Versione: 11 febbraio 2010

Università di Pisa
Corso di laurea in Scienze Biologiche Molecolari

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Matematica e Statistica, corso C

a.a. 2008/09

docenti: G. Alberti, V.M. Tortorelli

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Gli scritti d'esame per il corso di Matematica e Statistica si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre o più problemi per cui invece si deve dare una soluzione articolata e spiegata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza piena sono solitamente richieste almeno quattro risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso.

Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni, grafici, numeri
   - 1.1 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, funzione inversa. Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.2 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
   - 1.3 Numeri complessi. Coordinate polari di un punto nel piano. Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi.
2. Nozioni di statistica descrittiva
   - 2.1 Propagazione degli errori.
   - 2.2 Media e varianza di un insieme finito di dati numerici. Medie pesate. Mediana, moda.
   - 2.3 Rappresentazione grafica di un insieme di dati, diagrammi e istogrammi. Metodo dei minimi quadrati e retta di regressione.
3. Derivate, integrali ed equazioni differenziali
   - 3.1 Derivata di una funzione: significato geometrico ed interpretazione fisica. Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.2 Applicazione delle derivate allo studio dei grafici di funzioni.
   - 3.3 Calcolo dei limiti di funzioni. Metodo di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi. Notazione di Landau ("o" piccolo). Sviluppo di Taylor e parte principale di una funzione.
   - 3.4 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti. *Calcolo di aree e volumi.*
   - 3.5 Esempi di equazioni differenziali. Significato dei dati iniziali. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. *Esempi di equazioni differenziali provenienti dalla meccanica.*
4. Elementi di probabilità
   - 4.1 Permutazioni, combinazioni, disposizioni. Fattoriale e coefficienti binomiali.
   - 4.2 Definizione di probabilità su uno spazio di eventi elementari finito; probabilità uniforme. Eventi indipendenti e probabilità condizionata. Probabilità dell'unione e dell'intersezione di un numero finito di eventi indipendenti. Formula di Bayes. Esempi classici di modelli probabilistici (lancio di due dadi, lancio di n monete, etc.).

4.3 Variabili aleatorie. Valore atteso e varianza. Indipendenza e covarianza. Valore atteso e varianza per la somma di due o più variabili aleatorie (indipendenti e non). Media campionaria e legge (debole) dei grandi numeri.
4.4 Principali distribuzioni di probabilità: di Bernoulli, binomiale, geometrica e di Poisson.
4.5 Distribuzioni di probabilità continue; valore atteso e varianza di una variabile aleatoria con distribuzione continua. Distribuzione uniforme, esponenziale e normale (o Gaussiana). *Il teorema del limite centrale (solo accennato).*

5. Matrici e vettori

5.1 Vettori in $\mathbb{R}^n$. Somma, prodotto per scalare, prodotto scalare e loro significato geometrico.
5.2 Matrici $m \times n$; somma e prodotto di matrici. Determinante di una matrice quadrata e sua interpretazione geometrica (nel caso 2×2 e 3×3). Inversa di una matrice quadrata.
5.3 Risoluzione dei sistemi di n equazioni lineari in n incognite tramite vettori e matrici.

Testi

Compitino di prova, 25 novembre 2008

Prima parte

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(e^x - 3)$.
2. Semplificare il più possibile l'espressione $\dfrac{\sqrt{a^{b+2}}}{\sqrt[4]{a^{b+4}}}$.
3. Trovare le soluzioni dell'equazione $\sin(\pi x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ comprese tra 0 e 1.
4. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) $\log(\sqrt{\cos x})$; b) $\sin(x^3)$; c) $\sqrt{1+2x}$.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{e^x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{1-x}$.
6. Calcolare la media m e la varianza σ^2 dei numeri 4 ; 6 ; 2 ; 0 ; -2 .
7. Scrivere il numero complesso $\sqrt{3} + i$ in forma trigonometrica e calcolare $(\sqrt{3} + i)^6$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = -1 - \sin x$.

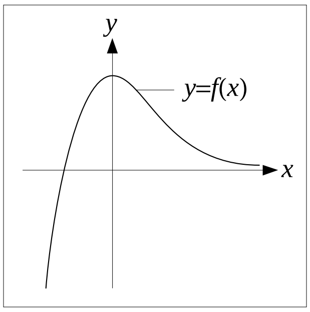
Seconda parte

1. Risolvere la disequazione $\log(x^2 - 2e^2) \le 2 + \log 2$.
2. Sono date le seguenti quantità approssimate $x_1 = 10 \pm 0{,}4$ e $x_2 = 20 \pm 1{,}6$.
   a) Calcolare l'errore relativo di x_1 e x_2.
   b) Calcolare il valore e l'errore assoluto di $y = 4x_1^2 + x_1 x_2$ utilizzando le formule semplificate.
   c) Ripetere quanto fatto al punto precedente utilizzando le formule non semplificate.
3. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z, visti come punti del piano, tali che $|z-1| \le |z-i|$.

PRIMO COMPITINO, 28 NOVEMBRE 2008

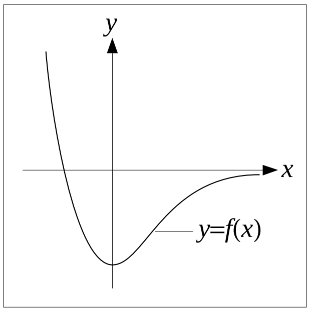
PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(4 - x^2)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(x + x^2)$; b) $\dfrac{x}{1 + x^2}$; c) $\log(xe^{\cos x})$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1 + xe^x}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-2/x}$; c) $\lim\limits_{x\to0^+} \log(x^3)$.
4. Le lunghezze x_1 e x_2 sono state misurate come segue: $x_1 = 1{,}6\,\mathrm{m}\pm 2\,\mathrm{cm}$ e $x_2 = 50\,\mathrm{cm}\pm 5\,\mathrm{mm}$. Calcolare il valore e l'errore assoluto di x_1x_2 (per l'errore usare la formula semplificata).
5. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 31 ; 50 ; 29 ; 33 ; 32 .
6. Calcolare $\dfrac{2 + i}{1 - 2i}$.
7. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \geq x$ dove il grafico della funzione $f(x)$ è disegnato nella figura accanto.
8. Disegnare il grafico di $y = 1 - e^{-x}$.



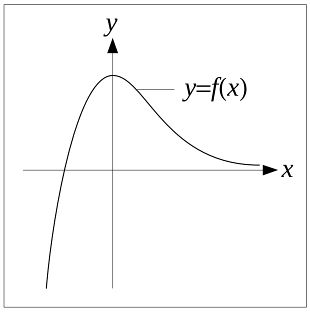
PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(x^2 - 4)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\cos(x + x^2)$; b) $\dfrac{x}{x^2 - 1}$; c) $\log(xe^{\sin x})$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2 + x^2(1 + x^2)}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2-1/x}$; c) $\lim\limits_{x\to0^+} \log(x^4)$.
4. Le lunghezze x_1 e x_2 sono state misurate come segue: $x_1 = 0{,}8\,\mathrm{m}\pm 1\,\mathrm{cm}$ e $x_2 = 50\,\mathrm{cm}\pm 5\,\mathrm{mm}$. Calcolare il valore e l'errore assoluto di x_1x_2 (per l'errore usare la formula semplificata).
5. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 23 ; 40 ; 21 ; 19 ; 22 .
6. Calcolare $\dfrac{3 + i}{1 - 3i}$.
7. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \geq x$ dove il grafico della funzione $f(x)$ è disegnato nella figura accanto.
8. Disegnare il grafico di $y = \log(x + 1)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO C

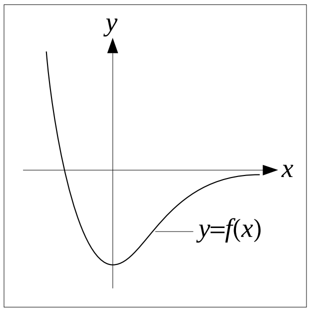
1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\sqrt{x^2 - 9}$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(x + x^3)$; b) $\dfrac{x^2}{1 + x}$; c) $\log(x^2e^{\cos x})$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3 + xe^x}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-1+2/x}$; c) $\lim\limits_{x\to0^+} \log(x^5)$.
4. Le lunghezze x_1 e x_2 sono state misurate come segue: $x_1 = 50\,\mathrm{cm}\pm 5\,\mathrm{mm}$ e $x_2 = 3{,}2\,\mathrm{m}\pm 4\,\mathrm{cm}$. Calcolare il valore e l'errore assoluto di x_1x_2 (per l'errore usare la formula semplificata).
5. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 30 ; 11 ; 13 ; 12 ; 9 .



6. Calcolare $\dfrac{i-2}{1+2i}$.
7. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \leq x$ dove il grafico della funzione $f(x)$ è disegnato nella figura accanto.
8. Disegnare il grafico di $y = 1 - \cos x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO D

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\sqrt{9-x^2}$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\cos(x+x^3)$; b) $\dfrac{x^2}{x-1}$; c) $\log(x^2 e^{\sin x})$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4+x(1+x^2)}$; b) $\lim_{x\to-\infty} e^{-2+1/x}$; c) $\lim_{x\to 0^+} \log(x^6)$.
4. Le lunghezze x_1 e x_2 sono state misurate come segue: $x_1 = 50\,\text{cm} \pm 5\,\text{mm}$ e $x_2 = 1{,}6\,\text{m} \pm 2\,\text{cm}$. Calcolare il valore e l'errore assoluto di $x_1 x_2$ (per l'errore usare la formula semplificata).
5. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 60 ; 22 ; 26 ; 24 ; 18 .



6. Calcolare $\dfrac{i-3}{1+3i}$.
7. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \leq x$ dove il grafico della funzione $f(x)$ è disegnato nella figura accanto.
8. Disegnare il grafico di $y = -\dfrac{1}{x+2}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. a) Trovare tutte le soluzioni y della disequazione $\cos y \leq 1/2$ comprese tra 0 e 2π.
   b) Trovare tutte le soluzioni x della disequazione $\cos\left(\dfrac{\pi}{1+x^2}\right) \leq 1/2$.
2. Esaminando i dati di una piccola ditta che vende libri via internet, si scopre che in un certo anno il 40% dei clienti registrati ha fatto un solo ordine di acquisto per un importo medio di 50 euro, il 30% ne ha fatti 2 per un importo medio di 40 euro a ordine, il 20% ne ha fatti 3 per un importo medio di 40 euro a ordine, ed infine il rimanente 10% ne ha fatti 4 per un importo medio di 50 euro a ordine.
   a) Calcolare la media e la varianza del numero di ordini per cliente.
   b) Calcolare l'importo medio per ordine.
   c) Supponendo che i clienti siano 4000, quanti ordini sono stati fatti in totale?
   d) Supponendo invece che il numero di ordini fatti sia 6000, quanti sono i clienti?
3. Si considerino le sequenze di valori di x e y date nella seguente tabella:

x:	16,2	7,9	3,8	2,7	1,1
y:	0,9	2,1	2,9	3,6	5,1

   a) Calcolare il coefficiente di correlazione.
   b) Determinare la retta di regressione associata.

c) Cercare la funzione del tipo $y = a \log x + b$ che meglio approssima questi dati.
d) Tra la funzione trovata al punto c) e quella al punto b), quale approssima meglio i dati?

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. a) Trovare tutte le soluzioni y della disequazione $\cos y \leq 1/\sqrt{2}$ comprese tra 0 e 2π.

   b) Trovare tutte le soluzioni x della disequazione $\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right) \leq 1/\sqrt{2}$.

2. Esaminando i dati di una piccola ditta che vende libri via internet, si scopre che in un certo anno il 40% dei clienti registrati ha fatto un solo ordine di acquisto per un importo medio di 60 euro, il 30% ne ha fatti 2 per un importo medio di 50 euro a ordine, il 20% ne ha fatti 3 per un importo medio di 50 euro a ordine, ed infine il rimanente 10% ne ha fatti 4 per un importo medio di 60 euro a ordine.
   a) Calcolare la media e la varianza del numero di ordini per cliente.
   b) Calcolare l'importo medio per ordine.
   c) Supponendo che i clienti siano 5000, quanti ordini sono stati fatti in totale?
   d) Supponendo invece che il numero di ordini fatti sia 8000, quanti sono i clienti?

3. Si considerino le sequenze di valori di x e y date nella seguente tabella:

x:	16,2	7,9	3,8	2,7	1,1
y:	1,8	4,2	5,8	7,2	10,2

   a) Calcolare il coefficiente di correlazione.
   b) Determinare la retta di regressione associata.
   c) Cercare la funzione del tipo $y = a \log x + b$ che meglio approssima questi dati.
   d) Tra la funzione trovata al punto c) e quella al punto b), quale approssima meglio i dati?

SECONDA PARTE, GRUPPO C

1. a) Trovare tutte le soluzioni y della disequazione $\cos y \leq 1/2$ comprese tra 0 e 2π.

   b) Trovare tutte le soluzioni x della disequazione $\cos\left(\frac{\pi}{1+2x^2}\right) \leq 1/2$.

2. Esaminando i dati di una piccola ditta che vende libri via internet, si scopre che in un certo anno il 40% dei clienti registrati ha fatto un solo ordine di acquisto per un importo medio di 40 euro, il 30% ne ha fatti 2 per un importo medio di 30 euro a ordine, il 20% ne ha fatti 3 per un importo medio di 30 euro a ordine, ed infine il rimanente 10% ne ha fatti 4 per un importo medio di 40 euro a ordine.
   a) Calcolare la media e la varianza del numero di ordini per cliente.
   b) Calcolare l'importo medio per ordine.
   c) Supponendo che i clienti siano 6000, quanti ordini sono stati fatti in totale?
   d) Supponendo invece che il numero di ordini fatti sia 9000, quanti sono i clienti?

3. Si considerino le sequenze di valori di x e y date nella seguente tabella:

x:	16,2	7,9	3,8	2,7	1,1
y:	0,9	2,1	2,9	3,6	5,1

   a) Calcolare il coefficiente di correlazione.
   b) Determinare la retta di regressione associata.
   c) Cercare la funzione del tipo $y = a \log x + b$ che meglio approssima questi dati.
   d) Tra la funzione trovata al punto c) e quella al punto b), quale approssima meglio i dati?

SECONDA PARTE, GRUPPO D

1. a) Trovare tutte le soluzioni y della disequazione $\cos y \leq 1/\sqrt{2}$ comprese tra 0 e 2π.

   b) Trovare tutte le soluzioni x della disequazione $\cos\left(\frac{\pi}{1+2x^2}\right) \leq 1/\sqrt{2}$.

2. Esaminando i dati di una piccola ditta che vende libri via internet, si scopre che in un certo anno il 40% dei clienti registrati ha fatto un solo ordine di acquisto per un importo medio di 100 euro, il 30% ne ha fatti 2 per un importo medio di 80 euro a ordine, il 20% ne ha fatti 3 per un importo medio di 80 euro a ordine, ed infine il rimanente 10% ne ha fatti 4 per un importo medio di 100 euro a ordine.

   a) Calcolare la media e la varianza del numero di ordini per cliente.

   b) Calcolare l'importo medio per ordine.

   c) Supponendo che i clienti siano 6000, quanti ordini sono stati fatti in totale?

   d) Supponendo invece che il numero di ordini fatti sia 7000, quanti sono i clienti?

3. Si considerino le sequenze di valori di x e y date nella seguente tabella:

x:	16,2	7,9	3,8	2,7	1,1
y:	1,8	4,2	5,8	7,2	10,2

   a) Calcolare il coefficiente di correlazione.

   b) Determinare la retta di regressione associata.

   c) Cercare la funzione del tipo $y = a \log x + b$ che meglio approssima questi dati.

   d) Tra la funzione trovata al punto c) e quella al punto b), quale approssima meglio i dati?

Compitino di recupero, 8 gennaio 2009

Prima parte, gruppo A

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(x^2-4)$.
2. Determinare i valori di x compresi tra 0 e 2π per cui $\cos x \leq -1/2$.
3. Semplificare il più possibile l'espressione $\log\left(\dfrac{\sqrt{(1+x)^3}}{\sqrt[3]{x^4}}\right)$ e quindi calcolarne la derivata.
4. Derivare le seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^2}{x+2}$; b) $\sin(x+e^x)$; c) $\sqrt{1-x}$.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+e^{4x}}$; a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{(x^2)}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+x^2-5$.
6. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 3 ; 4 ; 8 ; 2 ; 3 .
7. Determinare le coordinate polari dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(-1,1)$; b) $(1,\sqrt{3})$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y=-\log(1+x)$.

Prima parte, gruppo B

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(4-x^2)$.
2. Determinare i valori di x compresi tra 0 e 2π per cui $\sin x \leq -1/2$.
3. Semplificare il più possibile l'espressione $\log\left(\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{(1+x)^4}}\right)$ e quindi calcolarne la derivata.
4. Derivare le seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^3}{x+2}$; b) $\cos(x+e^x)$; c) $\sqrt{1+2x}$.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2+\cos x}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5+\dfrac{1}{x^3}-2x$.
6. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 3 ; 2 ; 7 ; 2 ; 1 .
7. Determinare le coordinate polari dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(2,-2)$; b) $(\sqrt{3},1)$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y=-\dfrac{1}{1+x}$.

Seconda parte, gruppo A

1. Le dimensioni di una piscina (a forma di parallelepipedo) sono state misurate come segue: larghezza 10 m, lunghezza 25 m, profondità 2 m. Si sa inoltre che per lo strumento utilizzato per misurare le prime due dimensioni ha un margine di errore di 10 cm, mentre quello utilizzato per l'ultima ha un margine di errore di 1 cm.
   a) Calcolare l'errore relativo per ciascuna dimensione.
   b) Calcolare il volume della piscina e il corrispondente errore relativo e assoluto usando le formule semplificate per l'errore del prodotto.
   c) Supponiamo che la lunghezza e la larghezza della piscina siano state misurate con un margine di errore d (invece di 10 cm): quanto dovrebbe essere d per far sì che l'errore nel calcolo del volume sia inferiore a $6\,\mathrm{m}^3$? (Usare le formule semplificate per l'errore del prodotto.)

2. Nella tabella sottostante sono riportate le statistiche sul numero di figli delle famiglie con figli di un piccolo paese.

numero di figli:	1	2	3	4	5	più di 5
famiglie:	15%	40%	30%	10%	5%	0%

a) Calcolare il numero medio di figli per famiglia.

b) Calcolare la varianza del numero di figli per famiglia.

c) Sapendo che le famiglie censite sono 200, quanti sono i figli in totale?

d) Dal censimento suddetto sono state escluse le famiglie senza figli. Sapendo che queste famiglie sono 50, qual'è effettivamente il numero medio di figli per famiglia?

Seconda parte, gruppo B

1. Le dimensioni di una piscina (a forma di parallelepipedo) sono state misurate come segue: larghezza 20 m, lunghezza 50 m, profondità 2 m. Si sa inoltre che per lo strumento utilizzato per misurare le prime due dimensioni ha un margine di errore di 10 cm, mentre quello utilizzato per l'ultima ha un margine di errore di 1 cm.

a) Calcolare l'errore relativo per ciascuna dimensione.

b) Calcolare il volume della piscina e il corrispondente errore relativo e assoluto usando le formule semplificate per l'errore del prodotto.

c) Supponiamo che la lunghezza e la larghezza della piscina siano state misurate con un margine di errore d (invece di 10 cm): quanto dovrebbe essere d per far sì che l'errore nel calcolo del volume sia inferiore a $17\,\mathrm{m}^3$? (Usare le formule semplificate per l'errore del prodotto.)

2. Nella tabella sottostante sono riportate le statistiche sul numero di figli delle famiglie con figli di un piccolo paese.

numero di figli:	1	2	3	4	5	più di 5
famiglie:	40%	35%	15%	5%	5%	0%

a) Calcolare il numero medio di figli per famiglia.

b) Calcolare la varianza del numero di figli per famiglia.

c) Sapendo che le famiglie censite sono 180, quanti sono i figli in totale?

d) Dal censimento suddetto sono state escluse le famiglie senza figli. Sapendo che queste famiglie sono 20, qual'è effettivamente il numero medio di figli per famiglia?

SECONDO COMPITINO, 10 FEBBRAIO 2009

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. a) Determinare le coordinate polari r e θ del numero complesso $\sqrt{3}+i$.
   b) Calcolare $(\sqrt{3}+i)^6$.
2. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri 5 ; 6 ; 10 ; 4 ; 5 .
3. Derivare le seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^3}{x-1}$; b) $\cos(e^x)$; c) $\log(x^5(x+2)^4)$.
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x^3)}{x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 2^{-x}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\log(2+e^x)$.
5. Usando un opportuno cambio di variabile, calcolare la primitiva $\displaystyle\int \sin(1-2x)\,dx$.
6. Determinare la parte principale per $x\to 0$ della funzione $1-e^{x^4}$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{y}=\dfrac{e^t}{3y^2}$ che soddisfa $y(0)=2$.
8. Disegnare il grafico di $y=1-(x-1)^2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. a) Determinare le coordinate polari r e θ del numero complesso $1+\sqrt{3}i$.
   b) Calcolare $(1+\sqrt{3}i)^6$.
2. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri 6 ; 8 ; 16 ; 4 ; 6 .
3. Derivare le seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^3}{x+2}$; b) $\cos(\log x)$; c) $\log(x^4(x+1)^5)$.
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^4\log x$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\log(1+3x^2)}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(\pi+e^{-x})$.
5. Usando un opportuno cambio di variabile, calcolare la primitiva $\displaystyle\int \sin(3x+1)\,dx$.
6. Determinare la parte principale per $x\to 0$ della funzione $1-\cos(2x^3)$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{y}=\dfrac{e^t}{3y^2}$ che soddisfa $y(0)=-1$.
8. Disegnare il grafico di $y=(x-1)^2-1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO C

1. a) Determinare le coordinate polari r e θ del numero complesso $\sqrt{3}+\sqrt{3}i$.
   b) Calcolare $(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)^6$.
2. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri 4 ; 9 ; 5 ; 4 ; 3 .
3. Derivare le seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^4}{x-1}$; b) $\sin(\log x)$; c) $\log(x^4(x+2)^5)$.
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{\sin(3x^3)}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log(x+x^{-2})$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$.

5. Usando un opportuno cambio di variabile, calcolare la primitiva $\displaystyle\int e^{2-3x}dx$.
6. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $e^{2x^3} - 1$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{y} = \dfrac{\cos t}{3y^2}$ che soddisfa $y(0) = 2$.
8. Disegnare il grafico di $y = 1 - (x+1)^2$.

Prima parte, gruppo D

1. a) Determinare le coordinate polari r e θ del numero complesso $2\sqrt{3} + 2i$.
   b) Calcolare $(2\sqrt{3} + 2i)^3$.
2. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri 5 ; 7 ; 15 ; 3 ; 5 .
3. Derivare le seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^4}{x+2}$; b) $\cos(1/x)$; c) $\log(x^3(x+1)^4)$.
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+4x^2)}{3x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^5}$.
5. Usando un opportuno cambio di variabile, calcolare la primitiva $\displaystyle\int \sqrt{3x+2}\,dx$.
6. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\cos(2x^4) - 1$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{y} = \dfrac{\cos t}{3y^2}$ che soddisfa $y(0) = -1$.
8. Disegnare il grafico di $y = (x+1)^2 - 1$.

Seconda parte, gruppo A

1. Si consideri l'equazione differenziale lineare
$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 6e^{-t} \tag{1}$$
   a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (1).
   b) Trovare una soluzione particolare della (1).
   c) Scrivere la soluzione generale della (1).
   d) Determinare la soluzione della (1) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = -2$.
2. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{3x}{x^2+2} - 1$$
   a) Tracciare approssimativamente il grafico di $f(x)$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|y| \leq f(x)$, e calcolarne l'area.
3. a) Calcolare il valore minimo e massimo della funzione
$$f(x) := -(x^2 - 5x + 5)e^{-x}$$
   relativamente alla semiretta $x \geq 0$.
   b) Dire se la seguente disuguaglianza è soddisfatta per ogni $x \geq 0$ oppure no:
$$x^2 - 5x + 5 \leq \frac{11}{2}e^x .$$

Secondo compitino, 10 febbraio 2009

Seconda parte, gruppo B

1. Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 10y = 4e^{-2t} \tag{1}$$

a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (1).
b) Trovare una soluzione particolare della (1).
c) Scrivere la soluzione generale della (1).
d) Determinare la soluzione della (1) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 3$ e $\dot{y}(0) = -2$.

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{6x}{x^2+5} - 1$$

a) Tracciare approssimativamente il grafico di $f(x)$.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|y| \leq f(x)$, e calcolarne l'area.

3. a) Calcolare il valore minimo e massimo della funzione

$$f(x) := -(3x^2 - x + 1)e^{-x}$$

relativamente alla semiretta $x \geq 0$.
b) Dire se la seguente disuguaglianza è soddisfatta per ogni $x \geq 0$ oppure no:

$$3x^2 - x + 1 \leq e^x \ .$$

Seconda parte, gruppo C

1. Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = 6e^{t} \tag{1}$$

a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (1).
b) Trovare una soluzione particolare della (1).
c) Scrivere la soluzione generale della (1).
d) Determinare la soluzione della (1) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 2$.

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = -\frac{6x}{x^2+5} - 1$$

a) Tracciare approssimativamente il grafico di $f(x)$.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|y| \leq f(x)$, e calcolarne l'area.

3. a) Calcolare il valore minimo e massimo della funzione

$$f(x) := -(x^2 - 7x + 11)e^{-x}$$

relativamente alla semiretta $x \geq 1$.
b) Dire se la seguente disuguaglianza è soddisfatta per ogni $x \geq 1$ oppure no:

$$x^2 - 7x + 11 \leq 2e^x \ .$$

SECONDA PARTE, GRUPPO D

1. Si consideri l'equazione differenziale lineare
$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 10y = 4e^{2t} \tag{1}$$
a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (1).
b) Trovare una soluzione particolare della (1).
c) Scrivere la soluzione generale della (1).
d) Determinare la soluzione della (1) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 3$ e $\dot{y}(0) = 2$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) = -\frac{3x}{x^2+2} - 1$$
a) Tracciare approssimativamente il grafico di $f(x)$.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|y| \leq f(x)$, e calcolarne l'area.

3. a) Calcolare il valore minimo e massimo della funzione
$$f(x) := -(3x^2 - 7x + 5)e^{-x}$$
relativamente alla semiretta $x \geq 1$.
b) Dire se la seguente disuguaglianza è soddisfatta per ogni $x \geq 1$ oppure no:
$$3x^2 - 7x + 5 \leq \frac{1}{2}e^x \ .$$

Terzo compitino e primo appello, 17 aprile 2009

Prima parte, gruppo A

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $y = \dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}$.
2. I lati di un certo rettangolo hanno lunghezza pari a $1\,\mathrm{m} \pm 5\,\mathrm{cm}$ e $20\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}$. Calcolare il valore dell'area e l'errore *relativo* (usando la formula semplificata).
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4+2x^3}{\sin(x^2)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{10}2^{-x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{2+x^{-2}}$.
4. Utilizzando un'opportuno cambio di variabili calcolare $\displaystyle\int_2^\infty e^{4-2x}\,dx$.
5. Calcolare la probabilità di ottenere esattamente 3 volte il numero sei lanciando 4 dadi.
6. Sia Y il numero che si ottiene estraendo una pallina a caso da un sacchetto che ne contiene cinque con sopra il numero 1, quattro con il numero 2 e una con il numero 7. Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria Y.
7. Per quali valori del parametro a i vettori $(1, a, 3)$ e $(a, 3a, 1-a^2)$ sono ortogonali?
8. Disegnare il grafico della funzione $y = e^{1-x}$.

Prima parte, gruppo B

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $y = \sqrt{9-x^2}$.
2. I lati di un certo rettangolo hanno lunghezza pari a $2\,\mathrm{m} \pm 6\,\mathrm{cm}$ e $20\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}$. Calcolare il valore dell'area e l'errore *relativo* (usando la formula semplificata).
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3+3x^2}{\sin(x^2)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \log(1+x^{10})$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-1}\log x$.
4. Utilizzando un'opportuno cambio di variabili calcolare $\displaystyle\int_1^\infty e^{3-2x}\,dx$.
5. Calcolare la probabilità di ottenere esattamente 2 volte il numero cinque lanciando 3 dadi.
6. Sia Y il numero che si ottiene estraendo una pallina a caso da un sacchetto che ne contiene cinque con sopra il numero 2, quattro con il numero 4 e una con il numero 14. Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria Y.
7. Per quali valori del parametro a i vettori $(a, 4, -1)$ e $(4a, 1-a^2, a)$ sono ortogonali?
8. Disegnare il grafico della funzione $y = e^{-x} - 1$.

Prima parte, gruppo C

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $y = \sqrt{x^2-4}$.
2. I lati di un certo rettangolo hanno lunghezza pari a $1\,\mathrm{m} \pm 5\,\mathrm{cm}$ e $30\,\mathrm{cm} \pm 9\,\mathrm{mm}$. Calcolare il valore dell'area e l'errore *relativo* (usando la formula semplificata).
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^3+2x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-10}4^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \log(1-x)$.
4. Utilizzando un'opportuno cambio di variabili calcolare $\displaystyle\int_1^\infty e^{4-3x}\,dx$.
5. Calcolare la probabilità di ottenere esattamente 3 volte il numero quattro lanciando 5 dadi.

6. Sia Y il numero che si ottiene estraendo una pallina a caso da un sacchetto che ne contiene cinque con sopra il numero 1, quattro con il numero 3 e una con il numero 13. Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria Y.
7. Per quali valori del parametro a i vettori $(3, a, 1)$ e $(1 - a^2, 3a, a - 1)$ sono ortogonali?
8. Disegnare il grafico della funzione $y = -e^{x-1}$.

Prima parte, gruppo D

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$.
2. I lati di un certo rettangolo hanno lunghezza pari a $2\,\mathrm{m} \pm 6\,\mathrm{cm}$ e $30\,\mathrm{cm} \pm 9\,\mathrm{mm}$. Calcolare il valore dell'area e l'errore *relativo* (usando la formula semplificata).
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x^2)}{3x^3 + 4x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^{x^{-3}+4}$.
4. Utilizzando un'opportuno cambio di variabili calcolare $\displaystyle\int_3^{\infty} e^{9-3x}\, dx$.
5. Calcolare la probabilità di ottenere esattamente 2 volte il numero uno lanciando 4 dadi.
6. Sia Y il numero che si ottiene estraendo una pallina a caso da un sacchetto che ne contiene cinque con sopra il numero 2, quattro con il numero 3 e una con il numero 8. Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria Y.
7. Per quali valori del parametro a i vettori $(-3, a, 3)$ e $(a, 3a, 1 - a^2)$ sono ortogonali?
8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1 - e^x$.

Seconda parte, gruppo A

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3. Terzo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. a) Dimostrare che $e^{2x^2} - x^2 \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   b) Determinare tutti i numeri reali $a \geq 0$ tali che $e^{2x^2} - ax^2 \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   [*Per la dimostrazione può essere utile ricordare che* $e^a \geq 1$ *per ogni* $a \geq 0$.]
2. Si consideri l'equazione differenziale lineare
$$\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 8e^{-t} \; . \tag{1}$$
   a) Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (1).
   b) Trovare una soluzione particolare della (1).
   c) Scrivere la soluzione generale della (1).
   d) Trovare la soluzione della (1) che soddisfa $y(0) = 0$ e converge a 0 quando t tende a $+\infty$.
3. Gli stabilimenti X e Y di una certa azienda producono lo stesso oggetto che viene poi spedito ad un magazzino che si occupa del collaudo e della distribuzione. L'80% della produzione proviene dallo stabilimento X. Inoltre da statistiche fatte si scopre che la probabilità che un esemplare prodotto dallo stabilimento X sia difettoso è del 10%, mentre è del 5% per lo stabilimento Y.
   a) Dato un esemplare difettoso, qual è la probabilità che provenga dallo stabilimento X?
   b) Supponiamo che gli oggetti vengano spediti al magazzino impacchettati in scatole di 10. Se una scatola proviene dallo stabilimento X, qual è la probabilità che contenga 3 esemplari difettosi? e se viene dallo stabilimento Y?

c) Si scopre che una certa scatole contiene 3 esemplari difettosi: qual è la probabilità che provenga dallo stabilimento X?

4. Si estraggono 5 palline a caso da un sacchetto che ne contiene 10 bianche e 20 rosse. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi supponendo che ogni pallina estratta venga rimessa nel sacchetto prima di estrarre la successiva:
   a) nessuna delle palline estratte è bianca;
   b) almeno una delle palline estratte è bianca;
   c) almeno due delle palline estratte sono bianche.
   d) Calcolare le probabilità che nessuna delle palline estratte sia bianca nel caso in cui invece non si rimettono nel sacchetto le palline già estratte.

5. a) Il signor A e il signor B fanno questo gioco: lanciano un dado e se esce uno il signor A riceve dal signor B 5 euro, se esce due o tre il signor B riceve dal signor A 2 euro, nei rimanenti casi si ritira il dado e se viene uno il signor A riceve dal signor B 5 euro, altrimenti il signor B riceve dal signor A 2 euro. Calcolare il guadagno medio del signor A.
   b) In una variante del gioco il signor A ed il signor B ritirano il dado finché non esce uno, due o tre, e se alla fine viene uno il signor A riceve dal signor B 5 euro, altrimenti il signor B riceve dal signor A 2 euro. Calcolare il guadagno medio del signor A. [*Si può dare per scontato che la probabilità che una partita vada avanti all'infinito, cioè che non esca mai né uno né due né tre, è zero.*]
   c) Nella variante del gioco descritta al punto b) quanti lanci dura in media una partita?

SECONDA PARTE, GRUPPO B

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3. Terzo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. a) Dimostrare che $e^{3x^2} - 2x^2 \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   b) Determinare tutti i numeri reali $a \geq 0$ tali che $e^{3x^2} - ax^2 \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   [*Per la dimostrazione può essere utile ricordare che* $e^a \geq 1$ *per ogni* $a \geq 0$.]

2. Si consideri l'equazione differenziale lineare
$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 6e^{-t} \ . \tag{1}$$
   a) Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (1).
   b) Trovare una soluzione particolare della (1).
   c) Scrivere la soluzione generale della (1).
   d) Trovare la soluzione della (1) che soddisfa $y(0) = 0$ e converge a 0 quando t tende a $+\infty$.

3. Gli stabilimenti X e Y di una certa azienda producono lo stesso oggetto che viene poi spedito ad un magazzino che si occupa del collaudo e della distribuzione. Il 60% della produzione proviene dallo stabilimento X. Inoltre da statistiche fatte si scopre che la probabilità che un esemplare prodotto dallo stabilimento X sia difettoso è del 10%, mentre è del 5% per lo stabilimento Y.
   a) Dato un esemplare difettoso, qual è la probabilità che provenga dallo stabilimento X?
   b) Supponiamo che gli oggetti vengano spediti al magazzino impacchettati in scatole di 10. Se una scatola proviene dallo stabilimento X, qual è la probabilità che contenga 3 esemplari difettosi? e se viene dallo stabilimento Y?
   c) Si scopre che una certa scatole contiene 3 esemplari difettosi: qual è la probabilità che provenga dallo stabilimento X?

4. Si estraggono 5 palline a caso da un sacchetto che ne contiene 20 bianche e 10 rosse. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi supponendo che ogni pallina estratta venga rimessa nel sacchetto prima di estrarre la successiva:
   a) nessuna delle palline estratte è bianca;
   b) almeno una delle palline estratte è bianca;
   c) almeno due delle palline estratte sono bianche.
   d) Calcolare le probabilità che nessuna delle palline estratte sia bianca nel caso in cui invece non si rimettono nel sacchetto le palline già estratte.

5. a) Il signor A e il signor B fanno questo gioco: lanciano un dado e se esce uno il signor A riceve dal signor B 10 euro, se esce due o il tre o il quattro il signor B riceve dal signor A 3 euro, nei rimanenti casi si ritira il dado e se viene uno il signor A riceve dal signor B 10 euro, altrimenti il signor B riceve dal signor A 3 euro. Calcolare il guadagno medio del signor A.
   b) In una variante del gioco il signor A ed il signor B ritirano il dado finché non esce uno, due, tre o quattro, e se alla fine viene uno il signor A riceve dal signor B 10 euro, altrimenti il signor B riceve dal signor A 3 euro. Calcolare il guadagno medio del signor A. [*Si può dare per scontato che la probabilità che una partita vada avanti all'infinito, cioè che non esca mai né uno né due né tre né quattro, è zero.*]
   c) Nella variante del gioco descritta al punto b) quanti lanci dura in media una partita?

Scritto del secondo appello, 10 giugno 2009

Prima parte

1. Determinare il dominio di esistenza della funzione $\log(4-x^2)$.
2. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 17 ; 30 ; 2 ; 10 ; 16 .
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^3}-1}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to0^+} x^2 \log x$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2+e^{2x}}$.
4. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int (1+2x)^3\,dx$.
5. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot y = y+1$.
6. Quante sono le possibili sigle formate da 3 lettere dell'alfabeto italiano seguite da 4 cifre comprese tra 1 e 9?
7. Calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1-\cos x$.

Seconda parte

1. Nella tabella sottostante è riportata una statistica sul numero di computer per unità familiare in un piccolo paese.

numero computer:	0	1	2	3	4
percentuale famiglie:	10%	35%	30%	20%	5%

   a) Calcolare il numero medio di computer per famiglia.
   b) Nel caso che le famiglie censite fossero 300, quanti computer possederebbero in totale?
   c) Si prende una famiglia a caso tra quelle che posseggono almeno un computer; qual è la probabilità che ne possegga due?
   d) Nell'ambito delle famiglie che posseggono almeno un computer, qual è il numero medio di computer per famiglia?

2. Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\ddot y + 4\dot y + 8y = -5e^{-t} \ . \tag{1}$$

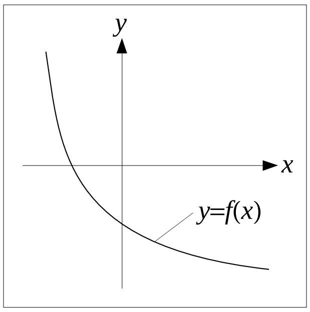
   a) Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (1).
   b) Trovare una soluzione particolare della (1).
   c) Scrivere la soluzione generale della (1).
   d) Trovare la soluzione della (1) che soddisfa $y(0)=0$ e $\dot y(0)=0$.

3. Un sacchetto contiene 10 palline con sopra il numero uno, 5 palline con il numero due, e 5 con il numero quattro.
   a) Si fanno 5 estrazioni, rimettendo ogni volta la pallina estratta nel sacchetto; qual è la probabilità di non ottenere neanche una volta il numero quattro?
   b) Facendo 5 estrazione come al punto a), qual'è la probabilità di ottenere il numero due esattamente per 3 volte?
   c) Indichiamo con Y il numero che si ottiene estraendo una pallina a caso dal sacchetto; calcolare il valore atteso e la varianza di Y.

Scritto del terzo appello, 7 luglio 2009

Prima parte

1. Calcolare l'errore relativo per le seguenti misurazioni: a) $2\,\mathrm{m} \pm 4\,\mathrm{cm}$; b) $10\,\mathrm{cm}^3 \pm 300\,\mathrm{mm}^3$.
2. Alla fine del primo semestre il 20% degli studenti di un certo corso di laurea ha dato tre esami, il 50% ne ha dati due, e i rimanenti ne hanno dato uno solo. Qual è il numero medio di esami dati per studente?
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{2x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^{-2x} x^{20}$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \log(e^x + 2)$.
4. Si estraggono 6 lettere a caso dell'alfabeto italiano. Qual è la probabilità che sia la prima che l'ultima siano la A?
5. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{y} + 4y = 0$.
6. Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$.
7. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \geq x$ dove il grafico della funzione $f(x)$ è disegnato nella figura accanto.
8. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ i vettori $v := (1, a, 3 + a^2)$ e $w := (3 - a, 2, 0)$ sono ortogonali.



Seconda parte

1. Si consideri un sacchetto che contiene 6 palline con sopra il numero 1, 3 palline con il numero 2 e 1 pallina con il numero 8. Indichiamo con Y il numero che si ottiene estraendo una pallina da caso da questo sacchetto, e con Z il numero che si ottiene facendo 5 estrazioni (avendo cura di rimettere ogni pallina estratta nel sacchetto prima di fare l'estrazione successiva) e sommando i risultati.
   a) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.
   b) Calcolare il valore atteso e la varianza di Z.
   c) Calcolare la probabilità che Z sia maggiore o uguale a 35.
2. a) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale
   $$\dot{y} = e^{-t}(1 + y)^2$$
   che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = -1/2$.
   b) Fare un disegno approssimativo di tale soluzione.
3. a) Tracciare separatamente i grafici delle funzioni $y = (x + 1)^3$ e $y = 7 + x^3$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $(x + 1)^3 \leq y \leq 7 + x^3$ e calcolarne larea.

Scritto del quarto appello, 21 settembre 2009

Prima parte

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $y = \log(2 - e^x)$.
2. Semplificare il più possibile l'espressione $f(x) = \log\left(\sqrt{\dfrac{2^{4x}}{9^{x-1}}}\right)$ e calcolarne la derivata
3. Calcolare $\displaystyle\int_1^\infty e^{-2x}\,dx$.
4. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 31 ; 34 ; 30 ; 27 ; 33 .
5. Qual è la probabilità di ottenere esattamente 3 teste lanciando 5 monete?
6. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{y} + 9y = 0$.
7. Quante sono le possibili sigle composte di 5 lettere *distinte* dell'alfabeto italiano?
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 \le y \le 2 - x^2$.

Seconda parte

1. Il lato di un cubo misura 5 cm. Quanto deve essere l'errore assoluto di questa misurazione (in millimetri) per far sì che l'errore assoluto nel calcolo della superficie totale del cubo sia inferiore a $3\,\text{cm}^2$?
   [*Usare la formula semplificata per il calcolo dell'errore del prodotto.*]
2. Si consideri la funzione $f(x) := \exp(x^3 - 12x)$.
   a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$.
   b) Determinare i punti di massimo e minimo *locale* di $f(x)$ e dire se sono anche punti di massimo e minimo *assoluto*. Calcolare il valore massimo e minimo di $f(x)$.
   c) Determinare il valore massimo e minimo di $f(x)$ relativamente all'intervallo $-1 \le x \le 3$.
3. Sono date due scatole uguali, la prima delle quali contiene 4 palline nere e 4 palline bianche, mentre la seconda contiene 4 palline nere, 4 bianche e 8 rosse.
   a) Si sceglie una scatola a caso tra queste due, e si estrae una pallina; sapendo che la pallina estratta è nera, qual è la probabilità che la scatola da cui proviene sia la prima?
   [*Usare la formula di Bayes.*]
   b) E se invece di una si estraggono due palline che risultano essere entrambe nere?

Scritto del quinto appello, 18 gennaio 2010

Prima parte

1. Semplificare il più possibile la seguente funzione e derivarla: $\log\left(\sqrt{\frac{x^5}{4^x}}\right)$.
2. Tra le persone che hanno passato l'esame per la patente in una cittadina, il 65% c'è riuscito al primo tentativo, il 20% ha avuto bisogno di due tentativi, il 5% di tre e le rimanenti di quattro. Qual è il numero medio di tentativi per passare quest'esame? E la mediana?
3. Calcolare l'errore relativo per ciascuna delle seguenti misurazioni:

   a) $2{,}5\,\mathrm{m} \pm 4\,\mathrm{cm}$; b) $12\,\mathrm{cm}^2 \pm 36\,\mathrm{mm}^2$; c) $4{,}5 \cdot 10^2 \pm 1{,}8 \cdot 10^{-1}$.
4. Calcolare la seguente primitiva: $\int xe^{2x}\,dx$.
5. Calcolare il valore minimo di e^{x^2-2x}.
6. Una variabile aleatoria Y ha valore atteso 3 e varianza 2. Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria $2Y - 4$.
7. Quante sono le possibile sigle composte da 4 lettere distinte dell'alfabeto italiano?
8. Disegnare il grafico della funzione $y = (x+1)^3$.

Seconda parte

1. Si considerino le sequenze di valori di x e y date nella seguente tabella:

x:	-2	0	2	4	5
y:	5,5	2,6	1,8	1,1	1,4

   a) Calcolare la media e la varianza dei numeri x_i e poi degli y_i. calcolare la covarianza e il coefficiente di correlazione degli x_i e y_i.
   b) Scrivere l'equazione della retta di regressione corrispondente.
2. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = e^{-t}$ che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$.
3. Si sa che la probabilità che un certo apparecchio usato per inviare massaggi trasmetta correttamente un carattere è uguale al 95%.
   a) Qual è la probabilità che un messaggio di 10 caratteri sia trasmesso correttamente.
   b) Supponendo che la ricevente sia in grado correggere un messaggio di 10 caratteri a patto che ci siano al più 2 errori, qual è la probabilità che un messaggio di 10 caratteri sia trascritto corretto.

Scritto del sesto appello, 10 febbraio 2010

Prima parte

1. Risolvere la disequazione $\log(x^2 - 3e^2) \geq 2$.
2. Calcolare l'errore *relativo* per il prodotto $(2\,\mathrm{m} \pm 10\,\mathrm{cm}) \cdot (5\,\mathrm{min} \pm 15\,\mathrm{sec})$ usando la formula semplificata.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\log x}$; b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{2x^2}$; c) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}$.
4. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 0$.
5. Quante sono le possibili targhe date da due lettere (dell'alfabeto italiano) seguite da cinque cifre diverse da 0?
6. Qual'è la probabilità lanciando 5 dadi non esca neanche un uno?
7. Calcolare il prodotto scalare dei vettori $(-3, 1, 1, -1)$ e $(-1, 0, 2, -1)$ e l'angolo tra essi compreso.
8. Disegnare il grafico di $y = \sqrt{x-1}$.

Seconda parte

1. Tra tutti i triangoli per cui la somma di base e altezza è pari a 1, trovare quelli di area massima e di area minima.
2. Si devono imbiancare il soffitto e le due pareti lunghe di un magazzino a forma di parallelepipedo che misura $12{,}5\,\mathrm{m} \times 20\,\mathrm{m}$ di base e $4{,}8\,\mathrm{m}$ di altezza.

   a) Tenuto conto che le pareti da imbiancare non contengono né porte né finestre e che il margine di errore nelle varie misurazioni è di 20 cm, calcolare l'area complessiva da imbiancare con il relativo errore.

   b) Sapendo che con 1 litro di vernice si riesce a imbiancare una superficie compresa tra 2 e $2{,}5\,\mathrm{m}^2$, calcolare quanti litri di vernice occorrono, con il relativo errore.

   c) Quanti bidoni da 10 litri di vernice bisogna acquistare per essere *certi* di riuscire a completare la tinteggiatura?

   [*Utilizzare sempre le formule semplificate per il calcolo dell'errore.*]
3. Una certa malattia si manifesta solo in presenza di un certo gene, e le statistiche dicono che, tra le persone che hanno questo gene, la percentuale di quelle che effettivamente si ammalano entro i primi quarant'anni di vita è del 30%. Per via della storia clinica della sua famiglia, la probabilità che alla nascita il signor K avesse questo gene era esattamente del 50%. Sapendo però che il signor K è arrivato all'età di quarant'anni senza ammalarsi, qual è la probabilità che egli abbia effettivamente il gene problematico?

Soluzioni

PRIMA PARTE

1. $x > \log 3$.
2. $a^{b/4}$.
3. $1/4$ e $3/4$.
4. a) $[\log(\sqrt{\cos x})]' = \left[\frac{1}{2}\log(\cos x)\right]' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2}\tan x$;
   b) $[\sin(x^3)]' = 3x^2\,\cos(x^3)$;
   c) $[\sqrt{1+2x}]' = [(1+2x)^{1/2}]' = (1+2x)^{-1/2}$.
5. a) e ; b) $-\infty$.
6. $m = 2$; $\sigma^2 = 8$.
7. $\sqrt{3} + i = 2\,[\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)]$; $(\sqrt{3}+i)^6 = 2^6[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = -64$.
8. Si tratta del grafico di $\sin x$ riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato in basso di 1.

SECONDA PARTE

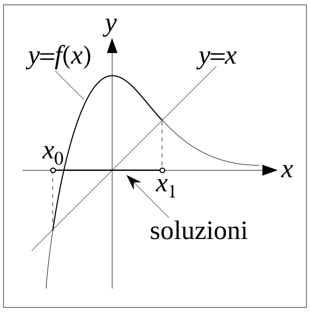
1. Determiniamo innanzitutto per quali valori di x entrambi i termini della disequazione sono ben definiti: si deve avere che l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo, ovvero $x^2 - 2e^2 > 0$, ovvero
$$x < -\sqrt{2}e \quad \text{oppure} \quad \sqrt{2}e < x \; . \tag{1}$$
Ora la disequazione $\log(x^2 - 2e^2) \leq 2 + \log 2$ equivale a $x^2 - 2e^2 \leq e^{2+\log 2} = 2e^2$, vale a dire $x^2 - 4e^2 \leq 0$, ovvero
$$-2e \leq x \leq 2e \; . \tag{2}$$
Pertanto le soluzioni della disequazione sono i valori di x che soddisfano sia la condizione (1) che la (2), vale a dire
$$-2e \leq x < -\sqrt{2}e \quad \text{oppure} \quad \sqrt{2}e < x \leq 2e \; .$$

2. a) $e_1^{\text{rel}} = \frac{0{,}4}{10} = 0{,}04 = 4\%$ e $e_2^{\text{rel}} = \frac{1{,}6}{20} = 0{,}08 = 8\%$.
   b) Utilizzando la formula approssimata per l'errore del prodotto e quella per l'errore della somma si ottiene
$$x_1x_2 = 10 \cdot 20 \pm (10 \cdot 1{,}6 + 0{,}4 \cdot 20) = 200 \pm 24 \; ,$$
$$x_1^2 = 10 \cdot 10 \pm (10 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 10) = 100 \pm 8 \; ,$$
e quindi
$$4x_1^2 + x_1x_2 = 4 \cdot (100 \pm 8) + (200 \pm 24) = 600 \pm 56 \; .$$
   c) Utilizzando invece la formula precisa per l'errore del prodotto si ottiene
$$x_1x_2 = 10 \cdot 20 \pm (10 \cdot 1{,}6 + 0{,}4 \cdot 20 + 1{,}6 \cdot 0{,}4) = 200 \pm 24{,}64 \; ,$$
$$x_1^2 = 10 \cdot 10 \pm (10 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 10 + 0{,}4 \cdot 0{,}4) = 100 \pm 8{,}16 \; ,$$
e quindi
$$4x_1^2 + x_1x_2 = 4 \cdot (100 \pm 8{,}16) + (200 \pm 24{,}64) = 600 \pm 57{,}28 \; .$$

3. Ricordando che $|z_1 - z_2|$ indica la distanza tra il punto z_1 ed il punto z_2, si ha che l'insieme cercato è quello dei punti z più vicini al punto 1 che al punto i. In altre parole si tratta del semipiano inferiore delimitato dall'asse del segmento di estremi 1 e i. Siccome questo asse ha equazione $y = x$, l'insieme cercato è il semipiano dei punti $z = x + iy$ tali che $y \leq x$.
   Alternativamente, poniamo $z = x+iy$ e risolviamo la disequazione: $|z-1| \leq |z-i|$ equivale a $|z-1|^2 \leq |z-i|^2$, ovvero $(x-1)^2+y^2 \leq x^2+(y-1)^2$, e semplificando otteniamo di nuovo $y \leq x$.

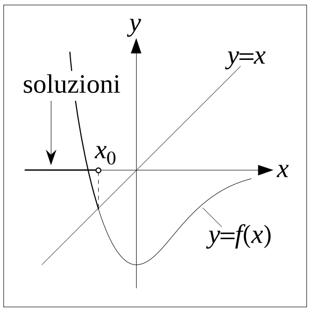
PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. I valori di x per cui la funzione è definita sono quelli per cui $4 - x^2 > 0$, ovvero $-2 < x < 2$.
2. a) $[\sin(x + x^2)]' = (1 + 2x)\,\cos(x + x^2)$;
   b) $\left[\dfrac{x}{1 + x^2}\right]' = \dfrac{1 \cdot (1 + x^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$;
   c) $[\log(xe^{\cos x})]' = [\log x + \cos x]' = \dfrac{1}{x} - \sin x$.
3. a) $+\infty$; b) e ; c) $-\infty$.
4. Usando la formula semplificata per l'errore si ha $x_1x_2 = (1{,}6 \pm 0{,}02)\,\mathrm{m} \cdot (0{,}5 \pm 0{,}005)\,\mathrm{m} = (1{,}6 \cdot 0{,}5 \pm (1{,}6 \cdot 0{,}005 + 0{,}02 \cdot 0{,}5))\,\mathrm{m}^2 = (0{,}8 \pm 0{,}018)\,\mathrm{m}^2 = (8000 \pm 180)\,\mathrm{cm}^2$.
5. La media è $m = \dfrac{1}{5}\big[31 + 50 + 29 + 33 + 32\big] = 35$. La mediana è 32.
   La varianza è $\sigma^2 = \dfrac{1}{5}\big[(31 - 35)^2 + (50 - 35)^2 + (29 - 35)^2 + (33 - 35)^2 + (32 - 35)^2\big] = 58$.
6. $\dfrac{2 + i}{1 - 2i} = \dfrac{(2 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \dfrac{5i}{5} = i$.
7. Le soluzioni sono date dall'intervallo $[x_0, x_1]$ disegnato nella figura accanto.
8. Si tratta del grafico della funzione $y = e^x$ riflesso rispetto a entrambi gli assi e poi traslato in alto di 1.



PRIMA PARTE, GRUPPO B

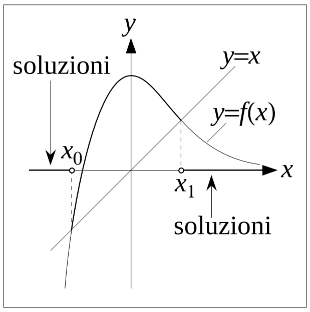
1. $x < -2$ oppure $x > 2$.
2. a) $-(1 + 2x)\,\sin(x + x^2)$; b) $-\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$; c) $\dfrac{1}{x} + \cos x$.
3. a) $+\infty$; b) e^2 ; c) $-\infty$.
4. $x_1x_2 = (0{,}4 \pm 0{,}009)\,\mathrm{m}^2 = (4000 \pm 90)\,\mathrm{cm}^2$.
5. La media è 25; la mediana è 22; la varianza è 58.
6. $\dfrac{3 + i}{1 - 3i} = i$.
7. Le soluzioni sono date dalla semiretta $(-\infty, x_0]$ disegnata nella figura accanto.
8. Si tratta del grafico della funzione $y = \log x$ traslato verso sinistra di 1.



PRIMA PARTE, GRUPPO C

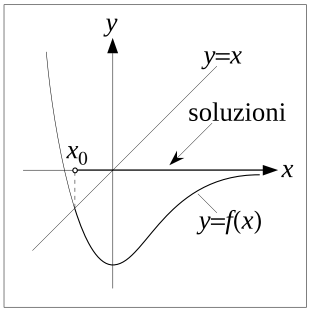
1. $x \leq -3$ oppure $x \geq 3$.
2. a) $(1 + 3x^2)\,\cos(x + x^3)$; b) $\dfrac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$; c) $\dfrac{2}{x} - \sin x$.
3. a) $+\infty$; b) $e^{-1} = 1/e$; c) $-\infty$.

4. $x_1x_2 = (1{,}6 \pm 0{,}036)\,\mathrm{m}^2 = (16000 \pm 360)\,\mathrm{cm}^2$.
5. La media è 15; la mediana è 12; la varianza è 58.
6. $\dfrac{i-2}{1+2i} = i$.
7. Le soluzioni sono date dall'unione delle semirette $(-\infty, x_0]$ e $[x_1, +\infty)$ disegnate nella figura accanto.
8. Si tratta del grafico della funzione $y = \cos x$ riflesso rispetto all'asse delle x poi traslato in alto di 1.



PRIMA PARTE, GRUPPO D

1. $-3 \leq x \leq 3$.
2. a) $-(1+3x^2)\sin(x+x^3)$; b) $\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$; c) $\dfrac{2}{x} + \cos x$.
3. a) $+\infty$; b) $e^{-2} = 1/e^2$; c) $-\infty$.
4. $x_1x_2 = (0{,}8 \pm 0{,}018)\,\mathrm{m}^2 = (8000 \pm 180)\,\mathrm{cm}^2$.
5. La media è 30; la mediana è 24; la varianza è 232.
6. $\dfrac{i-3}{1+3i} = i$.
7. Le soluzioni sono date dalla semiretta $[x_0, +\infty)$ disegnata nella figura accanto.
8. Si tratta del grafico della funzione $y = 1/x$ riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato verso sinistra di 2.



SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. a) Utilizzando il grafico della funzione coseno si vede subito che, limitandosi all'intervallo $[0, 2\pi]$, si ha $\cos y \leq 1/2$ se e solo se

$$\frac{\pi}{3} \leq y \leq \frac{5\pi}{3} \; .$$

b) Il valore di $\pi/(1+x^2)$ è sicuramente positivo e inferiore a π perché il denominatore è sempre maggiore di 1 In particolare $\pi/(1+x^2)$ è sempre compreso tra 0 e 2π. Pertanto, per quanto visto al punto a), la disequazione

$$\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right) \leq 1/2$$

è soddisfatta se e solo se

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{1+x^2} \leq \frac{5\pi}{3}$$

ovvero

$$3 \geq 1 + x^2 \geq \frac{3}{5} \; .$$

Di queste due disequazioni, la seconda è sempre soddisfatta, mentre la prima è soddisfatta per

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \; .$$

2. a) Il numero medio di ordini m per cliente è la corrispondente varianza σ^2 sono date da

$$m = 40\% \cdot 1 + 30\% \cdot 2 + 20\% \cdot 3 + 10\% \cdot 4 = 2 \ ,$$
$$\sigma^2 = 40\% \cdot (1-2)^2 + 30\% \cdot (2-2)^2 + 20\% \cdot (3-2)^2 + 10\% \cdot (4-2)^2 = 1 \ .$$

b) Per rispondere a questa domanda bisogna capire quanti sono gli ordini fatti da ciascuna fascia di clienti rispetto al numero totale di ordini. Detto N_c il numero di clienti, il numero totale di ordini N_o è uguale a

$$N_o = m \cdot N_c = 2 \cdot N_c \ . \tag{1}$$

Di questi, quelli fatti dalla quarta fascia di clienti sono $10\% \cdot N_c \cdot 4 = 0{,}4 \cdot N_c$ ovvero, in percentuale,

$$\frac{0{,}4 \cdot N_c}{N_o} = \frac{0{,}4 \cdot N_c}{2 \cdot N_c} = 0{,}2 = 20\% \ .$$

Analogamente le percentuali di ordini fatte da ciascuna delle prime tre fasce sono, nell'ordine, 20%, 30% e 30%. Pertanto l'importo medio per ordine è

$$I = 20\% \cdot 50\,\mathrm{eu} + 30\% \cdot 40\,\mathrm{eu} + 30\% \cdot 40\,\mathrm{eu} + 20\% \cdot 50\,\mathrm{eu} = 44\,\mathrm{eu} \ .$$

c) L'equazione (1) implica che il numero di ordini è $N_o = 2 \cdot N_c = 2 \cdot 4000 = 8000$.
d) L'equazione (1) implica che il numero di clienti è $N_c = N_o/2 = 6000/2 = 3000$.

3. a) Facendo un po' di conti ed approssimando i risultati alle prime due cifre decimali si ottiene $\mathrm{media}(x_i) = 6{,}34$; $\mathrm{var}(x_i) \simeq 29{,}36$; $\mathrm{media}(y_i) = 2{,}92$; $\mathrm{var}(y_i) \simeq 1{,}99$; $\mathrm{cov}(x_i; y_i) \simeq -7{,}01$; ed infine

$$\mathrm{corr}(x_i; y_i) \simeq -0{,}92.$$

b) La retta cercata ha equazione $y = a(x - m) + b$ dove $a := \mathrm{cov}(x_i; y_i)/\mathrm{var}(x_i) \simeq -0{,}24$; $m := \mathrm{media}(x_i) = 6{,}34$; $b := \mathrm{media}(y_i) = 2{,}92$. Dunque

$$y \simeq -0{,}24 \cdot x + 4{,}43 \ . \tag{2}$$

c) Si deve calcolare la retta di regressione per le sequenze $\log x_i$ e y_i. Procedendo come prima si ottiene: $\mathrm{media}(\log x_i) = 1{,}45$; $\mathrm{var}(\log x_i) \simeq 0{,}84$; $\mathrm{cov}(\log x_i; y_i) \simeq -1{,}29$. La "retta" cercata ha equazione $y = a(\log x - m) + b$ dove $a := \mathrm{cov}(\log x_i; y_i)/\mathrm{var}(x_i) \simeq -1{,}53$; $m := \mathrm{media}(\log x_i) = 1{,}45$; $b := \mathrm{media}(y_i) = 2{,}92$. Dunque

$$y \simeq -1{,}53 \cdot \log x + 5{,}15 \ . \tag{3}$$

d) Il coefficiente di correlazione $\mathrm{corr}(\log x_i; y_i)$ è uguale a $-0{,}99$, ed è quindi molto pi vicino a ± 1 di quanto non lo sia quello calcolato al punto a). Questo suggerisce che la funzione (3) approssimi i dati meglio della (1).

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Si procede come per il gruppo A: a) $\pi/4 \le y \le 7\pi/4$; b) $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$.

2. Il punto a) è uguale al gruppo A: $m = 2$ e $\sigma^2 = 1$. Per il resto si procede come per il gruppo A: b) $I = 54\,\mathrm{eu}$; c) $N_o = 10000$; d) $N_c = 4000$.

3. Analogo al gruppo A: a) $\mathrm{media}(x_i) = 6{,}34$; $\mathrm{var}(x_i) \simeq 29{,}36$; $\mathrm{media}(y_i) = 5{,}84$; $\mathrm{var}(y_i) \simeq 7{,}97$; $\mathrm{cov}(x_i; y_i) \simeq -14{,}02$; infine $\mathrm{corr}(x_i; y_i) \simeq -0{,}92$
b) La retta di regressione ha equazione $y \simeq -0{,}48 \cdot x + 8{,}86$.
c) La funzione cercata è $y \simeq -3{,}06 \cdot \log x + 10{,}30$.

SECONDA PARTE, GRUPPO C

1. Si procede come per il gruppo A: a) $\pi/3 \leq y \leq 5\pi/3$; b) $-1 \leq x \leq 1$.
2. Il punto a) è uguale al gruppo A: $m = 2$ e $\sigma^2 = 1$. Per il resto si procede come per il gruppo A: b) $I = 34\,\text{eu}$; c) $N_o = 12000$; d) $N_c = 4500$.
3. Uguale al gruppo A.

SECONDA PARTE, GRUPPO D

1. Si procede come per il gruppo A: a) $\pi/4 \leq y \leq 7\pi/4$; b) $-\sqrt{3/2} \leq x \leq \sqrt{3/2}$.
2. Il punto a) è uguale al gruppo A: $m = 2$ e $\sigma^2 = 1$. Per il resto si procede come per il gruppo A: b) $I = 88\,\text{eu}$; c) $N_o = 12000$; d) $N_c = 3500$.
3. Uguale al gruppo B.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 2c). Molti hanno calcolato la derivata di questa funzione senza prima semplificarla. Va bene, ma ovviamente si tratta di un conto molto più complicato.
- Prima parte, esercizio 4. Molti hanno svolto correttamente i conti, omettendo però l'unità di misura oppure sbagliandola (tipicamente m invece di m^2, o cm invece di cm^2). In alcuni casi questo ha portato a risultati sbagliati, e comunque si tratta di un errore (o omissione) in sé grave.
- Prima parte, esercizio 5. Molti non hanno capito cosa sia la mediana, pur avendo calcolato correttamente media e varianza.
- Prima parte, esercizio 6. Pur risolvendo correttamente l'esercizio, diverse persone hanno inspiegabilmente omesso di semplificare il risultato ottenuto alla fine, scrivendo ad esempio $5i/5$ invece di i.
- Prima parte, esercizio 7. Una larga maggioranza ha indicato come soluzione dell'esercizio un pezzo del grafico della funzione, mentre la soluzione deve essere un sottoinsieme dell'asse delle x. Questo è un errore grave.
- Seconda parte, esercizio 1. Anche se molti hanno dato le soluzioni corrette, pochissimi hanno osservato esplicitamente che per risolvere la disequazione al punto b) non c'è bisogno di considerare le soluzioni della disequazione al punto a) al di fuori dell'intervallo $[0, \pi]$, perché la funzione $\pi/(1+x^2)$ assume valori solo in quell'intervallo. Si osservi che se al posto di $\pi/(1+x^2)$ ci fosse stato $4\pi/(1+x^2)$, il discorso sarebbe stato diverso.
- Seconda parte, esercizio 2b). Quasi tutti hanno sbagliato questo esercizio. Per risolverlo è infatti necessario sapere quanti sono gli ordini fatti da ciascuna fascia di clienti rispetto al totale *degli ordini*; ma questo dato va ricavato, e non coincide con il peso percentuale della corrispondente fascia di clienti (per chiarire: la prima e la quarta fascia sono numericamente una più piccola dell'altra, ma fanno lo stesso numero di ordini.
- Seconda parte. Varie persone hanno dato nel secondo e terzo esercizio risultati manifestatamente mente assurdi, ad esempio coefficienti di correlazione più grandi di 1, medie di gran lunga inferiori o superiori alle quantità in gioco, numero di clienti spropositatamente piccolo rispetto al numero di ordini, etc. È grave che risultati del genere, che indicano chiaramente la presenza di un errore nel procedimento, siano stati presi per buoni senza riflettere.

Prima parte, gruppo A

1. Si deve avere $x^2 - 4 > 0$, vale a dire $x > 2$ oppure $x < -2$.
2. $\dfrac{2\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{4\pi}{3}$.
3. $\log\left(\dfrac{\sqrt{(1+x)^3}}{\sqrt[3]{x^4}}\right) = \dfrac{3}{2}\log(1+x) - \dfrac{4}{3}\log x$. La derivata è $\dfrac{3}{2(1+x)} - \dfrac{4}{3x} = \dfrac{x-8}{6x(1+x)}$.
4. a) $\dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$; b) $(1+e^x)\cos(x+e^x)$; c) $-\dfrac{1}{2}(1-x)^{-1/2}$.
5. a) $\sqrt{2}$; b) $+\infty$; c) $+\infty$.
6. La media è 4, la mediana 3, la varianza 4,4.
7. a) $r = \sqrt{2}$, $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$; b) $r = 2$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.
8. Si tratta del grafico di $\log x$ traslato verso sinistra di 1 e poi riflesso rispetto all'asse delle x.

Prima parte, gruppo B

1. Si deve avere $4 - x^2 > 0$, vale a dire $-2 < x < 2$.
2. $\dfrac{7\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{11\pi}{6}$.
3. $\log\left(\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{(1+x)^4}}\right) = \dfrac{3}{2}\log x - \dfrac{4}{3}\log(1+x)$. La derivata è $\dfrac{3}{2x} - \dfrac{4}{3(1+x)} = \dfrac{x+9}{6x(1+x)}$.
4. a) $\dfrac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$; b) $-(1+e^x)\sin(x+e^x)$; c) $(1+2x)^{-1/2}$.
5. a) $\sqrt{3}$; b) 0 ; c) $-\infty$.
6. La media è 3, la mediana 2, la varianza 4,4.
7. a) $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$; b) $r = 2$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.
8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato verso sinistra di 1 e poi riflesso rispetto all'asse delle x.

Seconda parte, gruppo A

1. a) Errore relativo per la misura della larghezza: 0,01; lunghezza: 0,004; profondità: 0,005.
   b) Il volume è uguale a $v = 10\,\mathrm{m} \cdot 25\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 500\,\mathrm{m}^3$ con un errore relativo pari a $e^{\mathrm{rel}} = 0{,}01 + 0{,}004 + 0{,}005 = 0{,}019$ ed errore assoluto $e = e^{\mathrm{rel}} \cdot v = 0{,}019 \cdot 500\,\mathrm{m}^3 = 9{,}5\,\mathrm{m}^3$.
   c) Se l'errore assoluto nella misurazione della larghezza e della lunghezza è pari a d, allora l'errore relativo è uguale rispettivamente a $d/(10\,\mathrm{m})$ e $d/(25\,\mathrm{m})$. Pertanto l'errore relativo nel calcolo del volume è

   $$e^{\mathrm{rel}} = d(1/10 + 1/25)\,\mathrm{m}^{-1} + 0{,}005 \ .$$

   Chiedere che l'errore assoluto nella misura del volume sia inferiore a $6\,\mathrm{m}^3$ equivale a chiedere che l'errore relativo e^{rel} sia inferiore a 0,012, vale a dire, per la formula precedente

   $$d(1/10 + 1/25)\,\mathrm{m}^{-1} + 0{,}005 \leq 0{,}012$$

da cui si ottiene infine

$$d \leq \frac{0{,}007}{1/10 + 1/25}\,\mathrm{m} = 0{,}05\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{cm}\ .$$

2. a) $m = 15\% \cdot 1 + 40\% \cdot 2 + 30\% \cdot 3 + 10\% \cdot 4 + 5\% \cdot 5 = 2{,}5$.
   b) $\sigma^2 = 15\% \cdot 1{,}5^2 + 40\% \cdot 0{,}5^2 + 30\% \cdot 0{,}5^2 + 10\% \cdot 1{,}5^2 + 5\% \cdot 2{,}5^2 = 1{,}05$.
   c) $N = m \cdot 200 = 500$.
   d) La media effettiva di figli per famiglia è $N/(200 + 50) = 2$.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. a) Errore relativo per la misura della larghezza: 0,005; lunghezza: 0,002; profondità: 0,005.
   b) Il volume è uguale a $v = 2000\,\mathrm{m}^3$ con un errore relativo $e^{\mathrm{rel}} = 0{,}012$ ed errore assoluto $e = 0{,}012 \cdot 2000\,\mathrm{m}^3 = 24\,\mathrm{m}^3$.
   c) L'errore relativo nel calcolo del volume è $e^{\mathrm{rel}} = d(1/20 + 1/50)\,\mathrm{m}^{-1} + 0{,}005$ e deve essere inferiore a 0,0085. Da questo segue che $d \leq 0{,}05\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{cm}$.

2. a) $m = 40\% \cdot 1 + 35\% \cdot 2 + 15\% \cdot 3 + 5\% \cdot 4 + 5\% \cdot 5 = 2$.
   b) $\sigma^2 = 40\% \cdot 1^2 + 35\% \cdot 0^2 + 15\% \cdot 1^2 + 5\% \cdot 2^2 + 5\% \cdot 3^2 = 1{,}2$.
   c) $N = m \cdot 180 = 360$.
   d) La media effettiva di figli per famiglia è $N/(180 + 20) = 1{,}8$.

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. a) $r = 2$ e $\theta = \pi/6$, per cui $\sqrt{3} + i = 2[\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)]$.
   b) $(\sqrt{3} + i)^6 = 2^6[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = -64$.
2. La media è 6, la mediana 5, la varianza 4,4.
3. a) $\dfrac{(2x-3)x^2}{(x-1)^2}$; b) $-e^x \sin(e^x)$; c) $(5\log x + 4\log(x+2))' = \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x+2} = \dfrac{9x+10}{x(x+2)}$.
4. a) 2; b) 0; a) $\log 2$.
5. Con $y = 1-2x$ si ottiene $\displaystyle\int \sin(1-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int \sin y\,dy = \frac{1}{2}\cos y + c = \frac{1}{2}\cos(1-2x) + c$.
6. Poiché $e^y = 1 + y + o(y)$, si ha $1 - e^{x^4} = 1 - (1 + x^4 + o(x^4)) \sim -x^4$.
7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili: $3y^2\dot{y} = e^t$ da cui segue $y^3 = e^t + c$. La condizione iniziale è soddisfatta per $c = 7$, quindi $y^3 = e^t + 7$, ovvero $y = \sqrt[3]{e^t + 7}$.
8. Si tratta del grafico della funzione $y = x^2$ riflesso rispetto all'asse delle x, traslato in alto di 1 e a destra di 1.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. a) $r = 2$ e $\theta = \pi/3$, per cui $1 + \sqrt{3}i = 2[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)]$.
   b) $(1 + \sqrt{3}i)^6 = 2^6[\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)] = 64$.
2. La media è 8, la mediana 6, la varianza 17,6.
3. a) $\dfrac{(2x+6)x^2}{(x+2)^2}$; b) $-\dfrac{\sin(\log x)}{x}$; c) $(4\log x + 5\log(x+1))' = \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{9x+4}{x(x+1)}$.
4. a) 0; b) 1/3; a) -1.
5. Con $y = 3x+1$ si ottiene $\displaystyle\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin y\,dy = -\frac{1}{3}\cos y + c = -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + c$.
6. Poiché $\cos y = 1 - y^2/2 + o(y^2)$, si ha $1 - \cos(2x^3) = 1 - (1 - 2x^6 + o(x^6)) \sim 2x^6$.
7. Equazione a variabili separabili: $3y^2\dot{y} = e^t$ da cui segue $y^3 = e^t + c$. La condizione iniziale è soddisfatta per $c = -2$, quindi $y^3 = e^t - 2$, ovvero $y = \sqrt[3]{e^t - 2}$.
8. Si tratta del grafico di $y = x^2$ traslato in basso di 1 e a destra di 1.

PRIMA PARTE, GRUPPO C

1. a) $r = \sqrt{6}$ e $\theta = \pi/4$, per cui $\sqrt{3} + \sqrt{3}i = \sqrt{6}[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)]$.
   b) $(\sqrt{3} + \sqrt{3}i)^6 = 6^3[\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2)] = -216i$.
2. La media è 5, la mediana 4, la varianza 4,4.
3. a) $\dfrac{(3x-4)x^3}{(x-1)^2}$; b) $\dfrac{\cos(\log x)}{x}$; c) $(4\log x + 5\log(x+2))' = \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{9x+8}{x(x+2)}$.
4. a) 2/3; b) $+\infty$; a) 0.
5. Con $y = 2-3x$ si ottiene $\displaystyle\int e^{2-3x}dx = -\frac{1}{3}\int e^y dy = -\frac{1}{3}e^y + c = -\frac{1}{3}e^{2-3x} + c$.

6. Poiché $e^y = 1 + y + o(y)$, si ha $e^{2x^3} - 1 = (1 + 2x^3 + o(2x^3)) - 1 \sim 2x^3$.
7. Equazione a variabili separabili: $3y^2\dot{y} = \cos t$ da cui segue $y^3 = \sin t + c$. La condizione iniziale è soddisfatta per $c = 8$, quindi $y^3 = \sin t + 8$, ovvero $y = \sqrt[3]{\sin t + 8}$.
8. Si tratta del grafico di $y = x^2$ riflesso rispetto all'asse delle x, traslato in alto di 1 e a sinistra di 1.

PRIMA PARTE, GRUPPO D

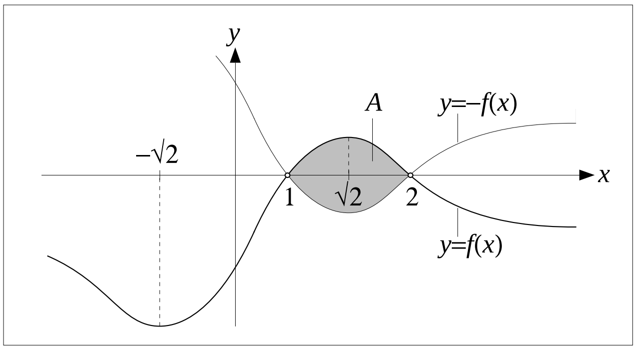
1. a) $r = 4$ e $\theta = \pi/6$, per cui $2\sqrt{3} + 2i = 4[\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)]$.
   b) $(2\sqrt{3} + 2i)^3 = 4^3(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = 64i$.
2. La media è 7, la mediana 5, la varianza 17,6.
3. a) $\dfrac{(3x+8)x^3}{(x+2)^2}$; b) $\dfrac{\sin(1/x)}{x^2}$; c) $(3\log x + 4\log(x+1))' = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{7x+3}{x(x+1)}$.
4. a) $4/3$; b) $-\infty$; a) $+\infty$.
5. Con $y = 3x + 2$ si ottiene $\displaystyle\int \sqrt{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int y^{1/2}\,dy = \frac{2}{9}y^{3/2} + c = \frac{2}{9}(3x+2)^{3/2} + c$.
6. Poiché $\cos y = 1 - y^2/2 + o(y^2)$, si ha $\cos(2x^4) - 1 = (1 - 2x^8 + o(2x^8)) - 1 \sim -2x^8$.
7. Equazione a variabili separabili: $3y^2\dot{y} = \cos t$ da cui segue $y^3 = \sin t + c$. La condizione iniziale è soddisfatta per $c = -1$, quindi $y^3 = \sin t - 1$, ovvero $y = \sqrt[3]{\sin t - 1}$.
8. Si tratta del grafico di $y = x^2$ traslato in basso di 1 e a sinistra di 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. a) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla (1) è $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, ed ha due soluzioni complesse $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$y_{\text{om}}(t) = e^{-2t}(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t) \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$
   b) Sostituendo $y(t) = ae^{-t}$ nella (1) si vede subito che l'equazione è soddisfatta per $a = 3$.
   c) Per via di quanto fatto ai punti a) e b), la soluzione generale della (1) è
$$y(t) = 3e^{-t} + e^{-2t}(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t) \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$
   d) Partendo dalla formula risolutiva (2) si ricava $y(0) = 3 + \alpha_1$ e $\dot{y}(0) = -3 - 2\alpha_1 + \alpha_2$. Imponendo le condizioni iniziali richieste si ottiene quindi il sistema
$$\begin{cases} 3 + \alpha_1 = 1 \\ -3 - 2\alpha_1 + \alpha_2 = -2 \end{cases}$$
   da cui si ricava subito $\alpha_1 = -2$ e $\alpha_2 = -3$. Pertanto la soluzione cercata è
$$y(t) = 3e^{-t} - e^{-2t}(2\cos t + 3\sin t)\ . \tag{3}$$

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, si annulla per $x = 1$ e $x = 2$, è positiva per $1 \le x \le 2$ e negativa altrimenti. Inoltre il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è -1. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{3(2 - x^2)}{(x^2 + 2)^2}$$

si ottiene che $f(x)$ è crescente nell'intervallo $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ e decrescente nelle semirette $x \le -\sqrt{2}$ e $x \ge \sqrt{2}$. Da questo segue che $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ sono rispettivamente punti di minimo e massimo *locale*; inoltre, confrontando i valori della funzione in $\pm\sqrt{2}$ con il valore del limite a $\pm\infty$, si vede che tali punti sono in effetti di minimo e massimo *assoluto*.
Utilizzando le informazioni raccolte finora si può tracciare approssimativamente il grafico della funzione f (figura sotto).



b) L'insieme A corrisponde all'insieme dei punti (x, y) tali che $-f(x) \le y \le f(x)$, ovvero la parte del piano limitata superiormente dal grafico di f ed inferiormente dal grafico di $-f$ (figura sopra). Infine l'area di A è data da

$$\text{Area}(A) = \int_1^2 2f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{6x}{x^2+2}\,dx - \int_1^2 2\,dx = \int_3^6 \frac{3}{t}\,dt - 2 = 3\log 2 - 2$$

(nel terzo passaggio si è usato il cambio di variabile $t = x^2 + 2$).

3. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \ge 0$. Il valore minimo e massimo sono quindi assunti in punti in cui si annulla la derivata oppure agli estremi dell'intervallo in esame, vale a dire in 0 o all'infinito. La derivata

$$f'(x) := (x^2 - 7x + 10)e^{-x}$$

si annulla per $x = 2$ e $x = 5$. Confrontando i valori

$$f(0) = -5\,, \quad f(2) = \frac{1}{e^2} \simeq 0{,}14\,, \quad f(5) = -\frac{5}{e^5} \simeq -0{,}03\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,,$$

si ottiene che 0 è il punto di minimo *assoluto* di f, e il valore minimo è -5, mentre 2 è il punto di massimo *assoluto* di f, e il valore massimo è e^{-2}. Studiando il segno della derivata di f si vede inoltre che 5 è un punto di minimo *locale* (ma questo non è rilevante ai fini dell'esercizio).
b) La risposta è sì. Infatti la disuguaglianza $x^2 - 5x + 5 \le \frac{11}{2}e^x$ può essere riscritta come $f(x) \ge -11/2$, e quest'ultima è verificata per ogni $x \ge 0$ perché il valore minimo di $f(x)$ è -5 (come dimostrato nel punto precedente), che è maggiore di $-11/2$.

Seconda parte, gruppo B

1. Analogo al gruppo A. a) $y_{\text{om}}(t) = e^{-3t}(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
b) $y(t) = 2e^{-2t}$.
c) $y(t) = 2e^{-2t} + e^{-3t}(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
d) $y(t) = 2e^{-2t} + e^{-3t}(\cos t + 5 \sin t)$.

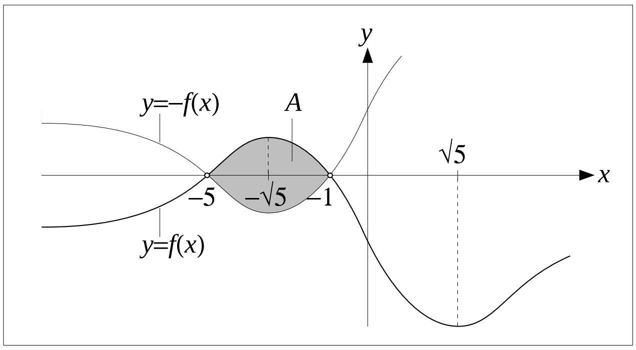
2. Analogo al gruppo A. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, si annulla per $x = 1$ e $x = 5$, è positiva per $1 \le x \le 5$ e negativa altrimenti. Inoltre il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è -1. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{6(5 - x^2)}{(x^2 + 5)^2}$$
si ottiene che $f(x)$ è crescente nell'intervallo $-\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$ e decrescente nelle semirette $x \le -\sqrt{5}$ e $x \ge \sqrt{5}$. I punti $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$ sono rispettivamente di minimo e massimo assoluto. Il grafico così ottenuto è simile a quello del gruppo A.
b) L'area di A è data da
$$\text{Area}(A) = \int_1^5 2f(x)\,dx = \int_1^5 \frac{12x}{x^2+5}\,dx - \int_1^5 2\,dx = \int_6^{30} \frac{6}{t}\,dt - 8 = 6\log 5 - 8$$

3. Analogo al gruppo A. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \ge 0$ e la derivata
$$f'(x) := (3x^2 - 7x + 2)e^{-x}$$
si annulla per $x = 1/3$ e $x = 2$. Confrontando i valori
$$f(0) = -1\,, \quad f\Big(\frac{1}{3}\Big) = -\frac{1}{e^{1/3}} \simeq -0{,}72\,, \quad f(2) = -\frac{11}{e^2} \simeq -1{,}49\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,,$$
si ottiene che 2 è il punto di minimo *assoluto* di f, e il valore minimo è $-11e^{-2} \simeq -1{,}49$, mentre il valore massimo è 0 e viene raggiunto quando x tende a $+\infty$ (ad essere precisi dovremmo dire che l'estremo superiore dei valori è 0, non viene raggiunto in nessun punto ma viene approssimato quando x tende a $+\infty$).
b) La risposta è no. La disuguaglianza in questione si riscrive infatti come $f(x) \ge -1$, ma questa non può essere verificata per ogni $x \ge 0$ perché il valore minimo di $f(x)$ è circa $-1{,}49$, che è inferiore a -1. Una dimostrazione più diretta la si ottiene osservando che la disuguaglianza non è soddisfatta per $x = 2$ (non a caso il punto di minimo di $f(x)$) o anche per $x = 1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO C

1. Analogo al gruppo A. a) $y_{\text{om}}(t) = e^{2t}(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
b) $y(t) = 3e^t$.
c) $y(t) = 3e^t + e^{2t}(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
d) $y(t) = 3e^t + e^{2t}(3 \sin t - 2 \cos t)$.

2. Analogo al gruppo A. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, si annulla per $x = -1$ e $x = -5$, è positiva per $-5 \le x \le -1$ e negativa altrimenti. Inoltre il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è -1. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{6(x^2 - 5)}{(x^2 + 5)^2}$$
si ottiene che $f(x)$ è decrescente nell'intervallo $-\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$ e crescente nelle semirette $x \le -\sqrt{5}$ e $x \ge \sqrt{5}$. I punti $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$ sono rispettivamente di massimo e minimo assoluto.



b) L'area di A è uguale a $6\log 5 - 8$.

3. Analogo al gruppo A. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \geq 0$ e la derivata
$$f'(x) := (x^2 - 9x + 18)e^{-x}$$
si annulla per $x = 3$ e $x = 6$. Confrontando i valori
$$f(1) = -\frac{5}{e} \simeq -1{,}84\,, \quad f(3) = \frac{1}{e^3} \simeq 0{,}05\,, \quad f(6) = -\frac{5}{e^6} \simeq -0{,}01\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,,$$
si ottiene che 1 è il punto di minimo *assoluto* di f, e il valore minimo è $-5e^{-1} \simeq -1{,}84$, mentre 3 è il punto di massimo *assoluto* e il valore massimo è $e^{-3} \simeq 0{,}05$.
b) La risposta è sì (cfr. gruppo A).

SECONDA PARTE, GRUPPO D

1. Analogo al gruppo A. a) $y_{\text{om}}(t) = e^{3t}(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
b) $y(t) = 2e^{2t}$.
c) $y(t) = 2e^{2t} + e^{3t}(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
d) $y(t) = 2e^{2t} + e^{3t}(\cos t - 5\sin t)$.

2. Analogo al gruppo A. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, si annulla per $x = -1$ e $x = -2$, è positiva per $-2 \leq x \leq -1$ e negativa altrimenti. Inoltre il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è -1. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{3(x^2 - 2)}{(x^2 + 2)^2}$$
si ottiene che $f(x)$ è decrescente nell'intervallo $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ e crescente nelle semirette $x \leq -\sqrt{2}$ e $x \geq \sqrt{2}$. I punti $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ sono rispettivamente di minimo e massimo assoluto. Il grafico così ottenuto è simile a quello del il gruppo C.
b) L'area di A è uguale a $3\log 2 - 2$.

3. Analogo al gruppo A. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \geq 0$ e la derivata
$$f'(x) := (3x^2 - 13x + 12)e^{-x}$$
si annulla per $x = 4/3$ e $x = 3$. Confrontando i valori
$$f(1) = -\frac{1}{e} \simeq -0{,}37\,, \quad f\Big(\frac{4}{3}\Big) = -\frac{1}{e^{4/3}} \simeq -0{,}26\,, \quad f(3) = -\frac{11}{e^3} \simeq -0{,}55\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,,$$
si ottiene che 3 è il punto di minimo *assoluto* di f, e il valore minimo è $-11e^{-3} \simeq -0{,}55$, mentre il valore massimo è 0 e viene raggiunto quando x tende a $+\infty$.
b) La risposta è no, e lo si vede ad esempio prendendo $x = 3$ (si veda anche la soluzione proposta per il gruppo B).

Commenti

- Prima parte, esercizio 2. A controlli fatti pare che nell'uso italiano il termine "scarto quadratico medio" indichi *prevalentemente* la deviazione standard e non la varianza, come ho invece scritto negli appunti. Per evitare fraintendimenti ho quindi modificato l'enunciato dell'esercizio usando il termine "varianza". Ovviamente sono state considerate corrette sia le soluzioni in cui veniva data la deviazione standard sia quelle in cui veniva data la varianza.
- Seconda parte, esercizio 2. Molti hanno studiato correttamente il grafico della funzione $f(x)$, ma sorprendentemente pochi hanno disegnato correttamente l'insieme A.
- Seconda parte, esercizio 3a). Per trovare il valore massimo e minimo la maggior parte delle persone hanno confrontato i valori di f nei due punti critici corrispondenti alle radici della derivata, trascurando quindi di considerare i valori di f agli estremi dell'intervallo (vale a dire 0 e $+\infty$).
- Seconda parte, esercizio 3. Quasi nessuno ha collegato la domanda al punto b) con la determinazione del valore minimo di f fatta al punto a).
- Seconda parte, esercizio 3b). Varie persone hanno risposto facendo un confronto di grafici (per il gruppo A, quello della parabola $x^2 - 5x + 5$ e quello dell'esponenziale $\frac{11}{2}e^x$). Il problema di questo metodo è che dipende in modo essenziale dall'affidabilità di un disegno fatto a mano; ed infatti, procedendo in questo modo qualcuno ha dato la risposta giusta, ma qualcun altro quella sbagliata. Non si tratta dunque di una soluzione valida.

Terzo compitino e primo appello, 17 aprile 2009

Prima parte, gruppo A

1. Deve essere $4 - x^2 > 0$, ovvero $-2 < x < 2$.
2. $1\,\mathrm{m} \pm 5\,\mathrm{cm}$ è pari a $1\,\mathrm{m}$ con errore relativo del 5% e $20\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}$ è pari a $0{,}2\,\mathrm{m}$ con errore relativo del 2%. Quindi l'area è $0{,}2\,\mathrm{m}^2 = 2000\,\mathrm{cm}^2$ con errore relativo del 7%.
3. a) 0 ; b) 0 ; c) e^2 .
4. Ponendo $y = 4 - 2x$ si ha $\displaystyle\int_2^\infty e^{4-2x}\,dx = \int_0^{-\infty} e^y \frac{dy}{-2} = -\frac{1}{2}\Big| e^y \Big|_0^{-\infty} = \frac{1}{2}$.
5. $P = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{4\cdot 5}{6^4} = \frac{5}{324} \simeq 1{,}54\%$.
6. $E(Y) = 1\cdot\frac{5}{10} + 2\cdot\frac{4}{10} + 7\cdot\frac{1}{10} = 2$.
   $\mathrm{Var}(Y) = (1-2)^2\cdot\frac{5}{10} + (2-2)^2\cdot\frac{4}{10} + (7-2)^2\cdot\frac{1}{10} = 3$.
7. Il prodotto scalare dei due vettori è $(1, a, 3)\cdot(a, 3a, 1-a^2) = a + 3$ e si annulla per $a = -3$.

Prima parte, gruppo B

1. Deve essere $9 - x^2 \geq 0$, ovvero $-3 \leq x \leq 3$.
2. $2\,\mathrm{m} \pm 6\,\mathrm{cm}$ è pari a $2\,\mathrm{m}$ con errore relativo del 3% e $20\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}$ è pari a $0{,}2\,\mathrm{m}$ con errore relativo del 2%. Quindi l'area è $0{,}4\,\mathrm{m}^2 = 4000\,\mathrm{cm}^2$ con errore relativo del 5%.
3. a) 3 ; b) $+\infty$; c) 0 .
4. Ponendo $y = 3 - 2x$ si ha $\displaystyle\int_1^\infty e^{3-2x}\,dx = \int_1^{-\infty} e^y \frac{dy}{-2} = -\frac{1}{2}\Big| e^y \Big|_1^{-\infty} = \frac{e}{2}$.
5. $P = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{3\cdot 5}{6^3} = \frac{5}{72} \simeq 6{,}94\%$.
6. $E(Y) = 2\cdot\frac{5}{10} + 4\cdot\frac{4}{10} + 14\cdot\frac{1}{10} = 4$.
   $\mathrm{Var}(Y) = (2-4)^2\cdot\frac{5}{10} + (4-4)^2\cdot\frac{4}{10} + (14-4)^2\cdot\frac{1}{10} = 12$.
7. Il prodotto scalare dei due vettori è $(a, 4, -1)\cdot(4a, 1-a^2, a) = 4 - a$ e si annulla per $a = 4$.

Prima parte, gruppo C

1. Deve essere $x^2 - 4 \geq 0$, ovvero $x \geq 2$ oppure $x \leq -2$.
2. $1\,\mathrm{m} \pm 5\,\mathrm{cm}$ è pari a $1\,\mathrm{m}$ con errore relativo del 5% e $30\,\mathrm{cm} \pm 9\,\mathrm{mm}$ è pari a $0{,}3\,\mathrm{m}$ con errore relativo del 3%. Quindi l'area è $0{,}3\,\mathrm{m}^2 = 3000\,\mathrm{cm}^2$ con errore relativo del 8%.
3. a) 1/2 ; b) $+\infty$; c) $-\infty$.
4. Ponendo $y = 4 - 3x$ si ha $\displaystyle\int_1^\infty e^{4-3x}\,dx = \int_1^{-\infty} e^y \frac{dy}{-3} = -\frac{1}{3}\Big| e^y \Big|_1^{-\infty} = \frac{e}{3}$.
5. $P = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{10\cdot 5^2}{6^5} = \frac{125}{3888} \simeq 3{,}21\%$.

6. $E(Y) = 1 \cdot \frac{5}{10} + 3 \cdot \frac{4}{10} + 13 \cdot \frac{1}{10} = 3.$
   $\mathrm{Var}(Y) = (1-3)^2 \cdot \frac{5}{10} + (3-3)^2 \cdot \frac{4}{10} + (13-3)^2 \cdot \frac{1}{10} = 12.$
7. Il prodotto scalare dei due vettori è $(3, a, 1) \cdot (1 - a^2, 3a, a - 1) = a + 2$ e si annulla per $a = -2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO D

1. Deve essere $x^2 - 9 > 0$, ovvero $x > 3$ oppure $x < -3$.
2. $2\,\mathrm{m} \pm 6\,\mathrm{cm}$ è pari a $2\,\mathrm{m}$ con errore relativo del 3% e $30\,\mathrm{cm} \pm 9\,\mathrm{mm}$ è pari a $0{,}3\,\mathrm{m}$ con errore relativo del 3%. Quindi l'area è $0{,}6\,\mathrm{m}^2 = 6000\,\mathrm{cm}^2$ con errore relativo del 6%.
3. a) $1/4$; b) 0 ; c) e^4 .
4. Ponendo $y = 9 - 3x$ si ha $\displaystyle\int_3^\infty e^{9-3x}\,dx = \int_0^{-\infty} e^y \frac{dy}{-3} = -\frac{1}{3}\Big|\, e^y \Big|_0^{-\infty} = \frac{1}{3}.$
5. $P = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6 \cdot 5^2}{6^4} = \frac{25}{216} \simeq 11{,}57\%.$
6. $E(Y) = 2 \cdot \frac{5}{10} + 3 \cdot \frac{4}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10} = 3.$
   $\mathrm{Var}(Y) = (2-3)^2 \cdot \frac{5}{10} + (3-3)^2 \cdot \frac{4}{10} + (8-3)^2 \cdot \frac{1}{10} = 3.$
7. Il prodotto scalare dei due vettori è $(-3, a, 3) \cdot (a, 3a, 1 - a^2) = 3 - 3a$ e si annulla per $a = 1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. a) La funzione $f(x) := e^{2x^2} - x^2$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. La derivata di $f(x)$ è
   $$f'(x) = 4xe^{2x^2} - 2x = x(4e^{2x^2} - 2) \ ;$$
   siccome $e^a \geq 1$ per ogni $a \geq 0$, il fattore $4e^{2x^2} - 2$ risulta essere sempre positivo, e dunque per $x \geq 0$ si ha che $f'(x)$ è positiva ed $f(x)$ è crescente, mentre per $x \leq 0$ si ha che $f'(x)$ è negativa e $f(x)$ è decrescente. Pertanto il punto $x = 0$ è il punto di minimo *assoluto* di $f(x)$, e siccome $f(0) = 1$, ne segue che $e^{2x^2} - x^2 = f(x) \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   b) Procediamo come per il punto a): la derivata della funzione $f(x) := e^{2x^2} - ax^2$ è
   $$f'(x) := x(4e^{2x^2} - 2a) \ ;$$
   pertanto, quando $a \leq 2$, $f(x)$ è decrescente per $x \leq 0$ e crescente per $x \geq 0$; quindi 0 è un punto di minimo assoluto, e siccome $f(0) = 1$, si ha che $e^{2x^2} - ax^2 = f(x) \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   Quando invece $a > 2$, si ha che $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 4 - 2a < 0$, e quindi 0 è un punto di massimo *locale* stretto. Da questo segue che devono esistere punti x vicini a 0 tali che $e^{2x^2} - ax^2 = f(x) < 1$.
   In conclusione, i numeri a cercati sono quelli per cui $a \leq 2$.
2. a) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla (1) è $\lambda^2 - \lambda + 6 = 0$ ed ha come soluzioni $\lambda = -2, 3$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è
   $$y(t) := ae^{-2t} + be^{3t} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

b) Cerchiamo una soluzione della forma $y(t) = ce^{-t}$. Sostituendo quest'espressione nella (1) otteniamo l'identità $-4ce^{-t} = 8e^{-t}$, che è soddisfatta per ogni t se si prende $c = -2$.
c) Per quanto visto ai punti precedenti, la soluzione generale della (1) è

$$y(t) := ae^{-2t} + be^{3t} - 2e^{-t} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

d) Sia $y(t)$ la soluzione generale trovata al punto precedente. La condizione che $y(t)$ tenda a 0 per $t \to +\infty$ implica necessariamente $b = 0$. A questo punto la condizione $y(0) = 0$ è verificata prendendo $a = 2$, e dunque la soluzione cercata è

$$y(t) := 2e^{-2t} - 2e^{-t} \ .$$

3. a) Indichiamo con A l'evento "l'esemplare è difettoso" e con B l'evento "l'esemplare proviene dallo stabilimento X". Sappiamo allora che $P(B) = 80\%$, $P(B^c) = 20\%$, $P(A|B) = 10\%$ e $P(A|B^c) = 5\%$, e ci viene chiesto di calcolare $P(B|A)$. Applicando la formula di Bayes otteniamo

$$P(B|A) = \frac{10\% \cdot 80\%}{10\% \cdot 80\% + 5\% \cdot 20\%} = \frac{8}{9} \simeq 88,9\% \ .$$

b) La probabilità che, presi 10 esemplari fabbricati nello stabilimento X, 3 siano difettosi è

$$P_X = \binom{10}{3}(10\%)^3(1 - 10\%)^7 \simeq 5{,}74\% \ ,$$

mentre se provengono dallo stabilimento Y è invece

$$P_Y = \binom{10}{3}(5\%)^3(1 - 5\%)^7 \simeq 1{,}05\% \ .$$

c) Procediamo come nel punto a) indicando con A' l'evento "la scatola contiene 3 esemplari difettosi" e con B' l'evento "la scatola proviene dallo stabilimento X". Come per il punto a) si ha $P(B') = 80\%$ e $P(B'^c) = 20\%$ e, per quanto visto al punto b), $P(A'|B') = P_X \simeq 5{,}74\%$ mentre $P(A'|B'^c) = P_Y \simeq 1{,}08\%$. Ci viene chiesto di calcolare $P(B'|A')$, e usando la formula di Bayes otteniamo

$$P(B'|A') \simeq \frac{5{,}74\% \cdot 80\%}{5{,}74\% \cdot 80\% + 1{,}08\% \cdot 20\%} \simeq 95{,}6\% \ .$$

4. a) La probabilità di estrarre una pallina rossa è pari a 10/30 e dunque per una nota formula sugli esperimenti ripetuti in modo indipendente la probabilità di estrarre solo palline rosse è

$$P_a = \left(\frac{20}{30}\right)^5 = \frac{32}{243} \simeq 13{,}2\% \ .$$

b) L'evento considerato qui è il complementare a quello considerato al punto precedente, e dunque

$$P_b = 1 - P_a = \frac{211}{243} \simeq 86{,}8\% \ .$$

c) La probabilità di estrarre una sola pallina bianca è pari a

$$P = \binom{5}{1}\left(\frac{10}{30}\right)^1\left(\frac{20}{30}\right)^4 = \frac{80}{243} \simeq 32{,}9\%$$

e quindi la probabilità cercata è

$$P_c = P_b - P = \frac{131}{243} \simeq 53{,}9\% \ .$$

d) La probabilità che esca una pallina rossa alla prima estrazione è 10/30, la probabilità (condizionale) che ne esca una rossa alla seconda sapendo che prima ne è uscita una rossa è 9/29, la probabilità che ne esca una rossa alla terza sapendo che prima ne sono uscite due rosse è 8/28, ecc. ecc. Pertanto la probabilità che ne escano 5 rosse è

$$P_d = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{18}{28} \cdot \frac{17}{27} \cdot \frac{16}{26} \simeq 10{,}9\% \ .$$

5. a) Detto Y il guadagno del signor A in una partita, abbiamo che Y assume il valore 5 con probabilità 1/4, corrispondente alla somma delle probabilità dei seguenti eventi incompatibili: "esce uno al primo lancio" (probabilità 1/6); e "esce quattro, cinque o sei al primo lancio e uno al secondo" (probabilità $3/6 \cdot 1/6$). Da questo segue anche che Y assume il valore -2 con probabilità $1 - 1/4 = 3/4$. Quindi

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot (-2) = -\frac{1}{4} \ .$$

b) In questo caso il gioco corrisponde ad estrarre un numero a caso compreso tra uno, due e tre (negli altri casi si ritira) e per ragioni di simmetria ciascun numero ha uguale probabilità. Quindi

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot (-2) = \frac{1}{6} \ .$$

c) Il numero di lanci fatti in una partita è una variabile aleatoria con legge geometrica di parametro $p = 1/2$ e quindi ha valore atteso $1/p = 2$.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Analogo al gruppo A.
a) La funzione $f(x) := e^{3x^2} - 2x^2$ decresce per $x \le 0$ e cresce per $x \ge 0$; quindi 0 è un punto di minimo assoluto ed il valore minimo è $f(0) = 1$, pertanto $e^{3x^2} - 2x^2 = f(x) \ge 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
b) Se $a \le 3$ allora la funzione $f(x) := e^{3x^2} - ax^2$ ha come punto di minimo assoluto 0, e come valore minimo $f(0) = 1$, e quindi $e^{3x^2} - ax^2 = f(x) \ge 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se invece $a > 3$ allora 0 è un punto di massimo locale stretto e la disequazione non può essere soddisfatta per tutti gli x. In conclusione i numeri a cercati sono quelli per cui $a \le 3$.

2. Analogo al gruppo A.
a) $y(t) := ae^{-3t} + be^{2t}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
b) $y = -e^{-t}$.
c) $y(t) := ae^{-3t} + be^{2t} - e^{-t}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
d) $y(t) := e^{-3t} - e^{-t}$.

3. Analogo al gruppo A; definiamo quindi gli eventi A, A', B, B' e le probabilità P_X, P_Y allo stesso modo.
a) $P(B|A) = \dfrac{10\% \cdot 60\%}{10\% \cdot 60\% + 5\% \cdot 40\%} = \dfrac{3}{4} = 75\%$.
b) $P_X \simeq 5{,}74\%$ e $P_Y \simeq 1{,}05\%$.

c) $P(B'|A') \simeq \dfrac{5{,}74\% \cdot 60\%}{5{,}74\% \cdot 60\% + 1{,}08\% \cdot 40\%} \simeq 89{,}1\%$.

4. Analogo al gruppo A.
   a) $P_a = \left(\dfrac{10}{30}\right)^5 = \dfrac{1}{243} \simeq 0{,}41\%$.
   b) $P_b = 1 - P_a = \dfrac{242}{243} \simeq 99{,}6\%$.
   c) $P_c = P_b - \dbinom{5}{1}\left(\dfrac{20}{30}\right)^1\left(\dfrac{10}{30}\right)^4 = \dfrac{232}{243} \simeq 95{,}5\%$.
   d) $P_d = \dfrac{10}{30} \cdot \dfrac{9}{29} \cdot \dfrac{8}{28} \cdot \dfrac{7}{27} \cdot \dfrac{6}{26} \simeq 0{,}18\%$.
5. Analogo al gruppo A; indichiamo con Y il guadagno del signor A.
   a) $\mathrm{E}(Y) = \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{1}{6}\right) \cdot 10 + \left(1 - \dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{1}{6}\right) \cdot (-3) = -\dfrac{1}{9}$.
   b) $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{1}{4} \cdot 10 + \dfrac{3}{4} \cdot (-3) = \dfrac{1}{4}$.
   c) Il numero medio di lanci per partita è 3/2.

Commenti

- Pare che molti non abbiano chiara la formula per la probabilità di avere k successi ripetendo n volte un esperimento con probabilità di successo p: ci sono stati infatti diversi (troppi!) errori sia nell'esercizio 5 della prima parte che negli esercizi 3 e 4 della seconda parte.
- Seconda parte, esercizio 1, punto b). Per far vedere che per $a > 2$ la disuguaglianza non è sempre verificata (mi riferisco al gruppo A, ma il discorso per il gruppo B è analogo) si può comunque studiare il segno della dervata di $f(x) = e^{2x^2} - ax^2$; così facendo si ottiene che per $a > 2$ i punti di minimo assoluto di $f(x)$ sono

  $$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{a}{2}}$$

  e in particolare 0 non è un punto di minimo assoluto, e quindi $f(0) = 1$ non può essere il valore minimo. Da questo segue che devono esistere degli x per cui $e^{2x^2} - ax^2 = f(x) < 1$. Volendo è anche possibile calcolare il valore minimo di $f(x)$: questo è uguale a $\frac{a}{2}(1 - \log\frac{a}{2})$, però non è semplice far vedere che è inferiore a 1.
- Seconda parte, esercizio 4. I punti b) e c) possono essere risolti anche calcolando, per ogni k compreso tra 1 e 5, la probabilità di ottenere k palline bianche, e poi sommando opportunamente queste probabilità.

Scritto del secondo appello, 10 giugno 2009

Prima parte

1. Deve essere $4 - z^2 > 0$, ovvero $-2 < x < 2$.
2. La media è 15, la mediana 16, la varianza 84,8.
3. a) $+\infty$; b) 0; c) 1/2.
4. $\displaystyle\int (1+2x)^3\,dx = \frac{1}{8}(1+2x)^4 + c$.
5. Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili ma anche lineare del primo ordine: $y(t) = ae^t - 1$ con $a \in \mathbb{R}$.
6. $N = 21^3 \cdot 9^4$.
7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Seconda parte

1. a) Il numero medio di computer per famiglia ̀datto dalla media pesata

$$m_c = 10\% \cdot 0 + 35\% \cdot 1 + 30\% \cdot 2 + 20\% \cdot 3 + 5\% \cdot 4 = \frac{7}{4} = 1{,}75\ .$$

b) Detto $N_f = 300$ il numero di famiglie, il numero di computer posseduto è

$$N_c = m_c \cdot N_f = \frac{7}{4} \cdot 300 = 525\ .$$

c) La probabilità che una famiglia estratta a caso abbia 2 computer (evento A) è $30\% = 3/10$ e la probabilità che una famiglia abbia almeno un computer (evento B) è $1 - 10\% = 9/10$. Quella che si cerca è la probabilità condizionata

$$P = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3/10}{9/10} = \frac{1}{3}\ .$$

d) Detto N_f il numero di famiglie su cui è stata fatta la statistica, quelle che posseggono almeno un computer sono $N'_f = (9/10) \cdot N_f$, mentre per quanto visto al punto b) il numero di computer posseduti in totale è $N_c = m_c \cdot N_f = (7/4) \cdot N_f$. Pertanto se si contano solo le famiglie che posseggono almeno un computer, il numero medio di computer per famiglia è

$$m'_c = \frac{N_c}{N'_f} = \frac{(7/4) \cdot N_f}{(9/10) \cdot N_f} = \frac{7/4}{9/10} = \frac{70}{46} \simeq 1{,}94\ .$$

2. a) L'equazione caratteristica associata all'omogenea è $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$, ed ha come soluzioni $\lambda = -2 \pm 2i$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_{\text{hom}}(t) = e^{-2t}(a\cos(2t) + b\sin(2t)) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

b) Utilizzando la solita ricetta, cerchiamo una soluzione particolare della forma $y = ce^{-t}$, e sostituendo nella (1) otteniamo $c = -1$.
c) Per quanto visto ai punti precedenti, la soluzione generale dell'equazione (1) è

$$y(t) = -e^{-t} + e^{-2t}(a\cos(2t) + b\sin(2t)) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

d) Utilizzando quest'ultima formula, le condizioni $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$ diventano rispettivamente $-1 + a = 0$ e $1 - 2a + 2b = 0$, da cui si ricava $a = 1$ e $b = 1/2$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(t) = -e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}(2\cos(2t) + \sin(2t)) \ .$$

3. a) La probabilità che esca un quattro in un'estrazione è $p(4) = 5/20 = 1/4$, e quindi la probabilità che non esca un quattro è $1 - p(4) = 3/4$. Pertanto la probabilità cercata è

$$P_a = (3/4)^5 \simeq 23{,}73\% \ .$$

b) La probabilità che esca un due in un'estrazione è $p(2) = 5/20 = 1/4$. Applicando la solita formula per gli eventi ripetuti otteniamo quindi che la probabilità cercata è

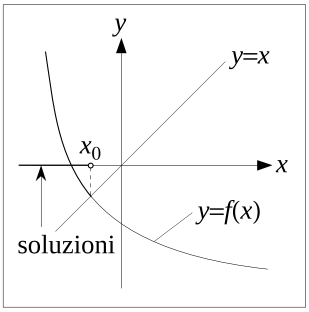
$$P_p = \binom{5}{3}(1/4)^3(1 - 1/4)^{5-3} = 90/4^5 \simeq 8{,}79\% \ .$$

c) La variabile aleatoria Y assume i valori 1, 2 e 4 con probabilità $p(1) = 1/2$, $p(2) = 1/4$ e $p(4) = 1/4$, rispettivamente. Quindi

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 4 = 2 \ , \\ &\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{4}\cdot 2^2 + \frac{1}{4}\cdot 4^2 - 2^2 = \frac{3}{2} \ . \end{aligned}$$

Prima parte

1. a) $e^{\text{rel}} = \dfrac{4\,\text{cm}}{2\,\text{m}} = 2\%$; b) $e^{\text{rel}} = \dfrac{300\,\text{mm}^3}{10\,\text{cm}^3} = 3\%$.
2. $m = 3 \cdot 20\% + 2 \cdot 50\% + 1 \cdot 30\% = 1{,}9$.
3. a) $1/2$; b) 0; c) $\log 2$.
4. $P = 1/21^2$.
5. Le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4 = 0$ sono $\lambda = \pm 2i$. Pertanto $y(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
6. Utilizzando il cambio di variabile $y = -2x$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^y\,dy = \frac{1}{2}\Big|\, e^y \,\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}.$
7. Le soluzioni sono indicate nella figura accanto.
8. Deve essere nullo il prodotto scalare di v e w, vale a dire $0 = (1, a, 3 + a^2) \cdot (3 - a, 2, 0) = 3 + a$, ovvero $a = -3$.



Seconda parte

1. a) I valori che può assumere la variabile aleatoria Y sono 1, 2 e 8, rispettivamente con probabilità 6/10, 3/10 e 1/10. Pertanto

$$\mathrm{E}(Y) = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10} = 2\ ,$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2 = 1^2 \cdot \frac{6}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 8^2 \cdot \frac{1}{10} - 2^2 = 4{,}2\ .$$

b) La variabile aleatoria Z è uguale alla somma di 5 variabili aleatorie *indipendenti* con la stessa distribuzione di Y, e quindi

$$\mathrm{E}(Z) = 5 \cdot \mathrm{E}(Y) = 10\ , \quad \mathrm{Var}(Z) = 5 \cdot \mathrm{Var}(Y) = 21\ .$$

c) Si vede subito che affinché Z sia maggiore di 35, il numero 8 deve venir estratto 5 volte (in particolare l'unico risultato superiore a 35 è proprio 40). Pertanto la probabilità cercata è

$$P = 1/10^5\ .$$

2. a) Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili:

$$(1+y)^{-2}\dot{y} = e^{-t} \;\longrightarrow\; \int (1+y)^{-2}dy = \int e^{-t}dt$$
$$\longrightarrow\; -(1+y)^{-1} = -e^{-t} + c \;\longrightarrow\; y = \frac{1}{e^{-t} - c} - 1\ .$$

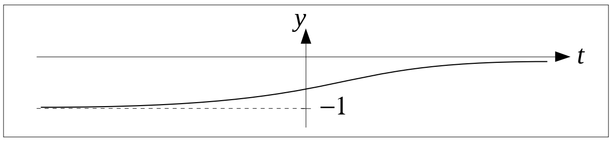
Imponendo la condizione $y(0) = -1/2$ si ottiene infine $c = -1$, ovvero

$$y = \frac{1}{e^{-t} + 1} - 1\ .$$

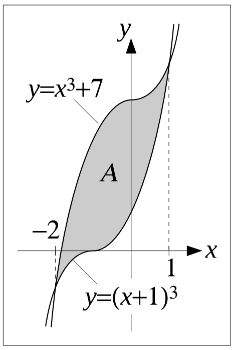
b) La funzione $y(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, inoltre studiandone il segno della derivata si vede subito che si tratta di una funzione crescente. Calcolandone quindi i limiti a $\pm\infty$ si ottiene infine

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0 \ , \quad \lim_{t\to-\infty} y(t) = -1 \ .$$

A partire da questi dati possiamo tracciare il disegno del grafico nella figura sottostante.



3. I grafici in questione si ottengono a partire da quello della funzione $y = x^3$ tramite una traslazione verso sinistra di 1 ed una traslazione verso l'alto di 7 rispettivamente.
L'insieme A è quello delimitato superiormente dal grafico di $y = 7+x^3$ ed inferiormente da quello di $y = (x+1)^3$. Risolvendo la disequazione $(x+1)^3 \leq 7 + x^3$, otteniamo $-2 \leq x \leq 1$, e dunque l'insieme A è limitato a destra dalla retta di equazione $x = 1$ e a sinistra dalla retta di equazione $x = -2$ (cfr. figura accanto). L'area di A è quindi data da



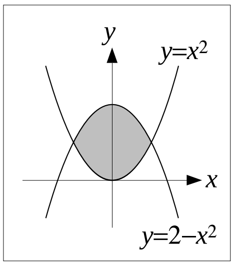
$$\begin{aligned}\text{Area}(A) &= \int_{-2}^{1} (7+x^3) - (x+1)^3 dx \\ &= \int_{-2}^{1} 6 - 3x - 3x^2 dx = \left|6x - \frac{3}{2}x^2 - x^3\right|_{-2}^{1} = \frac{27}{2} \ .\end{aligned}$$

Commenti

- Prima parte, esercizio 1. Molti hanno indicato il valore numerico dell'errore relativo (anche corretto) specificando un'unità di misura. Questo è un errore grave: l'errore relativo è un numero puro e non ha alcuna unità di misura (a differenza dell'errore assoluto).
- Seconda parte, esercizio 1. Praticamente nessuno ha osservato che Z è la somma di 5 variabili indipendenti con la stessa distribuzione di Y. Invece qualcuno ha scritto che $Z = 5 \cdot Y$, cosa che porta ad un valore non corretto della varianza di Z (affermare che $Z = 5 \cdot Y$ è un po' come dire che nelle 5 estrazioni o esce 5 volte il numero 1, o 5 volte il numero 2, o 5 volte il numero 8, e chiaramente non è così).

Prima parte

1. Deve essere $2 - e^x > 0$, e dunque $x < \log 2$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{2}\big[4x \log 2 - (x-1)\log 9\big] = \log(4/3)\, x + \log 3$ e quindi $f'(x) = \log(4/3)$.
3. Ponendo $y = -2x$ si ottiene $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{-\infty} e^y\, dy = \frac{1}{2}\bigg| e^y \bigg|_{-\infty}^{-2} = \frac{1}{2e^2}$.
4. Media e mediana: 31, varianza: 6.
5. $P = C_{5,3}(1/2)^3(1/2)^{5-3} = 5/16 = 0{,}3125$.
6. $y(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $N = D_{21,5} = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 2.441.880$.
8. Si tratta dell'area disegnata in grigio nella figura accanto.



Seconda parte

1. Se il lato del cubo è $\ell = 5\,\text{cm} \pm e$, allora la superfice totale è

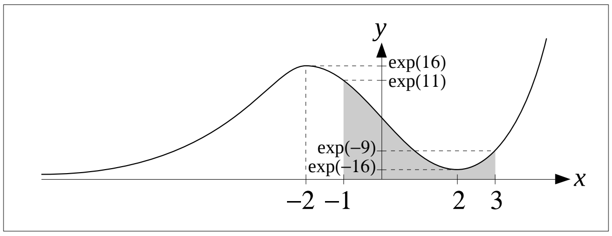
$$\begin{aligned} S = 6\,\ell^2 &= 6 \cdot (5\,\text{cm} \pm e) \cdot (5\,\text{cm} \pm e) \\ &= 6 \cdot (25\,\text{cm}^2 \pm 2e \cdot 5\,\text{cm}) = 150\,\text{cm}^2 \pm e \cdot 60\,\text{cm}\ . \end{aligned}$$

Quindi per far sì che $e \cdot 60\,\text{cm} \leq 3\,\text{cm}^2$ dobbiamo avere $e \leq 0{,}05\,\text{cm} = 0{,}5\,\text{mm}$.

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è sempre positiva, ed i limiti a $+\infty$ e $-\infty$ sono $f(+\infty) = +\infty$ e $f(-\infty) = 0$. Inoltre, studiando il segno della derivata

$$f'(x) = 3(x^2 - 4)\,\exp(x^3 - 12x)\ ,$$

si ottiene subito che $f(x)$ è crescente per $x \leq -2$ e $x \geq 2$, ed è decrescente per $-2 \leq x \leq 2$. Sulla base di queste informazioni si ottiene il grafico disegnato nella figura sottostante.



b) I punti in cui si annulla la derivata di $f(x)$ sono -2 e $+2$, e dallo studio del segno della derivata si vede che si tratta rispettivamente di un massimo locale e di un minimo locale. Inoltre $f(\pm 2) = e^{\mp 16}$ e confrontando questi valori con quelli di f a $\pm\infty$ si ottiene che il valore minimo (o meglio l'estremo inferiore) di f è 0 e viene raggiunto quando x tende a $-\infty$, mentre il valore massimo è $+\infty$ e viene raggiunto quando x tende a $+\infty$. In particolare ± 2 non sono punti né di massimo né di minimo assoluto.

c) Confrontando i valori di f in -1, 2 e 3 (gli estremi dell'intervallo ed il punto interno in cui si annulla la derivata) si ottiene che il valore massimo di f relativamente all'intervallo in questione è e^{11} e viene raggiunto in $x = -1$, mentre il valore minimo è e^{-16} e viene raggiunto in $x = 2$.

3. a) Detto A l'evento "viene scelta la prima scatola" e B l'evento "viene estratta una pallina nera", dobbiamo calcolare $P(A|B)$. Sappiamo che $P(A) = P(A^c) = 1/2$ (in mancanza di informazioni più precise supponiamo che le due scatole abbiano la stessa probabilità di venir scelte) e $P(B|A) = 1/2$, $P(B|A^c) = 1/4$, e quindi la formula di Bayes ci da

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} = \frac{(1/2) \cdot (1/2)}{(1/2) \cdot (1/2) + (1/4) \cdot (1/2)} = \frac{2}{3} \ .$$

b) Si procede come nel caso precedente, con la differenza che B è ora l'evento "vengono estratte due palline nere". In questo caso abbiamo quindi che $P(B|A) = (1/2) \cdot (3/7) = 3/14$ e $P(B|A^c) = (1/4) \cdot (3/15) = 3/60$. Quindi

$$P(A|B) = \frac{(3/14) \cdot (1/2)}{(3/14) \cdot (1/2) + (3/60) \cdot (1/2)} = \frac{30}{37} \ .$$

Scritto del quinto appello, 18 gennaio 2010

Prima parte

1. $\left[\log\left(\sqrt{\frac{x^5}{4^x}}\right)\right]' = \left[\frac{5}{2}\log x - \log 2 \cdot x\right]' = \frac{5}{2x} - \log 2.$
2. Il numero medio di tentativi è $m = 1 \cdot 65\% + 2 \cdot 20\% + 3 \cdot 5\% + 4 \cdot 10\% = 1{,}6$. La mediana è uguale a 1 (cioè la classe mediana è quella delle persone a cui è bastato un solo tentativo).
3. a) $1{,}6 \cdot 10^{-2} = 1{,}6\%$; b) $3 \cdot 10^{-2} = 3\%$; c) $4 \cdot 10^{-4} = 0{,}04\%$.
4. Si integra per parti: $\int x \cdot e^{2x}\, dx = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\, dx = \frac{1}{4}(2x-1)\, e^{2x}$.
5. Il punto di minimo è $x = 1$, il valore minimo è $1/e$.
6. $\mathrm{E}(2Y-4) = 2 \cdot \mathrm{E}(Y) - 4 = 2$; $\mathrm{Var}(2Y-4) = 2^2 \cdot \mathrm{Var}(Y) = 8$.
7. $N = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 143\,640$.
8. Si tratta del grafico della funzione $y = x^3$ traslato verso sinistra di 1.

Seconda parte

1. a) Si tratta semplicemente di applicare formule note (i risultati sono approssimati a due cifre decimali): $\mathrm{media}(x_i) = 1{,}80$; $\mathrm{var}(x_i) = 6{,}56$; $\mathrm{media}(y_i) = 2{,}48$; $\mathrm{var}(y_i) = 2{,}53$; $\mathrm{cov}(x_i; y_i) = -3{,}66$; $\mathrm{corr}(x_i; y_i) = -0{,}90$.
   b) $y = \frac{\mathrm{cov}(x_i; y_i)}{\mathrm{var}(x_i)}(x - \mathrm{media}(x_i)) + \mathrm{media}(y_i) = -0{,}56 \cdot x + 3{,}48$.
2. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0$ è $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ ed ha come soluzioni $\lambda = -1 \pm i$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è
$$y_{\mathrm{om}}(t) := e^{-t}(a\cos t + b\sin t) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$
   Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma $y = ce^{-t}$, trovando che la costante giusta è $c = 1$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione originale è
$$y(t) := e^{-t}(1 + a\cos t + b\sin t) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$
   Imponendo le condizioni iniziali otteniamo che i coefficienti a, b soddisfano $0 = y(0) = 1 + a$ e $0 = \dot{y}(0) = -1 - a + b$, e quindi $a = -1$ e $b = 0$. Pertanto la soluzione cercata è
$$y(t) := e^{-t}(1 - \cos t)\ .$$
3. a) La probabilità che non venga fatto alcun errore è $P_a = (0{,}95)^{10} = 0{,}6 \pm 2 \cdot 10^{-3} \simeq 60\%$.
   b) Dobbiamo calcolare la probabilità che vi siano al più due errori:
$$P_b = (0{,}95)^{10} + \binom{10}{1}(0{,}95)^9(0{,}05)^1 + \binom{10}{2}(0{,}95)^8(0{,}05)^2 = 0{,}99 \pm 2 \cdot 10^{-3} \simeq 99\%\ .$$

Scritto del sesto appello, 10 febbraio 2010

Prima parte

1. Deve essere $x^2 - 3e^2 \geq e^2$, ovvero $x \geq 2e$ oppure $x \leq -2e$.
2. 10%.
3. a) $+\infty$; b) $\frac{1}{2}$; c) 0 .
4. L'equazione caratteristica $\lambda^2+4\lambda+5 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = -2\pm i$, e quindi la soluzione generale dell'equazione è $y(t) = e^{-2t}(a\cos t + b\sin t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
5. $N = 21^2 \cdot 9^5 \simeq 2{,}6 \cdot 10^7$.
6. $P = (5/6)^5 \simeq 40{,}2\%$.
7. Il prodotto scalare è $(-3, 1, 1, -1) \cdot (-1, 0, 2, -1) = 6$. L'angolo α soddisfa
$$\cos\alpha = \frac{(-3, 1, 1, -1) \cdot (-1, 0, 2, -1)}{|(-3, 1, 1, -1)| \cdot |(-1, 0, 2, -1)|} = \frac{6}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
e quindi $\alpha = \pi/4$.
8. Si tratta del grafico di $\sqrt{x}$ traslato verso destra di 1.

Seconda parte

1. Indichiamo con x la base del triangolo. Sappiamo allora che l'altezza è pari a $1 - x$, e quindi
$$\text{Area} = \frac{1}{2}x(1 - x) .$$
Si tratta di trovare quindi i punti di massimo e minimo per questa funzione limitatamente all'intervallo $0 \leq x \leq 1$ (si ricordi che sia la base che l'altezza devono essere positive). Esaminando i punti in cui si annulla la derivata e confrontandoli con gli estremi si ottiene che il punto di massimo si ha per $x = 1/2$ (corrispondente al valore 1/8) ed il minimo per $x = 0, 1$ (corrispondenti al valore 0, si tratta in effetti di triangoli degeneri di base o altezza nulla)
2. a) Siccome l'errore assoluto delle misurazioni è pari a 0,2 m, si ha che
$$\begin{aligned}\text{Area} &= \big[(12{,}5 \pm 0{,}2) \cdot (20 \pm 0{,}2) + 2 \cdot (20 \pm 0{,}2) \cdot (4{,}8 \pm 0{,}2)\big]\,\mathrm{m}^2\\ &= (250 \pm 6{,}5 + 192 \pm 9,92)\,\mathrm{m}^2 = (442 \pm 16{,}42)\,\mathrm{m}^2 = (440 \pm 20)\,\mathrm{m}^2 .\end{aligned}$$
b) La superficie imbiancabile con un litro di vernice è pari a $(2{,}25 \pm 0{,}25)\,\mathrm{m}^2$, e quindi il numero di litri usati nella tinteggiatura sarà
$$\begin{aligned}N &= \frac{(442 \pm 16{,}42)\,\mathrm{m}^2}{(2{,}25 \pm 0{,}25)\,\mathrm{m}^2} = \frac{442\,(1 \pm 3{,}71\%)}{2{,}25\,(1 \pm 11{,}11\%)}\\ &= 196{,}44\,(1 \pm 14{,}83\%) = 196{,}44 \pm 29{,}12 = 196 \pm 30\end{aligned}$$
(per calcolare l'errore del rapporto ci siamo ricondotti alla formula per l'errore relativo, anche se questo non è strettamente necessario).
c) Per quanto visto al punto precedente, per essere sicuri di finire il lavoro bisogna avere a disposizione $196{,}44+29{,}12 \simeq 226$ litri di vernice, e quindi se ne devono acquistare 23 bidoni.

3. Indichiamo con A l'evento "il signor K ha il gene della malattia" e con B l'evento "all'età di quarant'anni il signor K non è ammalato". Sappiamo quindi che $P(A) = 50\%$ e che $P(B^c|A) = 30\%$, e vogliamo calcolare $P(A|B)$. Applichiamo quindi la formula di Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} \ .$$

Osserviamo ora che $P(A^c) = 50\%$, $P(B|A) = 1 - P(B^c|A) = 70\%$, e infine $P(B|A^c) = 1$ (se uno non ha il gene problematico non può ammalarsi), e quindi la formula precedente diventa

$$P(A|B) = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}5}{0{,}7 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5} = \frac{7}{17} \simeq 41\% \ .$$