni di $\sin(\pi x^2) = 1/2$ comprese tra 0 e 1.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = -1 + e^{-x}$.

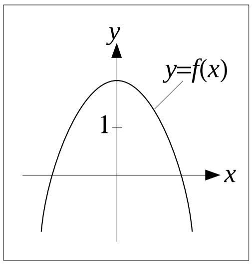
Seconda parte

1. Risolvere la disequazione $\arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \le \dfrac{\pi}{4}$.
2. Si lancia un dado per 4 volte. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
   a) nei primi due lanci esce il numero uno;
   b) il numero uno esce nei primi due lanci e poi non più;
   c) il numero uno esce esattamente due volte e in due lanci consecutivi;
   d) il numero uno esce esattamente due volte;
   e) il numero uno esce almeno due volte.

Primo compitino, 16 novembre 2007

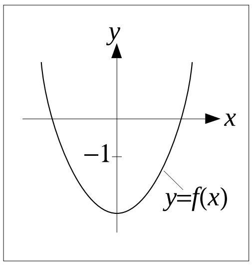
Prima parte, gruppo A

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\sqrt{2+\log x}$.
2. Si estrae a caso un numero tra 10 e 99 (inclusi). Qual è la probabilità che le due cifre siano entrambe pari?
3. Quante targhe automobilistiche si possono fare usando 2 lettere dell'alfabeto italiano (che consta di 21 lettere) seguite da un numero compreso tra 1000 e 9999 (inclusi)?
4. Si tirano 5 monete. Qual è la probabilità di ottenere esattamente 2 teste?
5. Semplificare il più possibile l'espressione $\dfrac{\log(x^x)}{\log\sqrt{x}}$.
6. Sia $y = f(x)$ la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) del piano tali che $0 \le y \le f(x)$.
7. Quali delle seguenti identità sono corrette?
   a) $\cos(-x) = \sin(x + \pi/2)$;
   b) $\cos(-x) = \sin(x - \pi/2)$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{2-x}$.



Prima parte, gruppo B

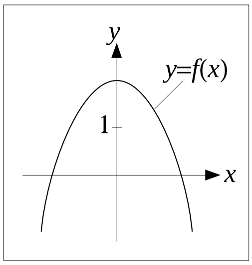
1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\sqrt{2-\log x}$.
2. Si estrae a caso un numero tra 100 e 999 (inclusi). Qual è la probabilità che le tre cifre siano tutte pari?
3. Quante targhe automobilistiche si possono fare usando 3 lettere dell'alfabeto italiano (che consta di 21 lettere) seguite da un numero compreso tra 1000 e 9999 (inclusi)?
4. Si tirano 6 monete. Qual è la probabilità di ottenere esattamente 2 teste?
5. Semplificare il più possibile l'espressione $\dfrac{\log(x^{-x})}{\log\sqrt[3]{x}}$.
6. Sia $y = f(x)$ la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) del piano tali che $f(x) \le y \le -1$.
7. Quali delle seguenti identità sono corrette?
   a) $-\cos x = \sin(x + \pi/2)$;
   b) $-\cos x = \sin(x - \pi/2)$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = \log(x + 1)$.



Prima parte, gruppo C

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\sqrt{1+\log x}$.
2. Si estrae a caso un numero tra 10 e 99 (inclusi). Qual è la probabilità che le due cifre siano entrambe pari?
3. Quante targhe automobilistiche si possono fare usando 2 lettere dell'alfabeto italiano (che consta di 21 lettere) seguite da un numero compreso tra 1000 e 9999 (inclusi)?
4. Si tirano 5 monete. Qual è la probabilità di ottenere esattamente 3 teste?

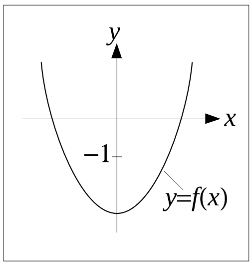
5. Semplificare il più possibile l'espressione $\dfrac{\log(x^{-x})}{\log\sqrt{x}}$.
6. Sia $y = f(x)$ la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) del piano tali che $1 \le y \le f(x)$.



7. Quali delle seguenti identità sono corrette?
   a) $\sin(-x) = \cos(x + \pi/2)$;
   b) $\sin(-x) = \cos(x - \pi/2)$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{x+2}$.

Prima parte, gruppo D

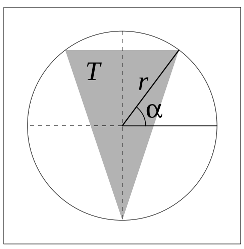
1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\sqrt{1 - \log x}$.
2. Si estrae a caso un numero tra 100 e 999 (inclusi). Qual è la probabilità che le tre cifre siano tutte dispari?
3. Quante targhe automobilistiche si possono fare usando 3 lettere dell'alfabeto italiano (che consta di 21 lettere) seguite da un numero compreso tra 1000 e 9999 (inclusi)?
4. Si tirano 6 monete. Qual è la probabilità di ottenere esattamente 3 teste?
5. Semplificare il più possibile l'espressione $\dfrac{\log(x^{x})}{\log\sqrt[3]{x}}$.
6. Sia $y = f(x)$ la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) del piano tali che $f(x) \le y \le 0$.



7. Quali delle seguenti identità sono corrette?
   a) $-\sin x = \cos(x + \pi/2)$;
   b) $-\sin x = \cos(x - \pi/2)$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = \log(1 - x)$.

Seconda parte, gruppo A

1. In base a statistiche fatte sugli studenti di una certa scuola, risulta che i figli unici sono il 30%, che tra questi i maschi sono il 55%, mentre la percentuale dei maschi cala al 45% tra gli studenti che non sono figli unici. Presa una studentessa a caso, qual è la probabilità che sia figlia unica?
2. Ho un dado che reca sulle sei facce le lettere A, B, E, I, O, U. Calcolare la probabilità che lanciando il dado 5 volte si verifichino i seguenti eventi:
   a) escono 5 lettere diverse;
   b) escono nell'ordine le lettere B, A, B, B, O;
   c) escono le lettere B, A, B, B, O ma non necessariamente in quest'ordine.
3. Si consideri il triangolo isoscele T iscritto nella circonferenza di raggio r dato nella figura accanto.
   a) Scrivere l'area di T in funzione di r e dell'angolo α;
   b) Scrivere l'area di T in funzione di r e della base b di T.

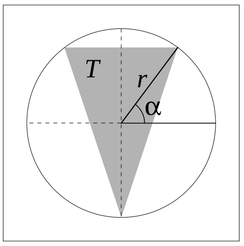


Seconda parte, gruppo B

1. In base a statistiche fatte sugli studenti di una certa scuola, risulta che i figli unici sono il 20%, che tra questi i maschi sono il 55%, mentre la percentuale dei maschi cala al 45% tra gli studenti che non sono figli unici. Preso uno studente maschio a caso, qual è la probabilità che sia figlio unico?

2. Ho un dado che reca sulle sei facce le lettere A, B, E, I, O, U. Calcolare la probabilità che lanciando il dado 4 volte si verifichino i seguenti eventi:
   a) escono 4 lettere diverse;
   b) escono nell'ordine le lettere B, O, B, O;
   c) escono le lettere B, O, B, O ma non necessariamente in quest'ordine.

3. Si consideri il triangolo isoscele T iscritto nella circonferenza di raggio r dato nella figura accanto.
   a) Scrivere l'area di T in funzione di r e dell'angolo α;
   b) Scrivere l'area di T in funzione di r e dell'altezza h di T.

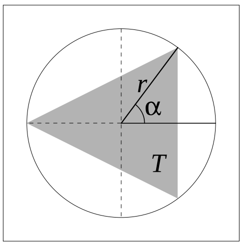


Seconda parte, gruppo C

1. In base a statistiche fatte sugli studenti di una certa scuola, risulta che i figli unici sono il 30%, che tra questi i maschi sono il 55%, mentre la percentuale dei maschi cala al 45% tra gli studenti che non sono figli unici. Presa una studentessa a caso, qual è la probabilità che sia figlia unica?

2. Ho un dado che reca sulle sei facce le lettere A, B, E, I, O, U. Calcolare la probabilità che lanciando il dado 5 volte si verifichino i seguenti eventi:
   a) escono 5 lettere diverse;
   b) escono nell'ordine le lettere B, A, B, A, U;
   c) escono le lettere B, A, B, A, U ma non necessariamente in quest'ordine.

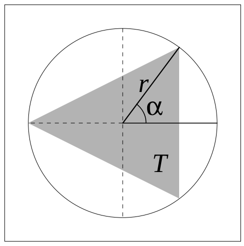
3. Si consideri il triangolo isoscele T iscritto nella circonferenza di raggio r dato nella figura accanto.
   a) Scrivere l'area di T in funzione di r e dell'angolo α;
   b) Scrivere l'area di T in funzione di r e della base b di T.



Seconda parte, gruppo D

1. In base a statistiche fatte sugli studenti di una certa scuola, risulta che i figli unici sono il 20%, che tra questi i maschi sono il 55%, mentre la percentuale dei maschi cala al 45% tra gli studenti che non sono figli unici. Preso uno studente maschio a caso, qual è la probabilità che sia figlio unico?

2. Ho un dado che reca sulle sei facce le lettere A, B, E, I, O, U. Calcolare la probabilità che lanciando il dado 4 volte si verifichino i seguenti eventi:
   a) escono 4 lettere diverse;
   b) escono nell'ordine le lettere B, I, B, O;
   c) escono le lettere B, I, B, O ma non necessariamente in quest'ordine.

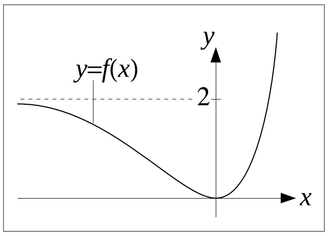


3. Si consideri il triangolo isoscele T iscritto nella circonferenza di raggio r dato nella figura accanto.
   a) Scrivere l'area di T in funzione di r e dell'angolo α;
   b) Scrivere l'area di T in funzione di r e dell'altezza h di T.

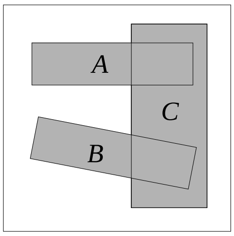
COMPITINO DI RECUPERO, 8 GENNAIO 2008

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(1 - x^2)$.
2. Nove amici decidono di formare una squadra per un torneo di pallavolo. Quante diverse formazioni possono fare? (Si ricordi che nella pallavolo scendono in campo sei giocatori per squadra)
3. Si lancia una moneta per quattro volte. Calcolare la probabilità di ottenere quattro teste sapendo che nei primi due lanci sono già uscite due teste.



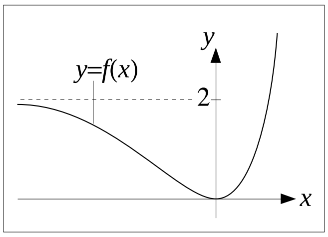
4. Sia $y = f(x)$ la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Determinare graficamente le soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$.
5. Semplificare il più possibile l'espressione $6 \log \left(\frac{\sqrt[3]{a^4}}{a} \right)$.
6. Qual è la probabilità di ottenere 11 o più tirando due dadi?



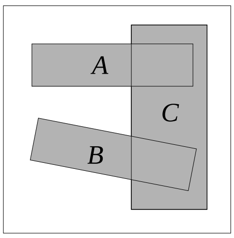
7. Presi i rettangoli A, B e C come nella figura accanto, disegnare l'insieme $(A \cup B) \cap C$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{x-1}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(x^2 - 4)$.
2. Otto amici decidono di formare una squadra per un torneo di pallavolo. Quante diverse formazioni possono fare? (Si ricordi che nella pallavolo scendono in campo sei giocatori per squadra)
3. Si lancia una moneta per cinque volte. Calcolare la probabilità di ottenere cinque teste sapendo che nei primi due lanci sono già uscite due teste.



4. Sia $y = f(x)$ la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Determinare graficamente le soluzioni dell'equazione $f(x) = 2{,}5$.
5. Semplificare il più possibile l'espressione $6 \log \left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} \right)$.
6. Qual è la probabilità di ottenere 3 o meno tirando due dadi?



7. Presi i rettangoli A, B e C come nella figura accanto, disegnare l'insieme $A \cup (B \cap C)$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{x+1}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. Risolvere la disequazione $\log\left(\sqrt{2e^2 - x^2}\right) \leq 1$.

2. Il signor A ed il signor B fanno la seguente scommessa: lanciano 10 monete, e se escono al più tre teste allora B paga ad A n euro, altrimenti A paga a B 10 euro. Per quali n al signor A conviene giocare?

Seconda parte, gruppo B

1. Risolvere la disequazione $\log\left(\sqrt{x^2 - 2e^2}\right) \leq 1$.
2. Il signor A ed il signor B fanno la seguente scommessa: lanciano 8 monete, e se escono al più tre teste allora B paga ad A n euro, altrimenti A paga a B 10 euro. Per quali n al signor A conviene giocare?

Secondo compitino, 5 febbraio 2008

Prima parte, gruppo A

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{x - x^2}$.
2. Calcolare la derivate delle seguenti funzioni: a) e^{-3x}; b) $x \log x$; c) $\dfrac{1}{1+x^2}$.
3. Calcolare la derivata di $f(x) := \log\left(\sqrt[3]{x^{16}}\right)$.
4. Trovare il valore massimo di $f(x) := e^{-x^2+2x}$.
5. Si tirano 5 dadi. Qual è la probabilità che escano esattamente 3 sei?
6. Si consideri l'insieme degli eventi elementari $X := \{a, b, c, d, e, f\}$ dotato della probabilità uniforme, e sia Y la variabile aleatoria su X data da $Y(a) = 2$, $Y(b) = Y(c) = -1$ e $Y(d) = Y(e) = Y(f) = 0$. Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.
7. Sia Y una variabile aleatoria con valore atteso m e varianza σ^2, e sia Z la variabile aleatoria data dalla formula $Z = 2Y + 3$. Calcolare il valore valore atteso e la varianza di Z.
8. Disegnare il grafico di $1 + \cos(-x)$.

Prima parte, gruppo B

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{x^2 - x}$.
2. Calcolare la derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(2x)$; b) $x^2 \log x$; c) $\dfrac{1}{1-x^2}$.
3. Calcolare la derivata di $f(x) := \log\left(\sqrt[4]{x^{15}}\right)$.
4. Trovare il valore massimo di $f(x) := e^{-x^2+4x}$.
5. Si tirano 6 dadi. Qual è la probabilità che escano esattamente 3 cinque?
6. Si consideri l'insieme degli eventi elementari $X := \{a, b, c, d, e, f\}$ dotato della probabilità uniforme, e sia Y la variabile aleatoria su X data da $Y(a) = 4$, $Y(b) = Y(c) = -2$ e $Y(d) = Y(e) = Y(f) = 0$. Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.
7. Sia Y una variabile aleatoria con valore atteso m e varianza σ^2, e sia Z la variabile aleatoria data dalla formula $Z = 2Y - 3$. Calcolare il valore valore atteso e la varianza di Z.
8. Disegnare il grafico di $1 + \sin(-x)$.

Prima parte, gruppo C

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{x + x^2}$.
2. Calcolare la derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{1}{x^2+1}$; b) e^{3x}; c) $x^3 \log x$.
3. Calcolare la derivata di $f(x) := \log\left(\sqrt[5]{x^{11}}\right)$.
4. Trovare il valore minimo di $f(x) := e^{x^2-2x}$.
5. Si tirano 5 dadi. Qual è la probabilità che escano esattamente 2 sei?
6. Si consideri l'insieme degli eventi elementari $X := \{a, b, c, d, e, f\}$ dotato della probabilità uniforme, e sia Y la variabile aleatoria su X data da $Y(a) = Y(b) = Y(c) = 0$, $Y(d) = 4$,

$Y(e) = Y(f) = -2$. Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.

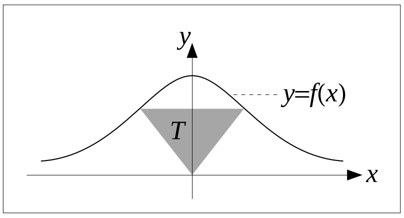
7. Sia Y una variabile aleatoria con valore atteso m e varianza σ^2, e sia Z la variabile aleatoria data dalla formula $Z = 3Y + 2$. Calcolare il valore valore atteso e la varianza di Z.
8. Disegnare il grafico di $1 - \sin x$.

Prima parte, gruppo D

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{-x - x^2}$.
2. Calcolare la derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{1}{1 - x^2}$; b) $\cos(3x)$; c) $x^4 \log x$.
3. Calcolare la derivata di $f(x) := \log\left(\sqrt[4]{x^9}\right)$.
4. Trovare il valore minimo di $f(x) := e^{x^2+4x}$.
5. Si tirano 6 dadi. Qual è la probabilità che escano esattamente 2 cinque?
6. Si consideri l'insieme degli eventi elementari $X := \{a, b, c, d, e, f\}$ dotato della probabilità uniforme, e sia Y la variabile aleatoria su X data da $Y(a) = Y(b) = Y(c) = 0$, $Y(d) = -4$, $Y(e) = Y(f) = 2$. Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.
7. Sia Y una variabile aleatoria con valore atteso m e varianza σ^2, e sia Z la variabile aleatoria data dalla formula $Z = 3Y - 2$. Calcolare il valore valore atteso e la varianza di Z.
8. Disegnare il grafico di $1 - \cos x$.

Seconda parte, gruppo A

1. Un sacchetto contiene 4 biglie con sopra scritto il numero uno ed n biglie con il numero due. Si estrae una biglia a caso, e si indica con Y il numero così ottenuto. Si estrae poi una seconda biglia (senza rimettere la prima nel sacchetto) e si indica con Z il numero così ottenuto.
   a) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y quando $n = 2$.
   b) Per quali n il valore atteso di $Y + Z$ è uguale a $7/2$?
   c) Per quali n le variabili aleatorie Y e Z sono indipendenti?
2. Si considerino tutti i triangoli isosceli T aventi un vertice nell'origine e base parallela all'asse delle x, con estremi che appartengono al grafico della funzione
   $$f(x) := e^{-2x^2}$$
   (si veda la figura accanto).
   a) Qual è il valore massimo dell'area di questi triangoli?
   b) E quello minimo?



3. Un dispositivo elettronico impiega un tempo T per eseguire una certa operazione, ma talvolta succede, in modo puramente casuale, che l'operazione non venga svolta correttamente, ed in tal caso il dispositivo la ripete automaticamente finché il risultato non è giusto.
   a) Sapendo che la probabilità che l'operazione venga svolta correttamente è p, calcolare la probabilità che servano due tentativi per ottenere il risultato corretto.
   b) Calcolare la probabilità che servano k tentativi per ottenere il risultato corretto.

c) Qual è in media il tempo necessario ad ottenere il risultato corretto? [*Si ricordi che il valore atteso di una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro* p *è* $1/p$.]

d) La velocità del dispositivo in questione è regolabile in modo da rendere T uguale a qualunque valore maggiore di un certo valore minimo T_0. Tuttavia, più T si avvicina a T_0 e minore è la probabilità p che l'operazione venga svolta correttamente: per la precisione

$$p = 1 - T_0/T \ .$$

Quale T conviene prendere per minimizzare il tempo *medio* necessario ad ottenere il risultato corretto?

SECONDA PARTE, GRUPPO B

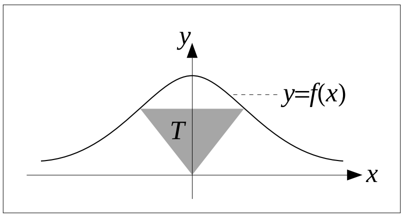
1. Un sacchetto contiene 8 biglie con sopra scritto il numero uno ed n biglie con il numero due. Si estrae una biglia a caso, e si indica con Y il numero così ottenuto. Si estrae poi una seconda biglia (senza rimettere la prima nel sacchetto) e si indica con Z il numero così ottenuto.

   a) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y quando $n = 4$.

   b) Per quali n il valore atteso di $Y + Z$ è uguale a $7/2$?

   c) Per quali n le variabili aleatorie Y e Z sono indipendenti?

2. Si considerino tutti i triangoli isosceli T aventi un vertice nell'origine e base parallela all'asse delle x, con estremi che appartengono al grafico della funzione



$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

   (si veda la figura accanto).

   a) Qual è il valore massimo dell'area di questi triangoli?

   b) E quello minimo?

3. Un dispositivo elettronico impiega un tempo T per eseguire una certa operazione, ma talvolta succede, in modo puramente casuale, che l'operazione non venga svolta correttamente, ed in tal caso il dispositivo la ripete automaticamente finché il risultato non è giusto.

   a) Sapendo che la probabilità che l'operazione venga svolta correttamente è p, calcolare la probabilità che servano due tentativi per ottenere il risultato corretto.

   b) Calcolare la probabilità che servano k tentativi per ottenere il risultato corretto.

   c) Qual è in media il tempo necessario ad ottenere il risultato corretto? [*Si ricordi che il valore atteso di una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro* p *è* $1/p$.]

   d) La velocità del dispositivo in questione è regolabile in modo da rendere T uguale a qualunque valore maggiore di un certo valore minimo T_0. Tuttavia, più T si avvicina a T_0 e minore è la probabilità p che l'operazione venga svolta correttamente: per la precisione

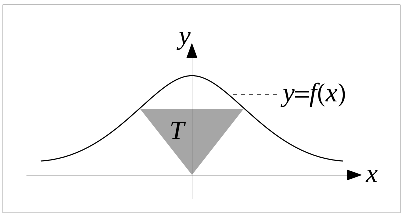
$$p = 1 - T_0^2/T^2 \ .$$

   Quale T conviene prendere per minimizzare il tempo *medio* necessario ad ottenere il risultato corretto?

Seconda parte, gruppo C

1. Un sacchetto contiene 4 biglie con sopra scritto il numero due ed n biglie con il numero tre. Si estrae una biglia a caso, e si indica con Y il numero così ottenuto. Si estrae poi una seconda biglia (senza rimettere la prima nel sacchetto) e si indica con Z il numero così ottenuto.
   a) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y quando $n = 2$.
   b) Per quali n il valore atteso di $Y + Z$ è uguale a $11/2$?
   c) Per quali n le variabili aleatorie Y e Z sono indipendenti?

2. Si considerino tutti i triangoli isosceli T aventi un vertice nell'origine e base parallela all'asse delle x, con estremi che appartengono al grafico della funzione

   $$f(x) := e^{-x^2/2}$$

   (si veda la figura accanto).
   a) Qual è il valore massimo dell'area di questi triangoli?
   b) E quello minimo?

3. Un dispositivo elettronico impiega un tempo T per eseguire una certa operazione, ma talvolta succede, in modo puramente casuale, che l'operazione non venga svolta correttamente, ed in tal caso il dispositivo la ripete automaticamente finché il risultato non è giusto.
   a) Sapendo che la probabilità che l'operazione venga svolta correttamente è p, calcolare la probabilità che servano due tentativi per ottenere il risultato corretto.
   b) Calcolare la probabilità che servano k tentativi per ottenere il risultato corretto.
   c) Qual è in media il tempo necessario ad ottenere il risultato corretto? [*Si ricordi che il valore atteso di una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro* p è $1/p$.]
   d) La velocità del dispositivo in questione è regolabile in modo da rendere T uguale a qualunque valore maggiore di un certo valore minimo T_0. Tuttavia, più T si avvicina a T_0 e minore è la probabilità p che l'operazione venga svolta correttamente: per la precisione

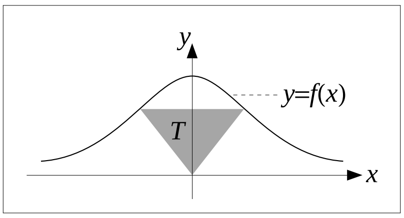
   $$p = 1 - T_0^2/T^2 \ .$$

   Quale T conviene prendere per minimizzare il tempo *medio* necessario ad ottenere il risultato corretto?

Seconda parte, gruppo D

1. Un sacchetto contiene 8 biglie con sopra scritto il numero due ed n biglie con il numero tre. Si estrae una biglia a caso, e si indica con Y il numero così ottenuto. Si estrae poi una seconda biglia (senza rimettere la prima nel sacchetto) e si indica con Z il numero così ottenuto.
   a) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y quando $n = 4$.
   b) Per quali n il valore atteso di $Y + Z$ è uguale a $11/2$?
   c) Per quali n le variabili aleatorie Y e Z sono indipendenti?

2. Si considerino tutti i triangoli isosceli T aventi un vertice nell'origine e base parallela all'asse delle x, con estremi che appartengono al grafico della funzione

   $$f(x) := \frac{2}{1 + x^2}$$

(si veda la figura accanto).
a) Qual è il valore massimo dell'area di questi triangoli?
b) E quello minimo?

3. Un dispositivo elettronico impiega un tempo T per eseguire una certa operazione, ma talvolta succede, in modo puramente casuale, che l'operazione non venga svolta correttamente, ed in tal caso il dispositivo la ripete automaticamente finché il risultato non è giusto.
a) Sapendo che la probabilità che l'operazione venga svolta correttamente è p, calcolare la probabilità che servano due tentativi per ottenere il risultato corretto.
b) Calcolare la probabilità che servano k tentativi per ottenere il risultato corretto.
c) Qual è in media il tempo necessario ad ottenere il risultato corretto? [*Si ricordi che il valore atteso di una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro* p è $1/p$.]
d) La velocità del dispositivo in questione è regolabile in modo da rendere T uguale a qualunque valore maggiore di un certo valore minimo T_0. Tuttavia, più T si avvicina a T_0 e minore è la probabilità p che l'operazione venga svolta correttamente: per la precisione

$$p = 1 - T_0/T \ .$$

Quale T conviene prendere per minimizzare il tempo *medio* necessario ad ottenere il risultato corretto?

TERZO COMPITINO E PRIMO APPELLO, 27 MARZO 2008

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\sqrt{e^x - 2}$.
2. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) $\log\left(\sqrt{\cos x}\right)$; b) e^{-x^2} ; c) $\sqrt{1+2x}$.
3. Usando un opportuno cambio di variabile, calcolare la primitiva $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} x^{10}2^{-x}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{x^3}$; c) $\lim_{x\to+\infty} e^{2\arctan x}$.
5. Calcolare la media m e la varianza σ^2 dei numeri: 1,4 1,5 1,2 1,3 1,6 .
6. Quante sono le possibili sigle formate da 2 lettere dell'alfabeto italiano seguite da 3 cifre comprese tra 1 e 9?
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{y} + 3y = 0$ che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 2$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1 - e^{-x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\sqrt{2 - e^x}$.
2. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) $\log\left(\sqrt[4]{\cos x}\right)$; b) $\sin(x^2)$; c) $\sqrt{1-x^2}$.
3. Usando un opportuno cambio di variabile, calcolare la primitiva $\int \sqrt{4x-1}\,dx$.
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 0^+} x^3 \log x$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x^3)}{x^3}$; c) $\lim_{x\to+\infty} e^{-1/x}$.
5. Calcolare la media m e la varianza σ^2 dei numeri: 1,4 1,6 1,2 1 0,8 .
6. Quante sono le possibili sigle formate da 3 lettere dell'alfabeto italiano seguite da 2 cifre comprese tra 1 e 7?
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{y} - 3y = 0$ che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = -2$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1 - \cos x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO C

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\frac{1}{\sqrt{2 - e^x}}$.
2. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) $\log\left(\sqrt[4]{\sin x}\right)$; b) $\cos(x^3)$; c) $\sqrt{1+x^2}$.
3. Usando un opportuno cambio di variabile, calcolare la primitiva $\int \sqrt{2x-1}\,dx$.
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{2x^3}$; c) $\lim_{x\to-\infty} e^{-2/x}$.
5. Calcolare la media m e la varianza σ^2 dei numeri: 2,4 2,6 2,5 2,2 2,3 .
6. Quante sono le possibili sigle formate da 2 lettere dell'alfabeto italiano seguite da 3 cifre comprese tra 1 e 7?
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{y} + 2y = 0$ che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 3$.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{1+x}$.

Prima parte, gruppo D

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{1}{\sqrt{e^x - 2}}$.
2. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) $\log\left(\sqrt{\sin x}\right)$; b) e^{x^3} ; c) $\sqrt{1-2x}$.
3. Usando un opportuno cambio di variabile, calcolare la primitiva $\displaystyle\int \sqrt{4x+1}\, dx$.
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-10}4^x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{\log(1+x^3)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{4\arctan x}$.
5. Calcolare la media m e la varianza σ^2 dei numeri: 0,4 0,6 0,2 0 −0,2 .
6. Quante sono le possibili sigle formate da 3 lettere dell'alfabeto italiano seguite da 2 cifre comprese tra 1 e 9?
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{y} - 2y = 0$ che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = -3$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{x-1}$.

Seconda parte, gruppo A

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3. Terzo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Consideriamo un dado che su 3 facce porta scritto il numero 1, su altre 2 facce il numero 2, e sulla rimanente il numero 5. Indichiamo quindi con Y il numero che si ottiene lanciando questo dado, e con Z la somma dei numeri che si ottengono lanciandolo per 10 volte.
   a) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.
   b) Calcolare il valore atteso e la varianza di Z.
   c) Calcolare la probabilità che Z sia maggiore o uguale a 45.
2. Si consideri la funzione $f(x) := \dfrac{e^{x+1}}{x^2}$.
   a) Fare un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$ per $x > 0$.
   b) Determinare il punto di minimo e il valore minimo di $f(x)$ per $x > 0$.
   c) Usando quanto fatto al punto b) dire se è vero o no che $e^{x+1} \geq 2x^2$ per ogni $x > 0$.
   d) Determinare per quali $a > 0$ si ha che $e^{x+1} \geq ax^2$ per ogni $x > 0$.
3. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0$.
   b) Cercare una soluzione particolare di $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = e^t$ della forma $y = ce^t$.
   c) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = e^t$.
   d) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} + 2a\dot{y} + 5y = e^t$ per $a > 0$.
4. Si consideri la funzione $f(x) := 2xe^{-x^2}$.
   a) Fare un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x \geq 0$ e $x \leq y \leq f(x)$.
   c) Calcolare l'area di A.
5. a) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $e^{-x^4} - \cos(2x^2)$.

b) Calcolare il limite di $x^{-4}\big(e^{-x^4} - \cos(2x^2)\big)$ per $x \to 0$.
c) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $e^{-2x^4} - \cos(2x^2)$.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3. Terzo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Consideriamo un dado che su 3 facce porta scritto il numero 2, su altre 2 facce il numero 4, e sulla rimanente il numero 10. Indichiamo quindi con Y il numero che si ottiene lanciando questo dado, e con Z la somma dei numeri che si ottengono lanciandolo per 10 volte.
   a) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.
   b) Calcolare il valore atteso e la varianza di Z.
   c) Calcolare la probabilità che Z sia maggiore o uguale a 90.
2. Si consideri la funzione $f(x) := \dfrac{e^{x-1}}{x^3}$.
   a) Fare un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$ per $x > 0$.
   b) Determinare il punto di minimo e il valore minimo di $f(x)$ per $x > 0$.
   c) Usando quanto fatto al punto b) dire se è vero o no che $e^{x-1} \geq x^3$ per ogni $x > 0$.
   d) Determinare per quali $a > 0$ si ha che $e^{x-1} \geq ax^3$ per ogni $x > 0$.
3. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = 0$.
   b) Cercare una soluzione particolare di $\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = e^{-t}$ della forma $y = ce^{-t}$.
   c) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = e^{-t}$.
   d) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} - 2a\dot{y} + 5y = e^{-t}$ per $a > 0$.
4. Si consideri la funzione $f(x) := 4xe^{-x^2}$.
   a) Fare un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x \geq 0$ e $x \leq y \leq f(x)$.
   c) Calcolare l'area di A.
5. a) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $e^{-x^4} - \cos(4x^2)$.
   b) Calcolare il limite di $x^{-4}\big(e^{-x^4} - \cos(4x^2)\big)$ per $x \to 0$.
   c) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $e^{-2x^4} - \cos(2x^2)$.

SECONDA PARTE, GRUPPO C

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3. Terzo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Consideriamo un dado che su 3 facce porta scritto il numero 1, su altre 2 facce il numero 2, e sulla rimanente il numero 5. Indichiamo quindi con Y il numero che si ottiene lanciando questo dado, e con Z la somma dei numeri che si ottengono lanciandolo per 20 volte.
   a) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.
   b) Calcolare il valore atteso e la varianza di Z.
   c) Calcolare la probabilità che Z sia maggiore o uguale a 95.
2. Si consideri la funzione $f(x) := \dfrac{e^{x-1}}{x^2}$.
   a) Fare un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$ per $x > 0$.
   b) Determinare il punto di minimo e il valore minimo di $f(x)$ per $x > 0$.
   c) Usando quanto fatto al punto b) dire se è vero o no che $e^{x-1} \geq x^2$ per ogni $x > 0$.
   d) Determinare per quali $a > 0$ si ha che $e^{x-1} \geq ax^2$ per ogni $x > 0$.

3. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 0$.
   b) Cercare una soluzione particolare di $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = e^t$ della forma $y = ce^t$.
   c) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = e^t$.
   d) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} + 2a\dot{y} + 5y = e^t$ per $a > 0$.

4. Si consideri la funzione $f(x) := 2xe^{-x^2}$.
   a) Fare un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x \leq 0$ e $f(x) \leq y \leq x$.
   c) Calcolare l'area di A.

5. a) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\cos(2x^2) - e^{-x^4}$.
   b) Calcolare il limite di $x^{-4}\big(\cos(2x^2) - e^{-x^4}\big)$ per $x \to 0$.
   c) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\cos(2x^2) - e^{-2x^4}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO D

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3. Terzo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Consideriamo un dado che su 3 facce porta scritto il numero 2, su altre 2 facce il numero 4, e sulla rimanente il numero 10. Indichiamo quindi con Y il numero che si ottiene lanciando questo dado, e con Z la somma dei numeri che si ottengono lanciandolo per 20 volte.
   a) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.
   b) Calcolare il valore atteso e la varianza di Z.
   c) Calcolare la probabilità che Z sia maggiore o uguale a 190.

2. Si consideri la funzione $f(x) := \dfrac{e^{x+1}}{x^3}$.
   a) Fare un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$ per $x > 0$.
   b) Determinare il punto di minimo e il valore minimo di $f(x)$ per $x > 0$.
   c) Usando quanto fatto al punto b) dire se è vero o no che $e^{x+1} \geq x^3/2$ per ogni $x > 0$.
   d) Determinare per quali $a > 0$ si ha che $e^{x+1} \geq ax^3$ per ogni $x > 0$.

3. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = 0$.
   b) Cercare una soluzione particolare di $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = e^{-t}$ della forma $y = ce^{-t}$.
   c) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = e^{-t}$.
   d) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} - 2a\dot{y} + 5y = e^{-t}$ per $a > 0$.

4. Si consideri la funzione $f(x) := 4xe^{-x^2}$.
   a) Fare un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x \leq 0$ e $f(x) \leq y \leq x$.
   c) Calcolare l'area di A.

5. a) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\cos(4x^2) - e^{-x^4}$.
   b) Calcolare il limite di $x^{-4}\big(\cos(4x^2) - e^{-x^4}\big)$ per $x \to 0$.
   c) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\cos(2x^2) - e^{-2x^4}$.

Secondo appello, 18 giugno 2008

Prima parte

1. Una scatola contiene 40 chiodi lunghi 2,5 cm; 130 chiodi lunghi 3 cm; 20 chiodi lunghi 3,5 cm; 10 chiodi lunghi 4 cm. Calcolare la media della lunghezza di questi chiodi (in cm) e la varianza (in cm^2).
2. Quante sigle di 5 lettere *senza ripetizioni* è possibile ottenere usando solo le 21 lettere dell'alfabeto italiano?
3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) e^{-x^2}; b) $\arctan(1-3x)$; c) $\log\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$.
4. Calcolare integrando per parti $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx$.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{2x^2+x^3}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x}}{\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}$.
6. Qual è la probabilità che tirando per 10 volte un dado il numero quattro esca esattamente 3 volte?
7. Si considerino i seguenti eventi per il lancio di un dado: $A := \{\text{esce un numero pari}\}$; $B := \{\text{esce un numero diverso da 3}\}$. Calcolare la probabilità condizionale $P(A|B)$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) nel piano cartesiano tali che $-1 \le y \le 1 - x^2$.

Seconda parte

1. Un sacchetto contiene 18 palline con sopra il numero 2 e 2 palline con il numero 10.
   a) Calcolare il valore atteso del numero che si ottiene estraendo una pallina a caso.
   b) In un gioco a premi la vincita di un giocatore (in euro) viene determinata estraendo due palline da questo sacchetto e moltiplicando i numeri così ottenuti. Calcolare il valore atteso della vincita nel caso che la prima pallina venga rimessa nel sacchetto prima di estrarre la seconda.
   c) Come al punto b), tranne che la prima pallina non viene rimessa nel sacchetto prima di procedere alla seconda estrazione.
2. Si consideri l'equazione differenziale
   $$\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = 24e^{-t}\ . \tag{1}$$
   a) Calcolare la solzione generale dell'equazione differenziale omogenea associata.
   b) Cercare una soluzione particolare della (1) della forma $y = ae^{-t}$.
   c) Scrivere la soluzione generale della (1).
   d) Trovare y_0 ed y_1 per cui la soluzione $y(t)$ dell'equazione (1) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = y_1$ tende a 0 quanto $t \to +\infty$.
3. a) Fare un disegno approssimativo del grafico dela funzione
   $$f(x) := e^{x^4-32x+49}$$
   e trovarne il valore minimo.
   b) Determinare la variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.

Terzo appello, 15 luglio 2008

Prima parte

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\log(7 - e^x)$
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\log(x^2)}$; b) $\lim_{x\to+\infty} e^x\sqrt{2+x^2}$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.
3. Calcolare le derivate delle funzioni a) $e^{2\sin x}$; b) $\log\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)$; c) $\cos(1/x)$.
4. Calcolare integrando per parti la primitiva $\displaystyle\int x\log(3x)\,dx$
5. Ripetendo 50 volta una certa misurazione, si ottiene per 20 volte il valore -1, per altre 10 il valore 2 e per le rimanenti volte il valore 0. Calcolare la media e la varianza di questi dati.
6. Si estraggono 4 carte da un mazzo di 52. Qual è la probabilità di ottenere i quattro re?
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{y} = 3yt^2$.
8. Disegnare il grafico di $y = \sin(\pi/2 - x)$.

Seconda parte

1. a) Fare un disegno approssimativo del grafico della funzione $f(x) := 2x\,e^{-x}$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x \le y \le f(x)$.
   c) Calcolare l'area di A.
2. Si estrae a caso una biglia da un sacchetto che ne contiene m con sopra il numero 1, n con il numero 2 e $n + 2$ con il numero 4.
   a) Se $m = 4$, quanto deve essere n per far sì che il valore atteso dell'estrazione sia 2,7?
   b) Determinare m ed n sapendo che il valore atteso dell'estrazione è 2,8 e la varianza è 1,56.
3. Viene presa una sequenza casuale di 7 lettere comprese tra A, B, C, D. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
   a) la sequenza non contiene le lettere C e D;
   b) la sequenza inizia con tre A;
   c) la sequenza inizia con tre A e non ne contiene altre;
   d) la sequenza contiene esattamente tre A;
   e) la sequenza non contiene due lettere consecutive uguali.

Quarto appello, 23 settembre 2008

Prima parte

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\sqrt{2-\log x}$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2^{-x}x^{20}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{1+1/x}$.
3. Calcolare le derivate delle funzioni a) $\sqrt{1+\cos x}$; b) $\arctan(x^2)$; c) $\dfrac{1+x}{1-x}$.
4. Calcolare integrando per parti il valore di $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx$.
5. Determinare quante sono le possibili sigle formate da 2 lettere dell'alfabeto italiano seguite da 6 cifre comprese tra 1 e 9 (inclusi).
6. Determinare media e varianza dei seguenti numeri: 3 ; 4,5 ; 4 ; 4,5 ; 2 ; 3 .
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{y}+9y=0$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y=\tan(x/2)$.

Seconda parte

1. a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di $f(x) := \dfrac{e^x}{x^2}$ per $x>0$.
   b) Dire per quali numeri reali a l'equazione $f(x)=a$ ha almeno una soluzione positiva.
2. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{y}=1+y^2$ che soddisfa $y(0)=1$.
3. Un sacchetto contiene n palline rosse ed n palline nere.
   a) Calcolare la probabilità che estraendo 2 palline queste siano entrambe nere.
   b) Sapendo che la probabilità di estrarre due palline nere è $6/25$, quanto vale n?
   c) Calcolare la probabilità che estraendo n palline queste siano tutte nere.

Sesto appello, 10 febbraio 2009

Prima parte

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $y = \sqrt{\log x - 2}$.
2. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\log(1 + x^4)$.
3. Derivare le seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^2}{x+1}$; b) $\sin(e^x)$; c) $\log(x^3(2x-1)^4)$.
4. Calcolare la seguente primitiva: $\displaystyle\int e^{1-2x}\, dx$.
5. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{y} = 2yt$.
6. In un certo gioco si vincono 2 euro se tirando un dado esce un numero pari, se ne perde 1 se esce uno o tre, e se ne perdono 5 se esce il cinque. In media si perde o si guadagna? e quanto?
7. Determinare la media m e la varianza σ^2 dei numeri: 4 ; 5 ; 9 ; 3 ; 4 .
8. Disegnare il grafico della funzione $y = (x + 1)^3$.

Seconda parte

1. a) Tracciare il grafico delle funzioni $y = x^3$ e $y = 7 + (x - 1)^3$ e disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x^3 \le y \le 7 + (x - 1)^3$.
   b) calcolare l'area di A.
2. Si consideri l'equazione differenziale lineare
   $$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 4e^{-t} \tag{1}$$
   a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.
   b) Cercare una soluzione particolare dell'equazione (1) della forma $y = ae^{-t}$.
   c) Scrivere la soluzione generale della (1).
   d) Determinare la soluzione della (1) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 0$.
3. Si estrae una biglia a caso da un sacchetto che ne contiene m_r rosse e m_b bianche, e poi se ne estrae un'altra da un secondo sacchetto che ne contiene n_r rosse e n_b bianche (i numeri m_r, m_b, n_r, n_b sono tutti interi positivi).
   a) Qual è la probabilità di estrarre due biglie rosse?
   b) Qual è la probabilità di estrarre prima una biglia rossa e poi una bianca?
   c) Qual è la probabilità una delle biglie estratte sia rossa e l'altra sia bianca?
   d) Si considerino gli eventi $A :=$ la prima biglia estratta è rossa, e $B :=$ una delle biglie estratte è rossa e l'altra è bianca. Dire per quali valori di m_r, m_b, n_r, n_b gli eventi A e B sono indipendenti.

Soluzioni

Prima parte

1. $P = \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{21} = \frac{1}{121} \simeq 0{,}8\%$.
2. Il secondo dado deve dare un numero dispari, per cui $P = \frac{1}{2} = 50\%$.
3. $P = \frac{10+20}{10+20+20} = \frac{3}{5} = 60\%$.
4. Deve essere $e^x - 2 > 0$, ovvero $x \geq \log 2$.
5. La disequazione equivale a $f(x) \geq -x$; le soluzioni sono $x \geq 0$.
6. $\frac{\sqrt{a^{b+2}}}{\sqrt[3]{a^{b+3}}} = \frac{a^{b/2+1}}{s^{b/3+1}} = a^{(b/2+1)-(b/3+1)} = a^{b/6}$.
7. Siccome ci interessano solo le soluzioni x comprese tra 0 e 1, ponendo $y = \pi x^2$ abbiamo che y è compreso tra 0 e π. tra questi ci interessano quelli tali che $\sin y = 1/2$, e sono $\pi/6$ e $5\pi/6$. Pertanto deve essere $\pi x^2 = \pi/6; 5\pi/6$, ovvero $x = 1/\sqrt{6}; \sqrt{5/6}$.
8. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse delle y e quindi traslato in basso di 1.

Seconda parte

1. Siccome $\pi/4 = \arctan 1$, disegnando il grafico dell'arcotangente si vede subito che la disequazione $\arctan t \leq \pi/4$ equivale a $t \leq 1$ (il punto fondamentale è che l'arcotangente è una funzione crescente). Quindi la disequazione di partenza equivale a

$$\frac{x}{x-1} \leq 1 ,$$

di cui si vede facilmente che la soluzione è $x < 1$.

2. a) Quello che succede negli ultimi due lanci è irrilevante; la probabilità che esca uno al primo lancio è 1/6 e lo stesso vale per quella che esca uno al secondo. Trattandosi di eventi indipendenti, la probabilità che si verifichino entrambi (intersezione dei due eventi) è il prodotto delle due:

$$P_a = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \simeq 2{,}8\% .$$

b) Nei primi due lanci deve uscire uno, negli altri due lanci deve uscire uno dei rimanenti 5 numeri, le probabilità di ciascuno di questi eventi sono 1/6, 1/6, 5/6 e 5/6. trattandosi di eventi indipendenti, a probabilità che si verifichino tutti e quattro è data dal prodotto di queste:

$$P_b = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{1296} \simeq 1{,}9\% .$$

c) I due lanci consecutivi possono essere il primo e il secondo, il secondo e il terzo, oppure il terzo e il quarto. In ciascun caso la probabilità che esattamente in quei due lanci esca uno è quella calcolata al punto precedente, cioè P_b. Trattandosi di eventi disgiunti, la probabilità che se ne verifichi uno (unione degli eventi) è data dalla somma delle probabilità di ciascuno, vale a dire

$$P_c = 3 \cdot P_b = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{432} \simeq 5{,}8\% .$$

d) Le possibili coppie di lanci in cui può uscire il numero uno sono $C_{4,2} = 6$. procedendo come al punto c) si vede quindi che

$$P_d = C_{4,2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216} \simeq 11{,}6\% \ .$$

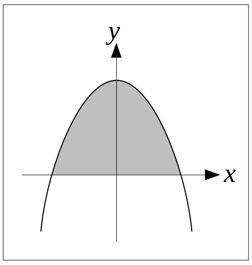
e) Alla probabilità calcolata al punto d) si deve sommare quella il numero 1 esca tre volte, e poi quella che esca quattro volte notare che si tratta di eventi disgiunti)

$$P_e = C_{4,2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + C_{4,1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{19}{144} \simeq 13{,}2\% \ .$$

Primo compitino, 16 novembre 2007

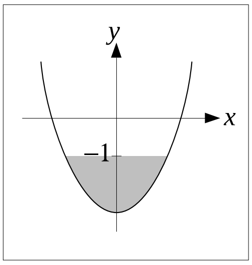
Prima parte, gruppo A

1. Deve essere $x > 0$ (affinché esista il logaritmo) e $2 + \log x \geq 0$ (affinché esista la radice), ovvero $x \geq 1/e^2$.
2. Estrarre un numero a caso tra 10 e 99 equivale a estrarre a caso la prima cifra tra 1 e 9 e poi la seconda tra 0 e 10. La probabilità che la prima sia pari è 4/9, mentre la probabilità che la seconda sia pari è 5/10. Trattandosi di eventi indipendenti, la probabilità che si verifichino entrambi è
$$P = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} = \frac{2}{9} \simeq 22\% \ .$$
3. I numeri compresi tra 1000 e 9999 sono 9000, pertanto $N = 21^2 \cdot 9000 \simeq 3{,}97 \cdot 10^6$.
4. $P = \dfrac{C_{5,2}}{2^5} = \dfrac{5}{16} \simeq 31\%$.
5. $\dfrac{\log(x^x)}{\log\sqrt{x}} = \dfrac{x\log x}{\frac{1}{2}\log x} = 2x$.
6. L'insieme di punti cercato è quello in grigio nella figura accanto.
7. a) Vera; b) falsa.
8. Si tratta del grafico di $1/x$ riflesso rispetto all'asse delle y e poi traslato verso destra di 2.



Prima parte, gruppo B

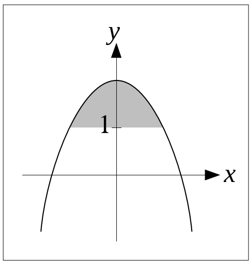
1. $0 < x \leq e^2$.
2. $P = \dfrac{1}{9} \simeq 11\%$.
3. $N = 21^3 \cdot 9000 \simeq 8{,}33 \cdot 10^7$.
4. $P = \dfrac{C_{6,2}}{2^6} = \dfrac{15}{64} \simeq 23\%$.
5. $\dfrac{\log(x^{-x})}{\log\sqrt[3]{x}} = -3x$.
6. L'insieme di punti cercato è quello in grigio nella figura accanto.
7. a) Falsa; b) vera.
8. Si tratta del grafico di $\log x$ traslato verso sinistra di 1.



Prima parte, gruppo C

1. $x \geq 1/e$.
2. $P = \dfrac{5}{18} \simeq 28\%$.
3. $N = 21^2 \cdot 9000 \simeq 3{,}97 \cdot 10^6$.
4. $P = \dfrac{C_{5,3}}{2^5} = \dfrac{5}{16} \simeq 31\%$.
5. $\dfrac{\log(x^{-x})}{\log\sqrt{x}} = -2x$.

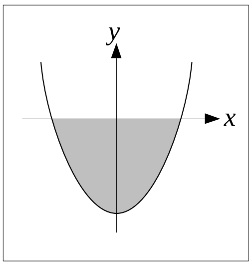
6. L'insieme di punti cercato è quello in grigio nella figura accanto.



7. a) Vera; b) falsa.
8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato verso sinistra di 2.

PRIMA PARTE, GRUPPO D

1. $0 < x \leq e$.
2. $P = \dfrac{5}{36} \simeq 14\%$.
3. $N = 21^3 \cdot 9000 \simeq 8{,}33 \cdot 10^7$.
4. $P = \dfrac{C_{6,3}}{2^6} = \dfrac{5}{16} \simeq 31\%$.
5. $\dfrac{\log(x^x)}{\log \sqrt[3]{x}} = 3x$.
6. L'insieme di punti cercato è quello in grigio nella figura accanto.



7. a) Vera; b) falsa.
8. Si tratta del grafico di $\log x$ riflesso rispetto all'asse delle y e poi traslato verso destra di 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. Indichiamo con A l'evento "essere figli unici" e con B l'evento "essere femmine" (dunque B^c corrisponde all'evento "essere maschi"). Si chiede dunque di calcolare la probabilità condizionata $P(A|B)$ avendo a disposizione i seguenti dati:

$$\begin{array}{lcl} P(A) = 30\% = 3/10 & \Rightarrow & P(A^c) = 1 - P(A) = 7/10 \ , \\ P(B^c|A) = 55\% = 11/20 & \Rightarrow & P(B|A) = 1 - P(B^c|A) = 9/20 \ , \\ P(B^c|A^c) = 45\% = 9/20 & \Rightarrow & P(B|A^c) = 1 - P(B^c|A^c) = 11/20 \ . \end{array}$$

   Applicando infine la formula di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} = \frac{\frac{9}{20} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{9}{20} \cdot \frac{3}{10} + \frac{11}{20} \cdot \frac{7}{10}} = \frac{27}{104} \simeq 26\% \ .$$

2. a) Data la lettera uscita al primo lancio, la probabilità condizionale che quella uscita al secondo sia diversa è $5/6$. Date le prime due lettere (distinte), la probabilità condizionale che quella uscita al terzo lancio sia diversa dalle precedenti è $4/6$, etc. etc. Pertanto la probabilità cercata è

$$P_a = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{54} \simeq 9{,}3\% \ .$$

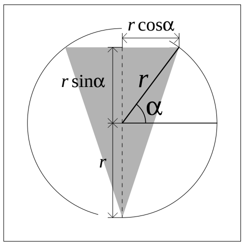
   b) La probabilità che in ciascun lancio esca la lettera prescelta è $1/6$. Trattandosi di eventi indipendenti, la probabilità che si verifichino tutti e cinque (evento intersezione) è data dal prodotto delle singole probabilità:

$$P_b = \frac{1}{6^5} \simeq 0{,}01\% \ .$$

c) Punto difficile: bisogna moltiplicare la probabilità calcolata al punto precedente per il numero N di modi di disporre tre B, una A e una O, ovvero il numero N degli anagrammi della parola $BABBO$. Possiamo sistemare le tre B elle cinque posizioni a disposizione in $C_{5,3}$ modi diversi. Quindi nelle due posizioni rimanenti possiamo sistemare la A in $C_{2,1}$ modi diversi, ed infine resta una sola posizione per la O. Dunque $N = C_{5,3} \cdot C_{2,1} = 20$ e quindi

$$P_c = C_{5,3} \cdot C_{2,1} \cdot P_b = \frac{20}{6^5} \simeq 0{,}26\% \ .$$

3. a) Come si vede dal disegno, la base di T è $b = 2r\cos\alpha$, mentre l'altezza è $h = r(1 + \sin\alpha)$. Pertanto



$$\text{Area}(T) = \frac{bh}{2} = r^2 \cos\alpha(1 + \sin\alpha) \ .$$

b) Sapendo che $b = 2r\cos\alpha$ si ottiene $\cos\alpha = b/(2r)$ e quindi

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}}$$

e quindi

$$h = r\left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}}\right) = r + \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - b^2} \ .$$

Pertanto

$$\text{Area}(T) = \frac{bh}{2} = \frac{br}{2} + \frac{b}{4}\sqrt{4r^2 - b^2} \ .$$

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Analogo al gruppo A. In questo caso A è l'evento "essere figli unici", B l'evento "essere maschi" e si sa che

$$\begin{aligned} &P(A) = 20\% = 1/5 \quad \Rightarrow \quad && P(A^c) = 4/5, \\ &P(B|A) = 55\% = 11/20, && P(B|A^c) = 45\% = 9/20. \end{aligned}$$

e quindi

$$P(A|B) = \frac{\frac{11}{20} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{11}{20} \cdot \frac{1}{5} + \frac{9}{20} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{11}{47} \simeq 23\% \ .$$

2. Analogo al gruppo A.
   a) $P_a = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{18} \simeq 27{,}8\%$.
   b) $P_b = \frac{1}{6^4} \simeq 0{,}08\%$.
   c) $P_c = C_{4,2} \cdot P_b = \frac{1}{6^3} \simeq 0{,}46\%$.

3. a) Uguale al gruppo A.
   b) Analogo al gruppo A: $\sin\alpha = h/r - 1$; quindi $b = 2r\cos\alpha = 2\sqrt{2hr - h^2}$ e

$$\text{Area}(T) = h\sqrt{2hr - h^2} \ .$$

SECONDA PARTE, GRUPPO C

1. Uguale al gruppo A.
2. a) Uguale al gruppo A.
   b) Uguale al gruppo A.
   c) $P_c = C_{5,2} \cdot C_{3,2} \cdot P_b = \dfrac{5}{6^4} \simeq 0{,}38\%$.
3. a) Analogo al gruppo A: $b = 2r\sin\alpha$, $h = r(1+\cos\alpha)$ e quindi $\text{Area}(T) = r^2 \sin\alpha(1+\cos\alpha)$.
   b) Uguale al gruppo A.

SECONDA PARTE, GRUPPO D

1. Uguale al gruppo B.
2. a) Uguale al gruppo B.
   b) Uguale al gruppo B.
   c) $P_c = C_{4,2} \cdot C_{4,1} \cdot P_b = \dfrac{2}{6^3} \simeq 0{,}93\%$.
3. a) Uguale al gruppo C.
   b) Uguale al gruppo B.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 2. Alternativamente si può ottenere P come $P = N_1/N_0$ dove N_0 è il numero di numeri ammissibili (90 per i gruppi A e C, 900 per i gruppi B e D) ed N_1 è il numero di quelli che soddisfano la condizione richiesta. Bisogna comunque trovare un modo di calcolare quest'ultimo numero...
- Prima parte, esercizi 2 e 3. Molti hanno scritto che i numeri compresi tra 10 e 99 (inclusi) sono 89 (invece di 90), o analogamente quelli compresi tra 100 e 999 sono 899 e quelli compresi tra 1000 e 9999 sono 8999. Si tratta di un errore che capita facilmente di fare, per cui, nel caso in cui non ce ne fossero altri, si è considerata la risposta come sostanzialmente corretta.
- Prima parte, esercizio 5. Con nostra grande sorpresa (e disappunto), questo è stato l'esercizio sbagliato più spesso!
- Seconda parte, esercizio 1. Non si deve necessariamente usare la formula di Bayes: indicando con N il numero di studenti, nel caso del gruppo A sappiamo che tra gli studenti i figli unici sono $0{,}3 \cdot N$, e che i figli unici maschi sono $0{,}55 \cdot 0{,}3 \cdot N = 0{,}165 \cdot N$. Quindi le studentesse figlie uniche sono $(0{,}3 - 0{,}165) \cdot N = 0{,}135 \cdot N$. Procedendo allo stesso modo si vede che le studentesse non figlie uniche sono $0{,}385 \cdot N$, e quindi le studentesse sono in totale $0{,}52 \cdot N$. Pertanto la probabilità cercata è

$$P = \frac{0{,}135 \cdot N}{0{,}52 \cdot N} = \frac{0{,}135}{0{,}52} \simeq 0{,}26 = 26\% \ .$$

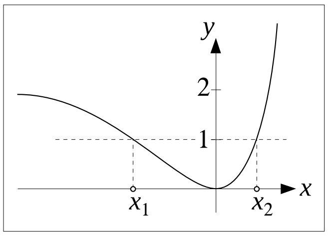
- Seconda parte, esercizio 2. Alternativamente si può ottenere la probabilità P_a al punto a) come $P_a = N_1/N_0$ dove N_0 è il numero di tutte le possibili sequenze di lanci (per i gruppi A e C si tratta del numero di sigle di 5 caratteri scelti tra A, B, E, I, O, U, cioè $N_0 = 6^5$, mentre per i gruppi B e D $N_0 = 6^4$) ed N_1 è il numero sequenze con lettere tutte diverse

($D_{6,5}$ per i gruppi A e C, $D_{6,4}$ per i gruppi B e D). Stesso discorso vale per i punti b) e c): nel primo caso $N_1 = 1$, mentre nel secondo N_1 è il numero di anagrammi della parola proposta, ed è stato già calcolato nella soluzione data sopra.

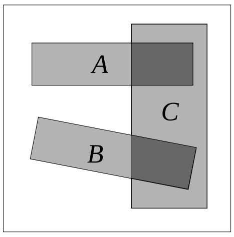
- Seconda parte, esercizio 3. Nello svolgere il punto a), molti hanno dimenticato che il raggio della circonferenza è r e non 1, ottenendo formule dimensionalmente incongrue. Si tratta di un errore abbastanza grave.
- Seconda parte, esercizio 3. Molti hanno frainteso il senso della domanda b): si tratta di trovare una formula per calcolare l'area di T che usi esclusivamente le due quantità indicate (r e b per i gruppi A e C, r e h per i gruppi B e D) e non, ad esempio, l'angolo α.

Prima parte, gruppo A

1. Deve essere $1 - x^2 > 0$, ovvero $-1 < x < 1$.
2. $C_{9,6} = 84$.
3. Chiaramente la probabilità cercata P è uguale alla probabilità di ottenere due teste lanciando due monete (le ultime due), cioè $P = 1/4$.
4. Le soluzioni cercate sono i numeri x_1 e x_2 indicati nella figura accanto.
5. $6 \log\left(\frac{\sqrt[3]{a^4}}{a}\right) = 6 \log\left(\frac{a^{4/3}}{a}\right) = 6 \log(a^{1/3}) = 2 \log a$.

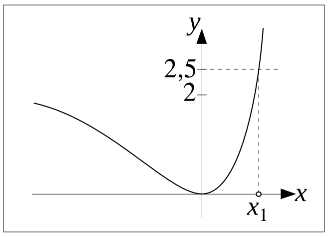


6. Su 36 lanci possibili, quelli che vanno bene sono 3: sei e cinque, cinque e sei, sei e sei. Pertanto $P = 3/36 = 1/12 \sim 8{,}3\%$.
7. L'insieme $(A \cup B) \cap C$ è quello in grigio scuro nella figura accanto.
8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato verso destra di 1.

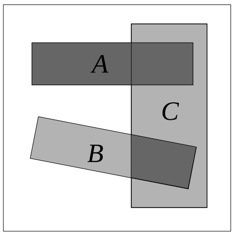


Prima parte, gruppo B

1. Deve essere $x^2 - 4 > 0$, ovvero $x > 2$ oppure $x < -2$.
2. $C_{8,6} = 28$.
3. Chiaramente la probabilità cercata P è uguale alla probabilità di ottenere tre teste lanciando tre monete (le ultime tre), cioè $P = 1/8$.
4. La soluzione cercata è il numero x_1 indicato nella figura accanto.
5. $6 \log\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}\right) = 6 \log\left(\frac{a^{2/3}}{a}\right) = 6 \log(a^{-1/3}) = -2 \log a$.



6. Su 36 lanci possibili, quelli che vanno bene sono 3: due e uno, uno e due, uno e uno. Pertanto $P = 3/36 = 1/12 \sim 8{,}3\%$.
7. L'insieme $A \cup (B \cap C)$ è quello in grigio scuro nella figura accanto.
8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato verso sinistra di 1.



Seconda parte, gruppo A

1. Innanzitutto osserviamo che l'argomento della radice deve essere strettamente maggiore di 0 in modo che la radice abbia senso e sia un numero strettamente positivo, e se ne possa quindi calcolare il logaritmo. Dunque

$$2e^2 - x^2 > 0 \quad \text{cioè} \quad -\sqrt{2}e < x < \sqrt{2}e\ . \tag{1}$$

A questo punto la disequazione equivale a

$$\sqrt{2e^2 - x^2} \le e \quad \text{cioè} \quad 2e^2 - x^2 \le e^2 \quad \text{cioè} \quad x \le -e \text{ oppure } e \le x\ . \tag{2}$$

Mettendo insieme le condizioni (1) e (2) otteniamo che le soluzioni della disequazione sono i numeri x tali che

$$-\sqrt{2}e < x \leq -e \text{ oppure } e \leq x < \sqrt{2}e \ .$$

2. Lanciando 10 monete, la probabilità che escano k teste è

$$P_k = \binom{10}{k} \frac{1}{2^{10}}$$

e quindi la probabilità che escano al più tre teste è

$$\begin{aligned} P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 &= \left[\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} \right] \frac{1}{2^{10}} \\ &= \frac{1 + 10 + 45 + 120}{2^{10}} = \frac{176}{1024} = \frac{11}{64} \ . \end{aligned}$$

Pertanto, in media il guadagno del signor A sarà pari a

$$nP - 10(1-P) \ .$$

Imponendo che tale guadagno medio sia positivo si ottiene

$$n \geq \frac{10(1-P)}{P} = \frac{530}{11} = 48{,}1818\ldots$$

ovvero al signor A conviene giocare per $n \geq 49$.

Seconda parte, gruppo B

1. Analogo al gruppo A. Affinché l'espressione abbia senso si deve avere

$$x^2 - 2e^2 > 0 \quad \text{cioè} \quad x < -\sqrt{2}e \text{ oppure } \sqrt{2}e < x \ .$$

A questo punto la disequazione equivale a

$$\sqrt{x^2 - 2e^2} \leq e \quad \text{cioè} \quad -\sqrt{3}e \leq x \leq \sqrt{3}e \ ,$$

e mettendo insieme queste due condizioni otteniamo che le soluzioni della disequazione sono i numeri x tali che

$$-\sqrt{3}e \leq x < -\sqrt{2}e \text{ oppure } \sqrt{2}e < x \leq \sqrt{3}e \ .$$

2. Analogo al gruppo A. Lanciando 8 monete, la probabilità che escano al più tre teste è

$$P = \left[\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} \right] \frac{1}{2^8} = \frac{1 + 8 + 28 + 56}{2^8} = \frac{93}{256} \ .$$

Pertanto, in media il guadagno del signor A sarà pari a

$$nP - 10(1-P) \ .$$

Imponendo che tale guadagno medio sia positivo si ottiene

$$n \geq \frac{10(1-P)}{P} = \frac{1630}{93} = 17{,}5269\ldots$$

ovvero al signor A conviene giocare per $n \geq 18$.

Commenti

- Prima parte, esercizio 1, gruppo A. Molti hanno dato come dominio della funzione l'insieme degli x tali che $-1 \leq x \leq 1$, invece di $-1 < x < 1$. Si tratta di un errore (anche se alla fine non è stato contato come tale) visto che per $x = \pm 1$ si ha $1 - x^2 = 0$, e il logaritmo di 0 non è definito. (Analogo discorso vale per il gruppo B.)
- Prima parte, esercizio 2, gruppo A. Molti hanno dato come risposta $D_{9,6}$ invece di $C_{9,6}$. (Analogo discorso vale per il gruppo B.)
- Prima parte, esercizio 4. Molti hanno indicato come soluzioni dei punti sul grafico della funzione. Ad essere precisi, questo è un errore (anche se alla fine non è stato contato come tale): le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ sono dei numeri x e quindi stanno sull'asse delle x, non dei punti del piano.
- Seconda parte, esercizio 2. Nel testo dell'esercizio è stato dato per scontato che n deve essere intero, me questo non è stato esplicitamente dichiarato. E a dire il vero nulla impedisce che la cifra pagata al signor A in caso di vittoria non sia un numero intero di euro, ma ci siano anche dei centesimi. Inutile dire che anche quest'interpretazione della domanda andava bene.
- Seconda parte, esercizio 1. Diverse persone hanno omesso di discutere il campo di esistenza dell'espressione.
- Seconda parte, esercizio 2. Curiosamente, diverse persone hanno calcolato correttamente la probabilità che vinca il signor A, non riuscendo però a portare a termine l'esercizio.
- Seconda parte, esercizio 2. Diverse persone hanno calcolato separatamente sia la probabilità che vinca il signor A sia quella che vinca il signor B, mentre invece basta calcolare solo una delle due, visto che la somma deve fare 1 (per la cronaca, quella più semplice da calcolare è la prima).

Secondo compitino, 5 febbraio 2008

Prima parte, gruppo A

1. Deve essere $x - x^2 \geq 0$, ovvero $0 \leq x \leq 1$.
2. a) $-3e^{-3x}$; b) $1 + \log x$; c) $\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.
3. $f'(x) = \left[\log\left(x^{16/3}\right)\right]' = \left[\dfrac{16}{3}\log x\right]' = \dfrac{16}{3x}$.
4. Siccome $f'(x) = 2(1-x)e^{-x^2+2x}$ si annulla solo per $x = 1$, dando per scontato che esista un punto di minimo, allora questo deve essere 1. Quindi il valore minimo è $f(1) = e$.
5. $P = \dbinom{5}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{10 \cdot 5^2}{6^5} = \dfrac{125}{3888} \sim 3{,}21\%$.
6. $\mathrm{E}(Y) = 0$ e $\mathrm{Var}(Y) = 1$.
7. $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(2Y+3) = 2\mathrm{E}(Y) + 3 = 2m + 3$.
   $\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(2Y+3) = \mathrm{Var}(2Y) = 4\mathrm{Var}(Y) = 4\sigma^2$.
8. Si tratta del grafico di $\cos x$ traslato verso l'alto di 1.

Prima parte, gruppo B

1. $x \geq 1$ e $x \leq 0$.
2. a) $2\cos(2x)$; b) $x(1 + 2\log x)$; c) $\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$.
3. $f'(x) = \dfrac{15}{4x}$.
4. Il punto di massimo è $x = 2$, il valore massimo è $f(2) = e^4$.
5. $P = \dbinom{6}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{20 \cdot 5^3}{6^6} = \dfrac{625}{11664} \sim 5{,}36\%$.
6. $\mathrm{E}(Y) = 0$ e $\mathrm{Var}(Y) = 4$.
7. $\mathrm{E}(Z) = 2m - 3$ e $\mathrm{Var}(Z) = 4\sigma^2$.
8. Si tratta del grafico di $\sin x$ riflesso rispetto all'asse delle y e poi traslato verso l'alto di 1.

Prima parte, gruppo C

1. $x \geq 0$ e $x \leq -1$.
2. a) $\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$; b) $3e^{3x}$; c) $x^2(3\log x + 1)$.
3. $f'(x) = \dfrac{11}{5x}$.
4. Il punto di minimo è $x = 1$, il valore minimo è $f(1) = 1/e$.
5. $P = \dbinom{5}{2}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{10 \cdot 5^3}{6^5} = \dfrac{625}{3888} \sim 16{,}1\%$.
6. $\mathrm{E}(Y) = 0$ e $\mathrm{Var}(Y) = 4$.

7. $\mathrm{E}(Z) = 3m + 2$ e $\mathrm{Var}(Z) = 9\sigma^2$.
8. Si tratta del grafico di $\sin x$ riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato verso l'alto di 1.

Prima parte, gruppo D

1. $-1 \leq x \leq 0$.
2. a) $\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$; b) $-3\sin(3x)$; c) $x^3(4\log x + 1)$.
3. $f'(x) = \dfrac{9}{4x}$.
4. Il punto di minimo è $x = -2$, il valore minimo è $f(-2) = 1/e^4$.
5. $P = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \dfrac{15\cdot 5^4}{6^6} = \dfrac{3125}{15552} \sim 20{,}1\%$.
6. $\mathrm{E}(Y) = 0$ e $\mathrm{Var}(Y) = 4$.
7. $\mathrm{E}(Z) = 3m - 2$ e $\mathrm{Var}(Z) = 9\sigma^2$.
8. Si tratta del grafico di $\cos x$ riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato verso l'alto di 1.

Seconda parte, gruppo A

1. a) La variabile aleatoria Y assume solo i valori 1 e 2, con probabilità 2/3 e 1/3 rispettivamente. Pertanto

$$\mathrm{E}(Y) = 1\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\,, \quad \mathrm{Var}(Y) = \left(1-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3} + \left(2-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}\,.$$

b) Procedendo come al punto a) si ottiene che, per n qualunque, il valore atteso di Y è

$$\mathrm{E}(Y) = 1\cdot\frac{4}{n+4} + 2\cdot\frac{n}{n+4} = \frac{2n+4}{n+4}\,.$$

Il punto fondamentale ora è accorgersi che Y e Z hanno la stessa legge, ed in particolare lo stesso valore atteso. Quindi

$$\mathrm{E}(Y+Z) = \mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(Z) = 2\mathrm{E}(Y) = \frac{4n+8}{n+4}\,,$$

e imponendo che quest'ultimo valore sia uguale a 7/2 otteniamo infine $n = 12$.
Per vedere che Y e Z hanno la stessa legge si può procedere in diversi modi: ad esempio, osserviamo che le possibili estrazioni – cioè le possibili coppie di biglie – sono $(n+4)\cdot(n+3)$ e sono tutte equiprobabili, inoltre tra queste, quelle che per cui la prima biglia è 1 sono $4\cdot(n+3)$, ma anche quelle per cui la seconda biglia è 1 sono $(n+3)\cdot 4$. Pertanto la probabilità che la prima biglia sia 1 è pari alla probabilità che la seconda biglia sia 1, vale a dire che la probabilità che Y assuma il valore 1 è pari alla probabilità che Z assuma il valore 1, e per inciso

$$P(Y=1) = P(Z=1) = \frac{4\cdot(n+3)}{(n+4)\cdot(n+3)} = \frac{4}{n+4}\,.$$

Allo stesso si vede che Y e Z assumono il valore 2 con uguale probabilità.

c) Le variabili aleatorie Y e Z non sono mai indipendenti. Consideriamo infatti l'evento che Y assuma il valore 1 e quello che Z assuma il valore 1: allora

$$P(Y = 1) = P(Z = 1) = \frac{4}{n+4} \ ,$$

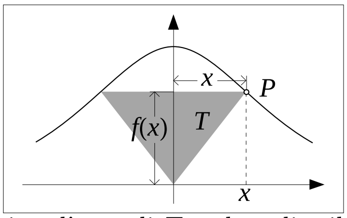
mentre

$$P(Y = 1 \text{ e } Z = 1) = \frac{4}{n+4} \cdot \frac{3}{n+3} \ ,$$

che quindi è sempre diversa da $P(Y = 1) \cdot P(Z = 1)$.

2. Indichiamo con x l'ascissa del vertice *destro* della base di di T, vale a dire il punto P nella figura accanto (quindi x è positivo). Allora, come si vede dalla figura, la base di T è lunga $2x$ mentre l'altezza è $f(x)$, e quindi

$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2}\, 2x\, f(x) = xe^{-2x^2} \ .$$



a) Tra tutti gli $x \geq 0$ dobbiamo cercare quello che rende massima l'area di T, vale a dire il valore della funzione

$$g(x) := xe^{-2x^2} \ .$$

Siccome la derivata di $g(x)$ è

$$g'(x) = (1 - 4x^2)e^{-2x^2} \ ,$$

studiandone il segno si ottiene che $g(x)$ è crescente per $0 \leq x \leq 1/2$ e decrescente per $1/2 \leq x$. Pertanto il valore massimo di $g(x)$ viene assunto per $x = 1/2$. Dunque il triangolo T di area massima è quello che si ottiene per $x = 1/2$, e ha area pari a

$$g(1/2) = \frac{1}{2\sqrt{e}} \ .$$

b) Il valore minimo dell'area è uguale a 0 e viene assunto dal triangolo "degenere" che si ottiene prendendo $x = 0$ (oppure quando x tende a $+\infty$).

3. a) La probabilità che l'operazione non venga portata a termine correttamente al primo tentativo è $1 - p$, mentre la probabilità che invece venga portata a termine correttamente al secondo tentativo è p. Trattandosi di eventi indipendenti, la probabilità cercata è

$$P_a = (1 - p)p \ .$$

b) Ragionando come prima si ottiene che

$$P_b = (1 - p)^{k-1}p \ .$$

c) Il tempo necessario ad ottenere il risultato corretto è uguale a T moltiplicato per il numero di tentativi da fare. Per quanto visto al punto b), questo numero è una variabile aleatoria con legge geometrica di parametro p, e quindi ha valore atteso pari a $1/p$. Pertanto il valore atteso del tempo necessario ad ottenere il risultato corretto è

$$T/p \ .$$

d) Si tratta di trovare il valore minimo di

$$f(T) := T/p = \frac{T^2}{T - T_0}$$

tra tutti i T maggiori di T_0. Siccome la derivata di $f(T)$ rispetto alla variabile T è

$$f'(T) := \frac{T(T - 2T_0)}{(T - T_0)^2} \ ,$$

studiandone il segno si ottiene che $f(T)$ è decrescente per $T_0 < T \leq 2T_0$ e crescente per $2T_0 \leq T$. Pertanto il valore minimo di $f(T)$ viene assunto per $T = 2T_0$, ed è pari a $4T_0$.

Seconda parte, gruppo B

1. Analogo al gruppo A. a) $\mathrm{E}(Y) = 4/3$ e $\mathrm{Var}(Y) = 2/9$.
   b) Imponendo che $\mathrm{E}(Y+Z) = 2\mathrm{E}(Y) = \dfrac{4n+16}{n+8}$ sia uguale a $7/2$ si ottiene $n = 24$.
   c) Le variabili aleatorie Y e Z non sono mai indipendenti.
2. Analogo al gruppo A. Si ha $\mathrm{Area}(T) = g(x)$ dove
   $$g(x) := x\,f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{e quindi} \quad g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\ .$$
   Studiando il segno di $g'(x)$ si ottiene che $g(x)$ è crescente per $0 \le x \le 1$ e decrescente per $1 \le x$. Pertanto $x = 1$ è il punto di massimo di $g(x)$, e il valore massimo dell'area di T è $g(1) = 1/2$. Il valore minimo dell'area è 0.
3. I punti a), b) e c) sono uguali al gruppo A. Per quanto riguarda il punto d), invece, si ha
   $$T/p = \frac{T^3}{T^2 - T_0^2}\ ;$$
   studiando la derivata di questa funzione per $T > T_0$ si ottiene che il valore minimo è assunto per $T = \sqrt{3}T_0$, ed è pari a $\frac{3\sqrt{3}}{2}T_0$.

Seconda parte, gruppo C

1. Analogo al gruppo A. a) $\mathrm{E}(Y) = 7/3$ e $\mathrm{Var}(Y) = 2/9$.
   b) Imponendo che $\mathrm{E}(Y+Z) = 2\mathrm{E}(Y) = \dfrac{6n+16}{n+4}$ sia uguale a $11/2$ si ottiene $n = 12$.
   c) Le variabili aleatorie Y e Z non sono mai indipendenti.
2. Analogo al gruppo A. Si ha $\mathrm{Area}(T) = g(x)$ dove
   $$g(x) := x\,f(x) = xe^{-x^2/2} \quad \text{e quindi} \quad g'(x) = (1-x^2)e^{-x^2/2}\ .$$
   Studiando il segno di $g'(x)$ si ottiene che $g(x)$ è crescente per $0 \le x \le 1$ e decrescente per $1 \le x$. Pertanto $x = 1$ è il punto di massimo di $g(x)$, e il valore massimo dell'area di T è $g(1) = 1/\sqrt{e}$. Il valore minimo dell'area è 0.
3. Uguale al gruppo B.

Seconda parte, gruppo D

1. Analogo al gruppo A. a) $\mathrm{E}(Y) = 7/3$ e $\mathrm{Var}(Y) = 2/9$.
   b) Imponendo che $\mathrm{E}(Y+Z) = 2\mathrm{E}(Y) = \dfrac{6n+32}{n+8}$ sia uguale a $11/2$ si ottiene $n = 24$.
   c) Le variabili aleatorie Y e Z non sono mai indipendenti.
2. Analogo al gruppo A. Si ha $\mathrm{Area}(T) = g(x)$ dove
   $$g(x) := x\,f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{e quindi} \quad g'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\ .$$
   Studiando il segno di $g'(x)$ si ottiene che $g(x)$ è crescente per $0 \le x \le 1$ e decrescente per $1 \le x$. Pertanto $x = 1$ è il punto di massimo di $g(x)$, e il valore massimo dell'area di T è $g(1) = 1$. Il valore minimo dell'area è 0.
3. Uguale al gruppo A.

Commenti

- Prima parte, esercizio 4. Molti hanno confuso punto di minimo e valore minimo: l'esercizio richiedeva di calcolare il secondo (si è comunque deciso di non considerarlo un errore).
- Seconda parte, esercizio 1b). Ecco un modo alternativo per calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $Y + Z$ (i conti si riferiscono al gruppo A): si osservi che $Y + Z$ assume solo i valori $0, 1, 2$ e che
  a) $P(Y + Z = 2) = P(Y = 1 \text{ e } Z = 1) = \frac{4}{n+4} \cdot \frac{3}{n+3}$;
  b) $P(Y + Z = 1) = P(Y = 1 \text{ e } Z = 0) + P(Y = 0 \text{ e } Z = 1) = \frac{4}{n+4} \cdot \frac{n}{n+3} + \frac{n}{n+4} \cdot \frac{4}{n+3}$;
  c) $P(Y + Z = 0) = P(Y = 0 \text{ e } Z = 0) = \frac{n}{n+4} \cdot \frac{n-1}{n+3}$.
  Pertanto $\mathrm{E}(Y + Z) = 2 \cdot \frac{12}{(n+4)(n+3)} + 1 \cdot \frac{8n}{(n+4)(n+3)} + 0 \cdot \frac{n^2-n}{(n+4)(n+3)} = \frac{8}{n+4}$.
- Seconda parte, esercizio 1c). Quasi tutti hanno capito che Y e Z non sono variabili aleatorie indipendenti, visto che in mancanza di reimbussolamento il risultato della seconda estrazione è chiaramente influenzata dalla prima. Tuttavia l'esercizio chiedeva di dare una motivazione matematicamente precisa di questo fatto, il che significa far vedere che la definizione *matematica* di indipendenza (e non quella intuitiva) non è verificata da Y e Z. Questo non è stato fatto praticamente da nessuno.
- Seconda parte, esercizio 2. Molti hanno trascurato di osservare che la funzione $g(x)$ che rappresenta l'area del triangolo T va considerata solo per x positiva; così facendo hanno trovato – oltre al valore massimo pari a $1/(2\sqrt{e})$ e corrispondente a $x = 1/2$ (mi riferisco al gruppo A) – anche un valore minimo pari a $-1/(2\sqrt{e})$ e raggiunto per $x = -1/2$. Un tale risultato avrebbe dovuto far venire qualche sospetto, visto che l'area di un triangolo non può essere negativa!
- Seconda parte, esercizio 2. Qualcuno ha scritto l'area del triangolo T in funzione dell'ordinata y del punto P – cioè l'altezza di T – invece che dell'ascissa x. Questo modo di procedere è legittimo, ma porta a calcoli più complicati.
- Seconda parte, esercizio 3. Lo scopo dei punti a) e b) era di *verificare* la tesi che il numero di ripetizioni necessarie ad ottenere il risultato corretto sia una variabile aleatoria con legge geometrica. Qualcuno sembra aver risolto l'esercizio "al contrario", prendendo questa tesi per un'ipotesi.

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Deve essere $e^x - 2 \geq 0$, ovvero $x \geq \log 2$.
2. a) $-\dfrac{\sin x}{2\cos x} = -\dfrac{1}{2}\tan x$; b) $-2xe^{-x^2}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$.
3. Ponendo $y = 2x+1$ si ottiene $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int \frac{y^{1/2}}{2}dy = \frac{y^{3/2}}{3} + c = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + c.$
4. a) 0 ; b) 0 ; c) e^{π} .
5. $m = 1{,}4$ e $\sigma^2 = 0{,}02$.
6. $N = 21^2 \cdot 9^3 = 7^2 \cdot 3^9 = 321489$.
7. $y(t) = 2e^{-3t}$.
8. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'origine e poi traslato verso l'alto di 1.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Deve essere $2 - e^x \geq 0$, ovvero $x \leq \log 2$.
2. a) $-\dfrac{\sin x}{4\cos x} = -\dfrac{1}{4}\tan x$; b) $2x\cos(x^2)$; c) $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. Ponendo $y = 4x-1$ si ottiene $\displaystyle\int \sqrt{4x-1}\,dx = \frac{1}{6}(4x-1)^{3/2} + c.$
4. a) 0 ; b) 3 ; c) 1 .
5. $m = 1{,}2$ e $\sigma^2 = 0{,}08$.
6. $N = 21^3 \cdot 7^2 = 7^5 \cdot 3^3 = 453789$.
7. $y(t) = -2e^{3t}$.
8. Si tratta del grafico di $\cos x$ riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato verso l'alto di 1.

PRIMA PARTE, GRUPPO C

1. Deve essere $2 - e^x > 0$, ovvero $x < \log 2$.
2. a) $\dfrac{\cos x}{4\sin x} = \dfrac{1}{4\tan x}$; b) $-3x^2\sin(x^3)$; c) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. Ponendo $y = 2x-1$ si ottiene $\displaystyle\int \sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + c.$
4. a) $+\infty$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) 1 .
5. $m = 2{,}4$ e $\sigma^2 = 0{,}02$.
6. $N = 21^2 \cdot 7^3 = 7^5 \cdot 3^2 = 151263$.
7. $y(t) = 3e^{-2t}$.
8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato verso sinistra di 1.

TERZO COMPITINO E PRIMO APPELLO, 27 MARZO 2008

PRIMA PARTE, GRUPPO D

1. Deve essere $e^x - 2 > 0$, ovvero $x > \log 2$.
2. a) $\dfrac{\cos x}{2\sin x} = \dfrac{1}{2\tan x}$; b) $3x^2 e^{x^3}$; c) $\dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}$.
3. Ponendo $y = 4x+1$ si ottiene $\displaystyle\int \sqrt{4x+1}\,dx = \frac{1}{6}(4x+1)^{3/2} + c$.
4. a) $+\infty$; b) 2 ; c) $e^{2\pi}$.
5. $m = 0{,}2$ e $\sigma^2 = 0{,}08$.
6. $N = 21^3 \cdot 9^2 = 7^2 \cdot 3^7 = 750141$.
7. $y(t) = -3e^{2t}$.
8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato verso destra di 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. a) La variabile aleatoria Y assume solo i valori 1, 2 e 5 con probabilità 1/2, 1/3 e 1/6 rispettivamente. Pertanto

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 5 = 2 \ , \\ \mathrm{Var}(Y) &= \frac{1}{2}\cdot(1-2)^2 + \frac{1}{3}\cdot(2-2)^2 + \frac{1}{6}\cdot(5-2)^2 = 2 \ . \end{aligned}$$

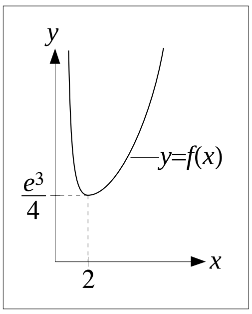
b) Z è la somma di 10 variabili aleatorie indipendenti con media e varianza uguali a quelle di Y, e quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) &= 10\cdot \mathrm{E}(Y) = 20 \ , \\ \mathrm{Var}(Z) &= 10\cdot \mathrm{Var}(Y) = 20 \ . \end{aligned}$$

c) Riflettendoci un po' ci si accorge che, per ottenere 45 o più, il numero 5 deve uscire non meno di 9 volte. Pertanto la probabilità cercata è

$$P = C_{10,9}\left(\frac{1}{6}\right)^9 \frac{5}{6} + C_{10,10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \frac{10\cdot 5+1}{6^{10}} = \frac{51}{6^{10}} \simeq 8{,}43\cdot 10^{-7} \ .$$

2. a), b) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x > 0$, è sempre positiva, ed ha limite uguale a $+\infty$ sia per $x \to 0^+$ che per $x \to +\infty$. Studiando il segno della derivata prima



$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)e^{x+1} = \frac{x-2}{x^3}e^{x+1}$$

si ottiene che $f(x)$ decresce per x compreso tra 0 e 2 e cresce per x maggiore di 2. Pertanto $x = 2$ è il punto di minimo assoluto di $f(x)$, ed il valore minimo è $f(2) = e^3/4$. Quanto detto permette di tracciare il grafico nella figura accanto.

d) Dire che $e^{x+1} \geq ax^2$ per ogni $x > 0$ equivale a dire che $f(x) \geq a$ per ogni $x > 0$, ovvero che a è minore o uguale al valore minimo assunto da $f(x)$ per $x > 0$, cioè $e^3/4$. In altre parole, i valori di a cercati sono $a \leq e^3/4$.

c) Siccome $2 < e^3/4$, per quanto visto prima è vero che $e^{x+1} \geq 2x^2$ per ogni $x > 0$.

3. Svolgiamo direttamente il punto d). Si tratta di risolvere un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. Per cominciare, risolviamo l'equazione omogenea corrispondente

$$\ddot{y} + 2a\dot{y} + 5y = 0 \ .$$

L'equazione caratteristica ad essa associata è $\lambda^2 + 2a\lambda + 5 = 0$, ed ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 5} \ .$$

Quindi, a seconda che a sia maggiore, uguale o minore di $\sqrt{5}$, le soluzioni $\lambda_{1,2}$ sono reali e distinte, reali e coincidenti, complesse. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$\begin{array}{lll} \text{per } a > \sqrt{5} & y_{\text{om}}(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} & \text{con } \lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 5}, \\ \text{per } a = \sqrt{5} & y_{\text{om}}(t) = e^{-\sqrt{5}t}(\alpha_1 + \alpha_2 t) \ , & \\ \text{per } a < \sqrt{5} & y_{\text{om}}(t) = e^{-at}(\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)) & \text{con } \omega := \sqrt{5 - a^2}. \end{array}$$

con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma $\bar{y}(t) = ce^t$. Facendo i conti si ottiene che in questo caso l'equazione si riduce a $(6 + 2a)ce^t = e^t$, da cui segue che c deve essere $1/(6 + 2a)$. Pertanto la soluzione particolare trovata è

$$\bar{y}(t) = \frac{e^t}{6 + 2a} \ ,$$

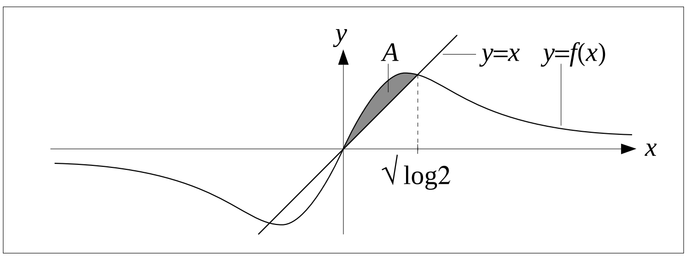
e la soluzione generale dell'equazione non omogenea è $y(t) = \bar{y}(t) + y_{\text{om}}(t)$.
c) Ponendo $a = 1$ in d) si ottiene

$$y(t) := \frac{1}{8}e^t + e^{-t}(\alpha_1 \cos(2t) + \alpha_2 \sin(2t)) \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

4. a), b) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$, e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Dallo studio del segno della derivata

$$f'(x) = (2 - 4x^2)e^{-x^2}$$

si vede che $f(x)$ è crescente per x compresa tra $-1/\sqrt{2}$ e $1/\sqrt{2}$, e decrescente negli altri casi. Quanto detto permette di tracciare il grafico nella figura sottostante.



c) I punti di intersezione tra il grafico di $y = f(x)$ e la retta $y = x$ sono quelli la cui ascissa risolve l'equazione $f(x) = x$, ovvero

$$x = \pm\sqrt{\log 2} \ .$$

Quindi l'area di A è data dal seguente integrale, che si risolve utilizzando il cambio di variabile $y = x^2$:

$$\text{Area}(A) = \int_0^{\sqrt{\log 2}} (2xe^{-x^2} - x)dx = \int_0^{\log 2} \Big(e^{-y} - \frac{1}{2}\Big)\,dy = \Big| - e^{-y} - \frac{y}{2}\Big|_0^{\log 2} = \frac{1-\log 2}{2} \ .$$

5. a) Utilizzando gli sviluppi $e^y = 1 + y + o(y)$ e $\cos(y) = 1 - y^2/2 + o(y^2)$ otteniamo

$$e^{-x^4} - \cos(2x^2) = \big[1 - x^4 + o(x^4)\big] - \big[1 - 2x^4 + o(x^4)\big] = x^4 + o(x^4) \ ,$$

da cui segue che la parte principale cercata è x^4.
b) Per quanto visto al punto a)

$$\lim_{x\to 0} x^{-4}\big(e^{-x^4} - \cos(2x^2)\big) = \lim_{x\to 0} x^{-4}x^4 = 1 \ .$$

c) Procedendo come al punto a) si ottiene $e^{-2x^4} - \cos(2x^2) = o(x^4)$, cosa che non permette di determinare la parte principale. Per risolvere il problema utilizziamo allora gli sviluppi $e^y = 1 + y + y^2/2 + o(y^2)$ e $\cos(y) = 1 - y^2/2 + y^4/24 + o(y^4)$:

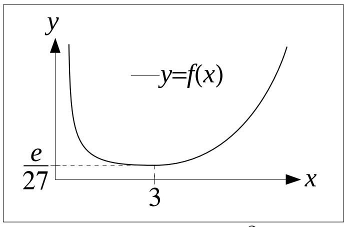
$$e^{-2x^4} - \cos(2x^2) = \Big[1 - 2x^4 + 2x^8 + o(x^8)\Big] - \Big[1 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^8 + o(x^8)\Big] = \frac{4}{3}x^8 + o(x^8) \ ,$$

da cui segue che la parte principale cercata è $\frac{4}{3}x^8$.

Seconda parte, gruppo B

1. Analogo al gruppo A.
a) $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 10 = 4$; $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{2}\cdot(2-4)^2 + \frac{1}{3}\cdot(4-4)^2 + \frac{1}{6}\cdot(10-4)^2 = 8$.
b) $\mathrm{E}(Z) = 10\cdot \mathrm{E}(Y) = 40$; $\mathrm{Var}(Z) = 10\cdot \mathrm{Var}(Y) = 80$.
c) Come per il gruppo A, per ottenere 90 o più il numero 10 deve uscire almeno 9 volte e quindi $P = C_{10,9}(1/6)^9(5/6) + C_{10,10}(1/6)^{10} = 51\cdot 6^{-10} \simeq 8{,}43\cdot 10^{-7}$.

2. Analogo al gruppo A. a), b) La funzione $f(x)$ è sempre positiva e tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$. Studiando il segno della derivata prima



$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^4}\right)e^{x-1} = \frac{x-3}{x^4}e^{x-1}$$

si ottiene che $f(x)$ decresce per $x < 3$ e cresce per $x > 3$.
Pertanto $x = 3$ è il punto di minimo assoluto di $f(x)$ e il valore minimo è $f(3) = e^2/27$.
d) Dire che $e^{x-1} \geq ax^3$ per ogni $x > 0$ equivale a dire che a è minore o uguale al valore minimo assunto da $f(x)$ per $x > 0$, cioè $e/27$.
c) Siccome $1 > e/27$, non è vero che $e^{x-1} \geq x^3$ per ogni $x > 0$.

3. Si procede come per il gruppo A, partendo direttamente dal punto d). L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea $\ddot{y} - 2a\dot{y} + 5y = 0$ è $\lambda^2 - 2a\lambda + 5 = 0$, ed ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2-5}$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$\begin{aligned}
&\text{per } a > \sqrt{5} \qquad && y_{\text{om}}(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \ ,\\
&\text{per } a = \sqrt{5} \qquad && y_{\text{om}}(t) = e^{\sqrt{5}t}(\alpha_1 + \alpha_2 t) \ ,\\
&\text{per } a < \sqrt{5} \qquad && y_{\text{om}}(t) = e^{at}(\alpha_1\cos(\omega t) + \alpha_2\sin(\omega t)) \quad \text{con } \omega := \sqrt{5-a^2}.
\end{aligned}$$

con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

$$\bar{y}(t) = \frac{e^{-t}}{6+2a} \ ,$$

e la soluzione generale dell'equazione non omogenea è $y(t) = \bar{y}(t) + y_{\mathrm{om}}(t)$.
c) Ponendo $a = 1$ in d) si ottiene $y(t) := \frac{1}{8}e^{-t} + e^t(\alpha_1 \cos(2t) + \alpha_2 \sin(2t))$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

4. Analogo al gruppo A, con la differenza che in questo caso i punti di intersezione tra il grafico di $y = f(x)$ e la retta $y = x$ sono quelli di ascissa $x = \pm\sqrt{\log 4}$; l'area di A è data da

$$\mathrm{Area}(A) = \int_0^{\sqrt{\log 4}} (4xe^{-x^2} - x)dx = \frac{3 - \log 4}{2} \ .$$

5. a) Analogo al gruppo A: $e^{-x^4} - \cos(4x^2) = 7x^4 + o(x^4)$.
b) Analogo al gruppo A: $\lim_{x\to 0} x^{-4}\big(e^{-x^4} - \cos(4x^2)\big) = 7$.
c) Uguale al gruppo A: $e^{-2x^4} - \cos(2x^2) = \frac{4}{3}x^8 + o(x^8)$.

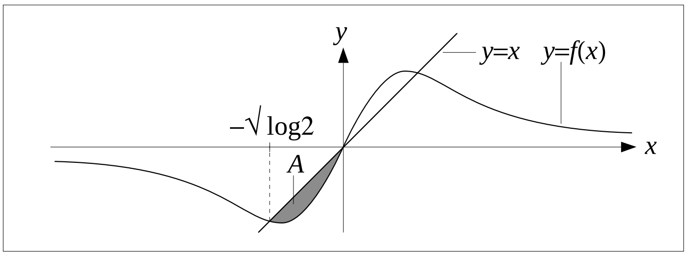
SECONDA PARTE, GRUPPO C

1. a) Uguale al gruppo A: $\mathrm{E}(Y) = 2$; $\mathrm{Var}(Y) = 2$.
b) Analogo al gruppo A: $\mathrm{E}(Z) = 20 \cdot \mathrm{E}(Y) = 40$; $\mathrm{Var}(Z) = 20 \cdot \mathrm{Var}(Y) = 40$.
c) Analogo al gruppo A: per ottenere 95 o più il numero 5 deve uscire almeno 19 volte e quindi $P = C_{20,19}(1/6)^{19}(5/6) + C_{20,20}(1/6)^{20} = 101 \cdot 6^{-20} \simeq 2{,}76 \cdot 10^{-14}$.

2. Analogo al gruppo A. b) Il punto di minimo di $f(x)$ è $x = 2$ ed il valore minimo è $f(2) = e/4$. I valori di a cercati al punto d) sono quelli per cui $a \le e/4$; tra questi non è compreso $a = 1$ e pertanto la risposta al punto c) è negativa.

3. d) Uguale al gruppo A.
c) Ponendo $a = 2$ in d) si ottiene $y(t) := \frac{1}{10}e^t + e^{-2t}(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

4. Uguale al gruppo A, con l'unica differenza che l'insieme A è simmetrico rispetto a quello del gruppo A (si veda la figura sottostante); l'area è ovviamente la stessa.



5. Uguale al gruppo A a meno di un cambiamento di segno.

SECONDA PARTE, GRUPPO D

1. a) Uguale al gruppo B: $\mathrm{E}(Y) = 4$; $\mathrm{Var}(Y) = 8$.
b) Analogo al gruppo B: $\mathrm{E}(Z) = 20 \cdot \mathrm{E}(Y) = 80$; $\mathrm{Var}(Z) = 20 \cdot \mathrm{Var}(Y) = 160$.
c) Come per il gruppo C, per ottenere 190 o più il numero 10 deve uscire almeno 19 volte e quindi $P = C_{20,19}(1/6)^{19}(5/6) + C_{20,20}(1/6)^{20} = 101 \cdot 6^{-20} \simeq 2{,}76 \cdot 10^{-14}$.

2. Analogo al gruppo A. b) Il punto di minimo di $f(x)$ è $x = 3$ ed il valore minimo è $f(3) = e^4/27$. I valori di a cercati al punto d) sono quelli per cui $a \leq e^4/27$; tra questi è compreso $a = 1/2$ e pertanto la risposta al punto c) è positiva.
3. d) Uguale al gruppo B.
   c) Ponendo $a = 2$ in d) si ottiene $y(t) := \frac{1}{10}e^{-t} + e^{2t}(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
4. Uguale al gruppo B, con l'unica differenza che l'insieme A è simmetrico rispetto a quello del gruppo B; l'area è ovviamente la stessa.
5. Uguale al gruppo B a meno di un cambiamento di segno.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 2. Quasi nessuno svolge i punti c) e d) pur avendo svolto correttamente i punti a) e b).
- Seconda parte, esercizio 3d). Quasi nessuno ha discusso i diversi casi che si presentano nella soluzione dell'equazione omogenea al variare del parametro a.
- Seconda parte, esercizio 4b). Molti hanno indicato per A l'insieme dei punti compresi tra il grafico di $y = f(x)$ e la retta $y = 0$ (cioè l'asse delle x), invece che la retta $y = 0$.
- Seconda parte, esercizio 4c). Molti hanno dato come valore dell'area di A un numero negativo, mentre l'area è sempre un numero positivo.
- Seconda parte, esercizio 5b). Diverse persone, pur avendo svolto il punto a) ed avendo quindi trovato la parte principale che permetterebbe di calcolare il limite immediatamente, hanno utilizzando la regola di de L'Hôpital (finendo di solito per sbagliare).

Prima parte

1. $m = 2{,}5 \cdot \frac{40}{200} + 3 \cdot \frac{130}{200} + 3{,}5 \cdot \frac{20}{200} + 4 \cdot \frac{10}{200} = 3.$
   $\sigma^2 = (2{,}5-3)^2 \cdot \frac{40}{200} + (3-3)^2 \cdot \frac{130}{200} + (3{,}5-3)^2 \cdot \frac{20}{200} + (4-3)^2 \cdot \frac{10}{200} = 0{,}125.$
2. $N = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 2.441.880 \simeq 2{,}4 \cdot 10^6.$
3. a) $-2xe^{-x^2}$; b) $\frac{-3}{1+(1-3x)^2} = \frac{-3}{9x^2-6x+2}$; c) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right] = \frac{1}{1-x^2}$.
4. $\int_0^\pi x \cos x \, dx = \Big| x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx = 0 - \Big| -\cos x \Big|_0^\pi = -2.$
5. a) $\frac{1}{2}$; b) $+\infty$; c) 0.
6. $P = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{4 \cdot 5^8}{6^9} \simeq 15{,}5\%.$
7. $P(A \cap B) = P(A) = 1/2$, $P(B) = 5/6$ e quindi $P(A|B) = 3/5$.

Seconda parte

1. a) Indichiamo con X la variabile aleatoria corrispondente al numero che si ottiene estraendo una pallina. Allora
$$\mathrm{E}(X) = 2 \cdot \frac{18}{20} + 10 \cdot \frac{2}{20} = \frac{14}{5} = 2{,}8\ .$$
   b) Indichiamo con X_1 ed X_2 le variabili aleatorie corrispondenti al numero che si ottiene estraendo la prima e la seconda pallina rispettivamente. Si richiede di trovare il valore atteso della variabile aleatoria $X_1 \cdot X_2$. Il valore atteso sia di X_1 che di X_2 è uguale a quello della variabile aleatoria X nel punto a); inoltre, facendo l'ipotesi che la prima pallina venga reinserita nel sacchetto prima della seconda estrazione, le variabili aleatorie X_1 ed X_2 risultano essere indipendenti e quindi
$$\mathrm{E}(X_1 \cdot X_2) = \mathrm{E}(X_1) \cdot \mathrm{E}(X_2) = \left(\frac{14}{5}\right)^2 = 7{,}84\ .$$
   c) In questo caso X_1 ed X_2 non sono variabili aletorie indipendenti, per cui il calcolo del valore atteso di $X_1 \cdot X_2$ è più laborioso:
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_1 \cdot X_2) = {} & 2 \cdot 2 \cdot P(X_1 = 2 \text{ e } X_2 = 2) \\ & + 2 \cdot 10 \cdot P(X_1 = 2 \text{ e } X_2 = 10) \\ & + 10 \cdot 2 \cdot P(X_1 = 10 \text{ e } X_2 = 2) \\ & + 10 \cdot 10 \cdot P(X_1 = 10 \text{ e } X_2 = 10) \\ = {} & 4 \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{19} + 20 \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{2}{19} + 20 \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{18}{19} + 100 \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} = \frac{716}{95} \simeq 7{,}54\end{aligned}$$

2. a) Il polinomio caratteristico associato all'equazione lineare omogenea $\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = 0$ è $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ ed ha come zeri $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione è
$$y(t) := e^t (a \cos(2t) + b \sin(2t)) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.\ .$$

b) Una soluzione particolare della (1) è $y = 3e^{-t}$.
c) Da quanto fatto nei punti a) e b) segue che la soluzione generale della (1) è

$$y(t) := e^t(a\cos(2t) + b\sin(2t)) + 3e^{-t} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}. \ . \tag{2}$$

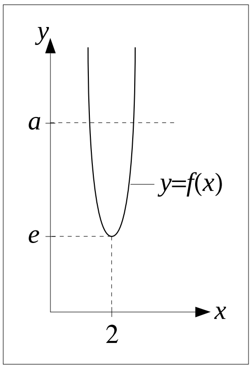
d) Dalla (2) si vede subito che l'unica soluzione della (1) che tende a 0 per $t \to +\infty$ è quella che si ottiene per $a = b = 0$, vale a dire $y(t) = 3e^{-t}$. Questa soluzione corrisponde alle condizioni inizioli $y_0 = y(0) = 3$ e $y_1 = \dot{y}(0) = -3$.

3. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e tende a $+\infty$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Inoltre la derivata è data da

$$f'(x) = 4(x^3 - 8)\, e^{x^4 - 32x + 49}$$

e pertanto il suo segno è determinato dal segno del fattore $x^3 - 8$, ovvero è positivo per $x \geq 2$ e negativo altrimenti. Dunque la funzione $f(x)$ decresce per $x \leq 2$ e cresce per $x \geq 2$; in particolare $x = 2$ è il punto di minimo assoluto e quindi il valore minimo di $f(x)$ è

$$\min f(x) = f(2) = e \ .$$



b) Dal disegno del grafico di f (si veda la figura accanto) si vede che l'equazione $f(x) = a$ non ha soluzioni per $a < e$, ne ha una per $a = e$, e ne ha due per $a > e$.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. È anche possibile svolgere il punto b) in modo analogo a come è stato risolto il punto c), senza quindi ricorrere al fatto che X_1 ed X_2 sono variabili aleatorie indipendenti.

Prima parte

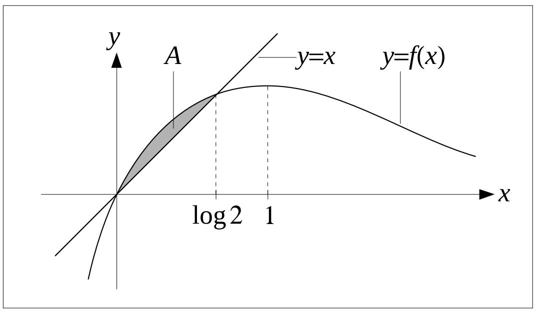
1. Si deve avere $7 - e^x > 0$, ovvero $x < \log 7$.
2. a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) 2.
3. a) $2\cos x\, e^{2\sin x}$; b) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2(x-1)} = \dfrac{x-3}{2(x^2-1)}$; c) $\dfrac{\sin(1/x)}{x^2}$.
4. $\displaystyle\int x\log(3x)\,dx = \frac{x^2}{2}\log(3x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{3}{3x}\,dx = \frac{x^2}{4}(2\log(3x)-1) + c.$
5. $m = \dfrac{20}{50}\cdot(-1) + \dfrac{10}{50}\cdot 2 + \dfrac{20}{50}\cdot 0 = 0.$
   $\sigma^2 = \dfrac{20}{50}\cdot(-1-0)^2 + \dfrac{10}{50}\cdot(2-0)^2 + \dfrac{20}{50}\cdot(0-0)^2 = \dfrac{6}{5} = 1{,}2.$
6. $P = \dfrac{4}{52}\cdot\dfrac{3}{51}\cdot\dfrac{2}{50}\cdot\dfrac{1}{49} = \dfrac{1}{13\cdot 17\cdot 25\cdot 49} = \dfrac{1}{270.725} \simeq 3{,}69\cdot 10^{-6}.$
7. Equazione a variabili separabili: $\dfrac{\dot y}{y} = 3t^2$, cioè $\log y = t^3 + c$, cioè $y = c\exp(t^3)$ con $c \in \mathbb{R}$.
8. Si tratta del grafico di $\cos x$.

Seconda parte

1. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è positiva per $x \geq 0$ e negativa altrimenti; $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = 0$. Inoltre lo studio del segno della derivata

$$f'(x) = 2(1-x)e^{-x}$$

mostra che $f(x)$ è crescente per $x \leq 1$ e decrescente per $x \geq 1$. In particolare $x = 1$ è il punto di massimo, e quindi il valore massimo è $f(1) = 2/e$. Utilizzando queste informazioni si ottiene il disegno sottostante.



b) L'insieme A è dato nella figura sopra. I punti di intersezione tra la retta di equazione $y = x$ e la curva di equazione $y = f(x)$ si ottengono risolvendo l'equazione $x = f(x)$: si tratta quindi dei punti di ascissa $x = 0$ e $x = \log 2$.

c) L'area di A è data dal seguente integrale, che si risolve t integrando per parti:

$$\begin{aligned}\text{Area}(A) &= \int_0^{\log 2} f(x) - x\,dx \\ &= 2\int_0^{\log 2} xe^{-x}\,dx - \left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{\log 2}\end{aligned}$$

$$= 2\Big| - xe^{-x}\Big|_0^{\log 2} + 2\int_0^{\log 2} e^{-x}\,dx - \frac{\log^2 2}{2}$$
$$= -\log 2 + 2\Big| - e^{-x}\Big|_0^{\log 2} - \frac{\log^2 2}{2}$$
$$= 1 - \log 2 - \frac{\log^2 2}{2}\ .$$

2. Il sacchetto contiene $m + 2n + 2$ biglie, ed indicando con X il risultato di un'estrazione si ottiene che il valore atteso è

$$\mathrm{E}(X) = \frac{m}{m+2n+2}\cdot 1 + \frac{n}{m+2n+2}\cdot 2 + \frac{n+2}{m+2n+2}\cdot 4 = \frac{m+6n+8}{m+2n+2}\ , \tag{1}$$

mentre la varianza è

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = \frac{m+20n+32}{m+2n+2} - \mathrm{E}^2(X) \tag{2}$$

a) Imponendo $m = 4$ ed $\mathrm{E}(X) = 2{,}7$ nella (1) otteniamo l'equazione

$$\frac{m+6n+8}{m+2n+2} = \frac{27}{10}\ ,$$

da cui ricaviamo $n = 7$.
b) Imponendo $\mathrm{E}(X) = 2{,}8$ e $\mathrm{Var}(X) = 1{,}56$ nella (1) e nella (2) otteniamo il sistema di due equazioni

$$\frac{m+6n+8}{m+2n+2} = \frac{14}{5} \quad \text{e} \quad \frac{m+20n+32}{m+2n+2} = \frac{47}{5}$$

da cui ricaviamo $m = 2$ e $n = 3$.

3. a) $P_a = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{2^7} \simeq 0{,}78\%$.
b) $P_b = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 1^4 = \frac{1}{2^6} \simeq 1{,}56\%$.
c) $P_c = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{2^{14}} \simeq 0{,}49\%$.
d) $P_d = C_{7,3}P_c = \frac{35\cdot 3^4}{2^{14}} \simeq 17{,}30\%$.
e) $P_e = 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{3^6}{2^{12}} \simeq 17{,}80\%$.

Prima parte

1. Deve essere $x > 0$ e $2 - \log x \geq 0$, ovvero $0 < x \leq e^2$.
2. a) 0; b) 0; c) e.
3. a) $\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}$; b) $\dfrac{2x}{1+x^4}$; c) $\dfrac{2}{(x-1)^2}$.
4. $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx = \left| x\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \left|\frac{e^{2x}}{4}\right|_0^1 = \frac{e^2+1}{4}.$
5. $N = 21^2 \cdot 9^6 = 7^2 \cdot 3^{14} = 234.365.481 \simeq 2{,}34 \cdot 10^8$.
6. $m = \dfrac{1}{6}(3 + 4{,}5 + 4 + 4{,}5 + 2 + 3) = 3{,}5.$

   $\sigma^2 = \dfrac{1}{6}(0{,}5^2 + 1^2 + 0{,}5^2 + 1^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2) = \dfrac{5}{6} \simeq 0{,}833.$
7. $y(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Seconda parte

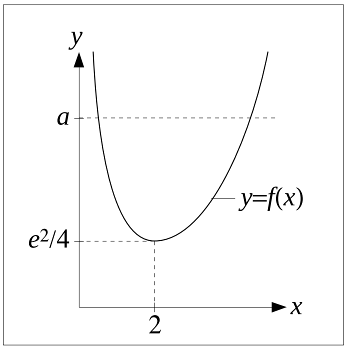
1. a) La funzione $f(x)$ è ben definita e strettamente positiva per ogni $x > 0$, e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \ , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ .$$

Inoltre la derivata

$$f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

è positiva per $x \geq 0$ e negativa altrimenti, da cui segue che la funzione decresce per $x \leq 2$ e poi cresce. In particolare $x = 2$ è il punto di minimo assoluto, e il valore minimo assunto da f è $f(2) = e^2/4$. Siccome la derivata tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, la funzione non ha asintoti all'infinito. Sulla base di queste informazioni è possibile ottenere il grafico disegnato nella figura accanto.



b) Come si vede dalla figura accanto l'equazione $f(x) = a$ ammette soluzioni se e solo se $a \geq e^2/4$.

2. Si tratta di un'equazione a variabili separabili:

$$\dot{y} = 1 + y^2 \quad \to \quad \frac{\dot{y}}{1+y^2} = 1 \quad \to \quad \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dt$$
$$\to \quad \arctan y = t + c \quad \to \quad y = \tan(t+c) \ .$$

La condizione iniziale $y(0) = 1$ è soddisfatta se $\tan c = 1$, vale a dire per $c = \pi/4$. Pertanto la soluzione cercata è

$$y(t) := \tan(t + \pi/4) \ .$$

3. a) $P_a = \dfrac{n}{2n} \cdot \dfrac{n-1}{2n-1} = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.

   b) Imponendo $P_a = \dfrac{6}{25}$ si ottiene l'equazione $\dfrac{n-1}{2(2n-1)} = \dfrac{6}{25}$ da cui si ricava $n = 13$.

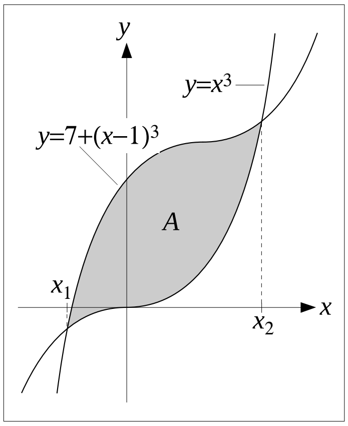
   c) $P_c = \dfrac{n}{2n} \cdot \dfrac{n-1}{2n-1} \cdots \dfrac{2}{n+2} \cdot \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n!}{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)} = \dfrac{n!}{(2n)!/n!} = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Sesto appello, 10 febbraio 2009

Prima parte

1. Deve essere $\log x - 2 \geq 0$, ovvero $x \geq e^2$.
2. x^4.
3. a) $\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$; b) $e^x \cos(e^x)$; c) $(3\log x + 4\log(2x-1))' = \dfrac{3}{x} + \dfrac{8}{2x-1} = \dfrac{14x-3}{x(2x-1)}$.
4. Ponendo $y = 1-2x$ si ottiene $\displaystyle\int e^{1-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^y dy = -\frac{1}{2}e^y + c = -\frac{1}{2}e^{1-2x} + c$.
5. $\dot{y} = 2yt \quad \to \quad \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int 2t\,dt \quad \to \quad \log y = t^2 + c \quad \to \quad y = e^{t^2+c}$.
6. Il valore atteso del guadagno è $\mathrm{E} = 2 \cdot \frac{3}{6} + (-1) \cdot \frac{2}{6} + (-5) \cdot \frac{1}{6} = -1/6$: in media si perde 1/6 di euro a partita.
7. $m = 5$, $\sigma^2 = 4{,}4$.

Seconda parte



1. a) Il grafico della funzione $y = x^3$ è noto, mentre quello di $y = 7 + (x-1)^3$ viene ottenuto traslando il precedente verso l'alto di 7 e poi verso destra di 1. L'insieme A è quello dato nella figura accanto, e i valori di x_1 ed x_2 li si ottiene risolvendo l'equazione $x^3 = 7 + (x-1)^3$: dopo le opportune semplificazioni si ottiene $x^2 - x - 2 = 0$ e dunque $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$.
   b) L'area di A è data dal seguente integrale:
$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(A) &= \int_{-1}^{2} (7 + (x-1)^3) - x^3\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} 6 + 3x - 3x^2\,dx \\ &= \left| 6x + \frac{3}{2}x^2 - x^3 \right|_{-1}^{2} = \frac{27}{2}\ .\end{aligned}$$

2. a) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla (1) è $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, ed ha soluzioni complesse $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$y_{\mathrm{om}}(t) = e^{-2t}(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t) \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$
   b) Sostituendo $y = ae^{-t}$ nella (1) si vede subito che l'equazione è soddisfatta per $a = 2$.
   c) Per via di quanto fatto ai punti a) e b), la soluzione generale della (1) è
$$y(t) = 2e^{-t} + e^{-2t}(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t) \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$
   d) Partendo dalla formula risolutiva (2) si ricava $y(0) = 2 + \alpha_1$ e $\dot{y}(0) = -2 - 2\alpha_1 + \alpha_2$. Imponendo le condizioni iniziali richieste si ottiene quindi il sistema
$$\begin{cases} 2 + \alpha_1 = 1 \\ -2 - 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava subito $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 0$. Pertanto la soluzione cercata è

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}\cos t \ . \tag{3}$$

3. a) La probabilità cercata è uguale alla probabilità che alla prima estrazione esca una biglia rossa (evento A) moltiplicata per la probabilità che alla seconda estrazione esca pure una biglia rossa (evento C) – A ed C sono infatti due eventi indipendenti. Dunque

$$P_a = \frac{m_r}{m_r + m_b} \cdot \frac{n_r}{n_r + n_b} = \frac{m_r n_r}{(m_r + m_b)(n_r + n_b)} \ .$$

b) Ragionando come al punto precedente si ottiene

$$P_b = \frac{m_r n_b}{(m_r + m_b)(n_r + n_b)} \ .$$

c) In questo caso si deve sommare la probabilità che esca prima una biglia rossa e poi una bianca (calcolata nel punto precedente) a quella che esca prima una bianca e poi una rossa:

$$P_c = \frac{m_r n_b + m_b n_r}{(m_r + m_b)(n_r + n_b)} \ .$$

d) A e B sono indipendenti se si verifica che

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \ . \tag{4}$$

$P(A)$ è stata calcolata al punto a), $P(B)$ è stata calcolata al punto c), mentre $P(A \cap B)$ è stata calcolata al punto b). Utilizzando queste formule, l'equazione (4) diventa

$$\frac{m_r n_b}{(m_r + m_b)(n_r + n_b)} = \frac{m_r}{m_r + m_b} \cdot \frac{m_r n_b + m_b n_r}{(m_r + m_b)(n_r + n_b)}$$

e con le dovute semplificazioni si riduce a $n_b = n_r$. Dunque gli eventi A e B sono indipendenti se e solo se il secondo sacchetto contiene lo stesso numero di biglie bianche e di biglie rosse.