

APV2
2012-13

Lezione 6
16/10/12, h. 11-13

①

SERIE DI FOURIER

(7)

Scopo del gioco: data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
di periodo 2π , vogliamo scriverla come

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

→ E perché questo sia utile lo vedremo in seguito.

→ Nota: cosa vuol dire $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$?

Domande

- 1) E' possibile fare?
e se sì, come determinare i coefficienti c_n ?
- 2) La serie converge davvero a f ?
e in che senso converge?

La risposta alla domanda 1) diventa immediata quando si osserva che

$$\left(e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

è una base di Hilbert di $L^2(-\pi, \pi) = L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$

(la verifica la rimandiamo a dopo).

↑
Intendiamo
lo spazio
complesso

Infatti usando questo fatto si ottiene che

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle \cdot e_n$$

e quindi

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

con $c_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, e^{inx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$

Per la precisione usando il teorema fondamentale della teoria degli spazi di Hilbert otteniamo

Teorema $L^2([-\pi, \pi]) = L^2((-\pi, \pi)) = L^2_{\mathbb{C}} \dots$

Dato $f \in L^2(-\pi, \pi)$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si indica con

$$c_n = c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

le coeff. di Fourier n -esimo di f .

Allora

o $2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \|f\|_2^2$

o $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ converge a $f(x)$ in $L^2(-\pi, \pi)$
Serie di Fourier di f

o per ogni $f_1, f_2 \in L^2(-\pi, \pi)$ si ha

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^1 \overline{c_n^2}$$

coeff. di F. di f_2
coeff. di F. di f_1

9

Per dimostrare il teorema dobbiamo solo verificare che $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una base di Hilbert (complessa) di $L^2(-\pi, \pi)$.

ORTONORMALITÀ

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \overline{\left(\frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1 & \text{se } n=m \\ \frac{1}{2\pi} \left| \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

La verifica del fatto che $\text{Span}\{e_n\}$ è denso in $L^2(-\pi, \pi)$

perché e^{ikx} è 2π -periodica per ogni $k \neq 0$ intero.

La facciamo attraverso il teorema di Stone-Weierstrass.

Questo richiede un pó di terminologia.

- 1) Sia K uno spazio metrico compatto (o anche uno spazio topologico compatto e separato / di Hausdorff / T_2).

Indica con $E(K)$ (resp. $E_{\mathbb{C}}(K)$) lo spazio delle funzioni continue su K a valori in \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) dotato della norma del sup.

2) Dato $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}(K)$ ($\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(K)$) dico che

- \mathcal{F} è una sottoalgebra se è un sottospazio vettoriale chiuso rispetto al prodotto di funzioni;
- \mathcal{F} separa i punti se $\forall x_1, x_2 \in K$ esiste $f \in \mathcal{F}$ t.c. $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- \mathcal{F} contiene le costanti se contiene le funzioni costanti (a valori in \mathbb{R} risp. \mathbb{C}).

Teorema di Stone-Weierstrass (versione REALE)

Sia \mathcal{F} una sottoalgebra di $\mathcal{E}(K)$ che separa i punti e contiene le costanti.
Allora \mathcal{F} è densa in $\mathcal{E}(K)$.

(Versione Complessa)

Sia \mathcal{F} una sottoalgebra di $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(K)$ che separa i punti, contiene le costanti ed è chiusa per coniugio ($f \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{F}$).
Allora \mathcal{F} è densa in $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(K)$.

La dimostrazione di questo teorema la metto sugli appunti Ma non farà parte del programma d'esame se non in maniera volontaria.

Concludiamo la verifica del fatto che $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una base di Hilbert usando il teorema di S.-W. per far vedere che $\text{Span}\{e_n\}$ è denso in $L^2(-\pi, \pi)$.

Sia $K := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$ $E_{\text{per}}([-\pi, \pi])$

Allora

$$E_{\mathbb{C}}(K) \cong \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua e } 2\pi\text{-per.}\} \cong \{f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua t.c. } f(-\pi) = f(\pi)\}.$$

Sia $\mathcal{F} = \overline{\text{Span}\{e_n\}} = \{ \text{comb. lineari finite di } e^{inx} = (e^{ix})^n \}$
(“polinomi” in e^{ix} , detti anche “polinomi trigonometrici”).

Allora

- \mathcal{F} è una sottoalgebra di $E_{\mathbb{C}}(K)$ ($\Leftarrow e^{inx} \cdot e^{iux} = e^{i(n+u)x}$)
- \mathcal{F} separa i punti (e^{ix} è iniettiva)
- \mathcal{F} è chiuso per coniugio ($\Leftarrow \overline{e^{inx}} = e^{-inx}$)
- \mathcal{F} contiene le costanti.

Pertanto \mathcal{F} è denso in $E_{\mathbb{C}}(K)$ rispetto alla norma del sup.



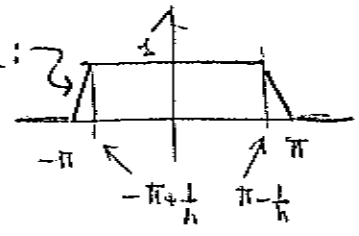
\mathcal{F} è denso in $E_{\text{per}}([-\pi, \pi])$ rispetto alla norma L^2 .

[Lemma $\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_{\infty}$ e quindi $f_n \rightarrow f$ in L^{∞}]
implica $f_n \rightarrow f$ in L^2



\mathcal{F} è denso in $\mathcal{E}([-π, π])$ rispetto alla norma L^2 .

[uso il fatto che \mathcal{E}_{per} è denso in \mathcal{E} , rispetto alla norma L^2 : data $f: [-π, π] \rightarrow \mathbb{C}$ la approssimo con $f_n = f \cdot G_n$ dove



\mathcal{F} è denso in $L^2(-π, π)$.

[uso il fatto, già visto, che $\mathcal{E}([-π, π])$ è denso in $L^2(-π, π)$]

OSSERVAZIONE

$\mathcal{E}_{per}([-π, π])$ non è denso in $\mathcal{E}([-π, π])$ rispetto alla norma del sup. (infatti è chiuso e strettamente contenuto in \mathcal{E} ...)

La volta scorsa abbiamo dimostrato che una funzione $f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$ si scrive

come
$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

dove $c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ e la serie

converge in senso L^2 . L'unica cosa che sappiamo sul comportamento asintotico dei coefficienti è che $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$.

Oggi vogliamo stabilire un collegamento tra il comportamento asintotico dei coefficienti e la regolarità di f , e far vedere che sotto certe ipotesi la serie di f converge meglio che semplicemente in L^2 .

Definizione

$$\mathcal{E}_{\text{per}}^k := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ t.c. } f \in \mathcal{E}^k \text{ e } 2\pi\text{-per.}\}.$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

(2)

Lemma 1 Se $f \in E_{\text{per}}^1$ allora

$$c_n(f') = in c_n(f) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Attenzione: è essenziale che $f \in E_{\text{per}}^1$ e non semplicemente a E^1 — esempio $f(x) = x$.

Dim. È un conto — per ricordare la formula potete derivare (formalmente) l'identità $f(x) = \sum c_n e^{inx}$.

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{f(x) e^{-inx}}{0} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-in) e^{-inx} dx$$

$$= in \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = in c_n(f). \quad \square$$

[In effetti basta che $f \in E^1(-\pi, \pi)$ con $f(-\pi) = f(\pi)$,
cioè $f \in E_{\text{per}} \cap E^1(-\pi, \pi)$.]

Lemma 2 Per f come sopra si ha

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < +\infty$$

Dim. OVIA

Lemma 3 Se $\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{2a} |c_n|^2 < +\infty$ con $a > \frac{1}{2}$ allora

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < +\infty.$$



MEGLIO ENUNCIARLO COME
LEMMA SULLE SUCCESSIONI

Dimostrazione

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|^a} (|c_n| n^a)$$

di sug. di Schwartz in e^2 $\rightarrow \leq \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|^{2a}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{2a} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$

\uparrow finito se $a > \frac{1}{2}$ \uparrow finito per ipotesi.

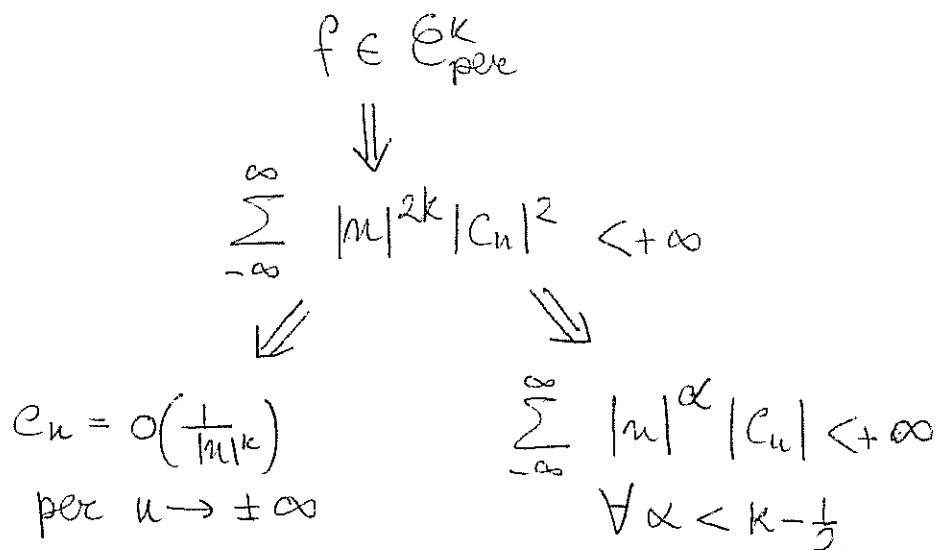
□

Corollario Data f come nel Lemma 1, allora la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ converge a $f(x)$ totalmente (\Rightarrow uniformemente \Rightarrow in ogni punto).

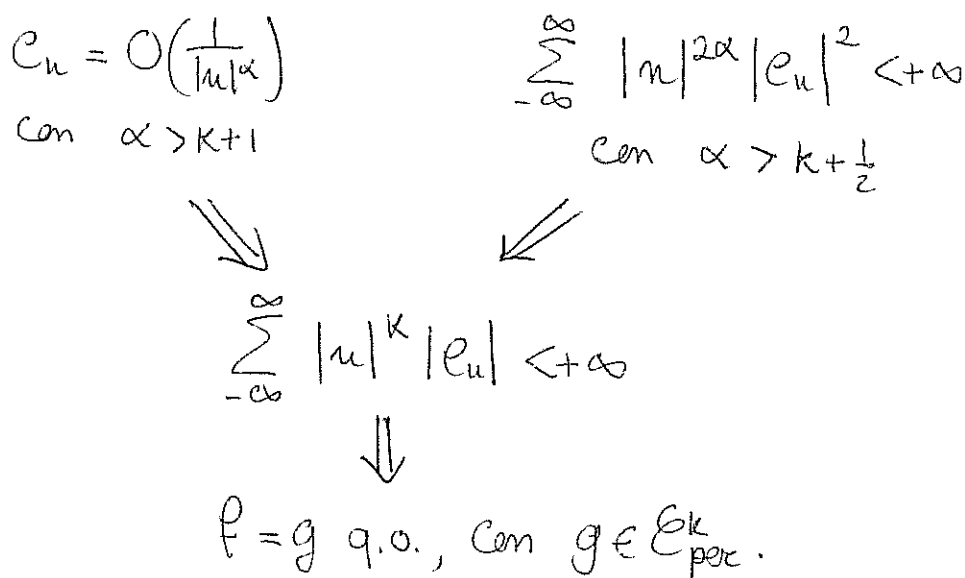
Dimostrazione OVVIA: Per il Lemma 2 si ha $\sum n^2 |c_n|^2 < +\infty$, per il Lemma 3 si ha $\sum |c_n| < +\infty$, e $|c_n| = \|c_n e^{inx}\|_{\infty}$.

Estendiamo ora quanto fatto a funzioni più regolari che E^1 .

Teorema Sia $k=0, 1, 2, \dots$ Allora



Viceversa



Notare che nessuna di queste implicazioni è sharp, e infatti c'è un gap tra quello che $f \in E_{\text{per}}^k$ implica in termini di comportamento asintotico di c_n , e quello che viene richiesto su c_n per avere che f sia E_{per}^k .

Dimostrazione

5

$$f \in \mathcal{E}_{\text{per}}^k \Rightarrow \underset{\substack{\text{(Lemma 1)} \\ L^2(-\pi, \pi)}}{D^k f} \in \mathcal{E}_{\text{per}} \text{ e } c_n(D^k f) = (in)^k \underset{\parallel}{c_n(f)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow +\infty > \|D^k f\|_2^2 &= 2\pi \sum |c_n(D^k f)|^2 \\ &= 2\pi \sum |n|^{2k} |c_n|^2 \end{aligned}$$

Da questo segue che

a) $|n|^{2k} |c_n|^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow |n|^k |c_n| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |c_n| = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$
in quanto elementi
di una serie con
somma finita

b) $\sum |n|^\alpha |c_n| < +\infty$ per $\alpha < k - \frac{1}{2}$.

In fatti

$$+\infty > \sum |n|^{2k} |c_n|^2 = \sum |n|^{\overbrace{2(k-\alpha)}^a} (|n|^\alpha |c_n|)^2$$

\Downarrow applico il Lemma 3 con $a := k - \alpha$
e $|n|^k |c_n|$ al posto di $|c_n|$

$$\sum |n|^k |c_n| < +\infty$$

Passiamo al viceversa.

Si vede facilmente che $c_n = o\left(\frac{1}{|n|^\alpha}\right)$ con $\alpha > k+1$
moltiplica che $|n|^k |c_n| = o\left(\frac{1}{|n|^\beta}\right)$ con $\beta > 1$ e
quindi $\sum |n|^k |c_n| < +\infty$.

Usando sempre il Lemma 3 si ottiene (6)
inoltre che anche $\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{2\alpha} |c_n|^2 < +\infty$ con $\alpha > k + \frac{1}{2}$

implica $\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^k |c_n| < +\infty$.

In fine osserviamo che se

$$\begin{aligned} \|c_n e^{inx}\|_{\mathcal{E}^k} &:= \sum_{h=0}^k \|D^h(c_n e^{inx})\|_{\infty} \\ &= \sum_{k=0}^k |c_n| |n|^k \\ &= \frac{|n|^{k+1} |c_n|}{|n|-1} \leq (k+1) |n|^k |c_n| \end{aligned}$$

e quindi $\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^k |c_n| < +\infty$ implica che

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \|c_n e^{inx}\|_{\mathcal{E}^k} < +\infty$$

e quindi la serie $\sum c_n e^{inx}$ converge totalmente
(con tutte le derivate di ordine $\leq k$) ad
una funzione g in $\mathcal{E}^k_{\text{loc}}$.

D'altra parte $\sum c_n e^{inx}$ converge in L^2 e quindi
in misura a f .

Ne segue che $f = g$ q.o. □

Spiegare bene : Norma di E_{poe}^k
e convergenza in questo spazio delle serie...

Spiegare bene perché $f = g$ q.o.

NOTA Il fatto che il rapido decaimento di C_n a zero implica che f è molto regolare significa che se f è irregolare (e.g. ammette punti di discontinuità) allora C_n tende a 0 lentamente. In particolare le somme parziali della serie di F di L convergono a f lentamente. Quindi queste somme parziali non sono una buona approx. di f .

This is bad news se uno vuole usare la serie di F come base di un sistema di compressione...

(8)

Commenti sulla convergenza della serie di Fourier.

1) Se $f \in L^2(-\pi, \pi)$ sappiamo che le somme parziali S_m della serie di F. di f convergono a f in L^2 .

$$\sum_{-m}^m c_n e^{inx}$$

Questo implica che $S_m \rightarrow f$ in misura, ma non necessariamente q.o.

In effetti si ha che $S_m \rightarrow f$ q.o., ma questo è un teorema tutt'altro che semplice (debita a Lemnart Carleson, 1956).

2) Abbiamo visto che $f \in C^1([- \pi, \pi])$ & $f(-\pi) = f(\pi)$
 $\Rightarrow S_m \rightarrow f$ uniformemente.

In effetti lo stesso vale sotto ipotesi più deboli:

a) $f \in C(-\pi, \pi)$ & $f(-\pi) = f(\pi)$ & $f \in C^{\frac{1}{2}}$ -a tratto

b) $f \in C(-\pi, \pi)$ & $f(-\pi) = f(\pi)$
& f α -Hölderiana con $\alpha > \frac{1}{2}$

(cioè esiste C t.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in [-\pi, \pi].$$

↑
Spiegare bene
la definizione

9

La dimostrazione di a) è una semplice modifica della dimostrazione data sopra. Il punto chiave è far vedere che la formula di integrazione per parti vale anche per le funzioni E^1 a tratti e continue.

La dimostrazione di b) verrà indicata come traccia negli esercizi.

3) [Si noti che assumere $f \in E_{\text{per}}$ NON è sufficiente ad avere che $S_n \rightarrow f$ unif. L'esempio NON è semplice ...]

4) Cosa si può dire sulla convergenza puntuale di S_n a f ?

Sia f una funzione E^1 a tratti ^{e 2π -periodica} non necessariamente continua (spiegare bene la definizione). Allora

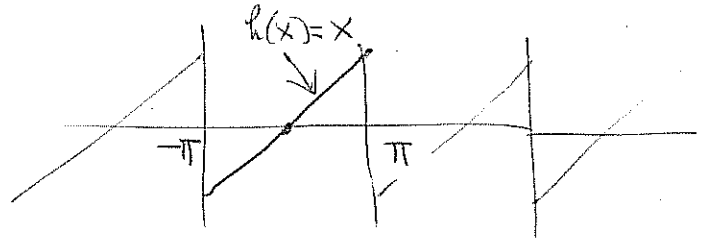
$$(*) \quad S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ è cont. in } x \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(spiegare bene cosa si intende per punti di discontinuità...)

Traccia della dimostrazione

10

Sia $h(x) :=$



passo 1

Scriviamo f come

$$f = \tilde{f} + \left[\begin{array}{l} \text{comb. lin. finita di} \\ \text{traslate di } h \end{array} \right]$$

con $\tilde{f} \in C^1$ a tratti e continua.

passo 2

La serie di F. di \tilde{f} converge a f unif.
(già "visto").

passo 3

La serie di F. di $h(x)$ e delle sue
traslate converge a $h(x)$ nel senso (*)
(pagina precedente)

passo 4

Mettere insieme i passi precedenti per
concludere.

APV 2
2012-13

Lezione 8
26/10/12 h. 16-18

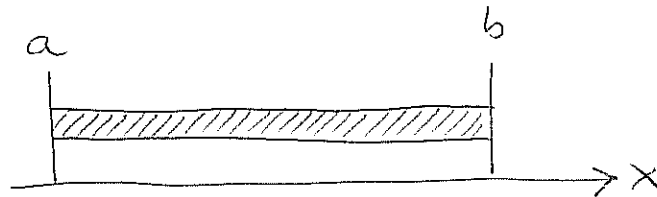
1

Applicazioni della serie di Fourier

I

Risoluzione dell'equazione del calore

Derivazione dell'equazione del calore da principi fisici elementari.



Stavva sottile di sezione A di materiale
Conduttore omogeneo.

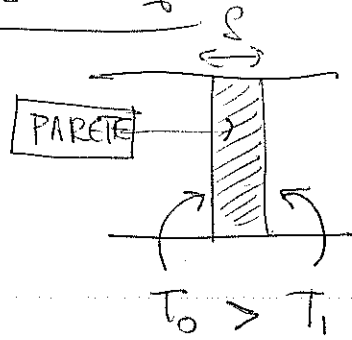
Indichiamo con $u(t, x)$ la TEMPERATURA
nel punto x ($x \in [a, b]$) e al tempo t .

Se la distribuzione di temperatura al tempo
 $t=0$, cioè $u(0, \cdot)$ non è costante,
allora u varia nel tempo.

Secondo quale equazione?

LEGGE FISICA 4

(2)



La quantità di energia termica che passa attraverso la parete (da sin. verso destra, e per unità di tempo e di superficie)

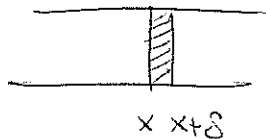
è INVERSA. PROP. A s

e DIRETT. PROPORZ. A $T_0 - T_1$

Cioè
$$\Delta E = c_1 \frac{T_0 - T_1}{s} \cdot \Delta t \cdot A$$

↑
costante fisica del materiale
(conduttività termica)

Nella barretta, prendendo come parete la sezione $[x, x+s] \times A$



Si ha che

$T_0 = u(t, x)$, $T_1 = u(t, x+s)$ e quindi, passando al limite per $s \rightarrow 0$;

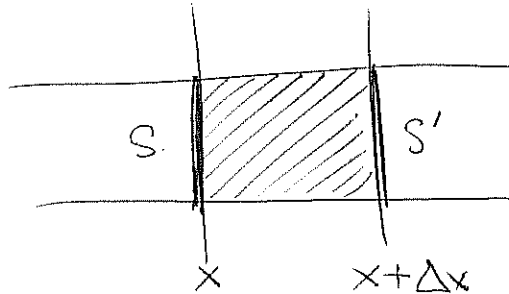
La quantità di energia termica che attraversa la sezione ad altezza x è

$$\Delta E = -c_1 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta t \cdot A$$

Si suppone che non ci sia movimento di energia attraverso la superficie esterna della barretta!!

Legge Fisica 2

" L'incremento di temperatura (in un corpo formato da un materiale omogeneo) è proporzionale all'energia termica immessa e inversamente proporzionale al volume, "



Cioè $u(t + \Delta t, x) - u(t, x) = c_2 \frac{\Delta E}{\text{Vol} = \Delta x \cdot A}$

Quindi Costante fisica: capacità termica del materiale energia che entra da S

$$u(t + \Delta t, x) - u(t, x) = \frac{c_2}{\Delta x \cdot A} \left[-c_1 \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \cdot \Delta t \cdot A \right.$$

Quindi $\left. + c_1 \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) \cdot \Delta t \cdot A \right]$

$\frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t}$ energia che esce da S'

$$= c_1 c_2 \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)}{\Delta x}$$

Ovvero

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_1 c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_t = c_1 c_2 u_{xx}$$

Costante fisica del materiale

IN DIMENSIONE SUPERIORE:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_1 c_2 \Delta u$$

Risoluzione Formale

(4)

Vogliamo trovare u su $[0, T) \times [-\pi, \pi]$ t.c.

$$(P) \begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{equazione del calore} \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) & \leftarrow \text{dato iniziale al tempo } 0 \\ & \text{assegnato} \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} u_t = u_{xx} \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \end{matrix}} \right\} \text{condizioni al bordo}$$

Significato

$u(0, \cdot) = u_0(x)$ assegniamo la temperatura al tempo 0 (cond. iniz.)

Le condizioni al bordo corrispondono alla situazione fisica in cui invece di una barretta con estremi liberi, stiamo considerando un anello perfetto.

Sinonimi che per via dell'eq. si ha anche che $u_{xx}(\cdot, -\pi) = u_{xx}(\cdot, \pi)$ e lo stesso per tutte le derivate in x di ordine superiore.

Considerando una barretta libera bisogna introdurre altre condizioni al bordo: esempio $u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) = c$ (temperatura assegnata) oppure $u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) = c$ (flusso di energia assegnato):

Risolve (P) "formalmente", scrivendo
u nella forma

5

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{inx}$$

↑
serie di Fourier di
 $u(t, \cdot)$

Allora

$$u_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{c}_n e^{inx}$$

$$u_{xx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (e^{inx})'' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 c_n e^{inx}$$

coeff di
F. di u_0
↓

Quindi $u_t = u_{xx}$ diventa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \boxed{\dot{c}_n} e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boxed{-n^2 c_n} e^{inx}$$

Se $u_0 = \sum c_n^0 e^{inx}$

$u(t, \cdot) = u_0(\cdot)$
diventa

$$c_n(0) = c_n^0 \quad \forall n$$

che è soddisfatta se (e solo se?)

$$\dot{c}_n = -n^2 c_n \quad \forall n$$

dunque $c_n(t)$ risolve $\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases}$ ovvero

$$\underline{c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}}$$

ovvero

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx} \quad (*)$$

Tutto ciò è formale, ma possiamo renderlo vigoroso.

(6)

Teorema (esistenza)

Se u_0 è un dato iniziale t.c. $\sum |c_n^0| < +\infty$
(e.g. $u_0 \in \mathcal{E}_{\text{per}}^1$) allora la formula

$$u(t, x) := \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx} \quad (*)$$

definisce una funzione $u: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
tale che

(i) u è continua e 2π -per. in x
(in particolare soddisfa le condizioni
al fondo di (P))

(ii) u è \mathcal{E}^{∞} su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ (cioè
per $t > 0$)

(iii) $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$

(iv) $u_t = u_{xx}$ (per $t > 0$).

(v) se u_0 è reale u è reale!

↓
Quindi u
risolve
(P)

Verifica/Dimostrazione

(i) la 2π -periodicità è ovvia. Per la
continuità basta dimostrare che la
serie (*) converge totalmente su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

È infatti $\sum_{-\infty}^{\infty} \|c_u^0 e^{-u^2 t} e^{iux}\|_{\infty}$

(7)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_u^0| < +\infty \text{ per ipotesi.}$$

(ii) Facciamo vedere che $f \in \mathcal{E}^k$ su $[s, +\infty) \times \mathbb{R}$ per ogni $k=1, 2, \dots$ e ogni $s > 0$.

Ci basta far vedere che la serie delle derivate parziali di qualsunque ordine converge totalmente su $[s, +\infty) \times \mathbb{R}$ per ogni $s > 0$.

$$\begin{aligned} \partial_t^h \partial_x^k (c_u^0 e^{-u^2 t} e^{iux}) &= \\ &= c_u^0 (-u^2)^h (iu)^k e^{-u^2 t} e^{iux} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ \sum_{-\infty}^{\infty} \| \partial_t^h \partial_x^k c_u^0 e^{-u^2 t} e^{iux} \| & \in \underline{\underline{L^{\infty}(t \geq s)}} \\ &\| \sum_{-\infty}^{\infty} |c_u^0| e^{-u^2 s} |u|^{2h+k} < +\infty \end{aligned}$$

perché c_u^0 è limitata (è anzi infinitesima) e

quindi

$$|c_u^0| |u|^{2h+k} e^{-u^2 s} = o\left(e^{-\frac{u^2 s}{2}}\right)$$

etc. etc.

(iii) Immediato.

(iv) Siccome le serie delle derivate parziali convergono totalmente, possiamo scambiare liberamente somme e derivate parziali: di qualunque ordine

$$\begin{aligned}
\partial_t u &= \partial_t \left(\sum_{-\infty}^{\infty} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx} \right) \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \partial_t (c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}) \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^0 (-n^2) e^{-n^2 t} e^{inx} \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 (c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}) \\
&= \partial_x^2 \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \dots \right) = \partial_x^2 u.
\end{aligned}$$

(v) \bar{u} è un auto ...

Teorema (Unicità/Caratt. dei coeff. di F.)

Sia u_0 una funzione in E_{per} e sia $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione \mathcal{E}^2 che risolve (P).

Allora u è unica. Per la presenza i coeff. di F. $c_n(t)$ di u sono univocamente

determinati dal fatto che risolvono

(9)

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases}$$

Dimostrazione Sia $c_n(t) := c_n(u(t, \cdot))$

$$\begin{aligned} c_n(u_t(t, \cdot)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t(t, x) e^{-in x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \partial_t \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-in x} dx \right) = \frac{1}{2\pi} \dot{c}_n(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n(u_{xx}(t, \cdot)) &= in c_n(u_x(t, \cdot)) \\ &\nearrow = (in)^2 c_n(u(t, \cdot)) = -n^2 c_n(t) \end{aligned}$$

uso due volte il lemma fatto la volta scorsa

Se $u_t = u_{xx}$ allora $c_n(u_t(t, \cdot)) = c_n(u_{xx}(t, \cdot)) \forall n, \forall t$

$$\text{cioè} \quad \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \quad \forall n, \forall t$$

Inoltre $u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \Rightarrow c_n(u(0, \cdot)) = c_n(u_0(\cdot)) = c_n^0$
 \parallel
 $c_n(0)$

Osservazioni

- 1) Il teorema di unicità vale sotto ipotesi meno forti: basta per esempio che u sia continua su $[0, T] \times [-\pi, \pi]$, \mathcal{E}^2 su $(0, T) \times [-\pi, \pi]$

In questo caso si ottiene $C_u(t)$ continua su $[0, T)$, \mathcal{E}^1 su $(0, T)$ e soddisfa

$$\begin{cases} \dot{y} = -u^2 y & \text{su } (0, T) \\ y(0) = e^{c_0} \end{cases}$$

Questo basta a dire che C_u è unica (ma non è un risultato noto....)

- 2) L'equazione del calore ha un effetto regolarizzante (e questo vale in grande generalità): qualunque sia il dato iniziale, per $t > 0$ la soluzione è \mathcal{E}^∞ .

Questo vuol dire che l'equazione non può essere in generale risolta nel passato, se non per pochi dati iniziali (devono essere \mathcal{E}^∞ , e in effetti serve molto di più!)

Applicazioni

IIDisuguaglianza Isoperimetrica
nel piano

Sia D un "dominio" regolare nel piano (nel senso di quelli visti a geometria 2, quelli per cui vale il teorema di Gauss-Green).

Sia $A :=$ area di D

$L :=$ lunghezza di ∂D (perimetro di D)

Teorema (Disuguaglianza Isoperimetrica)


Si ha $L^2 \geq 4\pi A$

e vale = se e solo se D è un disco.

Conseguenza Tra tutti i D con area A fissata, quello di perimetro minimo è il disco.
Viceversa tra tutti i D con perimetro L fissato, quello di area max. è il disco

Dimostrazione

Facciamo l'ipotesi aggiuntiva che ∂D sia parametrizzato da una curva γ di classe E^1 .

Attn. Questo esclude  e

Tuttavia questi casi possono essere coperti con ragionamenti a parte, che non facciamo...

Inoltre posso supporre senza perdita di generalità che

- γ definita su $[-\pi, \pi]$ (a valori in $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$)
- γ parametrizza ∂D in senso anti-orario
- $|\dot{\gamma}| = \text{costante} = \frac{L}{2\pi}$.

Ossevo ora che

$$1) \quad \|\dot{\gamma}\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\gamma}|^2 dt = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 2\pi = \frac{L^2}{2\pi}$$

Quindi

$$L^2 = 2\pi \|\dot{\gamma}\|_2^2$$

Ora siano e_n i coeff. di Fourier di γ .
Pertanto quelli di $\dot{\gamma}$ sono $in e_n$ e

$$L^2 = 2\pi \|\dot{\gamma}\|_2^2 = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} |in e_n|^2 = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |e_n|^2$$

$$2) \quad \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\gamma} \bar{\gamma} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\dot{\gamma}_x + i\dot{\gamma}_y)(\gamma_x - i\gamma_y) dt \quad (13)$$

\nearrow
 serbo $\gamma = \gamma_x + i\gamma_y$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\dot{\gamma}_x \gamma_x + \dot{\gamma}_y \gamma_y) + i(\dot{\gamma}_x \gamma_y - \dot{\gamma}_y \gamma_x) dt$$

$$= \int_{\gamma} x dx + y dy + i \int_{\gamma} x dy - y dx$$

perché $x dx + y dy$
è esatta

2A perché
 $d(x dy - y dx) = 2 dx dy$
(teor. di Gauss-Green)

$$= 2iA$$

Pertanto

Parseval

$$4\pi A = \frac{4\pi}{2i} \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle = \frac{2\pi}{i} 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} (\dot{c}_n c_n) (\bar{c}_n)$$

$$= 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} n |c_n|^2$$

Riassumendo

$$L^2 = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$$

$$4\pi A = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} n |c_n|^2$$

e siccome $n^2 \geq n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$,

$$L^2 \geq 4\pi A$$

(14)

Inoltre, siccome $n^2 > n \quad \forall n \neq 0, 1$,

la disuguaglianza in $L^2 \geq 4\pi A$ è stretta
a meno che $c_n = 0 \quad \forall n \neq 0, 1$.

Cioè vale = se e solo se $c_n = 0 \quad \forall n \neq 0, 1$

In questo caso $\gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$

è una circonferenza di centro c_0 e raggio $|c_1|$,
e quindi D è un disco. □

Dobbiamo chiarire (dalla volta scorsa) la questione delle funzioni E^k su un insieme non aperto.

Ricordo che se $I = [a, b]$ allora la nozione di funzione E^k su I è chiara.

Inoltre vale il seguente risultato fondamentale:

Teor. Se $f_n \in E^1$, $f_n \rightarrow f$ unif. su I e $f'_n \rightarrow g$ unif. su I , allora $f \in E^1$ e $f' = g$.

Ne segue (immediatamente) che:

Cor. Lo spazio $E^1(I)$ dotato della norma

$$\|f\|_{E^1(I)} := \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$$

è completo.

norma del sup su I

Cor. Se $g_n \in E(I)$ e $\sum \|g_n\|_{E^1(I)} < +\infty$ allora

$$g := \sum_n g_n$$

è in $E^1(I)$ e $g' = \sum_n g'_n$.

Analogo discorso vale per $E^k(I)$.

Il discorso diventa più complicato se al posto di I prendiamo un qualunque insieme in \mathbb{R} , oppure un insieme in \mathbb{R}^d .

La definizione più diffusa di $E^k(E)$ quando E è un sottoinsieme di \mathbb{R}^d è l'insieme delle funzioni che sono restrizioni di funzioni E^k definite su un aperto che contiene E .

Questa definizione è usata in molti ambiti, e nella seconda parte del corso (quando parleremo di superfici) è quella che adotteremo.

Tuttavia presenta dei problemi, nel senso che data f_n successione in $E^1(E)$ t.c.

$f_n \rightarrow f$ unif. su E e $\nabla f_n \rightarrow g$ unif. su E
non è detto che f sia in $E^1(E)$

(In effetti non è neanche chiaro cosa si debba intendere con $\nabla f(x)$ quando $x \in \partial E$: in alcuni casi diverse estensioni potrebbero avere diversi gradienti)....

In effetti l'unico risultato che vale è il seguente:

(3)

Teor | Date funzioni f_n definite su aperti che contengono E e di classe \mathcal{E}^k , se $f_n \rightarrow f$ unif. su E e $\nabla^h f_n \rightarrow g_h$ unif. su E per $h=1, \dots, k$, allora

$f \in \mathcal{E}(E) \cap \mathcal{E}^k(\text{Interno}(E))$ e $\nabla^h f = g_h$ in $\text{Interno}(E)$ per $h=1, \dots, k$.

La dimostrazione è elementare. Vale quindi che

Cor | Se g_n sono funzioni \mathcal{E}^k definite su aperti che contengono E e

$$\sum \|g_n\|_{\mathcal{E}^k(E)} < +\infty$$

(dove $\|g\|_{\mathcal{E}^k(E)} := \sum_{h=0}^k \|\nabla^h g\|_{\infty}$) allora

$$g := \sum g_n$$

è in $\mathcal{E}(E) \cap \mathcal{E}^k(\text{Int}(E))$ e $\nabla^h g = \sum \nabla^h g_n$ per $h=1, \dots, k$.

In effetti l'unico spazio di Banach ragionevole è il seguente: dato A aperto

$$\mathcal{E}_*^k(\bar{A}) := \left\{ f \in \mathcal{E}(\bar{A}) \cap \mathcal{E}^k(A) \mid \begin{array}{l} \nabla^h f \text{ si estende per} \\ \text{continuità a } \bar{A} \\ \text{per ogni } h=1, \dots, k \end{array} \right\}$$

con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{E}_*^k(\bar{A})} := \sum_{h=1}^k \|\nabla^h f\|_{\infty}$$

↖ norma del sup su A
(o su \bar{A} - è lo stesso)

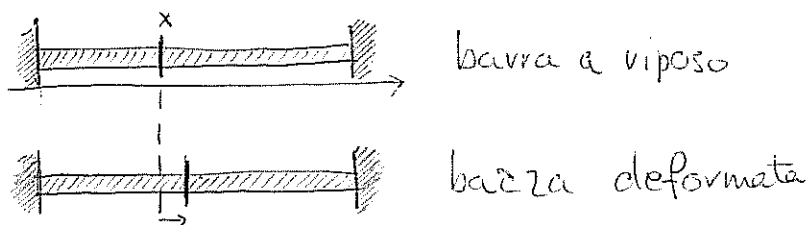
~~APV2~~ ~~Lezione 9~~
~~2012-13~~ ~~30/10/12~~ ~~h. 11-13~~

Applicazioni della Serie di Fourier

III

Equazione delle onde

Consideriamo onde longitudinali (onde di compressione) in una barra "solidale", fatta di un materiale elastico omogeneo.



Indichiamo con $u(t, x)$ lo spostamento del punto con posizione a riposo x all'istante t .

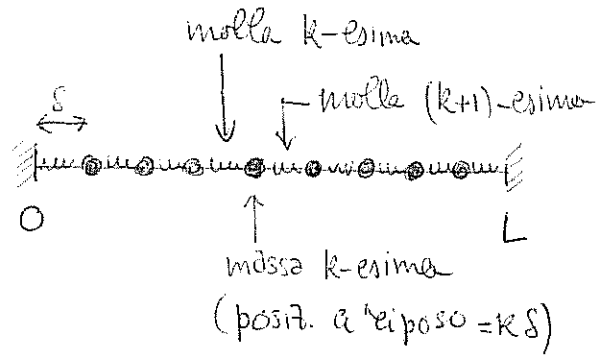
Cioè $x + u(t, x)$ è la posizione del punto "x", all'istante t

Supponendo che all'istante $t=0$ la barra sia in posizione di riposo, vogliamo trovare la legge che determina l'evoluzione di u .

Modellizziamo la sbarra come una successione di masse uguali libere di muoversi orizzontalmente e separate da molle di lunghezza $\delta \ll 1$.

(ci sono ovviamente derivazioni più eleganti).

Allora $u(t, x)$ con $x = \delta k$ è lo spost. della massa k -esima.



Se ρ è la densità del materiale, A la sezione della barra, la massa totale è ρAL e quindi quella della singola massa è $m = \rho A \delta$.

LEGGE FISICA (di Hooke): La forza esercitata da ciascuna molla su ciascuna massa è proporzionale all'allungamento della molla rispetto alla lunghezza di riposo δ_0

Quindi la forza esercitata dalla molla k -esima sulla massa k -esima è

$$F = -\bar{c} \left(\underbrace{u(t, x)}_{\delta_k} - \underbrace{u(t, x - \delta)}_{\delta_{(k-1)}} - \delta_0 \right)$$

lunghezza della molla k -esima

attenzione al segno

$$\bar{c} := \left[\begin{matrix} \text{costante elastica} \\ \text{della molla} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \text{costante elastica} \\ \text{del materiale} \end{matrix} \right] \cdot \frac{A}{\delta}$$

|| c_e

SPIEGARE

Analogamente, la forza esercitata sulla massa k -esima dalla molla $(k+1)$ -esima è

$$f' = \bar{c} (u(t, x+\delta) - u(t, x) - \delta_0)$$

Quindi l'accelerazione della molla k -esima è determinata da

$$m \cdot \underbrace{u_{tt}(t, x)}_{\text{acceleraz.}} = f + f'$$

Cioè

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= \frac{1}{\rho A \delta} \frac{cA}{e \delta} [u(t, x+\delta) - 2u(t, x) + u(t, x-\delta)] \\ &= \frac{c_e}{\rho} \frac{u(t, x+\delta) - 2u(t, x) + u(t, x-\delta)}{\delta^2} \end{aligned}$$

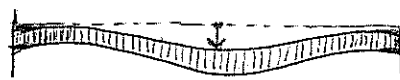
e passando al limite per $\delta \rightarrow 0$

$$\boxed{u_{tt} = \frac{c_e}{\rho} u_{xx}}$$

Equazione delle onde (longitudinali)

L'equazione delle onde trasversali è la stessa!!

(ovviamente stiamo pensando a piccole onde...)



$u(t, x)$ spostamento verticale dalla posizione di riposo del punto in posiz. di riposo x

Estensione a dimensioni superiori (piastra vibrante ma anche altro):

$$\boxed{u_{tt} = \frac{c_e \Delta u}{\rho}}$$

Risoluzione formale dell'eq. delle onde

Voglio trovare $u : [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ che risolve

$$(P) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \\ u_t(0, \cdot) = u_1(\cdot) \end{cases}$$

← costante positiva con significato fisico (vedi poi)
 } condizioni al bordo - stiamo considerando un'anello invece che una barra.... (un po' artificiale).
 } condizioni iniziali. Perché ?? lo si capisce meglio dopo...

Scrivo $u(t, x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{inx}$

con $c_n(t) := c_n(u(t, \cdot))$.

Siccome $u_{tt} = \sum_{-\infty}^{\infty} \ddot{c}_n(t) e^{inx}$

e $u_{xx} = \sum_{-\infty}^{\infty} (in)^2 c_n(t) e^{inx}$

l'equazione diventa

$$\ddot{c}_n = -n^2 c^2 c_n$$

con le condizioni iniziali $c_n(0) = c_n(u(0, \cdot)) = c_n(u_0) =: c_n^0$

$\dot{c}_n(0) = c_n(u_t(0, \cdot)) = c_n(u_1) =: c_n^1$.

Quindi c_n risolve il problema di Cauchy

(8)

$$\begin{cases} \ddot{y} = -c^2 n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \\ y'(0) = c_n^1 \end{cases} \quad (C)$$

(è questo chiaro perché servono due condizioni iniziali per determinare la soluzione).

Quindi per $n=0$

$$c_0(t) = c_0^0 + c_0^1 t$$

e per $n \neq 0$

$$c_n(t) = \alpha_n e^{i c n t} + \beta_n e^{-i c n t}$$

Con α_n, β_n t.c.

$$(**) \begin{cases} \alpha_n + \beta_n = c_n^0 \\ \alpha_n - \beta_n = \frac{c_n^1}{i n c} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{2} \left(c_n^0 + \frac{c_n^1}{i n c} \right) \\ \beta_n = \frac{1}{2} \left(c_n^0 - \frac{c_n^1}{i n c} \right) \end{cases}$$

Quindi la soluzione di (7) dovrebbe essere

$$u(x,t) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} \alpha_n e^{i n (x+ct)} + \sum_{n \neq 0} \beta_n e^{i n (x-ct)} \quad (S)$$

Con α_n e β_n dati da (**).

Teorema di Esistenza (I)

(9)

Supponiamo che $u_0, u_1 \in \mathcal{E}_{\text{per}}$ e che

$$\sum_n n^2 |\alpha_n| < +\infty \quad \left(\begin{array}{l} \Leftarrow u_0 \in \mathcal{E}_{\text{per}}^3 \\ \Rightarrow u_0 \in \mathcal{E}_{\text{per}}^2 \end{array} \right)$$

e

$$\sum_n |n| |\beta_n| < +\infty \quad \left(\begin{array}{l} \Leftarrow u_1 \in \mathcal{E}_{\text{per}}^2 \\ \Rightarrow u_1 \in \mathcal{E}_{\text{per}}^1 \end{array} \right).$$

Allora la formula (S) definisce una funzione $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ di classe \mathcal{E}^2 che resolve (P); inoltre se u_0 e u_1 sono reali anche u è reale.

Dimostrazione

Il punto chiave è far vedere che $u \in \mathcal{E}^2$

Facciamo vedere che

$$\sum_n \left\| \alpha_n e^{in(x+ct)} \right\|_{\mathcal{E}^2(\mathbb{R}^2)} < +\infty$$

e

$$\sum_n \left\| \beta_n e^{in(x-ct)} \right\|_{\mathcal{E}^2(\mathbb{R}^2)} < +\infty.$$

Ci limitiamo alla prima stima (l'altra è analoga). In effetti basta ottenere

$$\sum_n \left\| \alpha_n e^{ins} \right\|_{\mathcal{E}^2(\mathbb{R})} < +\infty$$

limitiamo ci a far vedere che

$$\sum_n \left\| \partial_s^2 (\alpha_n e^{ins}) \right\|_{\infty} < +\infty.$$

(Le stime per $\|\partial_s(\dots)\|_\infty$ e per $\|(\dots)\|_\infty$ sono più semplici).

$$\begin{aligned} \|\partial_s^2(\alpha_n e^{ins})\| &= \|-n^2\alpha_n e^{ins}\|_\infty = n^2|\alpha_n| \\ &\leq n^2 \frac{1}{2} \left(|c_n^0| + \frac{|c_n^1|}{c|n|} \right) = \frac{1}{2} \left(n^2 |c_n^0| + \frac{|n|}{c} |c_n^1| \right) \end{aligned}$$

e per ipotesi $\sum n^2 |c_n^0|, \sum |n| |c_n^1| < +\infty$.

Quindi $u \in E^2$.

Inoltre \tilde{u} è ovviamente 2π -periodica in x e in particolare soddisfa le condizioni al bordo in (P) .

Che u sia reale quando u_0 e u_1 sono reali è un conto lasciato per es.

Inoltre $u(0, \cdot)$ ha come coeff. di Fourier (per costruzione) $c_n(0) = c_n^0 = c_n(u_0)$ quindi $u(0, \cdot) = u_0$.

Analogamente si vede che $u_t(0, \cdot) = u_1$.

Resta da vedere che u soddisfa $u_{tt} = e^z u_{xx}$.

A questo proposito osserviamo che la dimostrazione della convergenza della serie in (S) dice che

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \partial_t^2 \left(\sum c_n(t) e^{inx} \right) \\ &= \sum \partial_t^2 (c_n(t) e^{inx}) \\ \dots &= \sum e^z \partial_x^2 (c_n(t) e^{inx}) = e^z u_{xx}. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema di unicità

(11)

Sia $u : [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ una soluzione E^2 di (P). Allora u è unica. Per la precisione i coeff. di Fourier $C_n(t) := C_n(u(t, \cdot))$

sono univocamente determinati come soluzioni del problema di Cauchy (C).

Dimostrazione

$$C_n(u_{tt}(t, \cdot)) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_{tt}(t, x) e^{-inx} dx$$

Teorema di derivazione sotto il segno di integrale \rightarrow

$$= \partial_t^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx \right) = (C_n(u(t, \cdot)))'' = \ddot{C}_n(t)$$

D'altra parte

Lemma noto + condizioni al bordo in P

$$\begin{aligned} C_n(c^2 u_{xx}(t, \cdot)) &= in C_n(c^2 u_x(t, \cdot)) \\ &= (in)^2 C_n(c^2 u(t, \cdot)) \\ &= -c^2 n^2 C_n(u(t, \cdot)) = -c^2 n^2 C_n(t). \end{aligned}$$

Siccome $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, abbiamo che $\forall n \forall t$

$$\ddot{C}_n(t) = C_n(u_{tt}(t, \cdot)) = C_n(c^2 u_{xx}(t, \cdot)) = -n^2 c^2 C_n(t).$$

Quindi C_n soddisfa l'eq. in (C).

Inoltre $c_n(0) = C_u(u(0, \cdot)) = C_u(u_0) =: c_n^0.$

e $\dot{c}_n(0) = C_u(u_t(0, \cdot)) = C_u(u_1) =: c_n^1.$

↑
[Segue dal fatto più generale che]
 $\dot{c}_n(t) = C_u(u_t(t, \cdot)).$

Quindi $c_n(t)$ soddisfa anche le condizioni iniziali $u_i(c).$ □

APV2
2012-13

Lezione 10
8/11/13, h:14-16

①

Dettaglio sull'equazione delle onde

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Avevamo trovato (formalmente) una soluz.
del tipo

$$u(t, x) = p + mt + \sum_{k \neq 0} \alpha_k e^{ik(x+ct)} + \sum_{k \neq 0} \beta_k e^{ik(x-ct)}$$

cioè della forma

$$(*) \quad u(t, x) = mt + \varphi^+(x+ct) + \varphi^-(x-ct)$$

con φ^+, φ^- funzioni 2π -per.

In effetti si ha che

Proposizione sia $u(t, x)$ data da (*)
con $m \in \mathbb{R}$, $\varphi^+, \varphi^- \in \mathcal{E}_{\text{per}}^2$. Allora
 u risolve

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

con condizioni di periodicità al bordo.

Per la precisione $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\circ \mathbb{C}$)

è \mathcal{E}^2 , 2π -periodica in x e soddisfa

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

← è un conto... □

(2)

Teorema (esistenza II).

Se $u_0 \in \mathcal{E}_{\text{per}}^2$ e $u_1 \in \mathcal{E}_{\text{per}}^1$ allora

esiste u della forma (*) che risolve

$$(P) \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{su } \mathbb{R} \times [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_t(0, \cdot) = u_1 \end{cases}$$

Dimostrazione

Devo trovare m, φ^+, φ^-

in modo che u soddisfi $u(0, \cdot) = u_0$

e $u_t(0, \cdot) = u_1$. Cioè, essendo $u(0, \cdot) = \varphi^+ + \varphi^-$

$$\varphi^+ + \varphi^- = u_0$$

ed essendo $u_t(0, \cdot) = m + c\dot{\varphi}^+ - c\dot{\varphi}^-$

$$\dot{\varphi}^+ - \dot{\varphi}^- = \frac{1}{c}(u_1 - m)$$

"

$$(\varphi^+ - \varphi^-)'$$

ponendo $\tilde{u}_1 :=$ primitiva di $\frac{1}{c}(u_1 - m)$ ho

dunque che φ^+ e φ^- devono soddisfare

$$\begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = u_0 \\ \varphi^+ - \varphi^- = \tilde{u}_1 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \varphi^+ = \frac{1}{2}(u_0 + \tilde{u}_1) \\ \varphi^- = \frac{1}{2}(u_0 - \tilde{u}_1). \end{cases}$$

Resta da verificare che così facendo

φ^+ e $\varphi^- \in \mathcal{E}_{\text{per}}^2$. Basta avere $u_0, \tilde{u}_1 \in \mathcal{E}_{\text{per}}^2$.

Per u_0 questa è l'ipotesi.

Osserviamo che $u_1 \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow \tilde{u}_1 \in \mathcal{C}^2$.

(3)

Quindi resta da vedere se \tilde{u}_1 è periodica.

Qui sorge un problema: in generale una primitiva di una funzione f T -periodica non è T -periodica (esempio $f=1$!).

Vale tuttavia questo Lemma: f continua!
Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -periodica e
 F primitiva di f , allora F è T -per.
se e solo se $\int_0^T f(t) dt = 0$.

In virtù di questo Lemma \tilde{u}_1 è 2π -periodica
se $\int_0^{2\pi} u_1 - m dt = 0$ cioè se prendiamo
 $m := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(t) dt$! □

Dimostrazione del Lemma.

La condizione è necessaria:

$$0 = F(T) - F(0) = \int_0^T f(t) dt.$$

Vediamo che è sufficiente: dato $x \in \mathbb{R}$

$$F(T+x) - F(x) = \int_x^{T+x} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt = 0$$

valido per tutte le funzioni
 T -periodiche e... □

Varianti della serie di Fourier

4

- 1) Serie complessa su $[-\pi, \pi]$ (o funz. 2π -per. su \mathbb{R})

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \text{con} \quad c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

- 2) serie reale su $[-\pi, \pi]$ (o funz. 2π -per. su \mathbb{R})

$$f(x) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_1^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$\text{con } a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$\text{per } n > 0 \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- 3) serie di seni su $[0, \pi]$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad \text{con} \quad b_n := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

da dove viene? estendete f a $[-\pi, \pi]$
in modo che sia dispari e usate la
Serie in 2).

a che serve? a risolvere problemi con
condizioni di Dirichlet

$$u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \quad (\text{invece delle condizioni di periodicit\`a} \dots)$$

\uparrow DETTAGLI A ESERCITAZIONE!!

Metodo della separazione delle variabili

5

Il modo in cui abbiamo risolto equazioni delle onde e del calore. Si può riassumere dicendo che cerchiamo soluzioni $u(t, x)$ della forma

$$u(t, x) = \sum_n a_n(t) b_n(x)$$

Con le funzioni b_n scelte a priori (e^{inx} , $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$, etc) e le funzioni a_n incognite da trovare.

Il punto chiave per cui il metodo funziona per le eq. considerate finora è che le scelte per b_n erano autovalori della derivata seconda cioè $b_n''(x) = \text{multiplo di } b_n(x) \dots$

Ora non è un caso che si siano trovate basi ORTONORMALI di autovettori della derivata seconda....

Questo è legato a un fatto noto di algebra lineare.

(6)

Sia infatti X uno spazio vettoriale
reale con prodotto scalare (risp. complesso)

Sia $T: X \rightarrow X$ si definisce l'aggiunta
di T come l'applicazione $T^*: X \rightarrow X$ univoc.
determinata da

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in X.$$

T si dice autoaggiunto se $T = T^*$

Se $X = \mathbb{R}^n$, e T è dato dalla matrice M ,
allora T autoaggiunto significa che
 $M = M^t$, cioè M è simmetrica.
Se $X = \mathbb{C}^n$ e T è dato dalla matrice
complessa M , allora T autoaggiunto
significa che $M = \overline{M^t}$ ← trasposta
coniugata
ovvero che M è hermitiana.

Il risultato fondamentale è che se
 T è autoaggiunto allora esiste una
base ortonormale (e_1, \dots, e_n) di X
fatta di autovettori di T . In particolare
in questa base T è rappresentata da una
matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ e gli
autovalori λ_i sono tutti reali.

Qualcosa del genere vale anche in dimensione infinita, anche se in questo corso non siamo in grado di enunciare un risultato preciso.

Possiamo però dare qualche definizione e verificare che effettivamente la derivata seconda è un operatore autoaggiunto.

Sia X spazio (di dimensione infinita) con prodotto scalare, sia Y un sottospazio denso di X , e sia $T: Y \rightarrow X$.

Diciamo che $T^*: Y \rightarrow X$ è l'aggiunta di T se $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in Y$.

NOTA L'aggiunta T^* , se esiste, è univocam. determinata. Supponendo infatti di avere due aggiunte T_1^* e T_2^* , per ogni $x \in Y$ si ha, detto $U := T_1^* - T_2^*$

$$\begin{aligned} \langle Ux, y \rangle &= \langle T_1^*x, y \rangle - \langle T_2^*x, y \rangle \\ &= \langle x, Ty \rangle - \langle x, Ty \rangle = 0 \quad \forall y \in Y \end{aligned}$$

ovvero $Ux \in Y^\perp = \overline{Y}^\perp = X^\perp = \{0\}$.

Quindi $Ux = 0 \Rightarrow T_1^*x = T_2^*x$.

ALCUNI ESEMPLI....

Sia $X = L^2(0, \pi) \leftarrow$ reale

$$Y = \{ u \in C^2([0, \pi]) \mid u(0) = u(\pi) = 0 \}$$

$$T: Y \rightarrow X; \quad T: u \mapsto u''$$

Allora T è autoaggiunto. Infatti

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_0^\pi u'' v \, dt \\ &= \left. \underbrace{u'v}_0^\pi - \int_0^\pi u'v' \, dt \right. \\ &\quad \text{perché } v(0) = v(\pi) = 0 \end{aligned}$$

Y è denso
in X
perché...

$$\text{e per simmetria} = \langle u, Tv \rangle.$$

Inoltre se cerchiamo gli autoval. e autovettori di T
cioè le soluzioni $\lambda, u \neq 0$ di

$$\begin{cases} u'' = \lambda u \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \quad T \text{ è definito} \\ \text{negativo}$$

otteniamo (fate voi la verifica) che $\lambda = -n^2$
con $n = 1, 2, 3, \dots$ e $u = \alpha \sin(nt)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

In effetti $\{ \sin(nt) \}$ è (a meno di normalizz.)

una base ortonormale di $L^2(0, \pi)$

Sia $X := L^2(-\pi, \pi) \leftarrow$ reale (o complesso...)

(9)

$Y := \mathcal{E}_{\text{per}}^2$

$T: Y \rightarrow X; T: u \mapsto u''$

Allora T è autoaggiunto. Infatti

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} u'' v \, dt \\ &= \left. uv \right|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u v' \, dt \\ &\quad \parallel \\ &\quad \text{per periodicità} \end{aligned}$$

per simmetria $\rightarrow = \langle u, Tv \rangle$

Inoltre se cerchiamo autovalori λ e autovettori $u \neq 0$ cioè soluzioni di

$$\begin{cases} u'' = \lambda u \\ u(-\pi) = u(\pi) \\ u'(-\pi) = u'(\pi) \\ \cancel{u(-\pi) = u(\pi)} \text{ pleonastico} \end{cases}$$

Otteniamo che $\lambda = -n^2$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ (T semi-def. negativo)

e $u = \alpha \sin(nt) + \beta \cos(nt)$ per $n \geq 1$

$u = \alpha$ per $n = 0$

Anche in questo caso trova basi di Hilbert di autovettori di T

Ma attenzione

Se $X := L^2(-\pi, \pi)$, $Y := C^2([-\pi, \pi])$, $T: u \mapsto \ddot{u}$
 \uparrow \uparrow
 Y X

allora T NON è autoaggiunto.

L'essere autoaggiunto non dipende solo dall'operatore differenziale (in questo caso la derivata seconda) ma anche dallo spazio Y su cui lo definite.

In questo caso nulla torna: se cercate λ, u t.c. $\ddot{u} = \lambda u$ ne trovate per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, e non avete più alcuna ortogonalità degli auto-spazi....

Osservazione Uno vorrebbe un teorema che garantisca che dato T autoaggiunto si può trovare una base ortonormale di autovettori (teorema spettrale).

Le ipotesi da mettere non sono ovvie.

In generale, infatti, questo teorema non vale neanche in casi semplici:

(11)

Sia $X = Y = L^2(0,1)$.

$\varphi: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $0 < m_1 \leq \varphi(x) \leq m_2 < +\infty \forall x$.

$T: X \rightarrow X, T: u \mapsto \varphi \cdot u$

Allora T è continuo, invertibile con
inversa continua, autoaggiunto

(tutto ovvio) MA se φ è invertiva

(è più in generale $\varphi^{-1}(t)$ ha misura
nulla $\forall t \in \mathbb{R}$) allora T non ha
autovettori non banali.

Infatti se $\lambda u = \varphi u$ q.o.

esiste N di misura nulla t.c. $\lambda u(x) = \varphi(x) u(x)$

$\forall x \in [0,1] \setminus N$. Detto allora $S := \{x \notin N : u(x) \neq 0\}$

si ha che $\forall x \in S, \lambda = \varphi(x)$ ovvero

$S \subset \varphi^{-1}(\lambda)$ e quindi $|S| = 0$. Ma allora

$u(x) = 0$ in $(S \cup N)^c$, cioè q.o., cioè $u = 0$
in L^2 .

APV2
2012-13

Lezione 10
8/11/13, h:14-16

①

CONVOLUZIONE (prodotto di)

Date $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \geq 0$ q.o.

Definiamo

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy$$

Proposizione (1) Se $f, g \in L^1$, allora

$f * g(x)$ è ben definito e reale per q.o. $x \in \mathbb{R}$, (la funzione $x \mapsto f * g(x)$ è misurabile) e $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ (*)

Dimostrazione ← non lo verificiamo...

Passo 1 Mostriamo che per $f, g \geq 0$ q.o. vale la (*), anzi $\|f * g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} f * g(x) dx &= \int \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy \right) dx \\
 \text{Fubini! } \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right. &= \int \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) dx \right) g(y) dy \\
 &= \int \| \tau_y f \|_1 g(y) dy \\
 &= \int \| f \|_1 g(y) dy = \| f \|_1 \| g \|_1
 \end{aligned}$$

Passo 2 Per far vedere che $f * g(x)$ è definito per q.o. x devo mostrare che è reale.

(13)

$$\int |f(x-y)g(y)| dy = |f| * |g|(x) < +\infty$$

per q.o. x , e questo segue dal fatto che
 $\| |f| * |g| \|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$.

Inoltre si ha che $|f * g(x)| \leq |f| * |g|(x)$
 e quindi.

$$\|f * g\|_1 \leq \| |f| * |g| \|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad \square$$

Osservazioni Il prodotto di convoluzione
 soddisfa tutte le buone proprietà di
 un prodotto su uno spazio vettoriale,
 inclusa la commutatività (l'unica
 non immediata):

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy$$

Cambio di
 variabile
 $y = x-t$
 $(dy = dx)$

$$\rightarrow = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t) dt = g * f(x).$$

Attenzione $*$ non ha elemento neutro
 (provate a pensarci....).

Peri abbiamo definito la convoluzione

$f * g$ di due funzioni misurabili e positive su \mathbb{R}^d come

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy$$

Abbiamo poi fatto vedere che $f * g(x)$ è ben definito e finito per q.o. x se $f, g \in L^1$ e

Propos. 1

In tutta questa lezione
 $L^p = L^p(\mathbb{R}^d)$

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Proposizione 2 Se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ allora $f * g$ è ben definito per q.o. x

e

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1 \quad \leftarrow \text{disuguaglianza di Young}$$

Interpretazione: se $g \geq 0$ e $\int g(x) dx = 1$, allora $f * g$ può essere visto come la media delle traslate $\tau_y f : x \rightarrow f(x-y)$ rispetto alla distrib. di prob. $g(y) dy$. Insomma $f * g$ è una combinazione convessa delle traslate di f .

(2)

Siccome $\|Z_y f\|_p = \|f\|_p \quad \forall y$, ho che $Z_y f \in K \subset L^p$
 convesso delle funzioni di norma $\leq \|f\|_p$
 e quindi devremmo avere che $f * g \in K$
 ovvero $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p$.

Da questo segue il caso generale.

Nella dimostrazione seguiamo un approccio diverso e più terra-terra.

Dimostrazione ($p < +\infty$)

Ci basta far vedere che nel caso di f e g positive si ha $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.
 Infatti, fatto questo, si ha che, per f, g a valori reali con $\|f\|_p, \|g\|_1 < +\infty$,

$$\| |f| * |g| \|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1 < +\infty$$

$$\Rightarrow |f| * |g|(x) < +\infty \text{ per q.o. } x$$

$$\| \int |f(x-y)| |g(y)| dx$$

$$\Rightarrow f * g(x) = \int f(x-y) g(y) dy \text{ esiste ed \u00e9 finito per q.o. } x$$

$$\text{Inoltre } |f * g(x)| \leq \int |f(x-y)| |g(y)| dx = |f| * |g|(x)$$

$$\text{e quindi } \|f * g\|_p \leq \| |f| * |g| \|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

(3)

Quindi mi posso limitare al caso f, g positive.

Allora

$$\int f(x-y) g(y) dy = \int \underbrace{f(x-y)}_{F_1} \underbrace{g(y)^{\frac{1}{p}} g(y)^{1-\frac{1}{p}}}_{F_2} dy$$

Applico Hölder a F_1 e F_2 $\rightarrow \leq \left(\int f(x-y)^p g(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g(y) dy \right)^{\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}}$

$\|g\|_1^{1/q}$

e quindi

$$\int \left[\int f(x-y) g(y) dy \right]^p dx \leq \int \|g\|_1^{\frac{p}{q}} \left(\int f(x-y)^p g(y) dy \right) dx$$

Applico Fubini $\rightarrow = \|g\|_1^{p-1} \int \left[\int f(x-y)^p dx \right] g(y) dy$

$$= \|g\|_1^{p-1} \int \| \tau_y f \|_p^p g(y) dy$$

$$= \|g\|_1^{p-1} \|f\|_p^p \int g(y) dy$$

$$= \|g\|_1^p \|f\|_p^p \quad \square$$

Osservazione La dimostrazione per $p = +\infty$ è diversa, ed elementare. In effetti possiamo anche vedere questo come un caso della proposizione successiva.....

(4)

Proposizione 3 Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)
 allora $f * g(x)$ è ben definita in ogni punto x
 e $|f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \forall x$.

Dimostrazione Al solito basta limitarsi
 al caso $f, g \geq 0$.

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int f(x-y)g(y)dy \\ &\leq \left(\int f(x-y)^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g(y)^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f(x-\cdot)\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q. \quad \square \end{aligned}$$

In queste ipotesi si ha anche che $f * g$
 è uniformemente continua!

Per dimostrarlo ci serve questo Lemma:

Lemma Se $f \in L^p$, $p < +\infty$, allora, posto
 al solito $\tau_h f(x) := f(x-h)$,

$$\tau_h f \xrightarrow{h \rightarrow 0} f \text{ in } L^p$$

Dimostrazione

PASSO 1 Sia $f \in \mathcal{C}_c$ (continua a supp. comp.).

~~Allora f è uniformemente continua
 (perché?).~~

5

Se $\text{supp}(f) \subset \overline{B(0,R)}$ e $|h| \leq 1$, ho che

$\text{supp}(f(x-h) - f(x)) \subset \overline{B(0,R+1)}$ e quindi

$$\begin{aligned} \| \tau_h f - f \|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p dx \\ &= \int_{\overline{B(0,R+1)}} |f(x-h) - f(x)|^p dx \end{aligned}$$

$\longrightarrow 0$ per convergenza dominata.

VERIFICHE

- Conv. puntuale: $\forall x, |f(x-h) - f(x)|^p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ per la continuit  di f
- dominazione $|f(x-h) - f(x)|^p \leq (2 \|f\|_\infty)^p = \text{costante}$
(ricordo che le costanti sono dominaz. ammiss. su insiem. di mis. finita).

PASSO2 Data $f \in L^p$, siccome $p < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0$
esiste $g \in \mathcal{E}_c$ t.c. $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Quindi

$$\begin{aligned} \| \tau_h f - f \|_p &= \| \tau_h f - \tau_h g + \tau_h g - g + g - f \|_p \\ &\leq \| \tau_h (f - g) \|_p + \| \tau_h g - g \|_p + \| g - f \|_p \\ &\leq 2 \| g - f \|_p + \| \tau_h g - g \|_p \end{aligned}$$

$\wedge \quad \wedge$
 $2\varepsilon \quad \varepsilon$ per h suff. piccolo.

□

Proposizione 4 Se $f \in L^p$, $g \in L^q$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora $f * g$ è uniformemente continua.

Dimostrazione Sia $\tilde{f}(x) := f(-x)$.

Posso supporre $p < +\infty$ altrimenti scambio p e q ...

Dati $x \in \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}^d$

$$|f * g(x+h) - f * g(x)| \leq \int |f(x+h-y) - f(x-y)| |g(y)| dy$$

Hölder $\left| \rightarrow \leq \left(\int |f(x+h-y) - f(x-y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \right.$

$$= \left(\int |\tilde{f}(y-(x+h)) - \tilde{f}(y-x)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \|g\|_q$$

$$= \| \tau_{x+h} \tilde{f} - \tau_x \tilde{f} \|_p \|g\|_q$$

$$= \| \tau_h \tilde{f} - \tilde{f} \|_p \|g\|_q$$

\hookrightarrow uniformemente in h e indipendente da x □

Per cultura (disuguaglianza di Young generalizzata): Dati $p, q, r \geq 1$ t.c.

$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

e $f \in L^p$, $g \in L^q$ allora $f * g(x)$ è ben definita q.o. in x e

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

[Casi particolari $r=p, q=1$; $r=\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$]

TRACCIA DI DIM. SUGLI APPUNTI....

Proposizione 4 bis Se $f \in L^p, g \in L^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 6 bis
 allora $f * g$ è infinitesima all'infinito,
 cioè $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |f * g(x)| = 0$. $p, q < +\infty$

Dimostrazione

Passo 1 Sia $P: L^p \times L^q \rightarrow L^\infty$ il prodotto di convoluzione. Allora P è continuo. Infatti, se $f_n \rightarrow f$ in L^p e $g_n \rightarrow g$ in L^q ,

$$\begin{aligned} \|f_n * g_n - f * g\|_\infty &= \|f_n * (g_n - g)\|_\infty + \|(f_n - f) * g\|_\infty \\ &\leq \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \text{limitata} \\ \text{in } n \end{matrix} \downarrow 0 \qquad \qquad \downarrow 0 \qquad \text{cost.}$

Passo 2 Se f, g hanno supporto compatto allora $f * g$ ha supporto compatto (VERIFICA...) e quindi $f * g \in E_0 = \{f \in L^\infty, f \text{ continua \& infinitesima all'infinito}\}$

Passo 3 Sia $D \subset L^p \times L^q, D := \{(f, g) : f, g \text{ hanno supp. compatto}\}$. Allora D è denso in $L^p \times L^q$ (qui si usa che $p, q < +\infty$) e $P(D) \subset E_0$ (passo 2), E_0 è un sottospazio chiuso di L^∞ , e P è continua (passo 1). Allora

$$P(L^p \times L^q) = P(\overline{D}) \subset \overline{P(D)} \subset \overline{E_0} = E_0. \quad \square$$

Derivazione e convoluzione

Ritorniamo per semplicità in dimensione $d=1$ — le estensioni a $d>1$ sono a carico vostro.

L'osservazione base è che

$$\tau_h(f * g) = (\tau_h f) * g$$

e quindi

$$\frac{f * g - \tau_h(f * g)}{h} = \left(\frac{f - \tau_h f}{h} \right) * g$$

e passando al limite per $h \rightarrow 0$ abbiamo (formalmente)

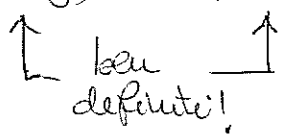
$$(f * g)' = f' * g$$

E infatti

Proposizione 5 Se $g \in L^q$, $f \in \mathcal{E}^1$ t.c.

$f, f' \in L^p$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora $f * g \in \mathcal{E}^1$

$$\text{e } (f * g)' = f' * g$$



Dimostrazione Sappiamo già che $f * g$ e $f' * g$ sono funzioni uniformemente continue.

Per far vedere che $(f * g)' = f' * g$ basta dimostrare che

$$f * g(x) - f * g(0) = \int_0^x f' * g(t) dt$$

e applicare il teor. fondam. del calcolo!

E infatti

$$\int_0^x f' * g(t) dt = \int_0^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f'(t-y) g(y) dy \right) dt$$

Fubini!
(possiamo applicarlo?)

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^x f'(t-y) dt \right) g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y) - f(-y)) g(y) dy \\ &= f * g(x) - f * g(0). \end{aligned}$$

SÌ

$$\int_0^x \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t-y)| |g(y)| dy dt \leq \int_0^x \|f'\|_p \|g\|_q dt = x \|f'\|_p \|g\|_q.$$

(Stiamo supponendo $x \geq 0$ )

□

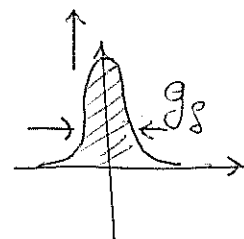
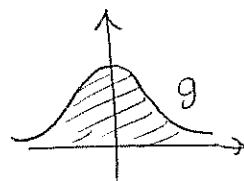
Concludiamo la nostra carrellata di risultati sulla convoluzione con quelli di approssimazione e regolarizzazione.

9

Data $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, per ogni $\delta > 0$
poniamo

$$g_\delta(x) := \frac{1}{\delta^n} g\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

$$e \quad c := \int g(x) dx = \int g_\delta(x) dx$$



l'isclamento che
mantiene l'integrale.

Proposizione 6 (approx. per convol.)

Data g, g_δ come sopra e $f \in L^p$ con $p < +\infty$
allora

$$g_\delta * f \longrightarrow cf \quad \text{in } L^p \quad \text{per } \delta \rightarrow 0$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} f * g_\delta(x) &= \int f(x-t) g_\delta(t) dt \\ &= \int f(x-t) g\left(\frac{t}{\delta}\right) \frac{dt}{\delta^n} \end{aligned}$$

Cambio var. $y = \frac{t}{\delta}$ \longrightarrow $= \int f(x-\delta y) g(y) dy$

Inoltre $cf(x) = \int f(x) g(y) dy$

Quindi

$$f * g(x) - cf(x) = \int f(x-\delta y) - f(x) g(y) dy$$

↑
Tornando all'
interpret. della
conv. come "media
pesata" di
traslate questo
enunciato è
naturale, almeno
per $g \geq 0, c=1$

Quindi

$$\begin{aligned}
|f * g_s(x) - cf(x)| &\leq \int |f(x-sy) - f(x)| |g(y)| dy \\
&= \int |f(x-sy) - f(x)| |g(y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|^{1-\frac{1}{p}} dy \\
&\leq \left(\int |f(x-sy) - f(x)|^p |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad\qquad\qquad \parallel \parallel \parallel \\
&\qquad\qquad\qquad \parallel g \parallel_1^{\frac{1}{q}-1}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|f * g_s - cf\|_p^p &\leq \|g\|_1^{p-1} \int \left(\int |f(x-sy) - f(x)|^p |g(y)| dy \right) dx \\
&= \|g\|_1^{p-1} \int \left(\int |f(x-sy) - f(x)|^p dx \right) |g(y)| dy \\
&= \|g\|_1^{p-1} \int \underbrace{\| \tau_{sy} f - f \|_p^p}_{\downarrow} |g(y)| dy
\end{aligned}$$

per il teorema di convergenza dominata:



per $s \rightarrow 0$

$$\| \tau_{sy} f - f \|_p \rightarrow 0 \text{ per } s \rightarrow 0 \quad \forall y$$

e uso come dominazione

$$\| \tau_{sy} f - f \|_p^p |g(y)| \leq (2 \|f\|_p)^p |g(y)| = \text{cost.} |g(y)| \in L^1.$$

□

Proposizione 7 (Regolarizzazione per convoluzione.)

Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (.....) funzione \mathcal{E}^∞ a supporto compatto tale che $\int g(x) dx = 1$, e sia $g_\delta(x) := \frac{1}{\delta} g\left(\frac{x}{\delta}\right)$ come sopra.

Allora, data $f \in L^p$ con $\underline{p} < +\infty$, si ha che (i) $f * g_\delta \in \mathcal{E}^\infty$

(ii) $f * g_\delta \rightarrow f$ in L^p per $\delta \rightarrow 0$

(iii) $\|D^k(f * g_\delta)\|_\infty \leq \|f\|_p \|D^k g_\delta\|_q \quad \forall k, \dots$

Dimostrazione

Basta applicare quanto già fatto! \square

Concludiamo con due osservazioni
su serie di Fourier e convoluzione...

Date f, g funzioni 2π -periodiche
definiamo il prodotto di convoluzione

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) dy$$

← oppure su $[a, a+2\pi]$
con $a \in \mathbb{R}$ qualunque

Questa è una funzione 2π -periodica
ben definita se $f, g \geq 0$ oppure
 $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ (il caso più generale di
tutti).

Valgono le solite proprietà (non stiamo
a insistere).

In effetti se identifichiamo le funzioni
 f di periodo 2π su \mathbb{R} con le
funzioni su $\mathbb{R}/\sim = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$,
ovvero fuori che stiamo facendo la
convoluzione delle funzioni su S^1 ...

Quello che conta è che il dominio X
delle funzioni abbia una struttura di

gruppo (commutativo) e che si usi come misura di riferimento una misura invariante per l'azione del gruppo

Usiamo la convoluzione appena definita per scrivere la somma parziale della serie di Fourier

$$S_m f(x) := \sum_{n=-m}^m c_n(f) e^{inx}$$

Come convoluzione.

In effetti:

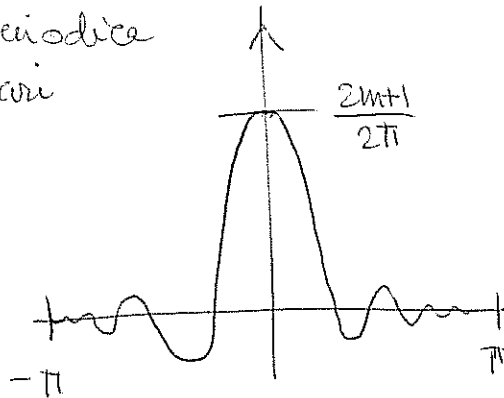
$$\begin{aligned}
S_m f(x) &= \sum_{n=-m}^m c_n(f) e^{inx} \\
&= \sum_{-m}^m \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} e^{inx} dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{-m}^m e^{in(x-t)}}_{g_m(x-t)} dt \\
&= f * g_m(x)
\end{aligned}$$

nucleo di Dirichlet

Con $g_m(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{-m}^m e^{inx}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{-m}^m a^n = a^{-m} \sum_0^{2m} a^n \\
&= a^{-m} \frac{a^{2m+1} - 1}{a - 1} \\
&= \frac{a^{m+1/2} - a^{-(m+1/2)}}{a^{1/2} - a^{-1/2}}
\end{aligned}
\rightarrow
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{-m}^m (e^{ix})^n \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(m+1/2)x} - e^{-i(m+1/2)x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

g_m è 2π -periodica
e pari



3

Inoltre $\int_{-\pi}^{\pi} g_m(x) dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$ [Calcolo non semplice!]

e g_m "tende a concentrarsi", vicino a 0
(per $m \rightarrow +\infty$)

In altre parole g_m "assomiglia", ad
un nucleo regolarizzante come quelli
visti nella lezione precedente....

Quindi è legittimo aspettarsi che

$$S_m f := f * g_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f \dots$$

Il problema è legato al fatto che

$$\|g_m\|_1 \rightarrow +\infty$$

anche se $\int_{-\pi}^{\pi} g_m \rightarrow 1$.

NON ANDIAMO OLTRE

APV 2
2012-13

Lezione 12
15/11/12, h.14-16

1

Trasformata di Fourier

(4)

Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, vorrei scriverla come
combinazione lineare (in qualche senso
esteso) delle funzioni $e_y(x) := e^{iyx}$
con $y \in \mathbb{R}$.

Parto dalla formula della serie di Fourier
e faccio conti formali (ovè non sto
troppo a preoccuparmi delle dimostrazioni).

Data f definita su $[-\pi, \pi]$ si ha

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \right) e^{inx}$$

data allora f su $[-\pi a, \pi a]$ si ha

$$\forall x' \in [-\pi, \pi] \quad f(ax') = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(at) e^{-int} \right) e^{inx'}$$

$$(at = s) \rightarrow = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi a} \left(\int_{-\pi a}^{\pi a} f(s) e^{-i \frac{n}{a} s} ds \right) e^{i \frac{n}{a} ax'}$$

e quindi

$$\forall x \in [-\pi a, \pi a]$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi a} \left(\int_{-\pi a}^{\pi a} f(s) e^{-i \frac{n}{a} s} ds \right) e^{i \frac{n}{a} x}$$

Ora, se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $\text{supp}(f) \subset [-\pi a_0, \pi a_0]$ allora

$$\forall a > a_0 \quad x \in [-\pi a, \pi a]$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi a} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i \frac{u}{a} s} ds \right) e^{i \frac{u}{a} x}$$

$$\delta = \frac{1}{a} \Bigg| \rightarrow = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i(us)s} ds \right) e^{i(ns)x}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta g(x, ns)$$

con $g(x, y) := \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-iys} ds \right) e^{iyx}$

ha $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta g(x, ns)$ è l'approx. standard dell'integrale (secondo Riemann) quindi mi aspetto che

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta g(x, ns) \xrightarrow[\substack{\delta \rightarrow 0 \\ (a \rightarrow +\infty)}]{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy$$

Dunque $\forall x \in (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-iys} ds \right)}_{\hat{f}(y)} e^{iyx} dy \end{aligned}$$

6

Cioè ho sentito $f(x)$ come combinat. lineare (nel senso dell'integrale) di e^{iyx} , per la precisione

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy$$

Tutto ciò è formale.

Passiamo ai risultati: vigorosi.

Definizione Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in L^1$, definiamo

$$\hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx \quad \left[\begin{array}{l} \text{NOTAZ. ALTERN.} \\ \mathcal{F}f(y) \end{array} \right]$$

NOTA L'integrale è sempre ben definito perché $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Teorema che dimostreremo alla fine:
Se $f \in L^1$ e $\hat{f} \in L^1$ allora vale la
"formula di inversione",

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy$$

($f \in L^1$ serve per definire \hat{f} ; $\hat{f} \in L^1$

serve per dare senso all'ultimo integrale).

IMPORTANTE Bisogna tenere ben distinte
la variab. di f (solitam. x) e quella di
 \hat{f} (solitam. y). Le costanti non sono
universalmente adottate.....

Cominciamo con un po' di proprietà della TdF

Proposizione Data $f \in L^1(\mathbb{R})$,

\hat{f} è continua, infinitesima all'infinito, (cioè $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$) e $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$,

↑
Lemma di
Riemann-Lebesgue

Dim

$$\begin{aligned} \circ \quad |\hat{f}(y)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-iyx}| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1 \quad \forall y \end{aligned}$$

quindi $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

◦ Continuità : se $y_n \rightarrow y$

$$\hat{f}(y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iy_n x} dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx = \hat{f}(y)$$

↑
per convergenza dominata

◦ convergenza puntuale OK

◦ dominazione

$$|f(x) e^{-iy_n x}| \leq |f(x)| \in L^1. \quad \square$$

o Per dimostrare che f è infinitesima all'infinito cominciamo supponendo che $f \in \mathcal{E}_c^1(\mathbb{R})$, con $\text{supp } f \subset [-a, a]$

In tal caso

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx = \int_{-a}^a \dots \\ &= \left. \frac{f(x) e^{-ixy}}{-iy} \right|_{-a}^a - \int_{-a}^a f'(x) \frac{e^{-ixy}}{-iy} dx \\ &= \frac{1}{iy} \int_{-a}^a f'(x) e^{-ixy} dx \end{aligned}$$

e quindi $|\hat{f}(y)| \leq \frac{1}{|y|} \|f'\|_1$.

Passiamo ora al caso generale: usiamo il fatto che $\mathcal{E}_c^1(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$ per scrivere $f \in L^1(\mathbb{R})$ come $f = f_1 + f_2$ con $f_2 \in \mathcal{E}_c^1$ e $\|f_1\|_1 \leq \varepsilon$ (ε fissato).

Allora $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ e

o $\hat{f}_2 \rightarrow 0$ per $y \rightarrow \pm\infty$ (passo precedente)

o $\|\hat{f}_1\|_{\infty} \leq \|f_1\|_1 = \varepsilon$

Quindi $\limsup_{y \rightarrow \pm\infty} |\hat{f}| \leq \varepsilon$, ed essendo ε arbitrario

si ha che questo \limsup è 0.....



Proposizione

(i) Ricordo che $(\tau_h f): x \mapsto f(x-h)$.

$$\widehat{\tau_h f}(y) = e^{-iyh} \hat{f}(y)$$

Dim $\widehat{\tau_h f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-h) e^{-iyx} dx$

$$\begin{array}{l} x-h=t \\ x=t+h \\ dx=dx \end{array} \left| \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \\ \end{array} \right. = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iy(t+h)} dt \\ = e^{-iyh} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt} dt = e^{-iyh} \hat{f}(y).$$

(ii) $\widehat{e^{iyx} f(x)} = \tau_h \hat{f}$

Dim

(iii) Poniamo $\mathcal{E}_s f: x \mapsto \frac{1}{|s|} f\left(\frac{x}{s}\right)$ (operazione già vista....)
allora, $\forall s \neq 0$

$$\widehat{\mathcal{E}_s f}(y) = \hat{f}(sy).$$

Dim

(iv) $f \in L^1$ & $xf(x) \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{E}'_0$ e $\hat{f}'(y) = -ix \hat{f}(y)$

Dim So che \hat{f} e $g := -ix \hat{f}(x) \in \mathcal{E}'_0$

Devo dimostrare solo che \hat{f}' esiste ed è g .

Ci sono varie vie per farlo:

Via (I) Derivazione sotto il segno di integrale, (9)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dy} \hat{f}(y) &= \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial y} e^{-ixy} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-ix) e^{-ixy} dx \\
 &= \widehat{-ix f(x)}(y).
 \end{aligned}$$

Il problema è che non abbiamo un buon teorema di derivazione sotto il segno di integrale....

$$\text{Via (II)} \quad \frac{\hat{f}(y+h) - \hat{f}(y)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-i(y+h)x} - e^{-iyx}}{h} dx$$

Convergenza dominata
 Conv. puntuale ok
 dominazione?

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial y} (e^{-iyx}) dx$

$\downarrow h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \left| f(x) \frac{e^{-i(y+h)x} - e^{-iyx}}{h} \right| &\leq |f(x)| |e^{-iyx}| \left| \frac{e^{-ihx} - 1}{hx} \right| |x| \\
 &\leq |f(x)| x |C| \quad \text{con } C := \left\| \frac{e^{-it} - 1}{t} \right\|_{\infty} \\
 &\quad (C \text{ è finito...})
 \end{aligned}$$

Via (III) Dimostro che $\hat{f}(y) - \hat{f}(0) = \int_0^y g(t) dt$.

(Per il teore. fondamentale del calcolo questo basta a dire che \hat{f} è E^1 e $\hat{f}' = g$.)

In fatti $\int_0^y g(t) dt = \int_0^y \left(\int_{-\infty}^{\infty} -ix f(x) e^{-ixt} dx \right) dt$

FUBINI! $\left| \rightarrow \right. = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^y \underbrace{-ix e^{-ixt}}_{\frac{\partial}{\partial t}(e^{-ixt})} dt \right) f(x) dx$
posso usarlo? $\int_0^y \int_{-\infty}^{\infty} |ix f(x) e^{-ixt}| dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ixt}|_0^y f(x) dx$

$\int_0^y \int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)| dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (e^{-ixy} - e^{-ix \cdot 0}) dx = \hat{f}(y) - \hat{f}(0)$

$|y| \|x f(x)\|_1$.

(V) $f \in E^1, f, f' \in L^1 \Rightarrow \hat{f}'(y) = iy \hat{f}(y)$

$\hat{f}'(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-iyx} dx$

Dim.

Integro per parti $\left| \rightarrow \right. = \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{f(x) e^{-iyx}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-iy e^{-iyx}) dx$
 $= iy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx = iy \hat{f}(y)$

Tutto torna a patto di dimostrare che $f(x) e^{-iyx} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$

LEMMA Se $f \in E^1, f, f' \in L^1$ allora

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Dimostrazione

Passo 1 $f' \in L^1 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =: L$

Infatti $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0) + \int_0^{\infty} f'(t) dt \in \mathbb{R}$.

Passo 2 $f \in L^1 \Rightarrow L = 0$ (ovvio)

Passo 3 lo stesso vale per $x \rightarrow -\infty$. \square

(vi) $f, g \in L^1 \Rightarrow f * g \in L^1 \Rightarrow \widehat{f * g}(y) = \widehat{f}(y) \cdot \widehat{g}(y)$.

Dim

Infatti $\widehat{f * g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt \right) e^{-iyx} dx$

FOBINI! $\rightarrow = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-iy(x-t)} g(t) e^{-iyt} dx dt$

posso applicarlo?
Sì!!

$\iint |f(x-t)g(t)| dt dx \xrightarrow{s=x-t} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-iys} ds \right) g(t) e^{-iyt} dt$

$\parallel f * g \parallel_1$

$\parallel f \parallel_1, \parallel g \parallel_1$

\wedge
 $+\infty$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) g(t) e^{-iyt} dt$

$= \widehat{f}(y) \widehat{g}(y)$.

Avanzato da ieri:

- Dimostrazione della proprietà (vii) della TdF:
Se $f, g \in L^1$ allora $f * g \in L^1$ e $\widehat{f * g}(y) = \widehat{f}(y) \cdot \widehat{g}(y)$.
 - Definizione dell'antitrasformata, \check{f}
Notazione $\widehat{\check{f}} = \mathcal{F}f$; $\check{f} = \mathcal{F}^* \widehat{f}$.
- Formula di inversione
 $\mathcal{F}^* \mathcal{F} f = 2\pi f$
- Densità di \mathcal{E}_c^∞ in $L^p(\mathbb{R})$ per $p < +\infty$ — lo stesso vale in $L^p(\mathbb{R}^d)$

Dimostrazione 1) Le funzioni in L_c^p sono dense in L^p
(già fatto in precedenza).

2) Le funzioni in \mathcal{E}_c^∞ sono dense in L_c^p .

Dato infatti $f \in L_c^p$, basta prendere

$$f * g_s \quad \text{con} \quad g \in \mathcal{E}_c^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{con} \quad \int_{\mathbb{R}} g = 1.$$

\uparrow
 nucleo
 regolarizzante

(serve ricordare che la convoluzione di due funzioni a supporto compatto ha supporto compatto). \square

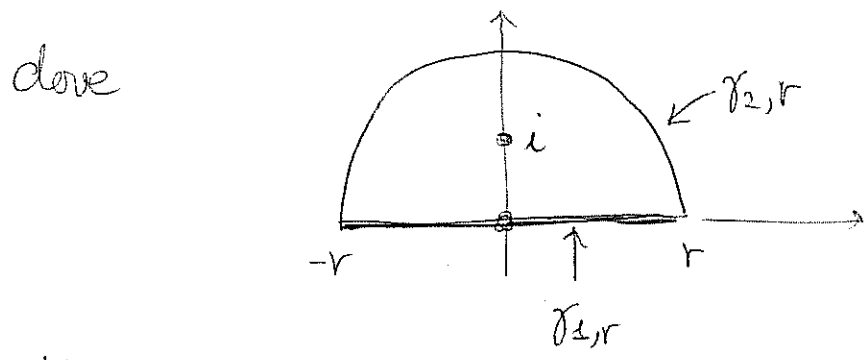
Esempi di calcolo delle trasformate di Fourier

(1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iyx}}{1+x^2} dx$$

Calcoliamo questo integrale con il metodo dei residui. In effetti si ha:

a) $\hat{f}(y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{1,r}} \overbrace{\frac{e^{-iyz}}{1+z^2}}^{g(z)} dz$



b) $\int_{\gamma_{1,r}} g(z) dz + \int_{\gamma_{2,r}} g(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(g, z_i)$

z_i polo di g racchiuso da $\gamma_{1,r}$ o $\gamma_{2,r}$

c) $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{2,r}} g(z) dz = 0$

perché $|g(z)| = \left| \frac{e^{-iyz}}{1+z^2} \right| = \frac{e^{y \text{Im} z}}{|1+z^2|} \leq \frac{1}{|1+z^2|} \sim \frac{1}{r^2}$ su $\gamma_{3,r}$

$y < 0$ e $\text{Im} z > 0$

(d) per $r > 1$ l'unico polo di $g(z) = \frac{e^{-lyz}}{1+z^2}$
Compreso dentro $\gamma_{1,r} \cup \gamma_{2,r}$ è i . Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{1,r}} \dots + \int_{\gamma_{2,r}} \dots &= \int_{\gamma_{1,r} \cup \gamma_{2,r}} \dots = \\
&\downarrow \qquad \qquad \downarrow^{r \rightarrow \infty} \\
\hat{f}(y) \qquad \qquad 0 &= 2\pi i \operatorname{Res}(g(z), i) \\
&= 2\pi i \left. \frac{e^{-lyz}}{2z} \right|_{z=i} \\
&= \cancel{2\pi i} \frac{e^{-ly \cdot i}}{\cancel{2i}} = \pi e^y
\end{aligned}$$

Quindi $\hat{f}(y) = \pi e^y$

Analogamente (...) per $y > 0$ si ottiene $\hat{f}(y) = \pi e^{-y}$

In breve $\hat{f}(y) = \pi e^{-|y|}$ (manca il caso
per $y=0$, ma non ce n'è bisogno...)

NOTA Volendo si poteva dimostrare
preliminariamente che essendo f reale e pari
allora \hat{f} deve essere reale e pari, e
quindi bastava calcolare $\hat{f}(y)$ solo per $y < 0$
(o $y > 0$).

$$(2) \quad \boxed{f(x) = e^{-|x|}}$$

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-iyx} dx$$

$$\boxed{\text{Poiché?}} \rightarrow = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-iyx} dx$$

$$= 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-(1+iy)x} dx$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-(1+iy)x}}{-(1+iy)} \right]_0^{+\infty}$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1+iy} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1-iy}{1+y^2} \right] = \frac{2}{1+y^2}$$

$$\boxed{\hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}}$$

Sembra di vedere una parentela in questi conti. In effetti come vedremo dalla formula di inversione, sapendo che la trasformata di $e^{-|x|}$ è $\frac{2}{1+y^2}$ si ottiene che quella di $\frac{1}{1+x^2}$ è $\pi e^{-|y|}$ (e viceversa)

(3) ESEMPIO FONDAMENTALE

$$\boxed{f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}}$$

Gaussiana centrata in 0 di varianza $\sigma^2 = 1$

Calcolo 1

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy} dx =$$

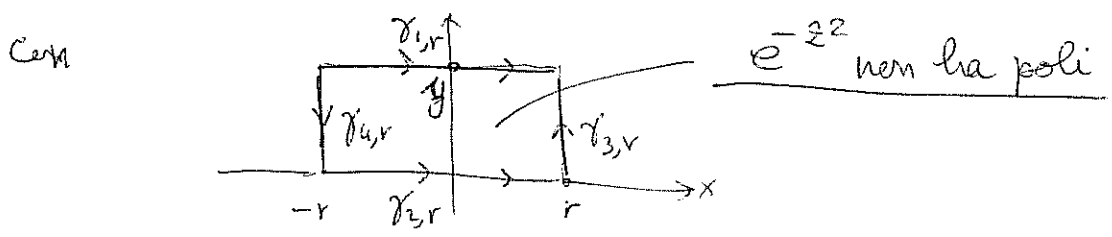
$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2ixy)} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2ixy - y^2) - \frac{1}{2}y^2} dx \\
 &= e^{-y^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-y^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = e^{-y^2/2} \\
 &\left. \begin{array}{l} t = x+iy \\ dt = dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \\ \parallel \\ 1 \end{array}
 \end{aligned}$$

$\hat{f}(y) = e^{-y^2/2}$

Un momento posso fare il cambio di variabile $t = x+iy$? Sì ma non è ovvio:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{1,r}} e^{-z^2} dz \\
 I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{2,r}} e^{-z^2} dz
 \end{aligned}$$



Allora

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & = & \int_{\gamma_{1,r}} \dots & - & \int_{\gamma_{2,r}} \dots & + & \int_{\gamma_{3,r}} \dots & + & \int_{\gamma_{4,r}} \dots & & \text{Quindi } I_1 - I_2 = 0 \\
 & & \downarrow r \rightarrow +\infty & & \downarrow r \rightarrow +\infty & & \downarrow & & \downarrow & & \text{ovvero } I_1 = I_2. \\
 & & I_1 & & I_2 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

(5)

In effetti su $\gamma_{3,r}$ si ha $|e^{-z^2}| = e^{-\operatorname{Re}(z^2)} =$
 $= e^{-(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \leq e^{-r^2 + y^2}$

per cui $\left| \int_{\gamma_{3,r}} e^{-z^2} dz \right| \leq |y| e^{-r^2 + y^2} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$

Analogo discorso vale per $\int_{\gamma_{4,r}} e^{-z^2} dz$.

Calcolo 2 Osserviamo che se $f := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$,

allora $f' = -x \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = -x f$.

Cioè f soddisfa l'equazione $f' + x f = 0$

Passiamo quest'equazione in trasformata di Fourier

$$0 = \widehat{f' + x f} = \widehat{f'} + \widehat{x f} = iy \widehat{f} + i(-ix) \widehat{f} =$$

$$= iy \widehat{f} + i \widehat{f'} \Rightarrow \widehat{f'} + y \widehat{f} = 0$$

cioè \widehat{f} soddisfa la stessa equazione differenziale lineare del primo ordine omogenea di f

Quindi \widehat{f} è un multiplo di f , e cioè

$$\widehat{f}(y) = c e^{-y^2/2}$$

e $c = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 1$

quindi $\widehat{f}(y) = e^{-y^2/2}$.

Osservazione 1

Usando le proprietà già viste si ottiene che

se $f(x) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ allora $\hat{f}(y) = e^{-y^2\sigma^2/2}$

↑
gaussiana centrata
in 0 con varianza σ^2

Osservazione 2

La formula di inversione vale per $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$
(e questo lo useremo nella dimostrazione della
formula di inversione).

Infatti per le funzioni pari $f^* = f$ e quindi

$$f^* f = f(f) = f(e^{-y^2/2}) = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2} = 2\pi f$$

Passiamo ora alla formula di inversione

Teorema Data $f \in L^1$ t.c. $\hat{f} \in L^1$ allora

$$f^* f = 2\pi f \text{ q.o.}$$

Cioè

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy \text{ per q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione

Sia $X := \{f \in L^1 : \hat{f} \in L^1\} \leftarrow$ spazio vettoriale

e sia $Y := \{f \in X : \mathcal{F}^* \mathcal{F} f = 2\pi f \text{ q.o.}\} \leftarrow$ sottospazio di X

Vogliamo far vedere che $Y = X$.

Cominciamo con un'osservazione:

$$\left| \begin{array}{l} Y \text{ \u00e9 chiuso rispetto a traslazioni e omotetie:} \\ \text{cio\u00e8 } f \in Y \Rightarrow \tau_a f \in Y \quad \forall a \text{ e } \delta f \in Y \quad \forall \delta \neq 0 \end{array} \right|$$

Questo segue dalle propriet\u00e0 della TdF e delle corrispondenti propriet\u00e0 per l'anti-trasformata

$$\begin{aligned} & \text{(Per esempio } \mathcal{F}(\tau_a f) = e^{-iyk} \hat{f}(y) \text{ \u00e2 } \mathcal{F}^*(e^{-iyk} g(y)) = \tau_{-k}^{\mathcal{F}^*} g(x) \\ & \text{per cui } \mathcal{F}^* \mathcal{F}(\tau_a f) = \tau_a \hat{\hat{f}} = \tau_a(2\pi f) = 2\pi \tau_a f \dots) \end{aligned}$$

A questo punto se abbiamo che $p \in Y$ allora anche $\text{Span} \{ \text{traslaz. e omotetie di } p \} \subset Y$

e questo span \u00e9 grande, presumibilmente denso in X

$$\left(\text{Per esempio, se } p = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \text{ questo span \u00e9 un'algebra che separa i punti ...} \right)$$

Tuttavia procedere per densit\u00e0 non \u00e9 cos\u00ec semplice e quindi usiamo un'altra via.

L'idea che seguiamo è invece la seguente:

data $\rho \in \mathcal{Y}$ e $f \in L^1$ allora $\rho * f$, essendo "combinazione lineare" di traslate di ρ , dovrebbe essere pure in \mathcal{Y} . Infatti:

Lemma Sia $f \in L^1$, $\rho \in \mathcal{Y}$. Allora $f * \rho \in \mathcal{Y}$.

Dim $\mathcal{F}(f * \rho) = \hat{f}(y) \cdot \hat{\rho}(y)$ e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^*(f * \rho)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \hat{\rho}(y) e^{iyx} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) \hat{\rho}(y) e^{iyx} dy \end{aligned}$$

FUBINI
verifica ipotesi

$$\begin{aligned} &\rightarrow = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\rho}(y) e^{iy(x-t)} dy \right) f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\rho}(x-t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \rho(x-t) f(t) dt = 2\pi \rho * f. \end{aligned}$$

$\int \int |f(t) \hat{\rho}(y) e^{iyx}| dt dy$
 \parallel
 $\int \int |f(t)| |\hat{\rho}(y)| dt dy$
 \parallel
 $\|f\|_1, \|\hat{\rho}\|_1$
 \wedge
 $+\infty$

□

Non solo, siccome $\rho_\delta := \mathcal{G}_\delta \rho = \frac{1}{\delta} \rho\left(\frac{x}{\delta}\right)$ è pure in \mathcal{Y} (osservazione precedente!) abbiamo che $f * \rho_\delta \in \mathcal{Y} \forall \delta$ cioè

$$\mathcal{F}^* \mathcal{F}(f * \rho_\delta) = 2\pi f * \rho_\delta.$$

Ora passiamo al limite per $\delta \rightarrow 0$ per ottenere che $\mathcal{F}^* \mathcal{F} f = 2\pi f$.

La cosa non è immediatissima perché $\mathcal{F}^* \mathcal{F}$, per quel che ne sappiamo non è continua rispetto alla norma L^1

SUPPONIAMO $\int p = 1$

$$\mathcal{F}^* \mathcal{F}(f * p_\delta) = 2\pi f * p_\delta$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \downarrow \text{in } L^1 & \text{visto a} \\ \mathcal{F}^*(\hat{f} * \hat{p}_\delta) & & \text{lezione} \\ \parallel & 2\pi f & \end{array}$$

$$\mathcal{F}^*(\hat{f}(y) \cdot \hat{p}(\delta y))$$

in L^∞ \downarrow ← perché $\mathcal{F}^*: L^1 \rightarrow L^\infty$ è continua e $\hat{f}(y) \cdot \hat{p}(\delta y) \rightarrow \hat{f}(y)$ in L^1 infatti

$$\int |\hat{f}(y)| |\hat{p}(\delta y) - 1| dy \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

per convergenza dominata

• conv. punt.: $\hat{p}(\delta y) \rightarrow \hat{p}(0) = \int p(x) dx = 1$

quindi $|\hat{f}(y)| |\hat{p}(\delta y) - 1| \rightarrow 0 \quad \forall y.$

• Inoltre $|\dots| \leq |\hat{f}(y)| (\|\hat{p}\|_\infty + 1)$

↑
in L^1 per ipotesi

Ultima osservazione: i limiti in L^1 e L^∞ , se esistono, sono uguali!!



APV2
2012-13

Lezione 14
22/11/12, h: 14-16

Ricordo una conseguenza importante del teorema di inversione dimostrato la volta scorsa

COROLLARIO

Se $f_1, f_2 \in L^1$ e $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ allora $f_1 = f_2$ q.o.

Dim Posto $f := f_1 - f_2$ si ha $\hat{f} = 0$ e per il teorema di inversione $f = \frac{1}{2\pi} \check{\hat{f}} = \frac{1}{2\pi} \check{0} = 0$ q.o.
Quindi $f_1 = f_2$ q.o. □

Passiamo ora alla trasformata di Fourier in L^2 , cominciamo dall' enunciato olive:

Proposizione (Identità di Parseval)

Se $f \in L^1 \cap L^2$ allora $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$.

(attenzione : $L^2(\mathbb{R}) \not\subseteq L^1(\mathbb{R})!$)

Corollario Detto X il sottospazio di $L^2(\mathbb{R})$ dato

da $L^2 \cap L^1$, allora X è un sottospazio denso di L^2 e $\mathcal{F} : X \rightarrow L^2$ è $\sqrt{2\pi}$ -isometria.

Quindi \mathcal{F} si estende a tutto L^2 per continuità, ed è $\sqrt{2\pi}$ -isometria.

In particolare date $f, g \in L^2$

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle .$$

(2)

Dim. Densità di X in L^2 : data $f \in L^2$, $r > 0$,
 sia $f_r := f \cdot \mathbb{1}_{[-r,r]}$. Allora $f_r \in L^1 \cap L^2 = X \ \forall r$
 e $f_r \rightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R})$ per $r \rightarrow +\infty$.
 Il resto è ovvio... \square

Problema: come si calcola \hat{f} se $f \in L^2 \setminus L^1$?
 La definizione data finora è assai astratta...
 Vale tuttavia il seguente risultato:

Corollario Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e per q.o. $y \in \mathbb{R}$
 esiste

$$L(y) := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f(x) e^{-iyx} dx$$

allora $L = \hat{f}$ q.o.

Dim. Sia f_r come sopra. Allora $f_r \rightarrow f$ in L^2
 e quindi $\hat{f}_r \rightarrow \hat{f}$ in L^2 (\mathcal{F} è un'isometria...)
 e in particolare esiste $r_k \rightarrow +\infty$ t.c. $\hat{f}_{r_k} \rightarrow \hat{f}$ q.o.

D'altra parte $\hat{f}_r(y) = \int_{-r}^r f(x) e^{-iyx} dx$ e per
 ipotesi converge q.o. a $\hat{f}(y)$... \square

Nota È in realtà vero (ma non ovvio)
 che $\hat{f}_r \rightarrow \hat{f}$ q.o., e quindi l'ipotesi del corollario
 è sempre verificata (dovrebbe essere una
 variante del teorema di Lebesgue-Carleson...).

Dimostriamo ora l'identità di Parseval su $X := L^1 \cap L^2$.

(3)

Lemma Data $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ si ha

$$\langle \hat{f}; g \rangle = \langle f, \check{g} \rangle$$

attenzione: non è il prodotto scalare in L^2 , ma quello su $L^1 \times L^\infty$ dato dalla stessa formula...

$$\langle h, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \overline{g(x)} dx$$

Dim.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \overline{g(y)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} \overline{g(y)} dx dy$$

FUBINI } $\rightarrow = \iint f(x) \overline{g(y) e^{ixy}} dy dx$
 (è ok...!) $= \int f(x) \check{g}(x) dx.$ □

Sia ora $f \in L^1$, $g \in L^1$ f.c. $\hat{g} \in L^1$. Allora $\check{\check{g}} = 2\pi g$ e

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, \check{\check{g}} \rangle = \langle f, 2\pi g \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle.$$

Per dimostrare Parseval vorremmo mettere f al posto di g , ma non possiamo perché \hat{f} non appartiene a L^1 in generale.

Mettiamoci allora un' approssimazione di f di cui sappiamo che appartiene a L^1 e la trasformata pure....

Per esempio $f * \rho_\varepsilon$ con $\rho(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$.

Che la trasformata di $f * \beta_s$ sia in L^1 lo abbiamo visto nella lezione precedente).

Abbiamo allora che

$$\langle \hat{f}; \widehat{f * \beta_s} \rangle = 2\pi \langle f; f * \beta_s \rangle$$

Passiamo ora al limite per $s \rightarrow 0$.

Siccome $f \in L^2$, $f * \beta_s \rightarrow f$ in L^2 e quindi, per la continuità del prodotto scalare,

$$\langle f; f * \beta_s \rangle \rightarrow \langle f; f \rangle = \|f\|_2^2.$$

D'altra parte $\langle \hat{f}; \widehat{f * \beta_s} \rangle = \langle \hat{f}; \hat{f} \cdot \hat{\beta}(sy) \rangle =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|^2 e^{-s^2 y^2 / 2} dy$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|^2 dy \quad \text{per } s \rightarrow 0$$

per via del teorema di convergenza monotona

attenzione: siccome non sappiamo ancora che $\hat{f} \in L^2$, non possiamo usare il teoz. di conv. dominata. In questo punto usiamo il fatto che $\hat{\beta} = e^{-y^2/2}$ è pari e decrescente per $y > 0$, per cui $\hat{\beta}(sy) \uparrow \hat{\beta}(0) = 1$ per $s \downarrow 0$. In generale sarebbe andata bene una qualunque funzione β positiva t.c. $\int \beta dx = 1$ (ovviamente) e $\hat{\beta} \in L^1$. In tal caso si ha infatti che $\hat{\beta}(0) = \int \beta dx = 1$, $\hat{\beta}(sy) \rightarrow \hat{\beta}(0) = 1$ per $s \rightarrow 0$ (per continuità) e $\hat{\beta}(sy) \leq \hat{\beta}(0)$

per ogni $y \in \mathcal{S}$ (è un conto...), e questo basta
 a ottenere la convergenza desiderata.....

5

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\langle \widehat{f}; \widehat{f * p_\delta} \rangle = 2\pi \langle f; f * p_\delta \rangle$$

$$\downarrow$$

$$\| \widehat{f} \|_2^2$$

$$\downarrow$$

$$2\pi \| f \|_2^2$$

□

Osserviamo che molte (ma non tutte!) proprietà della TdF dimostrate per L^1

si estendono a L^2 . Per esempio

- $\widehat{T_{\hbar} f}(y) = e^{-iy\hbar} \widehat{f}(y)$
 - $\widehat{G_\delta f}(y) = \widehat{f}(\delta y)$
- } uso la densità di $X=L^2 \cap L^1$ in L^2 e la continuità dei vari operatori coinvolti....

Ma la convoluzione dà problemi, perché se $f, g \in L^2$ allora $\widehat{f} \cdot \widehat{g} \in L^1$ ma $f * g \in L^\infty$

e quindi non sappiamo definire $\widehat{f * g}$

(qui tornerebbero comode le definizioni avanzate di TdF che vedrete nel corso di Istituzioni...)

Una proprietà che ci torna utile è la seguente:

- se $f \in \mathcal{E}^1$, $f \in L^1$, $f' \in L^2$ allora $\widehat{f'}(y) = iy \widehat{f}(y)$.

Dimostrazione I adattiamo la dim. precedente:

$$\int_{-r}^r f'(x) e^{-iyx} dx = \left| f(x) e^{-iyx} \right|_{-r}^r + iy \int_{-r}^r f(x) e^{-iyx} dx$$

vero se $\rightarrow ?$ \downarrow per $r \rightarrow +\infty$ \downarrow per $r \rightarrow +\infty$
 $f \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$ 0 $\hat{f}(y)$

Se facciamo vedere che $f \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$, otteniamo che ~~anche~~ il primo termine converge a 0, da cui segue che $\int_{-r}^r f'(x) e^{-iyx} dx \rightarrow iy \hat{f}(y)$ e dunque $iy \hat{f}(y)$ è la TdF di f' .

In effetti è vero che se $f \in L^1$ oppure a L^2 e $f' \in L^2$ allora $f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R})$, ma la dimostrazione non è immediata.

NOTA: esaminando con cura il tutto si ottiene che basta trovare una successione $r_n \rightarrow +\infty$ t.c.
 $f(\pm r_n) \rightarrow 0$, e questa esiste sempre quando $f \in L^1$ oppure a L^2

Dimostrazione II

Dimostriamo l'identità desiderata per approssimazione:
 Se $f_\delta := f * \rho_\delta$ allora $f'_\delta = f * \rho'_\delta \in L^1$ e quindi

$$\hat{f}'_\delta = iy \hat{f}_\delta = iy \hat{f} \cdot \hat{\rho}_\delta$$

\downarrow in L^2 \downarrow quasi ovunque
 \hat{f}' $iy \hat{f}$

e siccome la convergenza L^2 implica, almeno di sottosuccessioni, la convergenza quasi ovunque, allora $\hat{f}' = iy\hat{f}$ q.o. \square

(7)

Corollario se $f \in \mathcal{E}^1$, $f \in L^1$ e $f' \in L^2$ allora $\hat{f} \in L^1$ e quindi vale la formula di inversione per f .

Dim. So che \hat{f} è continua e che $iy\hat{f} = \hat{f}' \in L^2$.

Ma allora

$$\int_1^{\infty} |\hat{f}(y)| dy = \int_1^{\infty} |iy\hat{f}(y)| \frac{1}{y} dy$$

$$\text{Hölder} \rightarrow \leq \left(\int_1^{\infty} |iy\hat{f}(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} dy \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

\uparrow finito! \uparrow finito!

Analogamente si ottiene che $\int_{-\infty}^1 |\hat{f}(y)| dy < +\infty \dots \square$

Attenzione Il fatto che su L^2 si abbia $\mathcal{F}^* \mathcal{F} = 2\pi \text{Id}$ non significa che per f in L^2 vale la formula di inversione. Infatti in questo caso \mathcal{F}^* (e \mathcal{F}) non sono definite tramite i soliti integrali ma al più (se valgono) da integrali impropri...

Esercizio

Calcolo di TofF di $f(x) := \frac{x}{1+x^2}$.

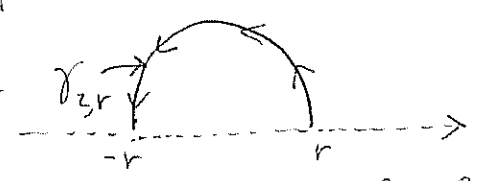
Nota $f \in L^2 \setminus L^1$.

Via 1 Calcolo come integrale improprio usando il metodo dei residui:

$$\hat{f}(y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{x e^{-iyx}}{1+x^2} dx$$

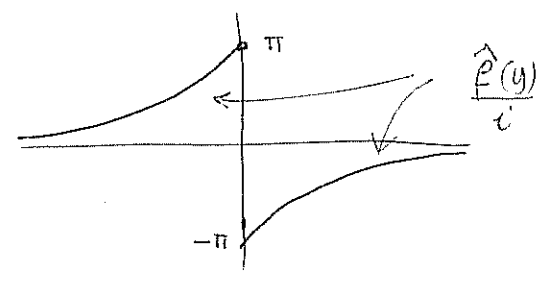
$$\begin{aligned} \text{per } y < 0 \quad \left| \longrightarrow \right. &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z e^{-iyz}}{1+z^2}; i\right) \\ &= 2\pi i \left. \frac{z e^{-iyz}}{2z} \right|_{z=i} = i\pi e^y \end{aligned}$$

(attenzione bisogna verificare che il contributo dell'it. di $\frac{z e^{-iyz}}{1+z^2}$ su γ_{3r} (vedi diagramma) tende a 0, e questo è meno ovvio del solito).



Usando poi il fatto che f reale & dispari $\Rightarrow \hat{f}$ puram. immaginaria & dispari si ottiene

$$\text{che } \hat{f}(y) = \begin{cases} -i\pi e^{-y} & \text{se } y > 0 \\ i\pi e^y & \text{se } y < 0 \end{cases} = -i\pi \operatorname{sgn}(y) e^{-|y|}.$$

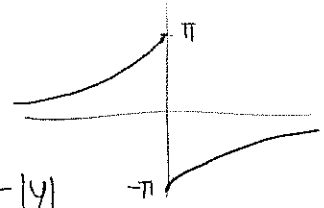


Calcolo alternativo: posto $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ si ha che

(9)

$$\widehat{-ixg(x)} = \widehat{g}'(y) = (\pi e^{-|y|})' = -\pi e^{-|y|} \operatorname{sgn}(y)$$

$$\parallel \\ -i\widehat{f}$$



e quindi, di nuovo $\widehat{f} = -i\pi \operatorname{sgn}(y) e^{-|y|}$.

NOTA questa procedura non è pienamente

giustificata perché la ipotesi per la

formula $\widehat{-ixg(x)} = \widehat{g}'(y)$ sono che $g(x)$ e $xg(x) \in L^1$,

mentre qui $xg(x) \notin L^1$!

ESERCIZIO

Dimostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ ha supporto compatto, allora \hat{f} è analitica.

[NOTA: che \hat{f} sia C^∞ segue dal fatto che $f(x)x^n \in L^1$ per ogni $n \dots$]

$$\text{Siccome } \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx$$

Considero la funzione

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-izx} dx \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

L'idea è che questa funzione è una "media pesata" di funzioni olomorfe in z e quindi dovrebbe essere olomorfa, almeno dove è ben definita.

Facciamo quindi vedere che se f ha supporto compatto allora $g(z)$ è definita per ogni $z \in \mathbb{C}$. Infatti se $f(x) = 0$ per $|x| \geq m$ si ha che

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-ixz}| dx &= \int_{-m}^m |f(x)| e^{+x \operatorname{Im} z} dx \\ &\leq e^{m |\operatorname{Im} z|} \int_{-m}^m |f(x)| dx < +\infty. \end{aligned}$$

(2)

Usando il teorema di convergenza dominata si ottiene inoltre che g è continua.

Facciamo vedere che $\bar{\gamma}$ è ologomorfa dimostrando che $g(z)dz$ è una forma esatta.

Dato γ cammino chiuso in \mathbb{C} si ha che

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_a^b g(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

$$= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) dx dt$$

Fubini \longrightarrow $= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-a}^b e^{-ix\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) dt dx$

Controlla $= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{\gamma} e^{-ixz} dz dx = 0$

$$\iint |f(x) e^{-i\gamma(t)x} \dot{\gamma}(t)| dt dx$$

$$\wedge \int |f(x)| e^{\text{Im} \gamma \cdot x} |\dot{\gamma}(t)| dt dx$$

$$\wedge \int e^{Mx} |f(x)| |\dot{\gamma}(t)| dt dx = e^{Mx} \|f\|_1 \|\dot{\gamma}\|_1$$

\uparrow M t.c. $|\dot{\gamma}(t)| \leq M$

$\llcorner \longleftarrow$ perché e^{-ixz} è ologomorfa e definita su \mathbb{C} , quindi $\int e^{-iyz} dz$ è esatta...

Esercizio Sia $f(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ funzione razionale

con $\deg q < \deg p$, e senza poli su \mathbb{R} ,

cioè p non si annulla mai su \mathbb{R} .

Allora $f \in L^2$ e \hat{f} è \mathcal{C}^∞ e anzi analitica su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

← Suppongo che q e p non abbiano fattori comuni...

Dimostrazione

Per $y < 0$ ho che (...)

$$\hat{f}(y) = 2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ zero di} \\ p \text{ nel semipiano} \\ \text{superiore}}} \text{Res} \left(\frac{f(z) e^{-iyz}}{p(z)}; z_i \right)$$

Ma $2\pi i \text{Res}(f(z) e^{-iyz}, z_i) = \int_{\gamma_i} f(z) e^{-iyz} dz$

con γ_i cammino che γ_i gira attorno a z_i (e a nessun altro z_j con $j \neq i$).

Osserviamo ora che $y \mapsto \int_{\gamma_i} f(z) e^{-iyz} dz =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\int_{\gamma_i} f(z) (-iz)^n dz \right] y^n \quad \text{è analitica in } y$$

infatti $\left| \int_{\gamma_i} f(z) (-iz)^n dz \right| \leq \text{Lunghezza}(\gamma_i) \cdot \sup_{z \in \gamma_i} |f(z)| \cdot |\sup \gamma_i|^n$

$$\leq C \cdot M^n$$

e quindi la serie di potenze ha raggio di convergenza infinito.

Un' applicazione della TdF.

Risoluzione dell' eq. del calore su \mathbb{R} .

Consideriamo il problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{su } [0, +\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 & \leftarrow \text{dato iniziale} \end{cases}$$

(tralasciamo per ora la questione delle condizioni al bordo).

Procediamo formalmente per risolvere (P) tramite la TdF.

Poniamo quindi $\hat{u}(t, y) := \widehat{u(t, \cdot)}(y)$ (cioè \hat{u} è la trasformata di F. di u rispetto alla sola variabile x).

Otteniamo allora che $\widehat{u_t} = (\hat{u})_t$ e

$$\widehat{u_{xx}} = (-iy)^2 \hat{u} = -y^2 \hat{u}. \text{ Pertanto (P) diventa}$$

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -y^2 \hat{u} \\ \hat{u}(0, \cdot) = \hat{u}_0 \end{cases}$$

Pertanto per ogni $y \in \mathbb{R}$ la funzione $\hat{u}(\cdot, y)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = -y^2 z(t) \\ z(0) = \hat{u}_0(y) \end{cases}$$

$$\text{dunque } \hat{u}(t, y) = \hat{u}_0(y) \cdot e^{-y^2 t}$$

Osserviamo ora che $e^{-y^2 t} = \mathcal{F}(\rho_{\sqrt{2t}})$ con

$$\rho_{\sqrt{2t}} = \underbrace{\sigma}_{\frac{1}{\sqrt{2t}}} \underbrace{\rho}_{\frac{1}{\sqrt{2t}}} \text{ e } \rho(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}. \text{ Cio\`e } \rho_{\sqrt{2t}}(x) = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$$

$$\left[\text{Infatti } \mathcal{F}(\rho_{\sqrt{2t}}) = \hat{\rho}(\sqrt{2t} y) = e^{-(\sqrt{2t} y)^2/2} = e^{-ty^2} \right]$$

Pertanto $\hat{u}(t, \cdot) = \hat{u}_0 \cdot \hat{\rho}_{\sqrt{2t}} = \widehat{u_0 * \rho_{\sqrt{2t}}}$ e dunque

$$u(t, x) = u_0 * \rho_{\sqrt{2t}}(x)$$

$$(*) = u_0 * \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}(x)$$

↑
nucleo del calore (su \mathbb{R})

Domande: La formula (*) ci da effettivamente una soluzione di (P)? se si \u00e8 unica?

Rispondiamo in modo preciso alla prima domanda:

Proposizione Sia $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C})$ una funzione continua e limitata.

Allora la funzione

$$u(t, x) := \begin{cases} u_0(x) & \text{se } t=0 \\ u_0 * \rho_{\sqrt{2t}}(x) & \text{se } t>0 \end{cases}$$

- \u00e8 continua su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$;
- \u00e8 \mathcal{C}^∞ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$;
- soddisfa $u_t = u_{xx}$ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ (e ovviamente $u(0, \cdot) = u_0$).

Dimostrazione della continuità per $t=0$

Questo è il punto chiave, quello in cui si stabilisce che u è effettivamente una soluzione di $u_t = u_{xx}$ con dato iniziale u_0 ...

Devo far vedere che fissato $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x', t) \rightarrow u(x, 0) \quad \text{se } x' \rightarrow x \text{ e } t \rightarrow 0. \quad \boxed{t > 0}$$

Osservo che

$$\begin{aligned}
 u(x', t) - u(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x'-y) \rho_{\sqrt{4t}}(y) dy - \overbrace{u_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\sqrt{4t}}(y) dy}^1 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u_0(x'-y) - u_0(x)) \rho_{\sqrt{4t}}(y) dy \\
 &\xrightarrow{\substack{\text{cambio di} \\ \text{variabile} \\ y = \sqrt{4t} z}} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(u_0(x' - \sqrt{4t} z) - u_0(x))}_{V_{t, x'}(z)} \rho(z) dz
 \end{aligned}$$

Faccio vedere la tesi, cioè che questo integrale tende a 0 quando $t \rightarrow 0, x' \rightarrow x$, per convergenza dominata. In effetti per ogni $z \in \mathbb{R}$ si ha che

$$V_{t, x'}(z) \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0, x' \rightarrow x$$

perché u_0 è continua. E come dominazione ho che

$$|V_{t, x'}(z)| \leq 2 \|u_0\|_{\infty} |\rho(z)| \in L^1.$$

Dimostrazione (parziale) della regolarità per $t > 0$

Regolarità in x Siccome $u(t,x) = u_0 * \rho_{\sqrt{4t}}(x)$
la regolarità C^∞ nella variabile x segue
da quella della convoluzione dimostrata in
precedenza. L'unica cosa da verificare è che
 $\rho_{\sqrt{4t}}(x)$ è C^∞ in x (ovvio!) e che

$$D_x^k \rho_{\sqrt{4t}} \in L^1 \text{ per ogni } k=0,1,\dots$$

Ma questo segue dal fatto (dimostrabile per
induzione su k) che $D_x^k \rho_{\sqrt{4t}}$ è della forma

$$\text{polinomio}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}$$

NOTA $D_x^k u = u_0 * D_x^k \rho_{\sqrt{4t}}$

Regolarità in t

In questo caso osservo che

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-y) \frac{e^{-y^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} dy$$

e quindi la regolarità di $u(t,x)$ in t segue
da un'opportuna versione del teorema di
derivazione sotto il segno di integrale:

Lemma Sia $g: [a,b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione misurabile
tale che
• $g(\cdot, y) \in C^1([a,b]) \forall y \in \mathbb{R}$
• $\partial_t g(t, \cdot)$ e $g(t, \cdot) \in L^1 \forall t \in [a,b]$ e
anzi $|\partial_t g(t,y)| ; |g(t,y)| \leq \alpha(y)$ con $\alpha \in L^1(\mathbb{R})$.

Posto allora

$$G(t) := \int_{\mathbb{R}} g(t, y) dy \quad \forall t \in [a, b]$$

Si ha che $G \in C^1([a, b])$ e

$$G'(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g}{\partial t}(t, y) dy \quad \forall t \in [a, b].$$

Applico quindi il Lemma con $g(t, y) := u_0(x-y) \frac{e^{-y^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$.

Per ottenere che $u(t, x)$ è C^∞ in t mi basta dunque dimostrare che per ogni $m, s > 0$ ed ogni $h = 0, 1, 2, \dots$ posso trovare $\alpha_h(y) \in L^1$ t.c.

$$\left| u_0(x-y) D_t^h \left(\frac{e^{-y^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} \right) \right| \leq \alpha_h(y) \quad \text{per } t \in [s, m] \text{ e } y \in \mathbb{R}$$

Questo è possibile perché u_0 è limitata e $D_t^h \left(\frac{e^{-y^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} \right)$ è della forma

$$D_t^h(\dots) = t^{-(h+1/2)} \text{polin}\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) \cdot e^{-y^2/4t}$$

e quindi ~~$D_t^h(\dots)$~~ stimando il polinomio

con $M(1 + \frac{|y|}{\sqrt{t}})^d$ si ha che, per $s \leq t \leq m$,

$$|D_t^h(\dots)| \leq s^{-(h+1/2)} M(1 + s^{-d/2} |y|^d) e^{-y^2/4m}$$

e quest'ultima è chiaramente una funzione in L^1 .

NOTA $D_t^h u = u_0 * \left(D_t^h \rho_{\sqrt{2t}} \right).$

Dimostrazione del Lemma

(9)

Sia $H(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g}{\partial t}(t, y) dy$. Ho che, per convergenza dominata, sia G che H sono funzioni continue su $[a, b]$. Per far vedere che G è C^1 e $G' = H$ allo stesso tempo mi basta far vedere che

$$\int_a^t H(s) ds = G(t) - G(a) \quad \forall t \in [a, b]$$

Qui mi serve la dominazione $\alpha \dots$

E infatti

$$\int_a^t H(s) ds = \int_a^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(s, y) dy \right) ds$$

FUBINI

posso applicarlo perché

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t} \right| \leq \alpha(y) \in L^1$$

.....

$$\rightarrow = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_a^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, y) ds \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t, y) - g(a, y) dy = G(t) - G(a). \quad \square$$

Ulteriore regolarità di u per $t > 0$

Per ora abbiamo solo dimostrato che per $t > 0$ u è C^∞ separatamente nelle due variabili.

Per ottenere che u è C^∞ in entrambe le variabili si deve far vedere (per induzione su k e h) che $D_t^h D_x^k u$ esiste e

$$D_t^h D_x^k u = u_0 * \left(D_t^h D_x^k \rho_{\sqrt{2t}} \right).$$

O mettiamo i dettagli.

u soddisfa $u_t = u_{xx}$

Abbiamo visto prima che $u_t = u_0 * D_t p_{\sqrt{4t}}$ e
 $u_{xx} = u_0 * D_x^2 p_{\sqrt{4t}}$. Basta dunque dimostrare
 che $p_{\sqrt{4t}}$ soddisfa l'equazione del calore,
 e questo è un semplice conto.

Sull'unicità della soluzione di (P)

La soluzione di (P) non è mai unica, e infatti
 esiste $u: [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ soluzione non banale dell'eq
 $u_t = u_{xx}$ con dati iniziali $u(0, \cdot) \equiv 0$.

La ragione è da ricercarsi nella mancanza di
 "condizioni al bordo". Si noti che il problema
 nelle variabili di Fourier ($\hat{u}_t = -y^2 \hat{u}$, $\hat{u}(0, \cdot) = \hat{u}_0$) ha
 invece una sola soluzione.

Il punto è che nell'applicare la TdF all'equazione
 si escludono automaticamente le soluzioni u la
 cui trasformata non si può calcolare.

E infatti, usando la TdF, è possibile dimostrare
 l'unicità della soluzione u in certe classi di
 funzioni per cui la TdF è calcolabile. Tuttavia
 nessuno di questi risultati è "ottimale", e
 quindi trascuriamo di entrare nei dettagli.

NOTA La mancanza di unicità si spiega anche
 in termini fisici come un'issione di calore
 "dall'infinito", (e con la velocità di propagazione infinita...).

Disuguaglianza di Heisenberg (in effetti è stato fatto nella lezione precedente)

Per ogni $u \in L^2(\mathbb{R})$ si ha

$$\|x \cdot u(x)\|_2 \|y \cdot \hat{u}(y)\|_2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|u\|_2^2$$

Dimostrazione

Ci limitiamo per semplicità al caso $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ (l'estensione al caso generale sembra essere tecnicamente complicata).

Ricordo che $u \in \mathcal{C}_c^1 \Rightarrow \hat{u} = iy \hat{u}$ e quindi

$$\|x \cdot u\|_2 \cdot \|y \cdot \hat{u}\|_2 = \|x \cdot u\|_2 \cdot \|\hat{u}\|_2$$

per Parseval $\rightarrow = \|x \cdot u\|_2 \sqrt{2\pi} \|\hat{u}\|_2$

per Schwartz-(- Hölder) $\rightarrow \geq \sqrt{2\pi} |\langle -xu; \hat{u} \rangle|$

$$\frac{1}{2}(|u|^2)' = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)' = u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2 = \operatorname{Re}(u \dot{\bar{u}}) \geq \sqrt{2\pi} \operatorname{Re} \langle -xu; \hat{u} \rangle = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -x \operatorname{Re}(u \bar{\hat{u}}) dx$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{-cb}^{cb} -x \left(\frac{|u|^2}{2}\right)' dx$$

integro per parti usando il fatto che u ha supporto compatto $\rightarrow = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[x |u|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|u\|_2^2$$



Significato Limitiamoci al caso in cui $\|u\|_2 = 1$
 per cui $\|\hat{u}\|_2 = \sqrt{\pi}$ e quindi $\underbrace{|u|^2 dx}_P$ e $\underbrace{\frac{|\hat{u}|^2 dy}_{2\pi}}_{\hat{P}}$ sono
 distribuzioni di probabilità.

A meno di traslazioni di u e \hat{u} (cioè
 moltiplicazione di u per e^{ix}) si può anche
 assumere che il valore atteso di
 queste due distribuzioni di probabilità
 (cioè $E_P(x)$ e $E_{\hat{P}}(y)$) siano nulli.

In tal caso $\int x^2 |u(x)|^2 dx = \|xu\|_2^2$ è la
 varianza di P (cioè $\text{Var}_P(x)$) e $\int y^2 |\hat{u}(y)|^2 dy$
 è la varianza di \hat{P} .

Quello che la disuguaglianza dice è che
 il prodotto delle due varianze non può
 essere piccolo: se la prima è piccola
 allora la seconda è grande e viceversa.
 Non possiamo "concentrare", sia u che \hat{u} ...

Interpretazione fisica (per sentito dire).

Se P rappresenta la distribuzione di probabilità
 della posizione di una particella, allora \hat{P}
 rappresenta la distrib. di prob. della velocità
 della stessa, e quindi questa disuguaglianza
 (a meno di costanti) è il principio di
 indeterminazione di Heisenberg.

Il caso dell'uguaglianza.

Quando vale = nella disug. di Heisenberg?

Controllando la dimostrazione troviamo solo due disuguaglianze:

$$\|xu\|_2 \|u\|_2 \geq |\langle -xu, u \rangle| \geq \operatorname{Re} \langle -xu, u \rangle.$$

↑
Schwartz

Sappiamo che la prima è un = sse $-xu$ e u sono linearmente dip., cioè esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $u = -\alpha xu$.

In questo caso la seconda è un = sse il prodotto scalare $\langle -xu, u \rangle = \bar{\alpha}$ è un numero reale positivo.

Dunque vale = in Heisenberg sse esiste $\alpha \in [0, +\infty)$ t.c. $u = -\alpha xu$. Risolvendo questa eq. differenziale si ottiene $u = \beta e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$ con $\beta \in \mathbb{R}$.

In altre parole vale = nella disug. di H.

sse u è una distribuzione Gaussiana centrata in 0.

Ovviamente questa non è una dimostrazione rigorosa, visto che l'abbiamo derivata da una dimostrazione di H. valida solo per funzioni \mathcal{E}_c^1 (cosa che esclude le funzioni L^2 generiche quanto le Gaussiane....)

Ultime osservazioni sulla TdF. (Chiacchiere)

La trasformata di Fourier trasforma equazioni differenziali in equazioni algebriche, e da questo
lineari!

deriva molta della sua importanza.

Inoltre la TdF può essere definita non solo per funzioni su \mathbb{R} ma anche per funzioni su \mathbb{R}^d .

Data infatti $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ si pone

$$\mathcal{F}f(y) = \hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx \quad \forall y \in \mathbb{R}^d$$

analogamente si definisce $\check{f} = \mathcal{F}^* f$ e se $f, \hat{f} \in L^1$ vale la formula di inversione $\mathcal{F}^* \mathcal{F} f = (2\pi)^d f$.

Valgono inoltre le solite regole. In particolare se $f \in \mathcal{E}^1$ e $f, \nabla f \in L^1$, allora

$$\partial_j \hat{f}(y) = iy_j \hat{f}(y)$$

Applicando questa formula otteniamo che l'equazione di Laplace/Poisson

$$\Delta u = f$$

diventa

$$-|y|^2 \hat{u} = \hat{f}$$

e dunque

$$\hat{u} = -\frac{1}{|y|^2} \hat{f}$$

(5)

Ora, se trovassimo una funzione g su \mathbb{R}^d tale che $\hat{g} = -\frac{1}{|y|^2}$ avremmo

$$\hat{u} = \hat{g} \cdot \hat{f}$$

e quindi

$$u = g * f$$

Il problema qui è che $-\frac{1}{|y|^2}$ non appartiene a nessuno degli spazi per cui sappiamo definire \mathcal{F} o \mathcal{F}^* (cioè L^1 e L^2). Tuttavia si può rendere rigoroso questo discorso definendo la TdF in un contesto molto più ampio (vedi corso di Istituzioni).

[NOTA in effetti, nel caso specifico dell'eq. di Laplace la g è nota dalla fisica: infatti $\Delta u = f$ è l'eq. che definisce il potenziale del campo gravitazionale generato dalla distribuzione di massa f . (elettrico) (carica)

ed è noto che $u = g * f$ dove g è il potenziale del campo generato dalla massa puntuale unitaria, vale a dire, per $d=3$, $\frac{C}{|x|}$ con C costante opportuna

Tuttavia il discorso sopra vale per tutte le eq. diff. alle derivate parziali lineari e con coefficienti costanti.

NOTA Attenzione: come già osservato per l'eq. del calore, risolvere eq. tramite TdF implica (talvolta) una selezione delle soluzioni ammissibili. Lo vediamo chiaramente nel seguente caso unidim.

$$i\hat{u} = u$$

In tal caso otteniamo infatti

$$iy\hat{u} = \hat{u}$$

e dunque

$$(iy-1)\hat{u} = 0$$

e siccome $iy-1 \neq 0$ ovunque

$$\hat{u} = 0$$

che implica $u=0$.

Le altre soluzioni dell'eq. $i\hat{u} = u$ sono andate "perse", perché non sono funzioni per cui si può calcolare la TdF.

NOTA Si osservi che la TdF permette di rendere rigoroso il seguente argomento "da fisici", per dimostrare che la divergenza di un rotore è sempre nulla, cioè

$$\text{div}(\text{rot} F) = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

(e \times ; \cdot come prodotto vett. e scalare di vettori)

L'argomento è che, trattando ∇ come un vettore in \mathbb{R}^3

$$\nabla \times F \perp \nabla \text{ e quindi } \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0.$$

Questo ragionamento può essere giustificato tramite la TdF:

(e anche la notazione $\nabla \times$ e $\nabla \cdot$ per rotore e diverg.)

$$\widehat{\operatorname{div} F} = \widehat{\sum_j \partial_j F_j} = \sum_j i y_j \hat{F}_j = i y \cdot \hat{F}$$

(7)

e analogamente si ottiene che

$$\begin{aligned} \widehat{\operatorname{rot} F} &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ i y_1 \hat{F}_1 & i y_2 \hat{F}_2 & i y_3 \hat{F}_3 \end{pmatrix} \\ &= i y \times \hat{F}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\widehat{\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)} = i y \cdot (i y \times \hat{F}) = 0$$

per le "solite" proprietà del prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 .

.

APV2
2012-13

Lezione 16
27/11/12, h. 11-13

7

Passiamo ora al penultimo argomento del corso:
superfici in \mathbb{R}^n (di dimensione d e classe E^k).

Prendiamo alcune osservazioni (ed esercizi)
sulla definizione di differenziale di una
mappa $f: A$ aperto in $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe E^1 .

Definizione Dico che f è diff. in x_0 se esiste
 $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare (il differenziale di f in x_0)
t.c.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Lh + o(|h|) \quad (\text{per } h \rightarrow 0)$$

L è unica e viene indicata con

$$df(x_0)$$

(scriviamo $df(x_0)h$ oppure $\langle df(x_0); h \rangle$ al posto
di $(df(x_0))(h), \dots$)

NOTA

La matrice associata a $df(x)$ è la matrice jacobiana $\nabla f(x_0)$.
(o gradiente)

Notare che la definizione di differenziale è intrinseca e si può estendere a mappe tra spazi vettoriali dotati di norma (per definire la nozione di "o, piccolo") mentre per definire la matrice jacobiana dobbiamo scegliere delle basi sia per lo spazio di partenza che per quello di arrivo.

V sp. vett.

Per funzioni $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si può definire il gradiente come vettore a patto di avere un prodotto scalare su V (che dà un'identificazione canonica di V e di V' cioè dello spazio delle applicazioni lineari da V in \mathbb{R}).

NOTA

Nel caso di mappe date da una formula non scritta in coordinate il differenziale può essere più facile da calcolare del gradiente...

Esempio 1

matrici reali $n \times n$

Sia $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ la mappa data da $f(X) := \det X$.

Questa mappa è C^∞ (è una funzione polinomiale delle coordinate di X).

Calcoliamo $df(I)$.

Osserviamo che

$$\det(I+H) = \sum_{\sigma: I \rightarrow I} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (I+H)_{i, \sigma(i)}$$

permutazioni degli indici

9

Ora, se σ non è l'identità, ci sono almeno due indici $i_1 \neq i_2$ t.c. $\sigma(i_1) \neq i_1$ e $\sigma(i_2) \neq i_2$ e quindi $(I+H)_{i_1, \sigma(i_1)} = H_{i_1, \sigma(i_1)} = O(|H|)$ e lo stesso per $(I+H)_{i_2, \sigma(i_2)}$.

Quindi il prodotto $\prod_{i=1}^n (I+H)_{i, \sigma(i)}$ è $O(|H|^2)$.

Quindi

$$\det(I+H) = \prod_{i=1}^n (I+H)_{i, \sigma(i)} + O(|H|^2)$$

$$= \prod_{i=1}^n (1 + H_{i, \sigma(i)}) + O(|H|^2)$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^n H_{i, \sigma(i)} + O(|H|^2)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \\ \det(I) & \text{tr}(H) & = \text{traccia di } H \end{array}$$

Siccome $H \rightarrow \text{tr}(H)$ è un'applicazione lineare, deve essere il differenziale cercato, cioè

$$d\mathcal{f}(I) : H \mapsto \text{tr}(H).$$

Calcoliamo ora $d\mathcal{f}(A)$ per A qualunque.

Cominceremo supponendo che A sia invertibile.

Allora

$$\det(A+H) = \det(A(I+\bar{A}^{-1}H)) =$$

$$= \det A \cdot \det(I+\bar{A}^{-1}H)$$

$$= \det A \cdot (1 + \text{tr}(\bar{A}^{-1}H) + O(|H|^2))$$

$$= \det A + \text{tr}(\underbrace{\det A \cdot \bar{A}^{-1}}_{\text{matrice dei cofattori}} H) + O(|H|^2)$$

matrice dei cofattori
(o complementi algebrici)
di A , indicata con \tilde{A} .

Quindi $df(A) : H \rightarrow \text{tr}(\tilde{A}H)$.

Estendiamo infine questa formula ad A qualunque per continuità, usiamo cioè che le matrici A invertibili (quella per cui la formula è dimostrata) sono dense, che l'applicazione $A \mapsto df(A)$ è continua (perché f è C^1) e che anche $A \mapsto \text{tr}(\tilde{A}H)$ è continua.

Nota Perché le matrici invertibili sono dense?

In effetti si dimostra che l'insieme D delle matrici con determinante 0 è chiuso (ovvio per la continuità del determinante) e a parte interna vuota. Per dimostrare quest'ultima affermazione si può procedere in molti modi. Uno è la seguente osservazione: data X matrice di rango $k < d$, ci sono k colonne lin. indep., supponiamo X_1, \dots, X_k . Prendiamo ora $d-k$ vettori Y_{k+1}, \dots, Y_d t.c. $X_1, \dots, X_k, Y_{k+1}, \dots, Y_d$ sono linearmente indep. e poniamo per ogni $\varepsilon > 0$

$$X_\varepsilon := (X_1, \dots, X_k, X_{k+1} + \varepsilon Y_{k+1}, \dots, X_d + \varepsilon Y_d)$$

Chiaramente $X_\varepsilon \rightarrow X$ per $\varepsilon \rightarrow 0$ e X_ε ha rango n $\forall \varepsilon > 0$ (cioè $\det(X_\varepsilon) > 0 \forall \varepsilon$) perché lo span delle colonne di X_ε contiene $X_1, \dots, X_k, Y_{k+1}, \dots, Y_d$ e quindi ha dimensione d .

Esempio Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ l'insieme delle matrici invertibili, cioè quelle con $\det A \neq 0$ (dunque A è aperto) e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ data da

$$f(x) := x^{-1}.$$

Calcoliamo $df(x)$ in tre modi differenti:

[Osserviamo preliminarmente che $x^{-1} = \frac{1}{\det x} \cdot \tilde{x}$]
 | è \mathcal{C}^∞ perché $x \rightarrow \det x$ è \mathcal{C}^∞ (anzi polinomiale) |
 | e $x \rightarrow \tilde{x}$ è \mathcal{C}^∞ (anzi polinomiale — ricorde che |
 | le coordinate di \tilde{x} sono il det. di un minore di x).]

Primo calcolo

Calcolo per scomposizione $df(I)$ usando la seguente formula

$$f(I+H) = (I+H)^{-1} = I - H + H^2 - H^3 + \dots$$

(commenti dopo) da cui segue

$$f(I+H) = I - H + O(\|H\|^2)$$

e quindi

$$df(I): H \rightarrow -H.$$

$$\begin{aligned} \text{Inoltre } f(x+H) &= (x+H)^{-1} = [x(I+x^{-1}H)]^{-1} = \\ &= (I+x^{-1}H)^{-1} x^{-1} = (I - x^{-1}H + O(\|H\|^2)) x^{-1} \\ &= x^{-1} - x^{-1}Hx^{-1} + O(\|H\|^2) \end{aligned}$$

e quindi

$$df(x): H \rightarrow -x^{-1}Hx^{-1}.$$

NOTA : Su $\mathbb{R}^{n \times n}$ possiamo considerare due norme, quella euclidea

$$|x| := \sqrt{\sum_{ij} x_{ij}^2}$$

e quella operatoriale

$$\|x\| := \sup_{|v| \leq 1} |xv|$$

Queste due norme sono equivalenti, come tutte le norme su spazi vettoriali di dimensione finita, ovvero esistono $0 < c_1 \leq c_2 < +\infty$ t.c.

$$c_1 |x| \leq \|x\| \leq c_2 |x|$$

In particolare le notazioni di "o, piccolo" e "o, grande" non dipendono dalla scelta della norma.

Il vantaggio della seconda norma è che

$$\|x_1 \cdot x_2\| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\|.$$

Usando questa norma si vede subito che la serie

$$I - H + H^2 - H^3 + \dots$$

converge totalmente per $\|H\| < 1$, infatti

$$\begin{aligned} & \|I\| + \|H\| + \|H^2\| + \|H^3\| + \dots \\ & \leq 1 + \|H\| + \|H\|^2 + \|H\|^3 + \dots = \frac{1}{1 - \|H\|} \end{aligned}$$

Fatto questo si verifica facilmente che

$$(I + H)(I - H + H^2 - H^3 + \dots) = I$$

ovvero che $(I + H)^{-1} = I - H + H^2 - H^3 + \dots$

(13)

secondo calcolo (non usiamo lo sviluppo di $(I+H)^{-1}$...)

Siccome $(I+H)(I-H) = I - H^2$, si ha che

$$\begin{aligned} I &= (I+H)(I-H) + H^2 = (I+H)(I-H + (I+H)^{-1}H^2) \\ &= (I+H)(I-H + O(H^2)) \end{aligned}$$

↑
esiste per H
suff. piccolo

e quindi

$$(I+H)^{-1} = I - H + O(H^2).$$

ovvero $df(I): H \rightarrow -H$.

Il resto della dimostrazione è come prima.

terzo calcolo

Usiamo la seguente proprietà chiave del differenziale:

data $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabile in x_0 e

$\gamma: [0, *) \rightarrow A$ cammino \mathbb{R}^1 t.c. $\gamma(0) = x_0$, allora

$$(f \circ \gamma)'(0) = df(x_0) \cdot \dot{\gamma}(0)$$

Nel caso specifico so che per ogni $\gamma: [0, *) \rightarrow A$ con

si ha (poiché $X \cdot f(x) = I$)

$$\dot{\gamma}(0) = x_0$$

$$\gamma(t) \cdot f(\gamma(t)) = I$$

← (prodotto di matrici)

e derivando questa identità si ottiene

$$\dot{\gamma}(t) \cdot f(\gamma(t)) + \gamma(t) \cdot df(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) = 0$$

ovvero, per $t=0$

$$\dot{\gamma}(0) \cdot \underbrace{f(\gamma(0))}_{X_0^{-1}} + \underbrace{\gamma(0)}_{X_0} \underbrace{(df(\gamma(0)) \cdot \dot{\gamma}(0))}_{X_0} = 0$$

ovvero

$$df(x_0) \cdot \dot{\gamma}(0) = -X_0^{-1} \dot{\gamma}(0) X_0^{-1}$$

e ricominciamo l'insieme di tutti i possibili $\gamma(t)$
e tutto $\mathbb{R}^{n \times n}$ abbiamo ottenuto che

$$df(x_0) : H \rightarrow -X_0^{-1} H X_0^{-1}$$

NOTA Ovviamente avremmo dovuto dimostrare che
date mappe da \mathbb{R} in $\mathbb{R}^{n \times n}$ la derivata del
prodotto è data dalle solite regole, ma questo
è ovvio...

Concludo ricordando le proprietà fondamentali
del differenziale; ma la abbiamo già usata:

- 1) se $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è diff. in x_0
e $\gamma : [0, *) \rightarrow A$ è un cammino Et
t.c. $\gamma(0) = x_0$, allora

$$(f \circ \gamma)'(0) = df(x_0) \cdot \dot{\gamma}(0)$$

- 2) Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow A' \subset \mathbb{R}^{n'}$ e $f' : A' \subset \mathbb{R}^{n'} \rightarrow \mathbb{R}^{n''}$
sono diff. in x_0 e $y_0 = f(x_0)$ resp., allora
 $d(f' \circ f)(x_0) = df'(y_0) \cdot df(x_0)$.
-

Negli ultimi minuti della lezione do la definizione di superficie di dimensione d e classe \mathcal{E}^k in \mathbb{R}^n .

Il punto di partenza è la seguente proposizione:

Proposizione Sia $k=1,2,\dots,\infty$, $0 < d < n$.

Dato $S \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$, sono fatti equivalenti:

- (i) esiste U int. aperto di x_0 e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ di classe \mathcal{E}^k con $df(x)$ di rango $\max(n-d)$ per ogni $x \in U$ t.c.

$$S \cap U = \bigcup_{m=1}^m \{x: f(x) = 0\}$$

- (ii) esiste U int. ap. di x_0 e $g: A$ aperto in $\mathbb{R}^d \rightarrow S \cap U$ mappa tale che
- g è un omeomorfismo
 - $dg(s)$ ha rango $\max(=d) \forall s \in A$

Definizione S come sopra si dice una superficie (senza bordo) di dim. d e classe \mathcal{E}^k se per ogni $x_0 \in S$ vale (i) o (ii).

NOTE a) Riassumiamo (i) dicendo che in un int. di x_0 l'insieme S ammette una "buona" equazione (o eq. non degenerate); il punto chiave è la regolarità di f ma soprattutto la condizione sul rango di df .

(16)

- b) Riassumiamo (i) dicendo che in un int. di X_0
S ammette una "buona" parametrizzazione
(o parametrizzazione regolare).
- c) La definizione data sopra è quella di
SOTTOVARIETÀ REGOLARE (EMBEDDED) di \mathbb{R}^n

Ricordo l'ultimo risultato enunciato ieri:

Proposizione Dato $S \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$, sono fatti equivalenti:

(i) esiste U int. aperto di x_0 t.c. $S \cap U$ ammette un'eq. $f(x)=0$ con $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ di classe E^k etc.etc (buona/non degenera)

(ii) esiste U int. ap. di x_0 t.c. $S \cap U$ ammette una parametrizzazione $g: A \rightarrow S \cap U$ aperta di \mathbb{R}^d buona/regolare

SENZA BORDO

Definizione S si dice sup. di dim. d e classe E^k in \mathbb{R}^n se per ogni $x_0 \in S$ vale (i) e (ii) come nella prop. precedente.

Commenti

1) Sia in (i) che (ii) si può restringere l'ipotesi sul rango chiedendo semplicemente che $df(x_0)$ ha rango $n-d$, e che $dg(\underset{\text{ii}}{s_0})$ ha rango d .

Questo per via del fatto che essere di rango massimo è una condizione aperta sulle matrici (e perché?)

2) Le condizioni (i) e (ii) sono automaticamente verificate da tutti gli intorni U' di x_0 contenuti in U .

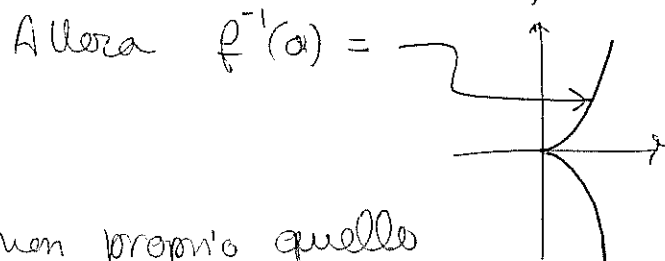
3) L'ipotesi di rango in (i) è fondamentale sia per far sì che la dimensione di S sia d , sia per la regolarità di S .

Esempi a) $n=2, d=1, f(x) = |x|^2, f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, Allora $f^{-1}(0) = \{0\}$ ha dimensione 0 e non 1.

b) $n=2, d=1, f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := 0$. Allora $f^{-1}(0) = \mathbb{R}^2$ ha dimensione 2 invece di 1.

d) Più in generale, per ogni C chiuso in \mathbb{R}^n esiste $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ t.c. $C = f^{-1}(0)$
[Esercitazione....]

c) $n=2, d=1, f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x_1^3 - x_2^2$.



non proprio quello che uno direbbe una curva liscia....

4) L'ipotesi di rango in (ii) serve anch'essa per assicurare che S sia regolare: a livello di curve è possibile parametrizzare con cammini C^∞ sia \square che \curvearrowright (come?)

5) Esempio di superficie \mathcal{E}^k in \mathbb{R}^n con dim. d ③
 il grafico S di $f: A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ con $f \in \mathcal{E}^k$.
 \uparrow
 aperto

NOTA Se $f \in \mathcal{E}^k$ e non \mathcal{E}^{k+1} allora anche $S \in \mathcal{E}^k$ e non \mathcal{E}^{k+1} . Ma questo richiede una piccola dimostrazione.

NOTA La parametrizz. di S è $g: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: (s) \mapsto (s, f(s))$

6) Altro esempio $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n; |x|=1\}$

Equazione $0 = f(x) := |x|^2 - 1$.

Nota S^{n-1} ammette un'eq. unica
 ma non una parametrizzazione unica
 (poiché S^{n-1} è compatto e quindi non
 è omeomorfo ad alcun aperto di \mathbb{R}^{n-1} ...)

7) Esiste un'equazione globale per S , intesa
 come $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ t.c. $f^{-1}(0) = S$ e
 $df(x)$ ha rango max $\forall x$?

Risposta No in generale, ma sì se
 S è chiuso e di dimensione $n-1$.


(La dimostrazione di questo fatto non è ovvia.)


In effetti non è neanche possibile
 avere un'equazione globale nel senso
 di f definita su U aperto che contiene S .

L'esempio sono le superfici ^{non} orientate
 in \mathbb{R}^3 come il nastro di Moebius
 senza il bordo (oppure il proiettivo
 in \mathbb{R}^4) ~~~~~ SPIEGARE L'IDEA A BRACCIA....

8) Oggetti non inclusi nella definizione:

(4)

 semiretta chiusa in \mathbb{R}^2

 disco chiuso in \mathbb{R}^3

i problemi sono nei punti del bordo

(NOTA: bordo vs. frontiera

TERMINOLOG. ↗

nozione geometrica

non ancora

specificata

↖

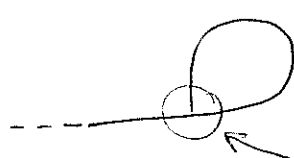
nozione

topologica


La frontiera del disco chiuso $\overset{\text{in } \mathbb{R}^3}{\text{è tutto}}$ il disco, perché questo ha p.int. vuota).

MA ATTENZIONE la semiretta aperta (cioè senza l'estremo) e il disco senza il bordo SONO inclusi nella definizione.

9) Altri oggetti non inclusi (e varianti incluse):

 parametrizzato dalla semiretta
punto problematico: la parametr. non è un omeomorfismo !!

 punto problematico

Ma  l'"otto" privato del punto di intersezione è una curva regolare

10) Nota Se S è una superficie in \mathbb{R}^n allora lo stesso vale per ogni sottoinsieme aperto di S !

11) La definizione di superficie richiede $0 < d < n$. In realtà la si può estendere anche ai casi estremi $d=0$ e $d=n$.
Le "superfici" di dimensione 0 sono gli insiemi S discreti.

Le "superfici" di dimensione n in \mathbb{R}^n sono i sottoinsiemi aperti.

12) Quando $d=1$ parleremo di "curve", anche se:

- Una curva nel nostro senso può avere più componenti connesse e in complesso non si autointerseca.
- È bene tenere distinto il concetto di curva nel nostro senso da quello di cammino (o parametrizzazione di una curva) e anche da quello di curva come immagine di un cammino regolare...

13) Data una mappa $g: A \rightarrow \mathbb{S}^n$, supponiamo di voler verificare se è una buona parametrizz.

L'iniettività, almeno locale, non è un problema: basta verificare che $dg(s_0)$ è iniettivo, cioè ha rango d , e questo ci dà anche l'ipotesi di rango massimo (sempre su un intorno di s_0).

Il problema serio è verificare che g sia un omeomorfismo con l'immagine.

Se \mathbb{S}^n è chiuso in U e $g: A \rightarrow \mathbb{S}^n$ è una biiezione continua, torna utile la seguente caratterizzazione:

g^{-1} è continua \iff g è propria, cioè $g^{-1}(K)$ è compatto per ogni compatto K contenuto in U

Inoltre si verifica facilmente che

g è propria \iff per ogni successione (s_n) CA senza punti di accumulazione in A si ha che $(g(s_n))$ è una succ. senza punti di acc. in U

Usando la nozione di compattificazione di Alexandrov possiamo riscrivere la seconda condizione come $s_n \rightarrow \infty$ in \hat{A} (comp. di Alex. di A) \implies $g(s_n) \rightarrow \infty$ in \hat{U} .

Provate a fare voi le verifiche....

(5)

Dimostriamo adesso la proposizione

(i) \Rightarrow (ii).

Sia U int. ap. di x_0 , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{m-d}$
 mappa \mathcal{E}^k con $df(x)$ di rango max. in U
 tale che $SNU = \bar{f}^{-1}(0)$.

Per il teorema della funzione implicita
a patto di riordinare gli assi esiste

V intorno _{ap.} di x_0 , $V \subset U$ della forma

$$V = V' \times V'' \quad \text{t.c.} \quad SNV = \text{grafico di}$$

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^d & \mathbb{R}^{m-d} \end{matrix}$$

$h: V' \rightarrow V''$ mappa di classe \mathcal{E}^k .

Parametizziamo allora SNV con

$g: V' \rightarrow SNV$ data da

$$g(s) := (s, h(s))$$

- g è su per ipotesi
- g è iniett. perché h è la prima comp.(s)
- g ha diff. di rango d perché lo stesso vale per la prima componente.
- g omeomorfismo perché l'inversa di g è la proiezione $\pi: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{m-d} \rightarrow \mathbb{R}^d$, o meglio la sua restrizione a SNV .
 Ed è noto che π è continua!

Per dimostrare che (ii) \Rightarrow (i) useremo il seguente Lemma:

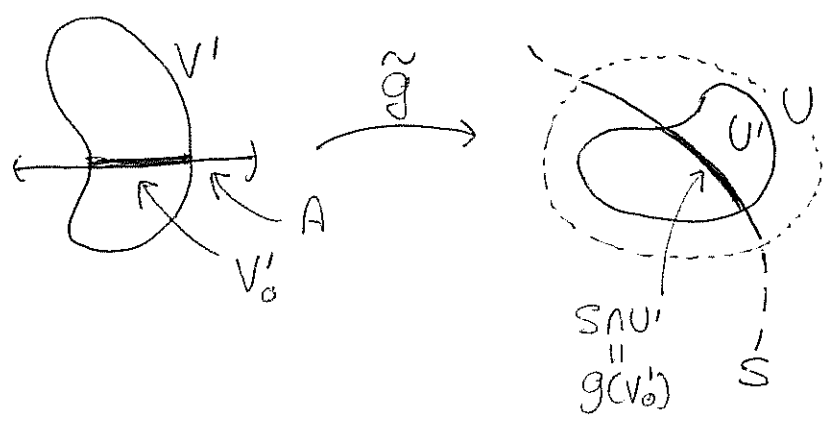
Lemma Sia $g: A \text{ aperto di } \mathbb{R}^d \rightarrow S \cap U$
 parametrizzazione buona, cioè

- $g: \text{omeomorfismo di } A \text{ in } S \cap U$
- $dg(s)$ ha rango $d \quad \forall s \in A$.

\uparrow
intorno
di $x_0 = g(s_0)$

Allora esistono U' int. di x_0 , $U' \subset U$;
 aperto
 V' intorno aperto di $(s_0, 0)$ in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$
 t.c. $V'_0 \subset A$ e $g(V'_0) = S \cap U'$;
 $\tilde{g}: V' \rightarrow U'$ bigezione \mathcal{C}^k con inversa \mathcal{C}^k
 t.c. $\tilde{g}(s, 0) = g(s) \quad \forall s \in V'_0$.

dato $V \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ indicato con V_0 la "sezione" data dagli $s \in \mathbb{R}^d$ t.c. $(s, 0) \in V$.



Dimostrazione

Prendo M matrice $n \times (n-d)$ e definisco

$$\tilde{g}(s, s') := g(s) + Ms'$$

$$\forall s \in A, s' \in \mathbb{R}^{n-d}.$$

Osserviamo che \tilde{g} è un est. di g (cioè $\tilde{g}(s_0) = g(s)$ $\forall s \in A$) e

$$\nabla \tilde{g}(s_0, 0) = (\nabla g(s_0), M)$$

e siccome $\nabla g(s_0)$ ha rango d , è possibile prendere M in modo che $(\nabla g(s_0), M)$ ha rango m

Ma allora per il teorema della mappa inversa esiste V intorno di $(s_0, 0)$ contenuto in $A \times \mathbb{R}^{m-d}$ tale che

- o la restrizione di \tilde{g} a V è una mappa aperta (in partic. $\tilde{g}(V)$ è aperto)
- o $\tilde{g} : V \rightarrow \tilde{g}(V)$ è una biiezione \mathcal{C}^k con inversa \mathcal{C}^k .

[Attenzione non posso prendere $V := V$ e $U' := g(V)$ non so se $g(V_0) = g(V) \cap S$]

Osserviamo che $g(V_0)$ è aperto in $S \cap U \cap g(V)$ perché g è un omeo, e quindi esiste U' aperto $\subset U \cap g(V)$ tale che $g(V_0) = U' \cap S$.

Prendo ora $V' := \tilde{g}^{-1}(U')$.

L'unica cosa da verificare è che $g(V'_0) = S \cap U'$. Siccome $S \cap U' = g(V_0)$ per la scelta di U' , mi basta vedere che $V_0 \subset V'_0$. In effetti

Se $s \in V_0$ allora $\tilde{g}(s, 0) = g(s) \in g(V_0) \subset U'$
 e quindi $(s, 0) \in V' := \tilde{g}^{-1}(U')$ e quindi
 $s \in V'_0$. Dunque $V_0 \subset V'_0$. \square

(8)

Dimostriamo ora che (ii) \Rightarrow (i)

Data $g: A \rightarrow \mathbb{S}^n U$ prendo $\tilde{g}: V' \rightarrow U'$

Come nel lemma, dette \tilde{g}_i^{-1} le componenti
 \tilde{g}^{-1} prendo infine $f: U' \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$

$$f(x) := (\tilde{g}_{d+1}^{-1}, \dots, \tilde{g}_n^{-1})$$

Allora f è \mathcal{E}^k perché \tilde{g}^{-1} lo è.

• $\nabla f(x)$ è la matrice formata dalle
 ultime $n-d$ righe della matrice $\nabla \tilde{g}^{-1}(x)$
 e queste sono lin. indip. poiché $\nabla \tilde{g}^{-1}(x)$
 ha rango max. Quindi $\nabla f(x)$ ha rango max.
 \parallel \parallel
 n $n-d$

• Resta da vedere che $\mathbb{S}^n U' := \{x \in U' \text{ t.c. } f(x) = 0\}$.

Ma infatti: $\mathbb{S}^n U' = g(V'_0) = \tilde{g}(V'_0 \times \{0\})$

$= \{x \in U' \text{ t.c. } \tilde{g}^{-1}(x) \in \mathbb{R}^d \times \{0\}\}$

$= \{x \in U' \text{ t.c. } f(x) = 0\}$. \square

Ricordo la definizione di spazio tangente ad una superficie S di dim. d (e classe C^k) in \mathbb{R}^n nel punto $x_0 \in S$:

$$\text{Tan}(S, x_0) := \left\{ \dot{\gamma}(0) : \gamma: [0, *) \rightarrow S, \gamma \in C^1, \gamma(0) = x_0 \right\}$$

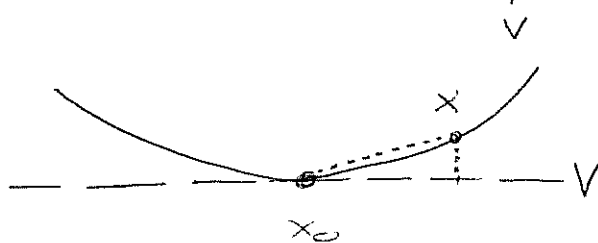
Ricordo inoltre che data $f: U \text{ int. di } x_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ che definisce un'eq. (non degenera) per S in U e $g: A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow S \cup U$ parametrizzazione regolare, si ha che

$$\text{Tan}(S, x_0) = \text{Ker } df(x_0) = \text{Im } \underbrace{dg}_{\bar{g}'(x_0)}(s_0)$$

Fatto utile 1

Lo spazio affine $x_0 + \text{Tan}(S, x_0)$ approssima S "vicino a x_0 ", nel seguente senso:

$$\forall x \in S \quad \text{dist}(x, \underbrace{x_0 + \text{Tan}(S, x_0)}_V) = o(|x - x_0|)$$



per $x \rightarrow x_0$
($O(|x - x_0|^2)$ se $k \geq 2$)

2

Dimostrazione Data $g: A \rightarrow \mathbb{S}U$, Unitorno di x_0 , g buona parametrizzazione di a ,

per ogni $x \in \mathbb{S}U$ poniamo $s = s(x) := g^{-1}(x)$.

e $s_0 := s(x_0) = g^{-1}(x_0)$. Allora usando lo sviluppo di Taylor di g in s_0 abbiamo che

$$x = g(s) = \underbrace{g(s_0) + dg(s_0) \cdot (s - s_0)}_{\substack{\text{||} \\ x_0} \quad \text{||} \\ \text{Tan}(s, x_0)}} + \underbrace{O(|s - s_0|^2)}_{\substack{\text{se } K \geq 2 \\ \downarrow}} O(|s - s_0|)$$

preso allora $x' := g(s_0) + dg(s_0)(s - s_0) \in V$ si ha che

$$\text{dist}(x, V) \leq |x - x'| = O(|s - s_0|)$$

Resta da dimostrare che $|s - s_0| = O(|x - x_0|)$.

Un modo (trattantiv) è il seguente:

$$x - x_0 = dg(s_0)(s - s_0) + o(|s - s_0|)$$

e siccome $dg(s_0) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ è lineare e iniettiva, esiste $\delta > 0$ t. c. $|dg(s_0)y| \geq \delta|y| \forall y \in \mathbb{R}^d$ (esercizio!!) e quindi

$$|x - x_0| \geq \delta \cdot |s - s_0| - |o(|s - s_0|)| \sim \delta |s - s_0|$$

per $s \rightarrow s_0$

e quindi $|s - s_0| = O(|x - x_0|)$.

Altri fatti utili che non dimostriamo

3

Fatto Utile 2

Quella data nell'oss. precedente è una caratterizzazione del tangente: dato infatti

$$V \text{ t.c. } \underset{\leftarrow x \in S}{\text{dist}(x, x_0 + V)} = o(|x - x_0|) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

allora necessariamente $V = \text{Tan}(S, x_0)$.

[ESERCIZIO]

Fatto Utile 3

I vettori $v \in \text{Tan}(S, x_0)$ sono tutti e soli quelli della forma

$$v = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n (x_n - x_0)$$

con α_n reale, $\alpha_n \rightarrow +\infty$ e $x_n \in S, x_n \rightarrow x_0$.

Nota I vettori definiti in questo modo vengono talvolta presi come definizione di spazio tangente in x_0 di un generico insieme S .

(4)

MAPPE REGOLARI TRA SUPERFICI

 \uparrow
 \mathcal{E}^k \uparrow
 \mathcal{E}^k Definizione Date $S \subset \mathbb{R}^n$ e $S' \subset \mathbb{R}^{n'}$ sup. di classe \mathcal{E}^k (o più) e dimensioni d, d' ;data $f: S \rightarrow S'$;diciamo che f è di classe \mathcal{E}^k se per ogni $x_0 \in S$ esiste $g: A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow S \cap U$ parametrizz. buona con U int. aperto di x_0 f. c.

$$f \circ g: A \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$$

è una mappa di classe \mathcal{E}^k .[Nota La sup. d'curve non conta: si poteva direttamente prendere $f: S \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$.][Nota Al momento potrebbe sembrare che il fatto che $f \circ g$ è \mathcal{E}^k dipende dalla scelta di g . In realtà non è così: da un'altra parametrizzazione $g': A' \rightarrow U' \subset U$ si ha che $\bar{g}' \circ g': A' \rightarrow A$ è \mathcal{E}^k e quindi $f \circ g' = \underbrace{f \circ g}_{\mathcal{E}^k} \circ \underbrace{\bar{g}' \circ g'}_{\mathcal{E}^k}: A' \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$ è \mathcal{E}^k .]

Non dimostriamo direttamente questo fatto ma lo otteniamo come corollario del prox. 'es.

Proposizione Data $f: S \rightarrow S'$ di classe \mathcal{E}^k
 allora $\forall x_0 \in S \exists U$ intorno di x_0 e
 $\tilde{f}: U \rightarrow S'$ di classe \mathcal{E}^k (nel senso classico)
 t.c. $\tilde{f} = f$ su $S \cap U$. Ovvero f è localmente
estendibile ad una mappa \mathcal{E}^k definita
 su un aperto di \mathbb{R}^n . ~~Valore associato~~
~~al ~~si~~~~

Dimostrazione Mevemente vorrei costruire
 \tilde{f} come $f \circ \gamma$ con γ retractione di U su $S \cap U$.
 Detto così non ha senso ma ci dà l'idea
 giusta.

Sia $x_0 \in S$, sia $g: A \rightarrow S \cap U$ parametr.
 buona con U int. ap. di x_0 tale che
 $f \circ g: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ è \mathcal{E}^k .

Abbiamo visto ieri che esiste U' intorno ap.
 di x_0 contenuto in U , V' intorno aperto di $(s_0, 0)$
 $s_0 := g^{-1}(x_0)$ e $\tilde{g}: V' \rightarrow U'$ mappa \mathcal{E}^k con inversa
 \mathcal{E}^k tale che $\tilde{g}(s, 0) = g(s) \forall s$ t.c. $(s, 0) \in V'$
 (cioè $\forall s \in V_0$). Sia $\pi: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^d$ la proiez.

posso
 supporre
 V' un
 rettangolo
 cioè

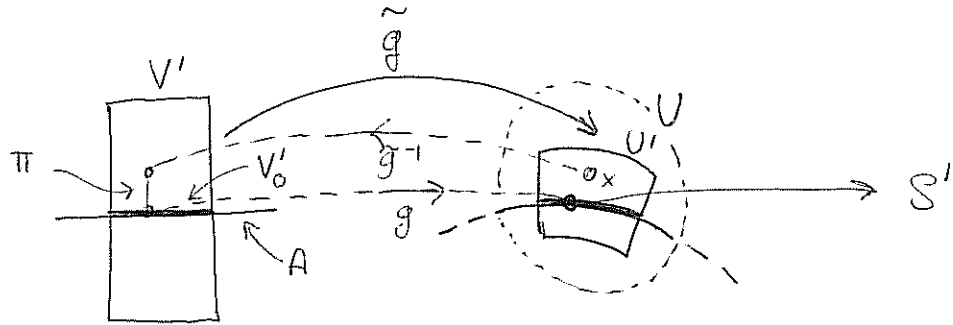
$$V' = A' \times A''$$

$$\bigcap_{\mathbb{R}^d} \bigcap_{\mathbb{R}^{n-d}}$$

Pongo allora

$$\tilde{f} := \underbrace{f \circ g}_{\mathcal{E}^k} \circ \underbrace{\pi}_{\mathcal{E}^{\infty}} \circ \underbrace{\tilde{g}^{-1}}_{\mathcal{E}^k} : U' \rightarrow S'$$

6



L'unica verifica da fare è che data $x \in S \cap U'$ allora $\tilde{f}(x) = f(x)$ e questo è immediato perché $g \pi \tilde{g}^{-1}$ è l'identità su $S \cap U'$. \square

Nota Se $f: S \rightarrow S'$ è localmente estendibile ad una mappa \tilde{f} definita su un aperto U in \mathbb{R}^n e di classe \mathcal{E}^k allora f è \mathcal{E}^k : basta infatti osservare che data $g: A \rightarrow S$ di classe \mathcal{E}^k (in particolare ogni parametrizzazione) allora $f \circ g = \tilde{f} \circ g$ che è \mathcal{E}^k per quanto visto al secondo punto...

Corollario

Se $f: S \rightarrow S'$ è \mathcal{E}^k e $f': S' \rightarrow S''$ è \mathcal{E}^k allora $f' \circ f: S \rightarrow S''$ è \mathcal{E}^k .

Case particolare: se $f: S \rightarrow S'$ è \mathcal{E}^k e $g: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow S$ è \mathcal{E}^k allora $f \circ g$ è \mathcal{E}^k , e questo vale in particolare per tutte le parametrizzazioni g di S ...

Dimostrazione

Il punto è che $f, f' \in \mathcal{E}^k \Rightarrow f, f'$ localmente estendibili (a mappe \tilde{f} e \tilde{f}' di classe \mathcal{E}^k su aperti di \mathbb{R}^n e $\mathbb{R}^{n'}$ risp.) e quindi anche $f' \circ f$ è

Localmente estendibile (basta prendere le mappe $\tilde{f}' \circ \tilde{f}$) $\Rightarrow f' \circ f \in \mathcal{E}^k$.

Omettiamo i dettagli □

La prossima proposizione definisce il differenziale delle mappe tra superfici.

Proposizione Sia $f: S \rightarrow S'$ di classe \mathcal{E}^1 .

Sia $x_0 \in S$ e $y_0 := f(x_0)$. Allora $\exists!$ T applicazione lineare da $Tau(S, x_0)$ a $Tau(S', y_0)$ t.c.

$$(f \circ \gamma)'(0) = T \gamma'(0) \quad (*)$$

per ogni $\gamma: [0, *) \rightarrow S$ cammino \mathcal{E}^1 t.c. $\gamma(0) = x_0$.

Inoltre data $\tilde{f}: U$ int. ap. di $x_0 \rightarrow S'$ estensione di f si ha che

$$T = \text{restrizione di } d\tilde{f}(x_0) \text{ a } Tau(S, x_0).$$

La T viene chiamata differenziale di f in x_0 e indicata con $df(x_0)$.

Dimostrazione

L'unicità è ovvia: la formula (*) determina univocamente Tv per ogni v della forma $\gamma'(0)$, cioè per ogni $v \in Tau(S, x_0)$.

Dimostriamo l'esistenza di T ed il resto della proposizione facendo vedere che

- o $d\tilde{f}(x_0)$ soddisfa (*);
- o $d\tilde{f}(x_0)$ mappa $Tau(S, x_0)$ in $Tau(S', y_0)$.

8

In effetti dato γ come $u_i(\ast)$, si ha che γ ha valori in S e quindi

$$f \circ \gamma = \tilde{f} \circ \gamma$$

da cui segue che

$$(f \circ \gamma)'(0) = (\tilde{f} \circ \gamma)'(0) = d\tilde{f}(x_0) \dot{\gamma}(0)$$

inoltre $f \circ \gamma$ è un cammino in S' quindi per definizione

$$(f \circ \gamma)'(0) \in \text{Tan}(S', y_0)$$

con punto iniziale $f(x_0) =: y_0$

Dunque $d\tilde{f}(x_0) v \in \text{Tan}(S', y_0)$ per ogni v della forma $v = \dot{\gamma}(0)$, ovvero per ogni $v \in \text{Tan}(S, x_0)$. □

Corollario Se $f: S \rightarrow S'$ e $f': S' \rightarrow S''$ sono mappe \mathcal{E}^r , $x_0 \in S$ e $y_0 = f(x_0)$, allora

$$d(f' \circ f)(x_0) = df'(y_0) \circ df(x_0)$$

Dim Immediata usando delle estensioni locali

\tilde{f}' e \tilde{f} (e il fatto che la formula è già nota nel caso di mappe tra spazi euclidei). □

Complementi

Per le mappe tra superfici valgono (con le opportune modifiche) tutti gli enunciati noti per le mappe tra aperti di \mathbb{R}^n .

Facciamo alcuni esempi.

Proposizione Siano S, S' superfici di classe \mathcal{C}^k di uguale dimensione d . Sia $f: S \rightarrow S'$ una mappa di classe \mathcal{C}^k e sia $x_0 \in S$ un punto in cui $df(x_0)$ ha rango massimo ($= d$). Allora f è invertibile in un intorno di x_0 .

Per la precisione esiste U intorno aperto di x_0 t.c.

- $f(U)$ è un intorno aperto di $x'_0 = f(x_0)$;
- $f: U \rightarrow f(U)$ è una biiezione aperta (e dunque un omeomorfismo);
- $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ è di classe \mathcal{C}^k .

Dimostrazione Prendiamo $g: A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow V \subset S$ parametrizzazione con V intorno aperto di x_0 , e $g': A' \subset \mathbb{R}^d \rightarrow V' \subset S'$ parametrizzazione con V' intorno di $x'_0 := f(x_0)$.

Consideriamo ora la mappa $\tilde{f} := g'^{-1} \circ f \circ g: A \cap g^{-1}(f(V)) \rightarrow A' \subset \mathbb{R}^d$

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{f} & S' \\
 \uparrow g & & \uparrow g' \\
 A & \xrightarrow{\tilde{f}} & A'
 \end{array}$$

Si ha allora che, posto $t_0 := \tilde{g}^{-1}(x_0)$, \tilde{f} è una mappa \mathcal{C}^k dall'aperto \tilde{A} in \mathbb{R}^d , e $d\tilde{f}(t_0)$ ha rango d .

Pertanto, per il teorema di inversione locale fatto al secondo anno nel corso di analisi, esiste \tilde{U} intorno di t_0 contenuto in \tilde{A} t.c. la restrizione di \tilde{f} a \tilde{U} è aperta, bigettiva con l'immagine, e \tilde{f}^{-1} è di classe \mathcal{C}^k .

Posto allora $U := g(\tilde{U})$, si verifica facilmente che U soddisfa la tesi. □

Similmente si può enunciare (e dimostrare) il teorema della funzione implicita.

Partizioni dell'unità

Proposizione Sia A un aperto di \mathbb{R}^n , \mathcal{U} un ricoprimento aperto di A .

Allora esiste una famiglia di funzioni

$\{\epsilon_U : U \in \mathcal{U}\}$ con le seguenti proprietà:

(i) $\epsilon_U : A \rightarrow [0,1]$ è \mathcal{C}^∞ e $\text{supp}(\epsilon_U) \subset U$;

(ii) $\forall x \in A \exists V$ intorno aperto di x contenuto in A t.c. $\epsilon_U \equiv 0$ su V per ogni $U \in \mathcal{U}$ tranne una quantità finita;

(iii) $\forall x \in A$ si ha che $\sum_{U \in \mathcal{U}} \epsilon_U(x) = 1$.

(Si noti che per (ii) gli addendi di questa somma sono tutti nulli tranne una quantità finita.)

La famiglia di funzioni $\{\phi_U: U \in \mathcal{U}\}$ è detta una partizione dell'unità, subordinata al viceprimonto \mathcal{U} .
(di classe C^∞ !)

NOTA Se chiediamo semplicemente che le funzioni ϕ_U siano continue allora possiamo supporre che A sia uno spazio topologico. La precedente proposizione resta valida per una classe molto ampia di spazi topologici che include tutti gli spazi metrici. La dimostrazione che diamo noi funziona però solo per gli spazi metrici localmente compatti e separabili....

Dimostrazione PASSO I

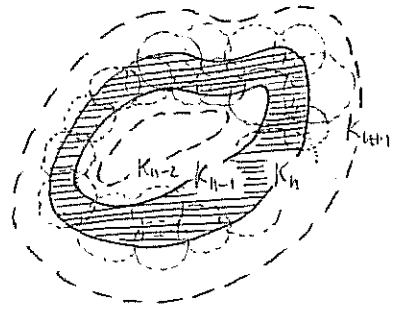
Prendo una successione di compatti (K_n) che inverte A , cioè $K_n \subset \text{Int}(K_{n+1}) \forall n$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = A$.

Per ogni $n=1,2,\dots$ considero (Posso farlo?)

$$E_n := \left\{ B \text{ palla t.c. } B \subset \text{Int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-2} \text{ e } \overline{B} \subset U \text{ per qualche } U \in \mathcal{U} \right\}$$

(pongo $K_0 = K_{-1} = \emptyset$).

Allora E_n è un ricoprimento aperto del compatto $K_n \setminus \text{Int}(K_{n-1})$ e quindi ammette un sottoricoprimento finito E'_n .



Inoltre $\mathcal{G} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ è un ricoprimento localmente finito di A subordinato a \mathcal{F} .

(Cioè: dato $x \in A$ esiste V intorno di x t.c. solo un numero finito di elementi di \mathcal{G} interseca V — nel caso specifico basta prendere $V := \text{Int}(K_m)$ con m opportuno, si ha infatti che gli aperti in \mathcal{G}_n non intersecano $\text{Int}(K_m)$ per $n \geq m+2$ — inoltre ogni elemento di \mathcal{G} è contenuto in un elemento di \mathcal{F} — ovvio per costruzione!)

PASSO 2 Per ogni $B \in \mathcal{G}$ prendo $\gamma_B : A \rightarrow [0, +\infty)$ di classe \mathcal{E}^{∞} t.c. $\text{supp } \gamma_B = \bar{B}$.

[Sia $g(t) := \begin{cases} e^{-1/t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$.

| Allora $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ è di classe \mathcal{E}^{∞}

| e $\text{supp}(g) = [0, +\infty)$. Data una palla $B = B(x_0, r)$ pongo

[$\gamma_B(x) := g(r^2 - |x - x_0|^2)$.

Pongo quindi

$$\sigma_B(x) := \frac{\gamma_B(x)}{\sum_{B' \in \mathcal{G}} \gamma_{B'}(x)} .$$

La funzione σ_B è ben definita e \mathcal{E}^{∞} su A .

Infatti la funzione $\sum_{B' \in \mathcal{G}} \gamma_{B'}(x)$ è strettamente

positiva ovunque (perché \mathcal{G} ricopre A) e coincide

localmente con una somma finita di funzioni \mathcal{E}^{∞}

(perché \mathcal{G} è un ricoprimento localmente finito)

ed è quindi una funzione \mathcal{E}^{∞} .

Osserviamo inoltre che $\text{supp } \sigma_B = \bar{B}$ e che

$$\sum_{B \in \mathcal{G}} \sigma_B(x) = 1 \quad \text{per ogni } x \in A.$$

PASSO 3 Ad ogni $B \in \mathcal{G}$ assegno uno ed un solo $U \in \mathcal{U}$ t.c. $\bar{B} \subset U$. Quindi per ogni $U \in \mathcal{U}$ pongo

$$\sigma_U(x) := \sum_{\substack{U \text{ \u00e9 assegnato} \\ \text{a } B}} \sigma_B(x)$$

Di nuovo σ_U \u00e9 una funzione E^∞ perch\u00e9 \u00e9 una somma localmente finita di funzioni E^∞ . Sempre per la stessa ragione si ha che

$$\text{supp } \sigma_U = \bigcup_{\substack{U \text{ \u00e9 assegnato} \\ \text{a } B}} \text{supp } \sigma_B = \bigcup_{\substack{U \text{ \u00e9 assegnato} \\ \text{a } B}} \bar{B}$$

(senza dover prendere la chiusura dell'unione a destra dell'uguale!) e quindi $\text{supp } \sigma_U \subset U$.

Infine, come prima, $\sum_{x \in U} \sigma_U(x) = 1 \quad \forall x \in A.$ \(\square\)

Usando le partizioni dell'unit\u00e0 possiamo finalmente dimostrare il seguente risultato:

Teorema (di Estensione Globale)

Dato $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow S' \subset \mathbb{R}^{n'}$ di classe E^k ed A aperto t.c. S \u00e9 chiuso in A , allora esiste $\tilde{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$ estensione E^k di f .

Dimostrazione

So che per ogni $x \in S$ esiste U intorno aperto di x in \mathbb{R}^n ed $\tilde{f}_U: U \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$ estensione E^k di f .

Sia \mathcal{U} l'insieme di questi U piú l'aperto $U_0 := A \setminus S$. (6)

Sia quindi $\{\epsilon_U : U \in \mathcal{U}\}$ una partizione dell'unitá subordinata a \mathcal{U} .

Poniamo infine

$$\tilde{f}(x) := \sum_{U \in \mathcal{U}, U \neq U_0} \tilde{f}_U(x) \cdot \epsilon_U(x)$$

dove si intende che $\tilde{f}_U(x) \cdot \epsilon_U(x) = 0$ & $\epsilon_U(x) = 0$ anche quando $\tilde{f}_U(x)$ non é definita, ovvero $\tilde{f}_U(x) \cdot \epsilon_U(x)$ é estesa a 0 fuori da U . Siccome ϵ_U ha supporto compatto in U , questa estensione é \mathcal{E}^k su tutto A .

Inoltre, usando il fatto che la partizione dell'unitá é localmente finita, si ottiene che \tilde{f} é \mathcal{E}^k .

Infine, siccome $\tilde{f}_U(x) = f(x) \forall x \in S \cap U$ e

$$\sum_{\substack{U \in \mathcal{U} \\ U \neq U_0}} \epsilon_U(x) = 1 \text{ per ogni } x, \text{ si ottiene che } \tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in S.$$

□

NOTE (1) In generale non si può estendere f a $\tilde{f} : A \rightarrow S'$ (esempio $f : S^1 \rightarrow S^1$ mappa identica non può essere estesa a $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S'$).

(2) Tuttavia esiste sempre A' intorno aperto di S in A t.c. f può essere estesa a $\tilde{f} : A' \rightarrow S'$.

Il punto chiave é il seguente Lemma: esiste A' intorno aperto di S e $R : A' \rightarrow S$ retrazione di classe \mathcal{E}^k (non lo dimostriamo). Dato queste basta porre $\tilde{f}(x) := f(R(x))$

Alcuni esercizi

(7)

1 Sia S il grafico di $h: U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$.

Se h è di classe \mathcal{E}^k allora S è una superficie di dim. d e classe \mathcal{E}^k in \mathbb{R}^n .

Inoltre se h non è di classe \mathcal{E}^{k+1} allora S non è di classe \mathcal{E}^{k+1} .

Dim. Per dimostrare che S è una superficie usiamo la parametrizzazione

$$g: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(s) := (s, h(s)).$$

g è chiaramente una bijezione da U in S di classe \mathcal{E}^k e di rango max ($=d$) in ogni

punto. Per far vedere che g è un omeomorfismo

osserviamo che l'inversa di g è la restrizione a S della proiezione $p: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^d$, che è notoriamente una mappa continua.

Osserviamo inoltre che come mappa su \mathbb{R}^n , p è \mathcal{E}^∞ e pertanto la sua restrizione ad una qualunque superficie ha la stessa regolarità della superficie.

Se dunque S fosse di classe \mathcal{E}^{k+1} , allora $p = g^{-1}$ sarebbe di classe \mathcal{E}^{k+1} , da cui seguirebbe che anche $g = (g^{-1})^{-1}$ deve essere di classe \mathcal{E}^{k+1} . Assurdo...

□

2) Sia S l'immagine di $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ data da

$$g(s) := \left(\frac{s}{1+|s|^2}, |s|^2 \right).$$

Allora S è una superficie chiusa di dimensione d e classe \mathcal{C}^∞ in \mathbb{R}^{d+1} .

Dimostrazione La tesi è una conseguenza dei punti che seguono:

(i) g è \mathcal{C}^∞ ;

(ii) g è iniettiva. Infatti $g(s) = g(s') \Rightarrow$
 $\Rightarrow |s| = |s'| \ \& \ \frac{s}{1+|s|^2} = \frac{s'}{1+|s'|^2} \Rightarrow s = s'.$

(iii) g è propria \Leftarrow Se $|s_n| \rightarrow +\infty$ allora $|g(s_n)| \rightarrow +\infty$
(ovvio perché la seconda componente di $g(s)$ è $|s|^2$).

(iv) ∇g ha rango max (= d) in ogni punto.

Facendo i conti si ottiene infatti che

$$\nabla g(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+|s|^2} I - 2 \frac{s \otimes s}{(1+|s|^2)^2} \\ \hline 2s \end{pmatrix}$$

matrice identità $d \times d$
 $(s \otimes s)_j := s_i s_j$
vettore $2s$

Verifichiamo che $\nabla g(s)$ ha rango d prima per s della forma $s = (\alpha, 0, \dots, 0)$. In tal caso

(9)

$$\nabla g(s) = \frac{1}{(1+|s|^2)^2} \left(\frac{(1+|s|^2)I - 2s \otimes s}{2(1+|s|^2)^2 s} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha^2)^2} \left(\begin{array}{ccc} 1+\alpha^2 & & 0 \\ & 1+\alpha^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1+\alpha^2 \\ \hline 2(1+\alpha^2)\alpha, 0, \dots, 0 \end{array} \right)$$

Ora, il minore $d \times d$ superiore ha rango d tranne nel caso in cui $\alpha^2 - 1 = 0$, cioè $\alpha = \pm 1$. Invece il minore $d \times d$ inferiore ha rango d tranne che quando $\alpha = 0$. Complessivamente ∇g ha sempre rango d per $s = (\alpha, 0, \dots, 0)$.

Per dimostrare che $\nabla g(s)$ ha sempre rango d ci si può riferire al caso precedente tramite un cambio di variabile isometrico che porta s in $(|s|, 0, \dots, 0)$.

Oppure si sceglie una diversa base ortonormale di \mathbb{R}^n t.c. s è un multiplo del primo vettore della base e ci si accorge che l'espressione di g in questa base è la stessa di prima...

APV2
2012-13

Lezione 20
6/12/12, h. 14-16

1

Ancora qualche esercizio

1 | $O(n)$ è una superficie di dimensione $d = \frac{n(n-1)}{2}$
in $\mathbb{R}^{n \times n}$ (e classe \mathcal{E}^{∞})

Dimostrazione Osserviamo che $O(n) = \tilde{f}^{-1}(0)$
dove $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ è data da

$$f(X) := X^t X - I.$$

Conviene considerare f come mappa a valori
in $\mathbb{R}_S^{n \times n} =$ spazio delle matrici $n \times n$ simmetriche.

Siccome $\mathbb{R}^{n \times n}$ ha dimensione n^2 , $\mathbb{R}_S^{n \times n}$ ha
dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$, e $d = n^2 - \frac{n(n+1)}{2}$, ci basta
per vedere che df ha rango massimo in ogni
 $X \in O(n)$. (Che f sia \mathcal{E}^{∞} è ovvio: è una
mappa polinomiale!)

Calcoliamo $df(X)$.

Siccome

$$\begin{aligned} f(X+H) &= (X+H)^t (X+H) - I \\ &= \underbrace{X^t X - I}_{f(X)} + \underbrace{X^t H + H^t X}_{\text{lineare in } H} + \underbrace{H^t H}_{\mathcal{O}(\|H\|^2)} \end{aligned}$$

abbiamo che

$$df(X): \overset{\mathbb{R}^{n \times n}}{\psi} H \rightarrow X^t H + H^t X = (X^t H) + (X^t H)^t \in \mathbb{R}_S^{n \times n}$$

Per far vedere che $df(X)$ ha rango massimo basta
mostrare che è una mappa surgettiva.

E in effetti: data $H \in \mathbb{R}_s^{n \times n}$, osserviamo che

$$H = d\varphi(x) \left(\frac{1}{2} x H \right)$$

e dunque $d\varphi(x)$ è surgettiva in $\mathbb{R}_s^{n \times n}$.

2 | Calcolare $\text{Tan}(O(n), I)$.

Risoluzione $\text{Tan}(O(n), I) = \text{Ker}(d\varphi(I)) = \{H: H + H^t = 0\}$
 $= \{H \text{ antisimmetriche}\}.$

NOTA Analogamente si ha che $\text{Tan}(O(n), x) = \{xH: H \text{ antisimm.}\}.$

3 | Dire se $S := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2^2 = x_1^3\}$ è una curva regolare o meno.

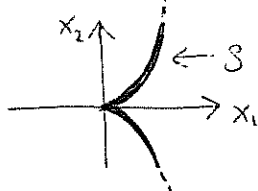
Risoluzione S è definita dall'equazione $f(x) = 0$ dove $f(x) = x_1^3 - x_2^2$.

Siccome $\nabla f(x) = (3x_1^2, -2x_2) \neq 0$ per $x \neq 0$, questa equazione definisce una curva regolare almeno per $x \neq 0$ (cioè $S \setminus \{0\}$ è una curva — nel senso di superficie di dimensione 1 — di classe C^∞).

Attenzione: il fatto che f non sia una buona equazione per S in 0 non vuol dire che S non è una curva regolare in 0 !

In effetti tracciando un disegno di S vediamo subito che qualcosa non va in 0 : infatti

$$x_1^3 - x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2 = \pm x_1^{3/2} \text{ con } x_1 \geq 0, \text{ cioè}$$



(3)

Un modo per formalizzare quello che non va e dimostrare che S non è una curva di classe C^1 è il seguente: se per assurdo lo fosse allora

$$(i) \quad \text{Tan}(S, 0) = \text{asse } x_1.$$

Prendendo infatti il cammino $\gamma: [0, \dots)$ in S dato da $\gamma(t) := (t, t^{3/2})$ si ottiene che $\gamma(0) = 0$ e $\dot{\gamma}(0) = (1, 0)$, per cui

$$\text{Tan}(S, 0) = \text{Span}(\dot{\gamma}(0)) = \text{asse } x_1.$$

(ii) D'altra parte per ogni cammino γ da $[0, \dots)$ in S t.c. $\gamma(0) = 0$ si ha che $\gamma_1(t) \geq 0 \quad \forall t$ (perché $x_1 \geq 0 \quad \forall x \in S$) e quindi $\dot{\gamma}_1(0) \geq 0$, da cui segue che per ogni $v \in \text{Tan}(S, 0)$ si ha $v_1 \geq 0$ e per linearità $v_1 = 0$, cioè $\text{Tan}(S, 0) = \text{asse } x_2$. In contradd. con (i).

NOTA: S può essere parametrizzato dall'omeomorfismo

$$g: \mathbb{R} \rightarrow S \quad \text{definito da} \quad g(s) = (s^2, s^3).$$

Si noti che $\dot{g}(s) \neq 0 \quad \forall s \neq 0$, e questo dimostra ancora una volta che $S \setminus \{0\}$ è una curva regolare, ma non è sufficiente a dimostrare che S non lo è...

4 | In \mathbb{C}^2 consideriamo

$$S := \{(z_1, z_2) \text{ t.c. } z_1^3 = z_2^2\}$$

Verificare che $S \setminus \{0\}$ è una superficie di dimensione 2 di classe \mathcal{C}^∞ (identifichiamo con \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 e \mathbb{C}^2 con \mathbb{R}^4).

Dimostrazione

Via 1 | Osserviamo che $S = f^{-1}(0)$ dove $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ è data da $f(z_1, z_2) = z_1^3 - z_2^2$.

Verifichiamo che $\nabla f(z_1, z_2)$ ha rango 2 per ogni punto di \mathbb{C}^2 tranne 0.

Identifico \mathbb{C}^2 con \mathbb{R}^4 con $(z_1, z_2) \leftrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2)$
" " "
 $x_1 + iy_1$ $x_2 + iy_2$

Siccome le derivate parziali di f in senso complesso sono $\frac{\partial f}{\partial z_1} = 3z_1^2$ e $\frac{\partial f}{\partial z_2} = 2z_2$, ho che la matrice gradiente reale è

$$\nabla f(z_1, z_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} \text{Re}(3z_1^2) & -\text{Im}(3z_1^2) & \text{Re}(2z_2) & -\text{Im}(2z_2) \\ \text{Im}(3z_1^2) & \text{Re}(3z_1^2) & \text{Im}(2z_2) & \text{Re}(2z_2) \end{array} \right)$$

in particolare il determinante del minore di sinistra (prime 2 colonne) è $|3z_1^2|^2$ mentre quello del minore di destra (ultime due colonne) è $|2z_2|^2$ e quindi $\nabla f(z_1, z_2)$ ha rango 2 se (e solo se) $z_1 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$.

(5)

Via 2 | Osserviamo che $g: \mathbb{C} \rightarrow S$ data da

$g(s) := (s^2, s^3)$ è un omeomorfismo. Infatti

- (i) $g(s) \in S$ perché $(s^2)^3 = (s^3)^2$, e g è ovviamente continua, anzi \mathcal{C}^∞ ;
- (ii) g è iniettiva: $g(s) = g(\tilde{s}) \Rightarrow s^2 = \tilde{s}^2$ e $s^3 = \tilde{s}^3$
 $\Rightarrow s = \frac{s^3}{s^2} = \frac{\tilde{s}^3}{\tilde{s}^2} = \tilde{s}$ (il caso $s=0$ è a parte);
- (iii) g è surgettiva: dato $(z_1, z_2) \in S$, cioè t.c. $z_1^3 = z_2^2$, prendiamo $s := z_2/z_1$; allora
 $g(s) = \left(\frac{z_2^2}{z_1^2}, \frac{z_2^3}{z_1^3} \right) = \left(z_1, z_2 \right)$.
- (iv) g è propria: se $|s| \rightarrow +\infty$ allora $|g(s)| \rightarrow +\infty$.

Osserviamo inoltre che la derivata complessa di $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ è $g'(s) = (2s, 3s^2)$, da cui segue che il gradiente di g come mappa da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^4 è

$$\nabla g(s) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(2s) & -\operatorname{Im}(2s) \\ \operatorname{Im}(2s) & \operatorname{Re}(2s) \\ \operatorname{Re}(3s^2) & -\operatorname{Im}(3s^2) \\ \operatorname{Im}(3s^2) & \operatorname{Re}(3s^2) \end{pmatrix}$$

e per $s \neq 0$ ha rango 2 (sia il minore superiore che quello inferiore hanno determinante non nullo).

(In alternativa si può anche osservare che $dg(s): \underset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ è di rango 1 complesso — e quindi di rango 2 reale — perché $2s$ (e anche $3s^2$) sono diversi da 0.)

5 | Far vedere che S nell'esercizio precedente non è una superficie \mathbb{E}^1 .

6

Dimostrazione Supponiamo che lo sia, e determiniamo $\text{Tan}(S, 0)$. Sia dunque $v \in \mathbb{C}$, e sia $\gamma: [0, \dots) \rightarrow \mathbb{C}$ dato da $\gamma(t) = vt^{1/2}$. Allora $g \circ \gamma(t) = (v^2 t, v^3 t^{3/2})$ è un cammino \mathbb{E}^1 in S con $g \circ \gamma(0) = 0$, e $(g \circ \gamma)'(0) = (v^2, 0)$. Quindi, poiché v^2 può essere qualunque numero complesso,

$$\text{Tan}(S, 0) = \mathbb{C} \times \{0\}$$

Da questo segue (per un fatto non troppo meno in luce in precedenza) che in un intorno di 0 è possibile scrivere S come grafico di una mappa $z_2 = h(z_1)$, ovvero è possibile esplicitare z_2 come funzione di z_1 .

Ma questo è assurdo perché fissato $z_1 \neq 0$ esistono sempre due valori di z_2 t.c. $(z_1, z_2) \in S$, vale a dire le due radici quadrate di z_1^3 .

NOTA Lo stesso ragionamento poteva essere applicato alla curva S nell'esercizio 3.

Superfici con bordo

(7)

Definizione Sia $0 < d \leq n$, $k = 1, 2, \dots$

Un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ è una superficie con bordo di dimensione d e classe \mathcal{E}^k se per ogni

$x_0 \in S$ esiste U intorno aperto di x_0 e

$g: A$ aperto in $\mathbb{R}^d \rightarrow U$ mappa \mathcal{E}^k
t.c. $dg(s)$ ha rango d per
ogni $s \in A$

H semispazio affine chiuso di \mathbb{R}^d

tali che

$$g: H \rightarrow S \cup U$$

è un omeomorfismo.

[Nota: volendo possiamo supporre che H]
[sia il semispazio $H := \{s \in \mathbb{R}^d : s_1 \leq 0\}$.]

Diciamo inoltre che x_0 è un punto di bordo se $s_0 := g^{-1}(x_0) \in \partial H$, altrimenti diciamo che x_0 è un punto interno (o non di bordo).

Indichiamo l'insieme dei punti di bordo con ∂S .

FATTI VERI, che non dimostriamo.

(1) La (*) equivale alla seguente condizione:

esiste U intorno di x_0 , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$, $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}$

tali che $d(f, \tilde{f})$ ha rango $n-d+1$ in x_0

(o in ogni $x \in U$) e

$$S \cap U = \{x \in U : f(x) = 0 \text{ e } \tilde{f}(x) \leq 0\}.$$

- 2) $S \cap \partial S$ è una superficie secondo la "vecchia" definizione. Infatti se $s_0 := \bar{g}^{-1}(x_0) \notin \partial H$, cioè x_0 non è un punto di bordo, allora posso trovare A' intorno aperto di $s_0 := \bar{g}^{-1}(x_0)$ contenuto in H e quindi la restrizione di g a A' è una buona parametrizzazione di un intorno di x_0 in S .
- 3) ∂S è una superficie nel senso "vecchio", (cioè senza bordo) di dimensione $d-1$.
Le parametrizzazioni sono date dalle restrizioni delle mappe g a $\partial H \cap A$ (aperto di $\partial H \sim \mathbb{R}^{d-1}$)
- 4) la definizione di punto di bordo NON dipende dalla scelta di g
- 5) In riferimento a quanto detto in 1), i punti di bordo si caratterizzano come quelli per cui $\tilde{f}(x) = 0$, cioè per cui la disuguaglianza $\tilde{f}(x) \leq 0$ non è stretta.

Definizione Date g e f come sopra, si definisce lo spazio tangente a S in x_0 come

$$T_{x_0} S := \text{Im } dg(\underset{\substack{\parallel \\ \bar{g}^{-1}(x_0)}}{s_0})$$

Freso inoltre

$$A := \{ \dot{\gamma}(0) : \gamma : [0, \dots) \rightarrow S \text{ cammino } \mathbb{E}^d \text{ con } \gamma(0) = x_0 \}$$

Si ha che se $x_0 \in \text{Int} S$ allora

$$A = \text{Tan}(S, x_0)$$

mentre se $x_0 \in \partial S$ allora A è un semispazio chiuso di $\text{Tan}(S, x_0)$ la cui frontiera è $\text{Tan}(\partial S, x_0)$ (definite al solito modo).

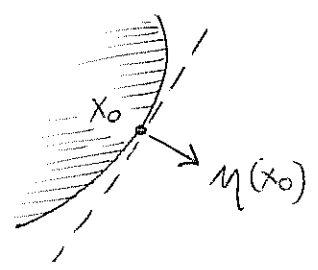
In particolare

supponiamo $H = \{s : s_i \leq 0\}$

$$\begin{aligned}
 A &= dg(s_0)(H) \\
 &= \ker df(x_0) \cap \{d\tilde{f}(x_0) \leq 0\}
 \end{aligned}$$

A questo punto possiamo definire in modo univoco la "normale esterna", η a ∂S in x_0 come l'unico vettore v t.c.

- $v \in \text{Tan}(S, x_0)$
- $|v| = 1$ e $v \perp \text{Tan}(\partial S, x_0)$
- $v \notin A$



ESEMPI 1) Il disco chiuso di dimensione 2 in \mathbb{R}^3 :

$$D := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0 \ \& \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

2) La semisfera in \mathbb{R}^d :

$$S := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1 \ \& \ x_1 \leq 0\}$$

3) Una superficie chiusa, con bordo, di dimensione d in \mathbb{R}^d è un insieme chiuso D che si scrive localmente come sottografico di una funzione $h: \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ (modula una rinumerazione degli assi).
 Cioè per ogni x_0 appartenente alla frontiera di D esiste U intorno di x_0 t.c.

$$D \cap U = \{(x', x'') \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \cap U : x'' \leq h(x')\}$$

In questo caso la frontiera coincide con il bordo.

Questi sono quelli che in seguito chiameremo "domini regolari".

4) Se rimuoviamo l'ipotesi che D sia chiuso le superfici con bordo di dimensione d in \mathbb{R}^d includono oggetti "brutti", ad esempio una palla chiusa meno in qualunque sottinsieme chiuso della frontiera... (notare che in questo caso frontiera e bordo NON coincidono).

Integrazione su superfici (molto rimangiato rispetto alla lezione.....)

Vogliamo definire su ogni superficie di dimensione d in \mathbb{R}^n una misura corrispondente alla nozione di area (o volume) d -dimensionale.

L'ideale sarebbe definire una misura di volume d -dimensionale per tutti gli insiemi in (un'opportuna σ -algebra di) \mathbb{R}^n . Questo può essere fatto in più modi (la più nota di queste misure è la misura di Hausdorff, ma non è l'unica) ma tutti richiedono un notevole apparato di teoria della misura.

Noi seguiremo invece una via leggermente diversa, anche se "compatibile" con la precedente.

Definiremo infatti la misura di volume d -dimens. G_d su una superficie S usando le parametrizzazioni di S .

Il punto di partenza è la definizione di lunghezza di una curva: se C è una curva parametrizzata in modo iniettivo da $\gamma: [a, b] \rightarrow C$, con γ di classe \mathcal{C}^1 si ha

$$\text{Lung}(C) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

A partire da questa formula/definizione è naturale definire la lunghezza (misura 1-dimensionale)

di un insieme F contenuto in C semplicemente
come

(2)

$$\text{Lungh}(F) := \int_{\tilde{\gamma}(F)} |\dot{\gamma}(t)| dt \quad (*)$$

Dettaglio tecnico: su quale σ -algebra si definisce
questa misura? tecnicamente andrebbero bene tutti
gli E t.c. $\tilde{\gamma}^{-1}(E)$ è misurabile (secondo Lebesgue)
in \mathbb{R} . La cosa più semplice è tuttavia
limitarsi alla σ -algebra dei sottoinsiemi di Borel
di C , cioè la più piccola σ -algebra che
contiene la topologia di C . Notare che
la σ -algebra dei sottoinsiemi di C che
sono misurabili secondo Lebesgue nello
spazio ambiente \mathbb{R}^n è sicuramente troppo
grande, perché contiene tutti i sottoinsiemi
di C !!

(con o senza bordo)

Data dunque una superficie d -dimensionale S
parametrizzata da $g: A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow SNU$ propriamente,
in analogia con la (*), di definire $\sigma_d(E)$
per $E \subset SNU$ come

$$\sigma_d(E) := \int_{\tilde{g}(E)} Jg(s) ds$$

resta da individuare la "corretta" espressione per
lo jacobiano $Jg(s)$.

Intuitivamente $Jg(s)$ dovrebbe essere il modulo
del determinante della matrice associata
all'applicazione lineare $dg(s): \mathbb{R}^d \rightarrow \text{Tan}(S, g(s))$

avendo scelto su \mathbb{R}^d la base canonica e su $Tan(S, g(s))$ una qualunque base ortonormale.

Ricordo che il modulo di questo determinante è il rapporto tra il volume d -dimensionale dell'immagine secondo $dg(s)$ del cubo unitario Q di \mathbb{R}^d , ed il volume di Q .

Precisiamo quanto detto nelle seguenti definizioni/osservazioni.

Definizione 1

Dati W, V spazi vettoriali di dimensione d dotati di un prodotto scalare, e $T: W \rightarrow V$ applicazione lineare, definiamo lo jacobiano di T come

$$JT := |\det M|$$

dove M è la matrice associata a T dalla scelta di due basi ortonormali su W e V .

NOTE (1) Il valore di $|\det M|$ non dipende dalla scelta delle basi: prendendo infatti delle basi diverse sia su W che su V , la matrice M' associata a T secondo queste nuove basi è della forma $M' = AMB$ dove A e B sono opportune matrici di cambio di base. Siccome tutte le basi coinvolte sono ortonormali, A e B appartengono a $O(d)$ e quindi hanno determinante ± 1 . Pertanto $\det M' = \pm \det M$ e in particolare $|\det M'| = |\det M|$.

(2) Una volta assegnato su W (e.v.) un prodotto scalare possiamo definire una misura d -dimensionale σ_d identificando W con \mathbb{R}^d tramite la scelta di una base ortonormale e prendendo quindi come σ_d la misura di Lebesgue d -dimensionale su \mathbb{R}^d

Si osservi che σ_d non dipende dalla scelta della base: prendendo una base diversa (ma sempre ortonormale) si ottiene infatti la stessa misura, perché la misura di Lebesgue è invariante per isometrie.

Detto questo si ha che $JT = |\det M|$ corrisponde al rapporto

$$\frac{\sigma_d(T(E))}{\sigma_d(E)}$$

con E qualunque sottosistema (misurabile) di W con misura finita e positiva.

Lemma 2 Se T è un' applicazione lineare da \mathbb{R}^d in V sottospazio di \mathbb{R}^n e N è la matrice $m \times d$ associata a T come applicazione lineare da \mathbb{R}^d in \mathbb{R}^n , allora

$$JT = \sqrt{\det(N^t N)}$$

Dimostrazione Sia v_1, \dots, v_d una base ortonormale di V , e sia \tilde{V} la matrice di colonne (v_1, \dots, v_d) . Siccome le coordinate di un vettore v di V rispetto a questa base sono date dal prodotto scalare di v con gli elementi della base,

ovvero del vettore $\tilde{V}^t v$, la matrice $d \times d$ associata (5)
a T da questa scelta della base di V è data da

$$M = \tilde{V}^t N.$$

Pertanto

$$(\mathcal{J}T)^2 = (\det M)^2 = \det(M^t M) = \det(N^t \tilde{V} \tilde{V}^t N)$$

Osserviamo ora che $\tilde{V} \tilde{V}^t$ è la matrice associata
alla proiezione ortogonale su V , vista come applicazione
lineare da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n (infatti per ogni v_i si ha
per un semplice calcolo che $\tilde{V} \tilde{V}^t v_i = \tilde{V} e_i = v_i$, e
dunque $\tilde{V} \tilde{V}^t v = v$ per ogni $v \in V$, inoltre per
ogni $v \perp V$ si ha che $\tilde{V}^t v = 0$ e quindi $\tilde{V} \tilde{V}^t v = 0$).

Pertanto, siccome i vettori colonna di N appartengono
a V , $\tilde{V} \tilde{V}^t N = N$ e quindi

$$(\mathcal{J}T)^2 = (\det N)^2 = \det(N^t N)$$

NOTE (1) Se E è il cubo $[0, 1]^d$ in \mathbb{R}^n , ovvero il
parallelepipedo generato dai vettori e_1, \dots, e_d ,
allora $T(E)$ è il parallelepipedo P generato dai
vettori Te_1, \dots, Te_d , cioè le colonne della
matrice N . Per quanto visto in precedenza
si ha che

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_d(P) &= \mathcal{G}_d(T(E)) = \mathcal{J}T \cdot \overbrace{\mathcal{G}_d(E)}^1 \\ &= \mathcal{J}T = \sqrt{\det(N^t N)}. \end{aligned}$$

(2) La formula di Binet (che dimostreremo in seguito)
dice che

$$\det(N^t N) = \sum_{M \text{ minore } d \times d \text{ di } N} (\det M)^2$$

Definizione 3 Data $g: A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow S$ di classe E^1 ,
definiamo

$$Jg(s) := J(df(s))$$

Per quanto visto in precedenza si ha che

$$\begin{aligned} Jg(s) &= \sqrt{\det((\nabla g(s))^t (\nabla g(s)))} \\ &= \sqrt{\sum_{\substack{M \text{ minore} \\ d \times d \text{ di } \nabla g(s)}} (\det M)^2} \end{aligned}$$

Proposizione 4 Data una superficie S ^{con o senza bordo} di dimensione d in \mathbb{R}^n e di classe E^1 esiste una ed una sola misura σ_d su (i sottosistemi Boreliani di) S con la seguente proprietà: per ogni $g: A \rightarrow S$ di classe E^1 ed ogni insieme $F \subset S$ t.c. $F = g(E)$ con $E \subset A$ e g iniettivo su E si ha che

$$\sigma_d(F = g(E)) = \int_E Jg(s) ds. \quad \left(\begin{array}{l} \text{Formula} \\ \text{dell'area} \end{array} \right)$$

Dimostrazione

Passo 1: costruzione di σ_d .

Supponiamo per semplicità che S sia una superficie senza bordo. Possiamo allora trovare una famiglia \mathcal{U} di aperti U_i che ricoprono S e delle parametrizzazioni $g_i: A_i \rightarrow S \cap U_i$.

Siccome in \mathbb{R}^n ogni ricoprimento aperto ammette

un sottoinsieme numerabile, possiamo supporre che gli U_i siano vicinizzati da $i=1,2,\dots$

Poniamo dunque $S_1 := S \cap U_1$, $S_2 := (S \cap U_2) \setminus S_1, \dots$
 $\dots, S_n := (S \cap U_n) \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_{n-1}), \dots$

Gli insiemi S_i formano dunque una partizione di S . Per ogni F insieme di Borel in S poniamo quindi

$$\sigma_d(F) := \sum_{i=1}^{\infty} \int_{g_i^{-1}(F \cap S_i)} Jg_i(s) ds$$

Proviamo di verificare che σ_d sia una misura σ -additiva sui Boreliani di S (non è complicato, solo noioso....).

Passo 2: Verifichiamo che vale la formula dell'area.

Dato $g: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $F = g(E)$

Come sopra, scovo $F_i = F \cap S_i$ prendo $E_i \subseteq E$

t.c. $F_i = g(E_i)$ (vale a dire $E_i := g^{-1}(F_i) \cap E$).

Siccome $\{F_i\}$ ed $\{E_i\}$ sono famiglie numerabili disgiunte con unione F ed E rispettivamente, e' uguaglianza

$$\sigma_d(F) = \int_E Jg(s) ds$$

segue da

$$\sigma_d(F_i) = \int_{E_i} Jg(s) ds$$

per ogni i .

(8)

A questo scopo osserviamo che per definizione

$$\mathcal{G}_d(F_i) = \int_{g_i^{-1}(F_i)} Jg(t) dt.$$

Applichiamo ora a questo integrale il cambio di variabile $t = \phi(s)$ con $\phi := g_i^{-1} \circ g$ mappa da $A \cap g_i^{-1}(U_i)$ in A_i ; siccome $\phi^{-1} g_i^{-1}(F_i) = g_i^{-1} \circ g_i \circ g_i^{-1}(F_i) = g_i^{-1}(F_i) = E_i$, si ha che

$$\mathcal{G}_d(F_i) = \int_{E_i} Jg(\phi(s)) \cdot |\det(\nabla\phi(s))| ds. \quad (*)$$

Prendiamo ora una base ortonormale di $T_{\text{tan}}(S, x)$ con $x = g_i(t) = g_i(\phi(s)) = g(s)$. Tramite questo definiamo la matrice $d \times d$ M_i e M associate alle applicazioni lineari $dg(s)$ e $dg_i(t)$ (da \mathbb{R}^d in $T_{\text{tan}}(S, x)$). Siccome $g = g_i \circ \phi$ si ha $dg(s) = dg_i(t) d\phi(s)$ e quindi $M = M_i \cdot \nabla\phi(s)$, e quindi

$$\begin{aligned} Jg(s) &:= |\det M| = |\det(M_i \nabla\phi(s))| \\ &= |\det M_i| |\det \nabla\phi(s)| \\ &= Jg_i(t) \cdot |\det(\nabla\phi(s))| \end{aligned}$$

e quindi la (*) diventa

$$\mathcal{G}_d(F_i) = \int_{E_i} Jg(s) ds.$$

Passo 3 Dalla formula dell'area segue l'unicità di \mathcal{G}_d . \square

NOTE (1) Facciamo vedere che le varie formule già viste in precedenza per il calcolo dell'area sono casi particolari della formula dell'area data sopra.

(a) Se C è una curva con parametrizzazione \mathcal{C}^1 iniettiva $\gamma: [a, b] \rightarrow C$, allora dato $F \subset C$ si ha

$$G_1(F) = \int_{\gamma^{-1}(F)} J\gamma(s) ds$$

$$e \quad J\gamma(s) = \sqrt{\det\left(\underbrace{(\dot{\gamma}(s))^t (\dot{\gamma}(s))}_{\parallel} \right)} = |\dot{\gamma}(s)|$$

$$\parallel$$

$$|\dot{\gamma}(s)|^2$$

(b) Se S è un pezzo di superficie in \mathbb{R}^3 parametrizzato dalla mappa iniettiva $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, allora dato $F \subset S$,

$$G_2(F) = \int_{\phi^{-1}(F)} J\phi(s) ds$$

$$e \quad J\phi(s) = \sqrt{\det[(\nabla\phi(s))^t (\nabla\phi(s))]} \stackrel{\text{Binet}}{=} \sqrt{\sum_{\substack{H \text{ minore} \\ 2 \times 2 \text{ di } \nabla\phi(s)}} (\det H)^2}$$

ma i determinanti dei minori 2×2 di $\nabla\phi(s) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial s_1}, \frac{\partial\phi}{\partial s_2} \right)$ sono esattamente (a meno di segno) le componenti del vettore $\frac{\partial\phi}{\partial s_1} \times \frac{\partial\phi}{\partial s_2}$, quindi $J\phi(s) = \left| \frac{\partial\phi}{\partial s_1} \times \frac{\partial\phi}{\partial s_2} \right|$.

e

$$G_2(F) = \int_{\phi^{-1}(F)} \left| \frac{\partial\phi}{\partial s_1} \times \frac{\partial\phi}{\partial s_2} \right| ds_1 ds_2.$$

(c) Se S è il grafico della funzione reale E^1
 $h: A \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto di \mathbb{R}^d , allora una
 parametrizzazione di S è $g: S \mapsto (s, h(s))$
 e dato $F \subset S$

$$\mathcal{S}_d(F) = \int Jg(s) ds$$

$\bar{g}^1(F) \leftarrow$ proiezione di F su \mathbb{R}^d

e $Jg(s) = \sqrt{\sum_{M \text{ minore } d \times d \text{ di } \nabla g(s)} (\det M)^2}$. Ma $\nabla g(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial s_d} \end{pmatrix}$

e quindi il minore ottenuto rimuovendo la prima riga è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \frac{\partial g}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial s_d} & \end{pmatrix}$$

ed determinante uguale a $\pm \frac{\partial g}{\partial s_1}$. Analogamente il minore ottenuto rimuovendo la riga i -esima con $i \leq d$ ha determinante $\pm \frac{\partial g}{\partial s_i}$. Infine il minore ottenuto rimuovendo l'ultima riga è l'identità ed ha determinante 1. Pertanto

$$Jg(s) = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g}{\partial s_i} \right|^2} = \sqrt{1 + |\nabla g|^2}$$

Per cui

$$\mathcal{S}_d(F) = \int \sqrt{1 + |\nabla g(s)|^2} ds$$

$E = \text{prova. di } F \text{ su } \mathbb{R}^d$

(2) L'integrale di una funzione (per semplicità positiva) su S può essere anch'esso calcolato tramite parametrizzazioni:

$$\begin{aligned} \int_S h(x) \, d\sigma_d(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{S_i} h(x) \, d\sigma_d(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{g_i^{-1}(S)} h(g_i(s)) \, J_{g_i}(s) \, ds \end{aligned}$$

(3) Consideriamo adesso, un po' impropriamente, σ_d come una misura definita su tutti i sottosistemi Boreliani di tutte le superfici d -dimensionali in \mathbb{R}^n (o meglio sulla σ -algebra generata da questi sistemi).

Valgono allora le seguenti (ovvero o quasi) proprietà:

- (i) σ_d è invariante per rotazioni e traslazioni;
- (ii) Se indichiamo con λE l'omotetia di un insieme E per un fattore λ , cioè $\lambda E := \{\lambda x : x \in E\}$, allora $\sigma_d(\lambda E) = \lambda^d \sigma_d(E)$.
- (iii) la restrizione di σ_d ad un qualunque sottospazio (affine) V di dimensione d di \mathbb{R}^n coincide con la misura di Lebesgue (definita tramite l'identificazione di V con \mathbb{R}^d grazie a una base ortonormale — vedi nota 2 dopo la definizione 1)

Vale infine un'altra proprietà, meno ovvia:

(iv) se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione \mathcal{E}^1 con costante di Lipschitz L allora

$$\sigma_d(f(E)) \leq L^d \sigma_d(E).$$

In effetti le proprietà (i)-(iv) (anzi, per la precisione bastano (ii) e (iv)) caratterizzano univocamente σ_d .

(4) Data $f : S \rightarrow S'$ mappa di classe \mathcal{E}^1 e iniettiva tra superfici di dimensione d , vale la seguente formula di cambio di variabile per gli integrali (e quindi per la misura):

Dato $F \subset f(S)$ e preso $E := f^{-1}(F)$, si ha

$$\sigma_d(F) = \int_{E=f^{-1}(F)} Jf(x) d\sigma_d(x)$$

dove $Jf(x)$ è dato come nella definizione 1.

Più in generale si ha che data $h : S' \rightarrow [0, +\infty]$

$$\int_{f(S)} h(x') d\sigma_d(x') = \int_S h(x) Jf(x) d\sigma_d(x).$$

Il calcolo di $Jf(x)$ tuttavia non presenta scorie tipo quella data nel lemma 2....

Concludiamo la lezione con una presentazione di quello che faremo in seguito.

In analogia con l'integrazione delle 1-forme su curve (vista nei corsi del secondo anno) vogliamo definire l'integrale sulle superfici k-dimensionali in \mathbb{R}^n di opportuni oggetti, detti k-forme.

Il punto dell'integrazione delle k-forme, rispetto a quella delle semplici funzioni, è che vale una generalizzazione del teorema di Gauss-Green, il teorema di Stokes.

(Nulla del genere vale per l'integrazione delle funzioni.)

Per capire la struttura di questa estensione, scriviamo l'integrale di una 1-forma ω (cioè una mappa che ad ogni $x \in \mathbb{R}^n$ associa un elemento $\omega(x)$ del duale di \mathbb{R}^n) su una curva C parametrizzata da γ come segue:

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \underbrace{\omega(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)}_{\substack{\text{elemento di } (\mathbb{R}^n)^* \\ \text{applicato ad un} \\ \text{vettore di } \mathbb{R}^n; \\ \text{risulta un numero} \\ \text{reale...}}} dt = \int_a^b \omega(\gamma(t)) \cdot \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} |\dot{\gamma}(t)| dt$$

$$= \int_C \underbrace{\omega(x) \cdot \tau(x)}_{\substack{\text{risulta un numero} \\ \text{reale...}}} dS_1(x)$$

dove $\tau(x)$ è il vettore unitario tangente a C in x corrispondente all'orientazione di C

definita dalla parametrizzazione γ .

Nell'estendere quest'ultimo oggetto al contesto delle superfici K -dimensionali abbiamo bisogno di definire vari oggetti:

- 1) La misura σ_d è stata appena definita;
- 2) la nozione di orientazione di una superficie
- 3) la nozione di K -forma....

Orientazione di uno spazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n .
Per base di V intendiamo una n -upla ordinata
di vettori linearmente indipendenti.

Date due basi (v_1, \dots, v_n) e $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ diciamo che

$$(v_1, \dots, v_n) \sim (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$$

se la matrice di cambio di base associata ha determinante positivo.

Questa è una relazione di equivalenza.

Le classi di equivalenza sono chiamate orientazioni
di V (ci sono solo due classi di equivalenza).

Se $V = \mathbb{R}^n$, l'orientazione canonica è quella
data dalla base canonica, $[e_1, \dots, e_n]$.

Inoltre $[v_1, \dots, v_n] = [e_1, \dots, e_n]$ se $\det(v_1, \dots, v_n) > 0$.

Orientazione di una superficie

Sia S una superficie (con o senza bordo) di
dimensione d in \mathbb{R}^n .

Scegliere un'orientazione di S significa
scegliere per ogni $x \in S$ un'orientazione
 $[v_1(x), \dots, v_d(x)]$ dello spazio tangente $Tan(S, x)$
IN MODO CONTINUO IN x .

Quest'ultima frase, com'è scritta, non ha senso. (2)

La ragione è che non possiamo vedere l'orientazione della superficie come una mappa da S in un qualche spazio topologico perché le orientazioni di ciascun spazio tangente appartengono a spazi diversi.

Il modo in cui si sistema questo problema è osservare che se $g: A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \text{SNV}$ è una buona parametrizzazione, allora per ogni $s \in A$ i vettori

$$w_i(s) := (dg(s))^{-1} v_i \begin{matrix} \uparrow \\ \text{ii} \end{matrix} (g(s)) \quad i=1,2,\dots,d$$

formano una base di \mathbb{R}^d .

Richiediamo dunque che per ogni parametrizzazione $g: A \rightarrow \text{SNV}$ l'orientazione di \mathbb{R}^d data da

$$[w_1(s), \dots, w_d(s)]$$

è continua in s . Ora, siccome lo spazio delle orientazioni di \mathbb{R}^d contiene solo due elementi, questo equivale a dire che questa orientazione è costante sulle componenti

connesse di A , ovvero

$$\det(w_1(s), \dots, w_d(s))$$

ha segno costante sulle comp. connesse di A .

NOTA Che significa in concreto:

3



Orientazione
non continua



Orientazione
continua

OSSERVAZIONI

1) Non serve che la "continuità" dell'orientazione sia verificata su tutte le parametrizzazioni $g: A \rightarrow S \cup U$, ma basta farlo per una famiglia di g tali che i corrispondenti U ricoprano S .

2) Una superficie S si dice orientabile se ammette almeno un'orientazione, si dice orientata se è stata scelta un'orientazione (in altre parole, una sup. orientata è una coppia (superficie, orientaz.)).

Se S è orientabile e connessa, S ammette esattamente due orientazioni.

Se S e S' sono superfici orientate di dimensione d e $f: S \rightarrow S'$ ha differenziale $df(x)$ di rango max ($=d$)

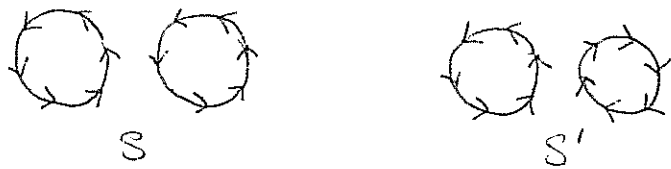
in un certo x , diciamo che f

conserva l'orientazione in x (vs. inverte

l'orientazione) se, detta $[v_1(x), \dots, v_d(x)]$ l'orientazione di $Tau(S, x)$, allora $[df(x)v_1(x), \dots, df(x)v_d(x)]$ coincide (vs. non coincide) con l'orientazione di $Tau(S', f(x))$.

Quovamente se f conserva l'orientazione in x allora la conserva anche in un intorno di x . Più in generale, se $df(x)$ ha rango massimo in ogni x e S è connessa, allora f conserva l'orientazione in ogni punto o la inverte in ogni punto.

[L'ipotesi di connessione di S serve: supponiamo per esempio che f sia la mappa identica tra S e S' curve identiche con due orientazioni diverse come sotto]



The diagram illustrates two circles, labeled S and S'. The circle S has arrows pointing in a clockwise direction, representing one orientation. The circle S' has arrows pointing in a counter-clockwise direction, representing the opposite orientation. This visualizes the concept of two identical manifolds with different orientations.

3) Se S è un'ipersuperficie in \mathbb{R}^n , cioè una superficie di dimensione $n-1$, allora scegliere un'orientazione è equivalente a scegliere per ogni $x \in S$ un vettore unitario $n(x)$ normale a $Tau(S, x)$ in modo continuo in x .

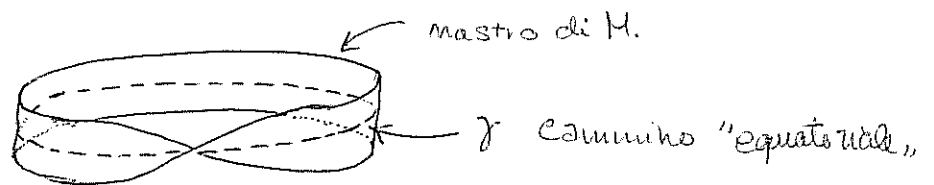
Il punto chiave è la corrispondenza tra vettori n unitari ortogonali ad un dato iperpiano V e le orientazioni $[v_1, \dots, v_{n-1}]$ di V . La corrispondenza è la seguente: dato n si sceglie (v_1, \dots, v_{n-1}) in modo tale che

$$[n, v_1, \dots, v_{n-1}] = [e_1, \dots, e_n] \leftarrow \begin{array}{l} \text{orientaz.} \\ \text{canonica} \\ \text{di } \mathbb{R}^n \end{array}$$

(si verifica che effettivamente n determina un orient. e viceversa).

4) Il nastro di Möbius non è orientabile.

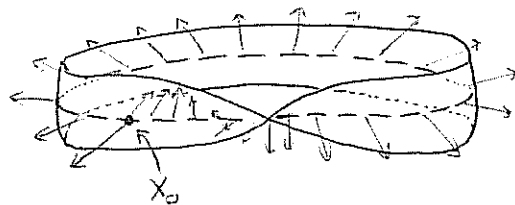
Per la precisione stiamo parlando di un nastro di M . realizzato come superficie in \mathbb{R}^3



(non da una formula esplicita)

La ragione è che non possiamo costruire per ogni $x \in X$ un vettore normale unitario $n(x)$.

Infatti una volta scelto $n(x_0)$ in un punto x_0 , $n(x)$ è determinato in tutti gli altri punti e chiaramente non è continuo:



6

5) La sfera S^{n-1} è orientabile.

Basta scegliere la normale esterna, cioè prendere $n(x) := x \quad \forall x \in S^{n-1}$.

Osserviamo tuttavia che NON è possibile scegliere in modo continuo una base del tangente della sfera S^2 .

Anzi, se è per questo, non è possibile scegliere in modo continuo neanche un singolo vettore non nullo sulla sfera (teorema di non pettinabilità della sfera)

C'è quindi una differenza tra scegliere una base e scegliere un'orientazione.

6) Finora non è chiaro se il problema dell'orientabilità è legato alla struttura topologica di S o ad altro.

Chiariamolo.

Per farlo devo introdurre due oggetti su cui non mi voglio dilungare:

La Grassmanniana $G(n, k)$, vale a dire l'insieme dei k -piani (sottospazi di dimensione k) di \mathbb{R}^n , e la

Grassmanniana orientata $G_{or}(n, k)$, vale a dire l'insieme dei k -piani orientati di \mathbb{R}^n (cioè delle coppie (V, τ) con V sottosp. vet. di dim. k di \mathbb{R}^n e τ orientaz. di V).

Entrambi questi spazi possono essere dotati in modo naturale di una struttura topologica

NON FATTO A LEZIONE

Prendo $S(n,k)$ l'insieme delle matrici M $n \times k$ le cui colonne formano un sistema ortonormale, cioè $M^t M = I$, e considero la mappa $p: S(n,k) \rightarrow G(n,k)$ che ad ogni matrice M associa il k piano in \mathbb{R}^n generato dai vettori colonna della matrice.

Prendo quindi come topologia su $G(n,k)$ quella indotta da p , cioè la topologia più fine per cui p è continua. Questo equivale a dire che $G(n,k)$ è lo spazio quoziente $S(n,k)/\sim$ dove $M \sim M'$ se M e M' generano lo stesso spazio vettoriale ovvero se $M' = MR$ con $R = O(k)$

Stesso discorso vale per $G_{or}(n,k)$. In questo caso $p: S(n,k) \rightarrow G_{or}(n,k)$ è la mappa che porta M in $(V, [M_1, \dots, M_k])$

\uparrow orientazione associata
 \uparrow alle colonne di M
 $\text{Span}(M_1, \dots, M_k)$

In questo caso si ha che $G_{or}(n,k) \cong S(n,k)/\approx$ dove $M \approx M'$ se $M' = MR$ con $R \in SO(k)$.

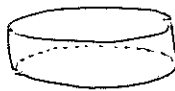
Osserviamo che $G_{or}(n,k)$ è un rivestimento di grado 2 di $G(n,k)$ tramite l'ovvia proiezione $(V, \tau) \mapsto V$.

A questo punto osserviamo che data S superficie di dimensione d in \mathbb{R}^n è definita in modo naturale la mappa $T: S \rightarrow G(n, d)$ che ad ogni $x \in S$ associa $Tau(S, x) \in G(n, d)$.

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{T} & \nearrow \\ & & G_{or}(n, d) \\ & & \downarrow p \\ S & \xrightarrow{T} & G(n, d) \end{array}$$

mentre il fatto che S sia orientabile equivale a richiedere che esista un sollevamento di T ad una mappa $\tilde{T}: S \rightarrow G_{or}(n, d)$.

Questa osservazione ci permette di dire alcune cose: per esempio, se S è semplicemente connessa allora è necessariamente orientabile.

[Tuttavia l'orientabilità non è determinata dal gruppo fondamentale: il nastro di Möbius non è orientabile ma il cilindro  lo è, ed il gruppo fondam. è lo stesso.]

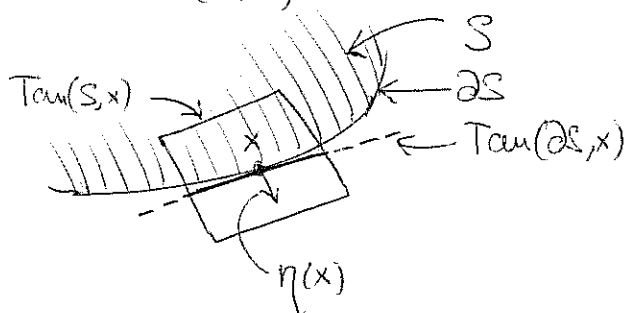
[Il problema scritto sopra contiene oltre a S anche il numero n legato alla dimensione dello spazio in cui vive S . In realtà la questione dell'orientabilità non dipende da n ma solo da S come spazio topologico.]

ESSENZIALE: Orientazione del bordo

(9)

Sia S superficie di dimensione d in \mathbb{R}^n
con bordo, orientata da $[v_1(x), \dots, v_d(x)]$ per ogni $x \in S$.

Dato $x \in \partial S$ abbiamo definito $\text{Tan}(S, x)$,
 $\text{Tan}(\partial S, x)$ e $\eta(x)$: normale esterna a
 $\text{Tan}(\partial S, x)$ in $\text{Tan}(S, x)$

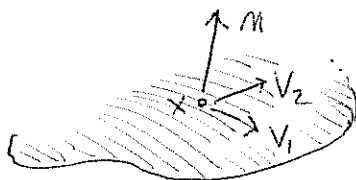


Si definisce allora l'orientazione di $\text{Tan}(\partial S, x)$
come $[w_1(x), \dots, w_{d-1}(x)]$ dove $w_1(x), \dots, w_{d-1}(x)$ sono
scelti in modo tale che

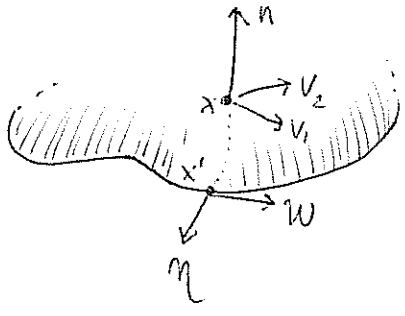
$$[\eta(x), w_1(x), \dots, w_{d-1}(x)] = [v_1(x), \dots, v_d(x)]$$

Esempio Nello spazio euclideo di dimensione 3
conviene, a livello di disegni, decidere che
l'orientazione canonica è quella data da
una base che soddisfa la regola della
mano destra. A questo punto dando la
normale $m(x)$ alla superficie S possiamo
determinare l'orient. $[v_1(x), v_2(x)]$ del tangente

(che non
è \mathbb{R}^3
.....)



A questo punto possiamo anche trovare l'orientazione $[w]$ del bordo:



Questa orientazione del bordo corrisponde a quella convenzionalmente indicata come "percorrere il bordo in senso antiorario",



Applicazioni k -lineari alternanti

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n .

$$\phi: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-volte}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Si dice k -lineare alternante se

(i) ϕ è lineare in ogni variabile

(ii) per ogni $\sigma \in S_k$ insieme delle permutazioni degli indici $\{1, \dots, k\}$ si ha

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \phi(v_1, \dots, v_k)$$

per ogni $v_1, \dots, v_k \in V$.

OSSERVAZIONI

1) La (ii) implica (ed è infatti equivalente) che scambiando due variabili cambia il segno di ϕ .

2) È importante ricordare che se $V = \mathbb{R}^k$ allora la mappa

$$(v_1, \dots, v_k) \longmapsto \det \left(\overbrace{v_1, \dots, v_k}^{\text{matrice di colonne } v_1, \dots, v_k} \right)$$

è k -lineare alternante.

Inoltre, tra tutte le applicazioni k -lin. alt. ϕ , questa è determinata dal fatto che

$\phi(e_1, \dots, e_k) = 1$. Da questo segue che per ogni ϕ k -lin. alt. si ha

(12)

$$\phi(v_1, \dots, v_k) = c \cdot \det(v_1, \dots, v_k)$$

con $c := \phi(e_1, \dots, e_k)$, ovvero le altre applicaz. k -lin. alt. sono multipli del determinante.

3) Notazione Indichiamo con $\Lambda^k V$ o $\Lambda^k(V)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni k -lin. alternanti su V . (Non verifico che si tratti di uno spazio vettoriale...)

Inoltre scriveremo spesso $\langle \phi; v_1, \dots, v_k \rangle$ invece di $\phi(v_1, \dots, v_k)$ (la ragione sarà chiara in seguito).

- 5) $\circ \Lambda^0 V = \mathbb{R}$ (le funzioni di 0 variabili sono le costanti, se volete);
- $\circ \Lambda^1 V = \text{duale di } V = V^*$;
- \circ se $\dim V = n$, $\Lambda^n V$ ha dimensione 1 (per quanto visto nel caso particolare in cui $V = \mathbb{R}^n$ al punto 2));
- \circ se $k > n = \dim V$ allora $\Lambda^k V = \{0\}$ perché ogni applicazione k -lin. alt. è costantemente nulla (punto 4))

4) Se ϕ è k -lin. alt. e v_1, \dots, v_k sono lin. dipendenti allora $\phi(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Dimostrazione Osserviamo innanzitutto che se

$v_i = v_j$ per qualche $i \neq j$ allora $\phi(v_1, \dots, v_k) = 0$:

abbiamo infatti che scambiando v_i con v_j deve cambiare il segno di ϕ , e d'altra parte questo scambio non altera le variabili di ϕ e quindi il valore deve rimanere lo stesso....

L'unica possibilità è che il valore sia 0.

Ora, se uno dei v_i , per esempio v_k , è combinazione lineare degli altri, cioè $v_k = \sum_{i < k} \alpha_i v_i$, allora per linearità

$$\phi(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i < k} \alpha_i \underbrace{\phi(v_1, \dots, v_{k-1}, v_i)}_0 = 0$$

per quanto appena detto.

Prodotto esterno

Date $\phi_1 \in \Lambda^{k_1} V$ e $\phi_2 \in \Lambda^{k_2} V$ definiamo

$\phi_1 \wedge \phi_2 \in \Lambda^{k_1+k_2} V$ come segue:

$$\langle \phi_1 \wedge \phi_2; v_1, \dots, v_{k_1+k_2} \rangle :=$$

$$= \frac{1}{k_1! k_2!} \sum_{\sigma \in S_{k_1+k_2}} \text{sgn}(\sigma) \langle \phi_1; v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k_1)} \rangle \cdot \langle \phi_2; v_{\sigma(k_1+1)}, \dots, v_{\sigma(k_1+k_2)} \rangle$$

per ogni $v_1, \dots, v_{k_1+k_2} \in V$.

Verifichiamo che $\phi_1 \wedge \phi_2$ è effettivamente un elemento di $\wedge^{k_1+k_2} V$.

La multilinearità è ovvia. Verifichiamo l'alternanza.

Data $\bar{\sigma} \in S_{k_1+k_2}$ abbiamo che, per ogni $\sigma \in S_{k_1+k_2}$,

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(\sigma) \langle \phi_1; v_{\sigma(\bar{\sigma}(1))}, \dots, v_{\sigma(\bar{\sigma}(k_1))} \rangle \langle \phi_2; v_{\sigma(\bar{\sigma}(k_1+1))}, \dots, v_{\sigma(\bar{\sigma}(k_1+k_2))} \rangle \\ &= \underbrace{\text{sgn}(\sigma)}_{\text{sgn}(\bar{\sigma})} \langle \phi_1; v_{\sigma \circ \bar{\sigma}(1)}, \dots, v_{\sigma \circ \bar{\sigma}(k_1)} \rangle \langle \phi_2; v_{\sigma \circ \bar{\sigma}(k_1+1)}, \dots, v_{\sigma \circ \bar{\sigma}(k_1+k_2)} \rangle \end{aligned}$$

e quindi sommando su tutti i σ si ottiene

$$\begin{aligned} & \langle \phi_1 \wedge \phi_2; v_{\bar{\sigma}(1)}, \dots, v_{\bar{\sigma}(k_1+k_2)} \rangle = \\ &= \text{sgn}(\bar{\sigma}) \frac{1}{k_1! k_2!} \sum_{\sigma \in S_{k_1+k_2}} \langle \phi_1; v_{\sigma \circ \bar{\sigma}(1)}, \dots, v_{\sigma \circ \bar{\sigma}(k_1)} \rangle \cdot \langle \phi_2; v_{\sigma \circ \bar{\sigma}(k_1+1)}, \dots \rangle \\ &= \text{sgn}(\bar{\sigma}) \frac{1}{k_1! k_2!} \sum_{\sigma \in S_{k_1+k_2}} \langle \phi_1; v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k_1)} \rangle \cdot \langle \phi_2; v_{\sigma(k_1+1)}, \dots, v_{\sigma(k_1+k_2)} \rangle \end{aligned}$$

perché l'applicazione da $S_{k_1+k_2}$ in sé data da $\sigma \mapsto \sigma \circ \bar{\sigma}$ è una biiezione!

$$= \text{sgn}(\bar{\sigma}) \langle \phi_1 \wedge \phi_2; v_{\bar{\sigma}(1)}, \dots, v_{\bar{\sigma}(k_1+k_2)} \rangle.$$



Il prodotto esterno \wedge è lineare in ciascuna variabile. È inoltre associativo nel senso che

$$(\phi_1 \wedge \phi_2) \wedge \phi_3 = \phi_1 \wedge (\phi_2 \wedge \phi_3)$$

(non lo verificiamo).

Tuttavia non è commutativo; vale anzi che

$$\phi_2 \wedge \phi_1 = (-1)^{k_1 k_2} \phi_1 \wedge \phi_2.$$

Verifichiamolo. Sia $\bar{\sigma} \in S_{k_1+k_2}$ definita da

$$\bar{\sigma}(1) := k_2 + 1, \dots, \bar{\sigma}(k_1) := k_2 + k_1, \bar{\sigma}(k_1+1) = 1, \dots, \bar{\sigma}(k_1+k_2) = k_2.$$

Allora $\text{sgn}(\bar{\sigma}) = (-1)^{k_1 k_2}$ (fate voi il controllo) e

per ogni $\sigma \in S_{k_1+k_2}$ si ha che

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(\sigma) \langle \phi_2; v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k_2)} \rangle \langle \phi_1; v_{\sigma(k_2+1)}, \dots, v_{\sigma(k_2+k_1)} \rangle \\ & \stackrel{(-1)^{k_1 k_2}}{=} \underbrace{\text{sgn}(\bar{\sigma})}_{\text{sgn}(\sigma)} \cdot \text{sgn}(\sigma \circ \bar{\sigma}) \langle \phi_1; v_{\sigma(\bar{\sigma}(1))}, \dots, v_{\sigma(\bar{\sigma}(k_1))} \rangle \cdot \\ & \quad \cdot \langle \phi_2; v_{\sigma(\bar{\sigma}(k_1+1))}, \dots, v_{\sigma(\bar{\sigma}(k_1+k_2))} \rangle \end{aligned}$$

e sommando su tutti i σ si ottiene, come prima,

$$\langle \phi_2 \wedge \phi_1; v_1, \dots, v_{k_1+k_2} \rangle = (-1)^{k_1 k_2} \langle \phi_1 \wedge \phi_2; v_1, \dots, v_{k_1+k_2} \rangle. \quad \square$$

CONSEGUENZA IMPORTANTE, se k è dispari

$$\text{e } \phi \in \wedge^k V, \text{ allora } \phi \wedge \phi = 0$$

(Questo non vale per k pari)

Indichiamo con $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k)$ con i_1, \dots, i_k interi
un multi-indice.

In particolare indichiamo con $I_{n,k}$ l'insieme
dei multiindici $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k)$ tali che
 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Fissata una base e_1, \dots, e_n dello spazio vettoriale
 V e $\underline{i} \in I_{n,k}$, indichiamo con $e_{\underline{i}}$ la k -upla
 $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$.

Inoltre definiamo la base (e_1^*, \dots, e_n^*) di $V^* = \Lambda^k V$
canonicamente associata a (e_1, \dots, e_n) ponendo

$$e_i^*(e_j) := \delta_{ij} \quad \text{per ogni } i, j.$$

(La definizione è ben posta perché fissati $\alpha_1, \dots, \alpha_n$
esiste un unico elemento $\lambda \in V^*$ t.c. $\lambda(e_i) = \alpha_i \forall i$).

Infine poniamo per ogni $\underline{i} \in I_{n,k}$

$$e_{\underline{i}}^* := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$$

In particolare $e_{\underline{i}}^*(V)$ sono i coefficienti
del vettore V rispetto alla base e_1, \dots, e_n

Lemma fondamentale

(2)

$\phi \in \Lambda^k V$ è univocamente determinata dai valori che assume sulle k -uple $e_{\underline{i}}$ con $\underline{i} \in I_{n,k}$. Cioè $\phi(e_{\underline{i}}) = 0 \quad \forall \underline{i} \in I_{n,k} \Rightarrow \phi = 0$.

Dimostrazione Passo 1. Per ipotesi sappiamo che $\langle \phi; e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \rangle = 0$ se $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

Permutando questi indici otteniamo che lo stesso vale per qualunque k -upla di indici distinti i_1, \dots, i_k , e se questi indici non sono distinti l'identità è già nota. Dunque

$$\langle \phi; e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \rangle = 0 \quad \text{per ogni } i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}.$$

Passo 2 $\langle \phi; v_1, e_{i_2}, \dots, e_{i_k} \rangle = 0$ per ogni $v_1 \in V$ e $i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Basta infatti scrivere v_1 come combinazione lineare degli e_i e usare la linearità di ϕ nella prima variabile.

Passo 3 $\langle \phi; v_1, v_2, e_{i_3}, \dots, e_{i_k} \rangle = 0$ per ogni $v_1, v_2 \in V$, $i_3, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Come prima.

etc. etc.

□

Corollario 1 (Formula di Binet)

Date $A, B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ si ha che

$$\det(\underbrace{B^t A}_{\text{matrice } k \times k}) = \sum_{I \in I_{n,k}} \det(B^I) \det(A^I)$$

dove A^I è il minore $k \times k$ di A ottenuto prendendo le k righe di A di indici i_1, \dots, i_k .

[Caso particolare usato in precedenza :]

$$\det(A^t A) = \sum_{\substack{M \text{ minore} \\ k \times k \text{ di } A}} (\det M)^2$$
]

Dimostrazione Fissiamo B e per ogni $A = (a_1, \dots, a_k)$ definiamo:

$$\phi_1 : (a_1, \dots, a_k) \mapsto \det(B^t A)$$

$$\phi_2 : (a_1, \dots, a_k) \mapsto \sum_{I \in I_{n,k}} \det(B^I) \det(A^I).$$

↑
vettori
in \mathbb{R}^n

La tesi è che $\phi_1 \equiv \phi_2$.

Osservo che ϕ_1 e ϕ_2 sono applicazioni k -lineari alternanti su \mathbb{R}^n .

[Il punto è che il determinante è k -lin + altern.;
 per ϕ_2 bisogna lavorarci un po'...]

Per via del Lemma fondamentale mi basta quindi verificare che

$$\langle \phi_1, \underline{e}_j \rangle = \langle \phi_2, \underline{e}_j \rangle \quad \forall j \in I_{n,k}.$$

E in fatti (4)

$$\langle \phi_{1j}; e_{j_1}, \dots, e_{j_k} \rangle = \det \left(\overbrace{B^t \cdot (e_{j_1}, \dots, e_{j_k})}^{(B^j)^t} \right) = \det(B^j)$$

mentre

$$\langle \phi_{2j}; e_{j_1}, \dots, e_{j_k} \rangle = \sum_{\underline{i} \in I_{n,k}} \det(B^{\underline{i}}) \det \left(\underbrace{(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})^{\underline{i}}}_{\delta_{\underline{i}j}} \right) = \det(B^j).$$

cioè 1 se $\underline{i} = \underline{j}$
0 se $\underline{i} \neq \underline{j}$ □

Corollario 2 $\langle e_{\underline{i}}^*; v_1, \dots, v_k \rangle = \det(V^{\underline{i}})$

dove V è la matrice dei coefficienti dei vettori v_j rispetto alla base e_i . Cioè $V_{ij} = e_i^*(v_j)$.

Dimostrazione Di nuovo basta limitarsi a dimostrare l'identità quando $(v_1, \dots, v_k) = e_{\underline{j}}$ con $\underline{j} \in I_{n,k}$.

Siccome $\det((e_{j_1}, \dots, e_{j_k})^{\underline{i}}) = \delta_{\underline{i}j}$ dobbiamo far vedere che

$$(*) \quad \langle e_{\underline{i}}^*; e_{\underline{j}} \rangle = \delta_{\underline{i}j}.$$

Questo lo si fa per riduzione su k usando la definizione di prodotto esterno (questo sarà l'unico punto in cui usiamo quella definizione, più o meno)

Per $k=1$ la (*) è la definizione stessa di e_i^* e quindi è vera. Supponiamo la (*) vera per $k-1$ e dimostriamola per k .

Scrivo $e_{\underline{i}}^*$ come $e_{\underline{i}'}^* \wedge e_{i_k}^*$ con $\underline{i}' := (i_1, \dots, i_{k-1})$.

Allora per la definizione di \wedge ,

$$\langle e_{\underline{i}}^*; e_{\underline{j}} \rangle = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \langle e_{\underline{i}'}^*; e_{j_{\sigma(1)}}, \dots, e_{j_{\sigma(k-1)}} \rangle \langle e_{i_k}^*; e_{j_{\sigma(k)}} \rangle$$

Affinché i due fattori siano entrambi $\neq 0$, si deve avere che $j_{\sigma(k)} = i_k$ e che riordinando in modo crescente $(j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(k-1)})$ si ottiene \underline{i}' . Cioè deve essere necessariamente $\underline{i} = \underline{j}$. Quindi se $\underline{i} \neq \underline{j}$ abbiamo che $\langle e_{\underline{i}}^*; e_{\underline{j}} \rangle = 0$.

Se $\underline{j} = \underline{i}$ allora i fattori sono entrambi non nulli e $i_k = i_{\sigma(k)}$, cioè $\sigma(k) = k$. Quindi l'identità precedente diventa (rimpiazzando σ con $\sigma(k) = k$ con $\sigma' \in S_{k-1}$)

$$\begin{aligned} \langle e_{\underline{i}}^*; e_{\underline{j}} \rangle &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \langle e_{\underline{i}'}^*; e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k-1)}} \rangle \cdot \underbrace{\langle e_{i_k}^*; e_{i_k} \rangle}_1 \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\sigma' \in S_{k-1}} \langle e_{\underline{i}'}^*; \underbrace{e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}}_{\underline{i}'} \rangle \cdot \underbrace{1}_1 \\ &= 1 \end{aligned}$$



(6)

Corollario 3 Per ogni $\phi \in \Lambda^k V$ si ha

$$\phi = \sum_{\underline{i} \in I_{n,k}} \langle \phi; e_{\underline{i}} \rangle e_{\underline{i}}^*$$

Dimostrazione Come al solito basta far vedere che

$$\langle \phi; e_{\underline{j}} \rangle = \sum_{\underline{i} \in I_{n,k}} \langle \phi; e_{\underline{i}} \rangle \langle e_{\underline{i}}^*; e_{\underline{j}} \rangle$$

per ogni $\underline{j} \in I_{n,k}$, ma questa identità è un'ovvia conseguenza del fatto che $\langle e_{\underline{i}}^*; e_{\underline{j}} \rangle = \delta_{\underline{i}\underline{j}}$. \square

Corollario 4 $\{e_{\underline{i}}^* : \underline{i} \in I_{n,k}\}$ formano una base di $\Lambda^k V$ (la base canonica associata alla scelta delle base e_1, \dots, e_n di V).

In particolare $\dim(\Lambda^k V) = \# I_{n,k} = \binom{n}{k}$ (per $0 \leq k \leq n$).

Dimostrazione In vista del Corollario 3 basta verificare

che i $e_{\underline{i}}^*$ sono linearmente indipendenti, e questo segue dal fatto che $\langle e_{\underline{i}}^*; e_{\underline{j}} \rangle = \delta_{\underline{i}\underline{j}}$.

Se infatti, per assurdo, $e_{\underline{i}_0}^*$ fosse comb. lin. degli $e_{\underline{i}}^*$ con $\underline{i} \neq \underline{i}_0$, cioè

$$e_{\underline{i}_0}^* = \sum_{\underline{i} \neq \underline{i}_0} \alpha_{\underline{i}} e_{\underline{i}}^*$$

applicando questa identità a $e_{\underline{i}_0}$ avremmo

$$1 = \langle e_{\underline{i}_0}^*; e_{\underline{i}_0} \rangle = \sum_{\underline{i} \neq \underline{i}_0} \alpha_{\underline{i}} \overbrace{\langle e_{\underline{i}}^*; e_{\underline{i}_0} \rangle}^0 = 0. \quad \square$$

Per fare i calcoli conviene scrivere gli elementi di $\wedge^k V$ in termini della base canonica, in particolare quando $V = \mathbb{R}^n$.

Esempio di calcolo di un prodotto

$$\begin{aligned}
 & (3 dx_1 \wedge dx_2 - 2 dx_2 \wedge dx_4) \wedge (-dx_1 \wedge dx_3 + 2 dx_2 \wedge dx_3) \\
 &= -3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + 6 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
 &\quad + 2 dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - 4 dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
 &= +3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + 6 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
 &\quad + 2 dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + 4 dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
 &= 2 dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_3
 \end{aligned}$$

e riordinando questi ultimi fattori con 3 scambi

$$= -2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

Altro esempio Calcolo $\phi \wedge \phi$ con $\phi = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$:

$$\begin{aligned}
 \phi \wedge \phi &= (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) \wedge (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) = \\
 &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
 &\quad + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
 &= 2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.
 \end{aligned}$$

Concludiamo la presentazione delle applicazioni k -lineari alternanti con un fatto che sarà utile in seguito: (8)

Proposizione Sia W un sottospazio k -dimensionale di V , (v_1, \dots, v_k) una base di W , e $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k$ elementi di W . Data $\phi \in \Lambda^k V$ si ha allora che

$$\langle \phi; \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k \rangle = \det(\tilde{V}) \langle \phi; v_1, \dots, v_k \rangle$$

dove \tilde{V} è la matrice $n \times k$ delle coordinate dei vettori \tilde{v}_j rispetto alla base v_i .

Dimostrazione Restringiamo ϕ a W , ovvero supponiamo che $W=V$. Allora $\tilde{V}_{ij} = v_i^*(\tilde{v}_j)$ e siccome $\Lambda^k W$ ha dimensione 1 e base $v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^*$, esiste c.t.c. $\phi = c \cdot v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^*$.

Quindi

$$\begin{aligned} \langle \phi; \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k \rangle &= c \langle v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^*; \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k \rangle \\ &= c \det(\tilde{V}) \quad (\text{Corollario 2}) \end{aligned}$$

e

$$\langle \phi; v_1, \dots, v_k \rangle = c \underbrace{\langle v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^*; v_1, \dots, v_k \rangle}_{=1} = c$$

da cui la tesi. □

9

Osserviamo che se $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k$ sono linearmente indipendenti allora \tilde{V} è la matrice di cambio di base che permette di passare dalle coordinate di un vettore di W rispetto alla base $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k$ a quelle rispetto alla base v_1, \dots, v_k . ~~Questo è il fatto~~

In particolare se (v_1, \dots, v_k) e $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k)$ sono basi ortonormali allora $\tilde{V} \in O(k)$ e quindi $\det(\tilde{V}) = \pm 1$. Se inoltre $[v_1, \dots, v_k] = [\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k]$ (cioè le due basi definiscono la stessa orientazione di W) allora $\det(\tilde{V}) = 1$

Pertanto in tal caso

$$\langle \phi; v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle = \langle \phi; \tilde{v}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{v}_k \rangle$$

In altre parole il valore di ϕ è lo stesso per k -uple ortonormali che generano lo stesso sottospazio (di V) e hanno la stessa orientazione.

K-FORME

10

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n .

Una k -forma su Ω è una mappa che ad ogni $x \in \Omega$ associa $\omega(x) \in \Lambda^k \mathbb{R}^n$.

Usando la base canonica di $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ scriviamo

$$\omega(x) = \sum_{i \in I_{n,k}} \omega_i(x) \cdot dx_i$$

↑
Coefficienti della forma ω

Diciamo che ω è di classe E^h se i coefficienti ω_i sono tutti di classe E^h .

NOTA Siccome $\Lambda^0 \mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, le 0-forme sono le funzioni su Ω (funzioni scalari).

Data S superficie k -dimensionale orientata (da $[\beta(x)]$ base di $\text{Tan}(S, x)$), E sottosistema di S di area (volume k -dimensionale) finito, ϕ k -forma su Ω aperto che contiene E (con ϕ limitata....) definiamo

$$\int_E \omega := \int_E \langle \omega(x); \underbrace{v_1(x), \dots, v_k(x)}_{\text{base ortogonale di } \text{Tan}(S, x)} \rangle d\sigma_k(x)$$

t.c. $[v_1(x), \dots, v_k(x)] = [\beta(x)]$.

La definizione è ben posta perché il valore di

$$\langle \omega(x); \nu_1(x), \dots, \nu_k(x) \rangle$$

non dipende dalla scelta della base $\nu_1(x), \dots, \nu_k(x)$.

NOTA Se $E \subset \mathbb{R}^n$ possiamo interpretare

$$\int_E f(x) d\mathcal{L}^n(x)$$

come l'integrale su E della n -forma $f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

(Su \mathbb{R}^n l'orientazione è quella definita dalla base canonica).

Differenziale di una k -forma

Data ω k -forma su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ di classe \mathcal{C}^1 definiamo il differenziale (o differ. esterno) di ω come la $(k+1)$ -forma $d\omega$ definita da

$$\langle d\omega(x); \nu_1, \dots, \nu_{k+1} \rangle = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_{k+1}} \frac{\partial}{\partial \nu_{\sigma(k)}} \langle \omega(x); \nu_{\sigma(1)}, \dots, \nu_{\sigma(k+1)} \rangle$$

$\text{sgn}(\sigma)$

NOTA La linearità di $d\omega(x)$ segue da quella di $\omega(x)$ e dell'operatore di derivata direzionale.

L'alternanza si dimostra come per il prodotto \wedge .

NOTA $d\omega$ non è il diff. di ω come mappa da Ω in $\wedge^k \mathbb{R}^n$.

Proprietà del differenziale

1) $d\omega$ è lineare in ω .

Dimostrazione omessa.

2) Se g è una 0-forma, cioè una funzione reale, dg coincide con l'usuale differenziale.

Dimostrazione dalla definizione

$$\langle dg(x); v \rangle := \frac{1}{0!} \frac{\partial}{\partial v} g(x) = \frac{\partial g}{\partial v}(x)$$

questa è (quasi) la definizione di differenziale. \square

3) Se $\omega(x) = g(x) \cdot \phi$ allora $d\omega(x) = dg(x) \wedge \phi$.

\uparrow funzione \uparrow elemento (costante) di $\Lambda^k \mathbb{R}^n$
 $E^k_{\text{su}} \Omega$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \langle d\omega(x); v_1, \dots, v_{k+1} \rangle &:= \frac{1}{k!} \sum_{G \in S_{k+1}} \text{sgn}(G) \frac{\partial}{\partial v_{G(1)}} \langle \omega(x); v_{G(2)}, \dots, v_{G(k+1)} \rangle \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{G \in S_{k+1}} \text{sgn}(G) \frac{\partial}{\partial v_{G(1)}} (g(x) \langle \phi; v_{G(2)}, \dots, v_{G(k+1)} \rangle) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{G \in S_{k+1}} \text{sgn}(G) \langle dg(x), v_{G(1)} \rangle \langle \phi; v_{G(2)}, \dots, v_{G(k+1)} \rangle \\ &= \langle dg(x) \wedge \phi; v_1, \dots, v_{k+1} \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

$$4) \quad d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $k_1\text{-forma} \quad k_2\text{-forma}$

Dimostrazione Usando la linearità di d e \wedge e scomponendo ω_1 e ω_2 come somme di forme del tipo $g(x) \cdot \phi$ con ϕ costante e g funz. (anzi, ϕ della forma dx_i) mi posso ricondurre al caso

$$\omega_1 = g_1 \phi_1 \quad e \quad \omega_2 = g_2 \phi_2$$

Quindi

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(g_1 g_2 \cdot \phi_1 \wedge \phi_2) \\ &= d(g_1 g_2) \wedge \phi_1 \wedge \phi_2 \\ &= g_2 dg_1 \wedge \phi_1 \wedge \phi_2 + g_1 dg_2 \wedge \phi_1 \wedge \phi_2 \\ &= (dg_1 \wedge \phi_1) \wedge (g_2 \phi_2) + (-1)^{k_1} (g_1 \phi_1) \wedge (dg_2 \wedge \phi_2) \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2. \end{aligned}$$

Sto usando il fatto che $dg_2 \wedge \phi_1 = (-1)^{k_1-1} \phi_1 \wedge dg_2$.

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $1\text{-forma} \quad k_1\text{-forma}$

□

5) Se ω è \mathbb{R}^2 , $d^2\omega = 0$.

Caso 1 $\omega = 0\text{-forma} = g$. Allora

$$\begin{aligned} d^2g &= d\left(\sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \overset{0}{dx_i \wedge dx_i} + \sum_{i < j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} (\overset{0}{dx_j \wedge dx_i} + \overset{0}{dx_i \wedge dx_j}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Caso 2 $\omega = g \cdot \phi \leftarrow$ costante
 \leftarrow funzione E^2 .

Allora $d^2\omega = d(dg \wedge \phi) = \underbrace{d^2g \wedge \phi}_{\text{per il caso 1}} - dg \wedge \underbrace{d\phi}_{\text{perché } \phi \text{ è costante}} = 0$

Caso 3 ω qualunque; ci si riconduce al caso 2 per linearità. □

ESEMPIO DI CALCOLO DEL DIFFERENZIALE

$$\begin{aligned} & d(x_1^2 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_2) = \\ &= (2x_1 dx_1) \wedge dx_2 \wedge dx_3 + (x_3 dx_2 + x_2 dx_3) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= 2x_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (2x_1 + x_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

TEOREMA DI STOKES

Sia S superficie con bordo di dimensione k e classe E^1 in \mathbb{R}^n compatta e orientata.

Sia ω una $(k-1)$ -forma di classe E^1 definita su Ω aperto che contiene S .

Allora

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$$

(l'orientazione di ∂S è quella indicata dall'orientazione di S).

(Alternativo: S qualunque e ω con supporto D.f.c. $D \cap S$ è compatto....)

NOTE 1) Il teorema di Gauss - Green

(4)

è un caso particolare del teorema di Stokes:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} P dx + Q dy &= \int_D d(P dx + Q dy) \\ &= \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.\end{aligned}$$

- 2) Lo stesso vale per il teorema della divergenza (questo richiede un po' più di lavoro e lo vediamo in seguito).
- 3) L'orientazione di ∂S è fondamentale nell'enunciato! deve essere scelta in accordo con quella di S .

Per la dimostrazione del teorema di Stokes ho bisogno della nozione di pull-back di una forma

Definizione Dati V, V' spazi vettoriali reali, $T: V' \rightarrow V$ lineare, $\phi \in \Lambda^k V$, definiamo il pull-back di ϕ secondo T come l'elemento di $\Lambda^k V'$ definito da

$$\langle T^\# \phi; v'_1, \dots, v'_k \rangle := \langle \phi; T v'_1, \dots, T v'_k \rangle$$

$$\forall v'_1, \dots, v'_k \in V'.$$

Proprietà immediate

- 1) $T^\# \phi$ è lineare in ϕ ;
- 2) $T^\#(\phi_1 \wedge \phi_2) = T^\# \phi_1 \wedge T^\# \phi_2$.

Definizione

Data ω k -forma su Ω aperte di \mathbb{R}^n , e $g: \Omega' \text{ aperto di } \mathbb{R}^{n'} \rightarrow \Omega$ di classe C^1 , definiamo il pull-back di ω secondo g come la k -forma su Ω' definita da

$$(g^\# \omega)(s) := (dg(s))^\# \omega(g(s)) \quad \forall s \in \Omega'.$$

Proprietà

- 1) $g^\# \omega$ è lineare in ω
e $g^\#(\omega_1 \wedge \omega_2) = g^\# \omega_1 \wedge g^\# \omega_2$ (ovvio per quanto già detto).
- 2) Se f è una 0-forma ^{o funzione} allora $g^\# f(s) = f(g(s))$.
(ovvio...)
- 3) Se $g^\#(df) = d(g^\# f)$

Dimostrazione $\langle d(g^\# f)(s), v \rangle = \langle d(f \circ g)(s); v \rangle$
 $= \langle df(x) \circ dg(s); v \rangle = df(x)(dg(s)v)$
 $= \langle df(x); dg(s)v \rangle = \langle (dg(s))^\# df(x); v \rangle$
 $= \langle g^\#(df)(s), v \rangle \quad \forall v, \dots$ □

$$4) \quad g^\#(d\omega) = d(g^\#\omega).$$

Dimostrazione Mi limito al caso $\omega(x) = f(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

(La linearità fa il resto): So che

$$g^\#f = f \circ g \quad \text{e} \quad g^\#(dx_i) = d(g^\#x_i) = dg_i.$$

Quindi
$$d(g^\#\omega) = d(f \circ g \cdot dg_{i_1} \wedge \dots \wedge dg_{i_k})$$

$$\begin{aligned} \text{uso il fatto che } d^2g=0 \quad | \quad & \longrightarrow = d(f \circ g) \wedge dg_{i_1} \wedge \dots \wedge dg_{i_k} \\ & = g_\#(df) \wedge g_\#(dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge g_\#(dx_{i_k}) \\ & = g_\#(df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \\ & = g_\#(d\omega). \quad \square \end{aligned}$$

5) Se $g: A \text{ aperto in } \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{ } \leftarrow \text{ } k\text{-sup.}} S \cup U$ è una buona parametrizzazione E^1 che preserva l'orientazione allora

$$\int_{g(A)} \omega = \int_A g^\#\omega$$

(in effetti lo stesso vale se A è un aperto di S' superficie di dimensione k ...)

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \int_A g^\#\omega &= \int_A \langle g^\#\omega(s); e_1, \dots, e_k \rangle ds \\ &= \int_A \langle \omega(g(s)); \underbrace{dg(s)e_1}_{\tilde{v}_1}, \dots, \underbrace{dg(s)e_k}_{\tilde{v}_k} \rangle ds \end{aligned}$$

(7)

Sia ora v_1, \dots, v_k una base ortonormale (funzione di x) di $Tau(S, x)$; per quanto visto nella lezione prec.: $g(s)$

$$\langle \omega(x); \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k \rangle = \langle \omega(x); v_1, \dots, v_k \rangle \cdot \det(\tilde{V})$$

con \tilde{V} matrice dei coefficienti dei vettori \tilde{v}_j rispetto alla base v_i . Cioè $(\tilde{V})_{ij} = \text{coeff. di } \tilde{v}_j \text{ rispetto a } v_i = v_i \cdot \tilde{v}_j$ e dunque $\tilde{V} = V^t \tilde{V}$ dove V e \tilde{V} sono le matrici $n \times k$ con colonne v_i e \tilde{v}_i rispettiv.

Siccome g preserva l'orientazione $[\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k] = [v_1, \dots, v_k]$ e quindi $\det(\tilde{V}) > 0$, per cui

$$\begin{aligned} \det(\tilde{V}) &= \sqrt{(\det \tilde{V})^2} = \sqrt{\det(\tilde{V}^t \tilde{V})} \\ &= \sqrt{\det(\tilde{V}^t \underbrace{V V^t}_{\tilde{V}} \tilde{V})} = \sqrt{\det(\tilde{V}^t \tilde{V})} \end{aligned}$$

ma $\tilde{V} = (dg(s)e_1, \dots, dg(s)e_k) = \left(\frac{\partial g}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial s_k} \right) = \nabla g$ perché $V V^t$ è la matrice di proiezione su $Tau(S, x)$ e i vettori di \tilde{V} sono in $Tau(S, x)$...

$$= \sqrt{\det(\nabla g^t \nabla g)} = J_g.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_A g^\# \omega &= \int_A \langle \omega(x); v_1(x), \dots, v_k(x) \rangle J_g(s) ds \\ &= \int_{g(A)} \langle \omega(x); v_1(x), \dots, v_k(x) \rangle d\sigma_k(x) = \int_{g(A)} \omega. \quad \square \end{aligned}$$

OSSERVAZIONI

1) La formula $\int_{g(A)} \omega = \int_A g^\# \omega$ viene spesso usata per definire l'integrale della k-forma ω su $g(A) \subset S$.

2) Nella dimostrazione della proprietà 4 abbiamo usato che

$$d(f \cdot dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k.$$

Questa formula si dimostra usando il fatto che $d^2g = 0$ e la formula per la derivata del prodotto \wedge SE $g_i \in E^2$. Tuttavia la formula vale anche se $g_i \in E^1$ solamente.

Per dimostrarla in questo caso si approssima ciascuna g_i con funzioni E^2 , ad esempio regolarizzando g_i per convoluzione.....
Ometto i dettagli.

3) Esempio di calcolo del pull-back.

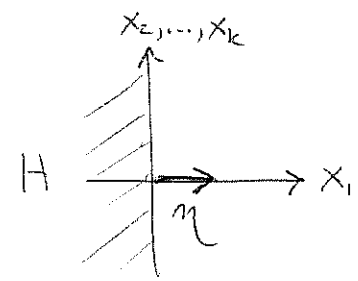
Sia $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(s_1, s_2) := (s_2^2, s_1^2, s_1 s_2)$
e sia ω su $\mathbb{R}^3, g(x) = x_2^2 x_3 dx_1$. Allora
 $g^\# \omega(s) = (s_1^2)^2 (s_1 s_2) d(s_2^2) = 2s_1^5 s_2^2 ds_2.$

Lemma Sia H il semispazio in \mathbb{R}^k dato da $H := \{x \in \mathbb{R}^k : x_1 \leq 0\}$, dotato al solito dell'orientazione canonica di \mathbb{R}^k , e sia ω una $(k-1)$ -forma su \mathbb{R}^k di classe \mathcal{E}^1 con supporto compatto. Allora

$$\int_{\partial H} \omega = \int_H d\omega.$$

Dimostrazione Notare che la normale esterna da ∂H

è e_1 in ogni punto.



E quindi l'orient. di ∂H è $[e_2, \dots, e_k]$ in ogni punto.

Possiamo ora limitarci al caso $\omega = f \widehat{dx}_i$.

Caso 1: $i=1$

In tal caso

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \bigwedge_{\substack{j=1, \dots, k \\ j \neq i}} dx_j \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial H} \omega &= \int_{\partial H} f(x) \underbrace{\langle \widehat{dx}_i, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k; e_2, \dots, e_k \rangle}_{=1} d\sigma_{k-1}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k. \end{aligned}$$

D'altra parte $d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} \underbrace{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k}_{=dx}$ e quindi

$$\int_H dw = \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

Fubini:
 integro prima
 nella prima
 variabile

$$\rightarrow = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_k$$

data g
 su \mathbb{R} a
 supporto
compatto

$$\rightarrow = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k.$$

a
 $\int_{-\infty}^{\infty} g'(t) dt = g(a)$

Abbiamo quindi dimostrato che
 in questo caso $\int_H dw = \int_{\partial H} \omega$.

Caso 2: $i > 1$

Analogo al precedente, con alcune

differenze:

$$\int_{\partial H} \omega = \int_{\partial H} f(x) \underbrace{\langle dx_i; e_2, \dots, e_k \rangle}_{=0} ds_{k-1}(x) = 0$$

e

$$\int_H dw = \int_H (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_k$$

Integro prima
 nella variab.
 i -esima e
 uso che data
 g su \mathbb{R} con supp.
 compatto
 $\int_{-\infty}^{\infty} g'(t) dt = 0$

$$\rightarrow = \int_{*} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) (-1)^{i-1} dx_1 \dots dx_k$$

\uparrow
 i escluso

$$= \int_{*} 0 = 0.$$



Possiamo finalmente dimostrare Stokes

(11)

Si come S è compatta, posso trovare un numero finito di parametrizzazioni

$$g_i: H \cap A_i \rightarrow S \cap U_i$$

↑ aperto in \mathbb{R}^k

che preservano l'orientazione e tali che

$\{U_i\}$ ricopre S .

Sia ora $\{\sigma_i\}$ partizione dell'unità subordinata a $\{U_i\}$.

Allora

$$\int_{\partial S} \omega = \int_{\partial S} (\sum \sigma_i) \omega = \sum_i \int_{\partial S} \sigma_i \omega$$

$\sigma_i \omega$ ha supporto contenuto in U_i | $\rightarrow = \sum_i \int_{\partial S \cap U_i = g_i(H \cap A_i)} \sigma_i \omega$

$$= \sum_i \int_{H \cap A_i} g_i^\#(\sigma_i \omega) \quad \leftarrow \text{proprietà 5 del pull-back}$$

$$= \sum_i \int_H g_i^\#(\sigma_i \omega) \quad \leftarrow \begin{array}{l} g_i^\#(\sigma_i \omega) \text{ ha supporto} \\ \text{contenuto in } A_i, \text{ per} \\ \text{cui estendendola a} \\ \text{0 fuori da } A_i \\ \text{resta regolare} \end{array}$$

Lemma precedente | $\rightarrow = \sum_i \int_{\partial H} d(g_i^\#(\sigma_i \omega))$

$$= \sum_i \int_{\partial H \cap A_i} g_i^\#(d(\sigma_i \omega)) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{proprietà 4 del pull-back} \\ + g_i^\#(d(\sigma_i \omega)) \text{ ha supp.} \\ \text{contenuto in } A_i \end{array}$$

(12)

$$= \sum_i \int_{S_i \cap U} d(G_i \omega) = \sum_i \int_S d(G_i \omega) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{come} \\ \text{prima} \\ \dots \end{array}$$

linearità
del
differenz.

$$\rightarrow = \int_S d(\underbrace{\sum_i G_i}_1 \omega) = \int_S d\omega .$$

□

Esercizi e complementi

Ex. Sia ω k -forma continua su Ω . Allora

$$\omega = 0 \iff \int_D \omega = 0 \quad \forall D \text{ } k\text{-disco (chiuso)} \\ \text{contenuto in } \Omega \\ \text{e parallelo a uno} \\ \text{dei } k\text{-piani coordinati} \\ \text{(orientato in un} \\ \text{modo o in un altro).}$$

Dim. (\implies): ovvio.

(\impliedby): per assurdo, se $\omega \neq 0$ allora esiste

$x_0 \in \Omega$ e $\underline{i} \in I_{n,k}$ t.c. $\omega_{\underline{i}}(x_0) \neq 0$.

Supponiamo che $\omega_{\underline{i}}(x_0) > 0$ (l'altro caso è analogo).

Allora $\exists r > 0$ t.c. $\omega_{\underline{i}} > 0$ su $B(x_0, r) \subset \Omega$.

Sia ora D il disco di centro x_0 e raggio r parallelo al piano di assi e_{i_1}, \dots, e_{i_k} .

Allora

$$\int_D \omega = \int_D \langle \omega(x); e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \rangle d\sigma_k(x) \\ = \int_D \omega_{\underline{i}}(x) d\sigma_k(x) > 0.$$

Ex. Sia ω k -forma E^1 t.c. $\omega = d\alpha$ con α $(k-1)$ -forma di classe E^1 . Allora $d\omega = 0$.

Dim. Se α fosse di classe E^2 avremmo $d\omega = d^2\alpha = 0$.

(2)

In questo caso procediamo diversamente: per ogni disco $(k+1)$ -dimensionale contenuto in Ω si ha

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} d\alpha = \int_{\partial(\partial D)} \alpha = 0 \text{ perché } \partial(\partial D) = \emptyset.$$

NOTA $d\alpha$ di classe \mathcal{E}^1 NON implica α di classe \mathcal{E}^2 .

Se per esempio α è una 1-forma in \mathbb{R}^2 , cioè $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$, si ha che

$$d\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2$$

e il fatto che $\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}$ sia \mathcal{E}^2 non implica

che $\nabla \alpha_1$ e $\nabla \alpha_2$ siano \mathcal{E}^2

Ex Dare esempio di ϕ t.c. $\phi \wedge \phi \neq 0$.

Risposta $\phi = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$.

Definizione Sia ω k -forma su Ω .

Se ω è di classe \mathcal{E}^0 , diciamo che ω è esatta

se esiste α $(k-1)$ -forma di classe \mathcal{E}^1 t.c. $\omega = d\alpha$

[Si può generalizzare questa definizione chiedendo
che esista α di classe \mathcal{E}^0 t.c.
 $\int_S \omega = \int_{\partial S} \alpha$
[per ogni superficie S (questo ha senso anche se $\alpha \notin \mathcal{E}^1$)
compatta in Ω]]

Se ω è di classe \mathcal{E}^1 , diciamo che ω è chiusa

& $d\omega = 0$.

[Si può estendere questa definizione a ω di classe \mathcal{E}^0]

(3)

richiedendo invece di $dw=0$ che

$$\int_{\partial S} \omega = 0$$

per ogni sup. S (bastano i dischi...),
 ↳ compatta in Ω

Teorema

(i) ω esatta $\Rightarrow \omega$ chiusa

(ii) ω chiusa e Ω stellato $\Rightarrow \omega$ esatta

(iii) $\int_S \omega = 0 \quad \forall S \subset \Omega \text{ t.c. } \partial S = \emptyset \Rightarrow \omega \text{ esatta}$
 ↳ compatta

(iv) in generale ω chiusa $\not\Rightarrow \omega$ esatta.

Se ω è esatta e di classe E^k , è facile trovare una primitiva di classe E^k . Meno ovvio trovarne una di classe E^{k+1}

Dimostrazioni parziali:

(i) $\omega = d\alpha$ con $\alpha \in E^1$ e $\omega \in E^1 \Rightarrow d\omega = 0$, già visto.

Più in generale, se $\omega \in E^0$ ed esiste $\alpha \in E^0$ t.c.

$$\int_S \omega = \int_{\partial S} \alpha \quad \text{per ogni } S, \text{ allora } \int_{\partial S} \omega = \int_{\partial(\partial S)} \alpha = 0$$

e quindi ω è chiusa...

(ii), (iii) omettiamo le dimostrazioni. Osserviamo solo che la condizione $\int_S \omega = 0 \quad \forall S$ compatta $\subset \Omega$ con $\partial S = \emptyset$ è chiaramente una condizione necessaria affinché ω sia esatta, ed è più forte che $\int_{\partial S} \omega = 0$, perché in generale il fatto che S non abbia bordo in Ω non vuol dire che S è il bordo di una

superficie contenuta in Ω ; esempio: S^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(4)

(iv) Diamo un esempio di k -forma chiusa e non esatta in $\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ più in là. \square

NOTE (1) Come conseguenza immediata di (ii) otteniamo che ω è chiusa $\iff \omega$ è localmente esatta. Infatti se ω è chiusa, per (ii) è esatta su ogni intorno aperto stellato (ogni palla) di ogni punto. Viceversa, se ω è localmente esatta allora è localmente chiusa (per (i)) ma localmente chiusa implica chiusa.

(2) Fissato Ω , possiamo considerare lo spazio vettoriale delle k -forme chiuse su Ω ed il sottospazio di quelle esatte. Il quoziente

$$\frac{\{k\text{-forme chiuse}\}}{\{k\text{-forme esatte}\}}$$

si chiama k -esimo gruppo di coomologia di Ω , ed è un invariante topologico...

Def. Sia V s.vett. di dim. n , $\phi \in \Lambda^k V$ con $k > 1$.

Diciamo che ϕ è sempllice se $\phi = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k$ con $\phi_i \in \Lambda^1 V$.

I seguenti esercizi cercano di chiarire quando ϕ è sempllice (risposta: non sempre).

Ex Sia $\phi \in \wedge^k V$ con $k > 1$. Per ogni $v \in V$
 sia $\phi_v \in \wedge^{k-1} V$ dato da

$$\langle \phi_v; v_1, \dots, v_{k-1} \rangle := \langle \phi; v, v_1, \dots, v_{k-1} \rangle.$$

Sia inoltre

$$\begin{aligned} W_\phi &:= \{v \in V: \phi_v \equiv 0\} \\ &= \{v \in V: \langle \phi; v, v_1, \dots, v_{k-1} \rangle = 0 \forall v_i \in V\} \end{aligned}$$

Allora

- (a) W_ϕ è un sottospazio di V ;
- (b) Se $\dim W_\phi > n-k$ allora $\phi \equiv 0$; $\phi = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k$.
- (c) Se ϕ è semplice $\dim W_\phi \geq n-k$.
- (d) dimostrare che $\phi = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ non è semplice.

Dim (a) ovvio.

(b) prendo una base v_1, \dots, v_m di W_ϕ e la completo ad una base di V . Definisco $v_i^*, v_{\underline{i}}, v_{\underline{i}}^*$ come al solito. So che

$$\phi = \sum_{\underline{i} \in I_{n,k}} \langle \phi; v_{\underline{i}} \rangle v_{\underline{i}}^*$$

Osserviamo ora che $\langle \phi; v_{\underline{i}} \rangle = 0 \forall \underline{i}$, e quindi $\phi = 0$. Infatti essendo $m := \dim W_\phi > n-k$, per ogni $\underline{i} \in I_{n,k}$ si ha che $i_1 \leq m$, e quindi $v_{i_1} \in W_\phi$ e quindi $\langle \phi; v_{i_1}, \dots \rangle = 0$.

(c) Dimostrare che $W_\phi \supset \bigcap_{i=1}^k \text{Ker } \phi_i$ e osservo che quest'ultimo ha ricorrenza dimensionale $\geq n-k$.

(5)

Osservo che

$$\langle \phi; v_1, \dots, v_k \rangle = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^k \langle \phi_i; v_{\sigma(i)} \rangle$$

(Questa formula andrebbe dimostrata... ma segue facilmente per induzione dalla formula per il prodotto \wedge = notare la somiglianza con la formula per lo sviluppo del determinante).

Quindi, se $v_i \in \bigcap \ker \phi_i$, $\prod_{i=1}^k \langle \phi_i; v_{\sigma(i)} \rangle = 0 \forall \sigma$

e quindi $\langle \phi; v_1, \dots, v_k \rangle \equiv 0$, ovvero $\phi_{v_i} = 0$ ovvero $v_i \in W_\phi$.

(d) Calcoliamo ϕ_v e W_ϕ .

Dato $v \in \mathbb{R}^4$, $x \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} \langle \phi_v; x \rangle &:= \langle \phi; v, x \rangle \\ &= \langle dx_1 \wedge dx_2; v, x \rangle + \langle dx_3 \wedge dx_4; v, x \rangle \\ &= \det \begin{pmatrix} v_1 & x_1 \\ v_2 & x_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_3 & x_3 \\ v_4 & x_4 \end{pmatrix} \\ &= (-v_2, v_1, -v_4, v_3) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned}$$

e quindi $\phi_v = 0 \iff (-v_2, v_1, -v_4, v_3) = 0 \iff v = 0$

Cioè $W_\phi = \{0\}$. Quindi ϕ non è semplice perché in tal caso avremmo avuto $\dim W_\phi \geq 2$.

Ex Definisco $T: \Lambda^1 \mathbb{R}^m \rightarrow \Lambda^{n-1} \mathbb{R}^n$ applicazione lineare ponendo

$$T: dx_i \mapsto (-1)^{i-1} \widehat{dx_i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n dx_j$$

(7)

Allora si ha che

$$(i) \quad \phi \wedge T\phi = |\phi|^2 dx \quad \text{con} \quad |\phi| := \sqrt{\sum \phi_i^2} \quad \text{dove} \quad \phi = \sum \phi_i dx_i$$

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

(ii) Data (v_1, \dots, v_n) base ortonormale di \mathbb{R}^n t.c.

$$[v_1, \dots, v_n] = [e_1, \dots, e_n] \quad \text{si ha}$$

$$\langle \phi; v_1 \rangle = \langle T\phi; v_2, \dots, v_n \rangle$$

Dimostrazione

(i) Se $\phi = \sum \phi_i dx_i$, allora $T\phi = \sum (-1)^{i-1} \phi_i \widehat{dx}_i$
 e siccome $dx_i \wedge (-1)^{i-1} \widehat{dx}_i = dx$ (verificare!)
 e $dx_j \wedge (-1)^{i-1} \widehat{dx}_i = 0$ per $i \neq j$ (ovvio) allora

$$\begin{aligned} \phi \wedge T\phi &= \sum_i (\phi_i dx_i) \wedge ((-1)^{i-1} \phi_i \widehat{dx}_i) \\ &\quad + \sum_{j \neq i} (\phi_j dx_j) \wedge ((-1)^{i-1} \phi_i \widehat{dx}_i) \\ &= \sum_i \phi_i^2 dx = |\phi|^2 dx. \end{aligned}$$

(ii) Per linearità mi posso ricondurre al caso
 $\phi = dx_i$ (verificare!!) cioè devo far
 vedere che

$$\langle dx_i; v_1 \rangle = (-1)^{i-1} \langle \widehat{dx}_i; v_2, \dots, v_n \rangle \quad \forall (v_1, \dots, v_n) \dots$$

Pongo $\alpha_i := \langle dx_i, v_1 \rangle$ e $\beta_i := (-1)^{i-1} \langle \widehat{dx}_i; v_2, \dots, v_n \rangle$.

Allora (1) $\alpha_i = (v_1)_i \Rightarrow \sum \alpha_i^2 = |v_1|^2 = 1$.

(2) $\beta_i = (-1)^{i-1} \det(\tilde{V}_i)$ dove \tilde{V} è la matrice
 di colonne v_2, \dots, v_n e \tilde{V}_i è il minore
 $(n-1) \times (n-1)$ ottenuto escludendo la riga i -esima.

In particolare

$$\sum_i \beta_i^2 = \sum_{\substack{\text{il minore} \\ d \times d \text{ di } \tilde{V}}} (\det M)^2 = \det(\tilde{V}^t \tilde{V}) = \det(I) = 1$$

\uparrow Binet \uparrow $\tilde{V}^t \tilde{V} = I$ perché v_2, \dots, v_n sono un sistema ortonormale

(3) Inoltre $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^n (v_i)_i (-1)^{i-1} \det(\tilde{V}_i)$

= sviluppo del determinante di $V = (v_1, \dots, v_n)$ secondo la prima colonna

= $\det(V) = 1$ perché V è ortonormale e $\det(V) > 0$ perché $[v_1, \dots, v_n] = [e_1, \dots, e_n]$.

Riassumendo i vettori α e β soddisfano

$$|\alpha| = 1, |\beta| = 1 \text{ e } \alpha \cdot \beta = 1.$$

Necessariamente allora $\alpha = \beta$, che è la tesi. \square

Ex In \mathbb{R}^n si consideri la $(n-1)$ -forma

$$\omega = f(|x|) \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i \widehat{dx}_i$$

Calcoliamo $d\omega$.

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n d(f(|x|) \cdot x_i) (-1)^{i-1} \widehat{dx}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f(|x|) x_i) dx_i \wedge (-1)^{i-1} \widehat{dx}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[f'(|x|) \frac{x_i}{|x|} \cdot x_i + f(|x|) \right] dx_i \leftarrow := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= [f'(|x|) |x| + n f(|x|)] dx. \end{aligned}$$

Ex In $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si consideri la $(n-1)$ -forma

(9)

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{x_i}{|x|^n} \widehat{dx}_i.$$

- Allora (i) ω è chiusa;
 (ii) ω non è esatta.

con $f(t) = E^{-n}$

(i) Dall'ex. precedente sappiamo che

$$\begin{aligned} d\omega(x) &= (f'(|x|) \cdot |x| + n f(|x|)) dx \\ &= (-n|x|^{-n-1}|x| + n|x|^{-n}) dx = 0 \end{aligned}$$

quindi ω è chiusa.

(ii) Per fare vedere che ω non è esatta mi basta esibire una $(n-1)$ -superficie senza bordo S t.c.

$\int_S \omega \neq 0$ (ricordarsi dell'analogo criterio per le curve...). In effetti, essendo $\omega = T\omega_0$ con $\omega_0 := \sum_i \frac{x_i dx_i}{|x|^n}$

$$\int_{S^{n-1}} \omega = \int_{S^{n-1}} \langle T\omega_0; \underbrace{v_1, \dots, v_{n-1}}_{\substack{\text{base ortom. di} \\ \text{Tau}(S^{n-1}, x)}} \rangle d\sigma_{n-1}(x)$$

perciò $[v_1(x), \dots, v_{n-1}(x)] = [e_1, \dots, e_n]$ base ortom. di \mathbb{R}^n

per quanto visto in un ex. preced.

$$\begin{aligned} &= \int_{S^{n-1}} \langle \omega_0(x); \eta(x) \rangle d\sigma_{n-1}(x) \\ &= \int_{S^{n-1}} \sum_i \frac{x_i}{|x|^n} \langle dx_i; x \rangle d\sigma_{n-1}(x) \\ &= \int_{S^{n-1}} \sum_i x_i^2 d\sigma_{n-1}(x) = \int_{S^{n-1}} 1 d\sigma_{n-1}(x) = \text{Vol}_{n-1}(S^{n-1}). \end{aligned}$$

Teorema della divergenza

Sia D un dominio compatto regolare di \mathbb{R}^n , cioè una superficie n -dimensionale (con bordo) di classe E^1 .

Sia $F(x)$ campo di vettori E^1 definite su Ω aperto che contiene D . Allora

$$\int_{\partial D} \langle F(x); \eta(x) \rangle d\sigma_{n-1}(x) = \int_D \operatorname{div} F(x) dx$$

\downarrow prodotto scalare
 \uparrow normale esterna

dove $\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$.

Dimostrazione

Si ricorrendo al teorema di Stokes definendo la 1-forma $\omega(x) := \sum_{i=1}^n F_i(x) dx_i$ e la $(n-1)$ -forma

$T\omega(x)$. Infatti

$$\int_{\partial D} \langle F(x); \eta(x) \rangle d\sigma_{n-1}(x) = \int_{\partial D} \langle \omega(x); \eta(x) \rangle d\sigma_{n-1}(x)$$

Uso quanto fatto
 in un ex. preced.
 qui ν_1, \dots, ν_{n-1} è
 una base ortonormale
 di $T_{\omega}(\partial D, x)$

$$\begin{aligned} \longrightarrow &= \int_{\partial D} \langle T\omega(x); \nu_1(x), \dots, \nu_{n-1}(x) \rangle d\sigma_{n-1}(x) \\ &= \int_{\partial D} T\omega \end{aligned}$$

Teore. di Stokes

$$\begin{aligned} \longrightarrow &= \int_D d(T\omega) \\ &= \int_D \operatorname{div} F(x) dx \end{aligned}$$

Per quest'ultimo passaggio dobbiamo mostrare che $d(T\omega) = (\operatorname{div} F) dx$. Infatti

(11)

$$\begin{aligned} d(T\omega) &= d\left(\sum_{i=1}^n F_i(x) (-1)^{i-1} \widehat{dx}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i} \underbrace{dx_i \wedge (-1)^{i-1} \widehat{dx}_i}_{dx} \\ &= \operatorname{div} F(x) \cdot dx \end{aligned}$$

Sia $u: A \text{ aperto } \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 .

Definiamo il laplaciano di u come

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{tr}(\nabla^2 u) = \operatorname{div}(\nabla u)$$

[Nota la definizione non dipende dalla scelta degli assi ma solo dal prodotto scalare in \mathbb{R}^n ;
questo lo si vede bene dalla definizione come traccia]

Definizione Si dice che u è armonica se $\Delta u = 0$.

Proposizione 1 Sia $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ armonica.

Allora u ha la "proprietà della media sulle sfere", cioè per ogni x_0, r t.c. $\overline{B(x_0, r)} \subset A$ si ha

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) d\mathcal{S}_{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{c_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) d\mathcal{S}_{n-1}(x) \end{aligned}$$

dove $c_n := \operatorname{Vol}_{n-1}(S^{n-1})$.

Dimostrazione

Uso per cominciare la seguente identità:

$$\int_{\partial B(x_0, r)} u(x) dS_{n-1}(x) = r^{n-1} \int_{S^{n-1}} u(x_0 + ry) dS_{n-1}(y)$$

(Per dimostrarla uso il cambio di variabile

$x = x_0 + ry$ e la formula per il cambio di variabile tra superfici vista in precedenza.)

Quindi, data qualunque u di classe C^2

$$\frac{d}{dr} \left(\int_{\partial B(x_0, r)} u \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{C_n} \int_{S^{n-1}} u(x_0 + ry) dS_{n-1}(y) \right)$$

teorema di derivazione sotto il segno di integrale \rightarrow

$$= \frac{1}{C_n} \int_{S^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} u(x_0 + ry) dS_{n-1}(y)$$

$$= \frac{1}{C_n} \int_{S^{n-1}} \nabla u(x_0 + ry) \cdot y dS_{n-1}(y)$$

$= \partial D^n$ con $D^n = \overline{B(0,1)}$

teorema della divergenza \rightarrow

$$= \frac{1}{C_n} \int_{D^n} \operatorname{div}_y (\nabla u(x_0 + ry)) dy$$

$$= \frac{1}{C_n} \int_{D^n} r \cdot \Delta u(x_0 + ry) dy$$

$$= \frac{1}{C_n r^{n-1}} \int_{B(x_0, r)} \Delta u(x) dx.$$

Cioè

$$\frac{d}{dr} \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) dS_{n-1}(x) = \frac{1}{C_n r^{n-1}} \int_{B(x_0, r)} \Delta u(x) dx.$$

Ora, se u è armonica otteniamo

3

$$\frac{d}{dr} \int_{\partial B(x_0, r)} u = 0$$

!!
 $g(r)$

Quindi $g(r)$ è costante in r , in particolare per

ogni r si ha $g(r) = \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = u(x_0)$.

↑
per la continuità di u

Ovvero $\int_{\partial B(x_0, r)} u = u(x_0)$.

□

Per quello che segue ci serve il seguente lemma:

Lemma (i) Data $u: \overline{B(x_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}$ continua si ha

$$\int_{\overline{B(x_0, r)}} u(x) dx = \int_0^r \left[\int_{\partial B(x_0, \rho)} u(x) d\sigma_{n-1}(x) \right] d\rho$$

(ii) Posto $\alpha_n := \text{Vol}_n(\mathbb{D}^n)$ si ha che $C_u = n\alpha_n$.

Dimostrazione (i); $n=2$. Usiamo le coordinate polari per calcolare l'integrale di sinistra:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B(x_0, r)}} u(x) dx &= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \underbrace{u(x_0 + r(\cos t, \sin t))}_{\text{parametr. di } \partial B(x_0, \rho)} dt \right) d\rho \\ &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x_0, \rho)} u(x) d\sigma_1(x) \right) d\rho. \end{aligned}$$

Per $n > 2$ si può usare e' ovvia generalizzazione delle coordinate polari a più dimensioni, vale a dire si parametrizza $B(x_0, r)$ con

$$x = x_0 + \rho \left(\begin{aligned} &\text{sen } t_1, \text{cos } t_1, \text{sen } t_2, \text{cos } t_2, \text{cos } t_2 \text{sen } t_3, \dots \\ &\dots, \text{cos } t_1, \dots, \text{cos } t_{n-2} \text{sen } t_{n-1}, \text{cos } t_1, \dots, \text{cos } t_{n-1} \end{aligned} \right)$$

Con $0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq t_1, \dots, t_{n-2} \leq \pi$, $0 \leq t_{n-1} \leq 2\pi$.

Tuttavia questo richiede diversi conti: il calcolo dello Jacobiano di questa mappa come mappa da $[0, r] \times [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]$ a \mathbb{R}^n e poi come mappa a ρ fissato da $[0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]$ in $\partial B(x_0, \rho)$.

Proponiamo ora un'altra via: parametrizzo $B(x_0, r)$ con $x = x_0 + \rho y$ con $\rho \in [0, r]$ e $y \in S^{n-1}$.

Per utilizzare questo cambio di variabile devo però calcolare lo Jacobiano $dg(p, y)$ della mappa $g(p, y) := x_0 + \rho y$. Osservo che $dg(p, y)$ è una mappa lineare da $\text{Tan}([0, r] \times S^{n-1}, (p, y)) = \mathbb{R} \times \text{Tan}(S, y)$ in $\text{Tan}(B(x_0, r), x) = \mathbb{R}^n$, e per la precisione

$$dg(p, y) = y \cdot dp + \rho dy$$

cioè

$$dg(p, y) : \begin{pmatrix} \underbrace{h_1}_{\mathbb{R}} \\ \underbrace{h_2}_{\text{Tan}(S^{n-1}, y)} \end{pmatrix} \mapsto y h_1 + \rho h_2 \in \mathbb{R}^n.$$

(5)

Per calcolarne lo Jacobiano scelgo una base ortonormale v_1, \dots, v_n di \mathbb{R}^n t.c. v_2, \dots, v_n è una base di $\text{Tan}(S, y)$: rispetto a questa base ho che $dg(p, y)$ è rappresentata dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 \\ \hline 0 & | & \rho I \end{pmatrix}$$

e dunque $Jg(p, y) = |\det M| = \rho^{n-1}$.

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B(x_0, r)}} u(x) dx &= \int_0^r \left[\int_{S^{n-1}} u(x_0 + \rho y) dS_{n-1}(y) \right] \rho^{n-1} d\rho \\ &= \int_0^r \left[\int_{\partial B(x_0, \rho)} u(x) dS_{n-1}(x) \right] d\rho. \end{aligned}$$

Concludiamo con la dimostrazione di (ii).

Basta applicare la formula in (i) con $u \equiv 1$ e

$B(x_0, r) = B(0, 1)$:

$$\begin{aligned} a_n &:= \int_{\overline{B(0, 1)}} 1 dx = \int_0^1 \left[\int_{\partial B(x_0, \rho)} 1 dS_{n-1}(x) \right] d\rho \\ &= \int_0^1 \text{vol}_{n-1}(\partial B(x_0, \rho)) d\rho \\ &= \int_0^1 c_n \rho^{n-1} d\rho = \frac{c_n}{n}. \end{aligned}$$

□

Corollario Data $u: \overline{B(x_0, r_0)} \rightarrow \mathbb{R}$ continua
 Sono fatti equivalenti:

$$(i) \quad u(x_0) = \int_{\partial B(x_0, \rho)} u(x) d\sigma_{n-1}(x) \quad \forall \rho \in [0, r_0]$$

(cioè u ha la proprietà della media sulle sfere in x_0)

$$(ii) \quad u(x_0) = \int_{B(x_0, r)} u(x) dx \quad \forall \rho \in [0, r_0]$$

(cioè u ha la proprietà della media sulle palle in x_0).

Dimostrazione Sappiamo dal lemma precedente che

$$\int_{B(x_0, r)} u(x) dx = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x_0, \rho)} u(x) d\sigma_{n-1}(x) \right) d\rho$$

e quindi

$$(*) \quad \underbrace{\int_{B(x_0, r)} u(x) dx}_{!! \quad g(r)} = \frac{1}{a_n r^n} \int_0^r c_n \rho^{n-1} \underbrace{\left[\int_{\partial B(x_0, \rho)} u(x) d\sigma_{n-1}(x) \right]}_{!! \quad h(\rho)} d\rho$$

Ora, se vale (i) allora $h(\rho) = u(x_0) \quad \forall \rho$ e quindi la (*) diventa

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} u(x) dx &= g(r) = \frac{1}{a_n r^n} \int_0^r c_n \rho^{n-1} u(x_0) d\rho \\ &= \frac{c_n u(x_0) \frac{r^n}{n}}{a_n r^n} = \frac{c_n}{n a_n} u(x_0) = u(x_0). \end{aligned}$$

e quindi abbiamo ottenuto (ii).

Supponiamo ora che valga la (ii), cioè $g(r) = u(x_0) \forall r$: allora la (*) diventa

$$a_n r^n u(x_0) = \int_0^r c_n \rho^{n-1} h(\rho) d\rho$$

e derivando questa espressione rispetto a r otteniamo

$$n a_n u(x_0) r^{n-1} = c_n r^{n-1} h(r)$$

ovvero

$$h(r) = \frac{n a_n}{c_n} u(x_0)$$

e quindi abbiamo ottenuto la (i). □

In vista di questo corollario, d'ora in poi parleremo semplicemente di "proprietà della media".

Proposizione 2 Sia $u: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua con la proprietà della media (in ogni punto). Allora

- (i) $u \in \mathcal{E}^{\infty}$;
- (ii) u è armonica

(Nota: da questo segue che le funzioni armoniche sono sempre \mathcal{E}^{∞} — in effetti vale di più: sono analitiche, ma non lo dimostriamo).

Dimostrazione (i) Ci limitiamo al caso $A = \mathbb{R}^n$

(il caso generale richiede alcuni aggiustamenti ed è lasciato per esercizio).

Prendo $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ funzione \mathcal{E}^∞ a supporto compatto positiva e radiale, cioè $g(x) = \tilde{g}(|x|)$ con $\tilde{g}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Voglio dimostrare che $u * g = cu$ con $c := c_n \int_0^\infty \tilde{g}(\rho) \rho^{n-1} d\rho$. Siccome $u * g \in \mathcal{E}^\infty$, segue che anche $u \in \mathcal{E}^\infty$ (perché $c \neq 0!$).

In fatti

Sostituisco $-y$ con y e uso il fatto che g è pai

$$\begin{aligned}
 u * g(x_0) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x_0 - y) g(y) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x_0 + y) g(y) dy \\
 &= \int_0^\infty \left[\int_{\partial B(0, \rho)} u(x_0 + y) g(y) dy \right] d\rho \\
 &= \int_0^\infty \tilde{g}(\rho) e_n \rho^n \left[\int_{\partial B(0, \rho)} u(x_0 + y) d\sigma_{n-1}(y) \right] d\rho \\
 &= \underbrace{\left(c_n \int_0^\infty \tilde{g}(\rho) \rho^{n-1} d\rho \right)}_c u(x_0)
 \end{aligned}$$

per definire $u * g$ mi fa comodo che $A = \mathbb{R}^n$; per avere $u * g \in \mathcal{E}^\infty$ mi serve g con supporto compatto e \mathcal{E}^∞ ...

per la proprietà della media!

(ii) Dalla dimostrazione della Proposizione 1 sappiamo che

$$\frac{d}{dr} \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) dS_{n-1}(x) = \frac{1}{C_n r^{n-1}} \int_{\overline{B(x_0, r)}} \Delta u(x) dx$$

e quindi, se u ha la proprietà della media, la derivata a sinistra dell' = è 0, e pertanto

$$0 = \int_{B(x_0, r)} \Delta u(x) dx$$

e siccome questo è vero per ogni palla $\overline{B(x_0, r)}$ contenuta in A , ne segue che $u=0$ (quasi) ovunque.

□

Proposizione 3 (Principio del massimo)

Sia A aperto limitato in \mathbb{R}^n , $u: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua e armonica su A . Allora

- (i) u assume il valore massimo (minimo) su ∂A ;
- (ii) se u assume valore massimo ^(min.) in $x_0 \in A$ e A è connesso allora u è costante.

Dimostrazione (ii) Sia $m := \max u$ (esiste perché u è definita su \bar{A} compatto, ed è continua).

Sia

$$E := \{x \in A : u(x) = m\}.$$

Per la continuità di u si ha che E è chiuso in A .

Dimostriamo usando la proprietà della media che E è aperto in A . Fatto questo abbiamo che essendo E aperto e chiuso in A connesso, allora $E = \emptyset$ oppure $E = A \Rightarrow u = \text{cost} = m$ su A .

Sia dunque $x_0 \in E$, e sia r t.c. $\overline{B(x_0, r)} \subset A$.

Facciamo vedere che $u \equiv m$ su $\overline{B(x_0, r)}$ e quindi $B(x_0, r) \subset E$.

Infatti:

$$m = u(x_0) = \int_{B(x_0, r)} u(x) dx \leq \int_{B(x_0, r)} m = m$$

perché $u(x) \leq m$ su A
 \downarrow

Ma allora dobbiamo avere $=$ al posto di \leq , e questo è possibile solo se $u = m$ (quasi) ovunque in $\overline{B(x_0, r)}$.

(i) Sia x_0 punto di max di u in \bar{A} .

Se $x_0 \in \partial A$ abbiamo finito.

Se $x_0 \in A$ allora per (ii) si ha che $u = \text{cost} = m$ su \tilde{A} componente connessa di A che contiene x_0 .

In particolare u assume valore max. in $\partial \tilde{A}$ che è contenuto in ∂A (questo andrebbe dimostrato).



Dato A aperto in \mathbb{R}^n dico che u risolve l'eq. di Laplace $\Delta u = 0$ su A con dato al bordo u_0 se $u: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, armonica in A , e soddisfa $u = u_0$ su ∂A .

Corollario Se A è un aperto limitato di \mathbb{R}^n allora esiste al più una soluzione u dell'eq. di Laplace su A con dato al bordo assegnato u_0 .

Dimostrazione Siano u_1, u_2 due soluzioni, e sia $u := u_1 - u_2$. Allora u è armonica in A , continua su \bar{A} e nulla su ∂A . Ma allora, per il principio del massimo,

$$\max_{\bar{A}} u = \min_{\bar{A}} u = 0$$

e quindi $u \equiv 0$ su $\bar{A} \Rightarrow u_1 = u_2$ su \bar{A} . □

NOTA 1 Se A non è limitato il corollario non vale: esistono funzioni armoniche nel semipiano $A := \{(x_1, x_2) : x_2 > 0\}$ nulle su ∂A ma non globalmente nulle, per esempio $u(x_1, x_2) = x_2$.

NOTA 2 La questione dell'esistenza di una soluzione dell'eq. di Laplace su A con dato al bordo u_0 assegnato è delicata.

In generale c'è esistenza per A con bordo regolare e u_0 sufficientemente regolare.

Noi ci limiteremo a dimostrare l'esistenza in un caso molto particolare ($A = \text{disco in } \mathbb{R}^2$).

Concludiamo la lezione mettendo in luce la relazione tra funzioni armoniche e funzioni olomorfe.

Osservazione Data $u: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, dico che u è armonica se ciascuna componente di u è armonica.

Proposizione 4 Sia $f: A$ aperto di $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora f è armonica.

(Lo stesso vale se f è antiolomorfa.)

Dimostrazione

$$f \text{ olomorfa} \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x} \text{ (Cauchy-Riemann).}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = i \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = i \frac{\partial}{\partial x} \left(i \frac{\partial f}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \Delta f = 0. \text{ (Se } f \text{ è antiolom. } \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial f}{\partial x} \dots) \quad \square$$

Osservazione avanzata dalla lezione precedente:

Proposizione (Principio del confronto).

Sia A un aperto limitato di \mathbb{R}^n e siano $u_1, u_2: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue su \bar{A} e armoniche in A .

(i) Se $u_1 \leq u_2$ su ∂A allora $u_1 \leq u_2$ su \bar{A} (principio del confronto debole);

(ii) Se inoltre $u_1(x_0) = u_2(x_0)$ per qualche $x_0 \in A$ e A connesso allora $u_1 = u_2$ su \bar{A} (confronto forte).

Dimostrazione

(i). Pongo $u := u_2 - u_1$. Allora u è armonica in A , continua in \bar{A} , e $u \geq 0$ su ∂A .

Per il principio del massimo si ha quindi che

$$\min_{\bar{A}} u = \min_{\partial A} u \geq 0$$

ovvero $u \geq 0$ su $\bar{A} \Rightarrow u_2 \geq u_1$ su \bar{A} .

(ii) Se $u_1(x_0) = u_2(x_0)$, abbiamo che $u(x_0) = 0$ e quindi x_0 è un punto di minimo di u in A , e sempre per il principio del massimo abbiamo che $u = \text{costante} = u(x_0) = 0$, cioè $u_1 = u_2$. □

Proposizione U armonica su A aperto semplicemente connesso di $\mathbb{C} \Rightarrow$ esiste f olomorfa su A t.c. $u = \operatorname{Re} f$.

Dimostrazione

Per capire l'idea della dimostrazione, osserviamo che se f esiste, allora possiamo calcolare f' a partire dalle derivate di u .

Vale infatti che

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} \\ \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f' & -\operatorname{Im} f' \\ \operatorname{Im} f' & \operatorname{Re} f' \end{pmatrix}$$

e quindi $f' = \operatorname{Re} f' + i \operatorname{Im} f' = u_x - i u_y$.

Fatta questa osservazione cominciamo con la dimostrazione vera e propria:

Poniamo $g(z) := u_x(z) - i u_y(z)$ per ogni $z \in A$.

Facciamo vedere che g è olomorfa, ovvero che $g(z)dz$ è chiusa. Infatti

$$\begin{aligned} d(g(z)dz) &= d((u_x - i u_y)(dx + i dy)) \\ &= d((u_x - i u_y)dx + (u_y + i u_x)dy) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (u_x - i u_y) \overbrace{dy \wedge dx}^{-dx \wedge dy} + \frac{\partial}{\partial x} (u_y + i u_x) dx \wedge dy \\ &= (-u_{xy} + i u_{yy} + u_{xy} + i u_{xx}) dx \wedge dy \\ &= i \underbrace{\Delta u}_{=0} dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Prendiamo ora f primitiva (olomorfa) di g su A
t.c. $f(z_0) = u(z_0)$ con z_0 preso (a caso) in A .
qui serve A semplicemente conn.

(Di primitive di f ce n'è molte — ma ne serve una tale che $\operatorname{Re} f = u$ in almeno un punto z_0).

So che quindi $\operatorname{Re} f(z_0) = u(z_0)$ e che

$$\begin{aligned} \nabla(\operatorname{Re} f) &= (\operatorname{Re} f', -\operatorname{Im} f') \\ &= (\operatorname{Re} g, -\operatorname{Im} g) \\ &= (u_x, u_y) = \nabla u \quad \text{su } A \end{aligned}$$

Quindi $\operatorname{Re} f$ e u hanno lo stesso gradiente e coincidono in un punto. Siccome A è connesso $\operatorname{Re} f$ e u coincidono su tutto A .



OSSERVAZIONI

in dimensione 2

- (1) Da questo segue che ogni funzione armonica è (almeno localmente) parte reale di una funzione olomorfa ed è quindi analitica nel senso che si scrive (localmente) come serie di potenze nelle variabili x e y (infatti $\operatorname{Re} z^n$ è un polinomio in x e y ...)

L'analiticità delle funzioni armoniche vale in qualunque dimensione, ma non la dimostriamo....

(4)

(2) Vale anche il principio di prolungamento analitico:
Se u_1 e u_2 sono funzioni armoniche su
 A connesso e $u_1 = u_2$ in una palla contenuta
in A , allora $u_1 = u_2$ su A .

In dimensione due questo lo si dimostra
facilmente ricorrendo al principio di prolug.
analitico per le funzioni olomorfe.

La dimostrazione in dimensione superiore non
è ovvia

(3) L'ipotesi che A sia semplicemente connesso
nella proposizione precedente è necessaria.

Esempio: $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $u(z) := \log |z|$.

Allora (i) u è armonica perché coincide (localm.)
con la parte reale di una determinazione
del logaritmo complesso, che è
una funzione olomorfa;

(ii) non esiste $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa t.c.
 $\operatorname{Re} f = u$, perché tale f dovrebbe
coincidere (a meno di costante immagin.)
con una determinazione del logaritmo
complesso, e sappiamo che non ne
esistono su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Riguardo all'esistenza di soluzioni dell'eq. di Laplace con dato al bordo assegnato u_0 ci limitiamo ad un caso particolare, in cui la soluzione è data da una formula esplicita (per l'unicità abbiamo visto un risultato generale la volta scorsa):

Sia D il disco $\overline{B(0,1)}$ in \mathbb{R}^2 , sia $u_0: \partial D = S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, e cerchiamo una soluzione u del problema

$$(\dagger) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } D, \\ u = u_0 & \text{su } \partial D. \end{cases}$$

Procediamo prima in modo informale.

Dato $z \in \partial D = S^1$, scrivo $z = e^{it}$ e scrivo $g(t) := u_0(e^{it})$ in serie di Fourier

$$u_0(z) = u_0(e^{it}) = g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$$

Ossevo ora che $e^{int} = z^n$ ammette un'ovvia estensione olomorfa (e quindi armonica) a tutto D (anzi, a tutto \mathbb{C}), vale a dire z^n stesso, almeno per $n \geq 0$ — mentre per $n < 0$ z^n non va bene perché non è definita in 0 ; in tal caso però $e^{int} = e^{-i|n|t} = \overline{e^{-i|n|t}} = \overline{z^{|n|}}$ si estende in modo antiolomorfo a tutto \mathbb{C} con $\overline{z^{|n|}}$ stesso.

6

Quindi una (anzi, la) soluzione del problema \mathcal{P} è

$$u(z) := c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n z^n + c_{-n} \bar{z}^n) \quad (*)$$

Formalizziamo questo risultato:

Proposizione Se $g(t) := u_0(e^{it})$ ha coeff. di Fourier c_n t.c. $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ ($\Leftrightarrow g$ è $\mathcal{E}_{\text{per}}^1$ $\Leftrightarrow u_0$ è \mathcal{C}^1) allora la funzione u data da (*) è definita e continua su D , risolve $\Delta u = 0$ all'interno di D , e coincide con u_0 su ∂D . Cioè è una soluzione di (\mathcal{P}) .

Dimostrazione

Siccome $\sum |c_n| < +\infty$, le serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{-n} \bar{z}^n$$

convergono totalmente su D (perché $\|c_n z^n\|_{\infty} = |c_n|$) e in particolare hanno raggio di convergenza ≥ 1 . Dunque sono continue su D e oloedomorfe all'interno di D . In particolare

$$u_0(z) := c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \overline{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{-n} \bar{z}^n \right)}$$

è continua su D e armonica (oledomorfe + antioloedom.) su $\text{Int}(D)$.

Che $u = u_0$ su ∂D segue da quanto già visto sulla serie di Fourier.

□

Un calcolo Esprimiamo in maniera diversa la soluzione $u(z)$ data da (*). Ricordando la definizione di C_n otteniamo

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt \right) z^n \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{int} dt \right) \bar{z}^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-int} z^n + \underbrace{e^{int} \bar{z}^n}_{\frac{1}{e^{-int} z^n}} \right) \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \underbrace{\left[1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-int} z^n \right) \right]}_{!!} dt \\ &\qquad\qquad\qquad h(t, z) \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} h(t, z) &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-it} z)^n \right) \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{e^{-it} z}{1 - e^{-it} z} \leftarrow \left[\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a} \right] \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{e^{-it} z (1 - e^{it} \bar{z})}{|1 - e^{it} z|^2} \\ &= 1 + 2 \frac{\operatorname{Re}(e^{-it} z) - |z|^2}{|e^{it} z - 1|^2} \\ &= \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} z - 1|^2} \end{aligned}$$

Dunque la nostra soluzione si scrive come

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t, z) g(t) dt$$

$$= \int_{\partial D} \tilde{h}(x, z) u_0(x) d\sigma_1(x)$$

con $\tilde{h}(x, z) := \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|x - z|^2}$.

La funzione \tilde{h} si chiama "nucleo di Poisson", del disco D .

NOTE (1) A questo punto ci si potrebbe chiedere per quali u_0 la funzione

$$u(z) := \int_{\partial D} \tilde{h}(x, z) u_0(x) d\sigma_1(x)$$

è ben definita per ogni $z \in \text{Int}(D)$, e si vede che basta avere che u_0 sia L^1 su $S^1 = \partial D$ cioè $g \in L^1(-\pi, \pi)$. In tal caso si verifica inoltre che u è armonica in $\text{Int}(D)$.

In qualche senso, inoltre, u assume il dato al bordo u_0 (ma non stiamo qui a specificare in quale).

(2) Se A è un aperto in \mathbb{R}^n limitato e con frontiera regolare (cioè \bar{A} superficie con bordo di dim. n di classe C^1) ed u_0 è suff. regolare, allora
(non specificiamo)

Esiste $u: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ continua che risolve

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } A \\ u = u_0 & \text{su } \partial A \end{cases}$$

inoltre tale u si scrive come

$$u(z) = \int_{\partial A} u_0(x) \tilde{h}(x, z) dG_{n-1}(x)$$

Per un opportuno nucleo di Poisson \tilde{h} .

Non siamo però in grado di dimostrare questo risultato.

(3) L'ipotesi u_0 continua NON basta ad avere una soluzione di P continua su tutto \bar{A}

Facciamo ora qualche esercizio/sviluppo della teoria.

Risoluzione dell'eq. di Laplace sul semipiano $A := \{(x, y) \text{ t.c. } y > 0\}$. Consideriamo cioè il problema

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } A \\ u = u_0 & \text{su } \partial A \end{cases}$$

$$\text{cioè } u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Notiamo che non essendo A limitato il risultato di unicità dimostrato nella lezione precedente non vale.

e infatti per $u_0(x) := 0$ abbiamo più di una soluzione, per esempio $u_1(x,y) := 0$ e $u_2(x,y) := y$.

Il punto è che "normalmente" A ha un pezzo di bordo "all'infinito", su cui u non si stabilisce alcuna condizione. L'unicità la si ottiene aggiungendo una condizione "all'infinito".

EX Si consideri il problema

$$(P') \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ su } A \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ u(z) \rightarrow 0 \text{ per } |z| \rightarrow +\infty, z \in A \end{cases}$$

Allora se esiste una soluzione $u: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ di (P') continua su tutto \bar{A} , questa u è unica.

Dimostrazione Sia $\hat{A} := \bar{A} \cup \{\infty\}$ la compattificazione di Alexandrov di \bar{A} .

Data $u: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $u(z) \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow +\infty$, ho che ponendo $u(\infty) := 0$ si ottiene una funzione continua su tutto \hat{A} .

A questo punto si procede come nella lezione precedente, facendo vedere che se u è armonica in A soddisfa il principio del massimo:

u assume il valore max (e min) su $\partial A \cup \{\infty\}$ (cioè su $\hat{A} \setminus A$).

La dimostrazione è la stessa di prima, e da qui si ottiene anche il risultato di unicità per (P') .

Proviamo ora a cercare formule risolutive per il problema (P').

Procediamo solo a livello formale (senza quindi verificare per quali u_0 la soluzione proposta è effettivamente tale....)

Approccio 1 Procediamo in analogia al caso del disco:

Scivolo $u_0(x)$ come

$$u_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0(s) e^{ixs} ds$$

Osservo ora che la funzione e^{ixs} ammette diverse estensioni armoniche a tutto \mathbb{C} , tra cui e^{izs} (olomorfa) ed $e^{i\bar{z}s}$ (antivolomorfa).

Poiché voglio soluzioni che tendono a 0 all'infinito sul semipiano superiore A , scelgo come estensione armonica di e^{ixs} con $s > 0$ la funzione e^{izs} (il valore assoluto è e^{-ys} e tende quindi a 0 per $y \rightarrow +\infty$) mentre per $s < 0$ prendo $e^{i\bar{z}s}$. Dunque la soluzione di (P') dovrebbe essere

$$\begin{aligned}
u(z) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \hat{u}_0(s) e^{izs} ds + \int_{-\infty}^0 \hat{u}_0(s) e^{i\bar{z}s} ds \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\hat{u}_0(s) e^{izs} + \hat{u}_0(-s) e^{-i\bar{z}s} \right) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) e^{-ist} dt e^{izs} + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) e^{ist} dt e^{-i\bar{z}s} \right] ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i(z-t)s} + e^{i(\bar{z}-t)s} ds \right] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) \cdot \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} e^{i(z-t)s} ds \right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left| \frac{e^{i(z-t)s}}{i(z-t)} \right|_0^{\infty} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) \underbrace{\frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}}_{h(t, z)} dt \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{al solito} \\ z = x + iy \end{array}
\end{aligned}$$

Ovvero $u(x, y) = (u_0 * h_y)(x)$ con $h_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$.

Approccio 2 la stessa formula può essere ottenuta anche per altra via.

Sia infatti $\hat{u}(s, y)$ la trasformata di Fourier di $u(x, y)$ rispetto alla prima variabile, cioè $\hat{u}(s, y) := \widehat{u(\cdot, y)}(s)$.

Allora $\widehat{u_{xx}} = -s^2 \hat{u}$ e $\widehat{u_{yy}} = (\hat{u})_{yy}$ (la prima identità segue dalle proprietà della TdF, la seconda è una semplice derivazione sotto il segno di integrale) per cui l'equazione $\Delta u = 0$ diventa

$$\hat{u}_{yy}(s, y) - s^2 \hat{u}(s, y) = 0$$

mentre la condizione al bordo $u(x, 0) = u_0(x)$ diventa $\hat{u}(s, 0) = \hat{u}_0(s)$. Dunque per ogni $s \in \mathbb{R}$, la funzione $\hat{u}(s, \cdot)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{v}(y) - s^2 v(y) = 0 \\ v(0) = \hat{u}_0(s) \end{cases}$$

Questo problema (nem sorprendentemente) è sotto-determinato: un'eq. diff. del secondo ordine con una sola condizione iniziale.

Il problema diventa determinato aggiungendo la condizione che $u(z) \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow \infty$, cosa che traduciamo (approssimativamente) con la condizione $\hat{u}(s, y) \rightarrow 0$ per $y \rightarrow +\infty$.

In altre parole chiediamo che per ogni s $\hat{u}(s, \cdot)$ risolve

$$\begin{cases} V''(y) - s^2 V(y) = 0 \\ V(0) = \hat{u}_0(s) \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} V(y) = 0 \end{cases}$$

In tal caso la soluzione è unica, ed è

$$V(y) = \hat{u}_0(s) e^{-sy} \quad \text{per } s > 0,$$

$$V(y) = \hat{u}_0(s) e^{sy} \quad \text{per } s < 0.$$

Dunque

$$\hat{u}(s, y) = \hat{u}_0(s) e^{-|s|y}$$

e siccome $e^{-|s|y} = \hat{h}_y(s)$ dove $h_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}$

(si parte dal fatto che $\frac{1}{1+x^2}(s) = \pi e^{-|s|} \dots$) ne segue che

$$u(x, y) = (u_0 * h_y)(x) \tag{*}$$

Come prima....

NOTA Non è complesso verificare che la funzione u definita da (*) è ben definita sul semipiano $y > 0$ per ogni u_0 limitata, è \mathcal{E}^2 (anzi \mathcal{E}^∞)

e armonica. Inoltre se u_0 è continua e
 infinitesima all'infinito, dovrebbe essere vero
 che l'estensione di u a ∂A come u_0 è
 continua e che u tende a 0 per all'infinito,
 cioè u risolve (P'). Per quest'ultimo punto
 conviene osservare che $h_\gamma = \sigma_{1/\gamma} h$ con $h(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$,
 dove σ_s è il solito riscalamento omotetico che
 conserva l'integrale.... dunque h_γ è un
 nucleo regolarizzante.

Concludiamo con alcuni esercizi che richiamano
 il teorema di Liouville per le funzioni armoniche.

Ex Sia u una funzione armonica su \mathbb{R}^n
 con crescita sublineare all'infinito,
 cioè $u(x) = o(|x|)$ per $|x| \rightarrow +\infty$.

Allora u è costante.

Dimostrazione Fissiamo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e dimostriamo
 che $u(x_1) = u(x_2)$. Per farlo usiamo il fatto che
 $u(x_i) = \int_{B(x_i, r)} u = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x_i, r)} u$ per $i=1,2, r>0$.

Dunque

$$\begin{aligned} u(x_2) - u(x_1) &= \frac{1}{\omega_n r^n} \left[\int_{B(x_2, r)} u - \int_{B(x_1, r)} u \right] \\ &= \frac{1}{\omega_n r^n} \left[\int_{B(x_2, r) \setminus B(x_1, r)} u - \int_{B(x_1, r) \setminus B(x_2, r)} u \right] \end{aligned}$$

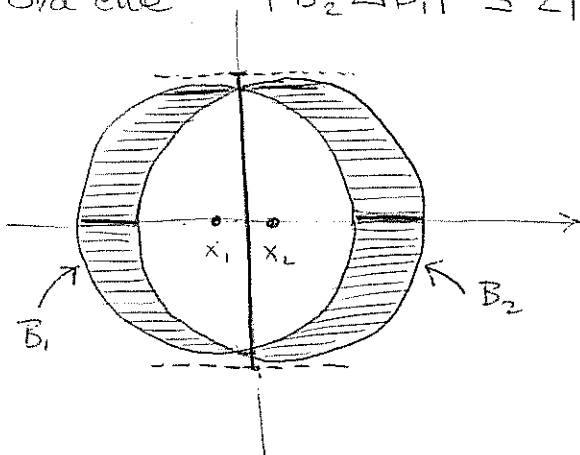
È quindi

differenza simmetrica



$$|u(x_2) - u(x_1)| \leq \frac{1}{a_n r^n} \underbrace{|B(x_2, r) \Delta B(x_1, r)|}_{B_2 \Delta B_1} \|u\|_{L^\infty(B_2 \Delta B_1)}$$

osserviamo ora che $|B_2 \Delta B_1| \leq 2|x_1 - x_2| a_{n-1} r^{n-1} = O(r^{n-1})$



(supponiamo per semplicità che $x_1 = -x_2$ e che x_2 stia sul primo asse di \mathbb{R}^n : calcoliamo il volume di $B_1 \Delta B_2$ tramite Fubini: la lunghezza (misura) delle sezioni 1-dimensionali di questo insieme parallele al primo asse è al più $2|x_2 - x_1|$ mentre la proiezione sull'iperpiano ortogonale al primo asse è contenuta nella palla $(n-1)$ -dim. di centro O e raggio r)

Mentre l'ipotesi sulla crescita di u ci dice che

$$\|u\|_{L^\infty(B_1 \Delta B_2)} = o(r) \text{ per } r \rightarrow +\infty.$$

Pertanto

$$|u(x_2) - u(x_1)| \leq \frac{1}{a_n r^n} \cdot O(r^{n-1}) \cdot o(r) = o(1) \rightarrow 0 \text{ per } r \rightarrow +\infty$$

e quindi deve essere $|u(x_2) - u(x_1)| = 0$, cioè $u(x_2) = u(x_1)$.



EX Data u armonica su A , trovare una stima di $|\nabla u(x)|$ in termini di $\|u\|_\infty$.

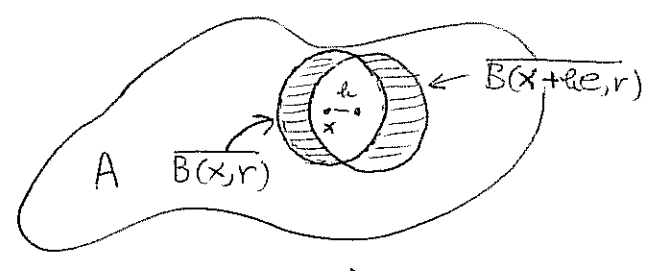
Soluzione Comincio con lo stimare il rapporto incrementale $\frac{u(x+he) - u(x)}{h}$ con $x \in A$, e vettore unitario e .

Per la stima procedo come nell'esercizio precedente:

$$\frac{u(x+he) - u(x)}{h} = \frac{1}{\alpha_n r^n} \left[\int_{B(x+he, r)} u - \int_{B(x, r)} u \right]$$

e quindi

$$\left| \frac{u(x+he) - u(x)}{h} \right| \leq \frac{1}{\alpha_n r^n |h|} |B(x+he, r) \Delta B(x, r)| \|u\|_{L^\infty(A)}$$



Nota devo prendere r t.c. $\overline{B(x, r)} \cup \overline{B(x+he, r)}$ siano contenuti in A ...

Come prima, $\left| \overbrace{B(x+he, r)}^{B_e} \Delta \overbrace{B(x, r)}^B \right| \leq 2|h| \alpha_{n-1} r^{n-1}$

e quindi

$$\left| \frac{u(x+he) - u(x)}{h} \right| \leq \frac{2\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \frac{1}{r} \|u\|_{L^\infty(B \Delta B_e)}$$

e, passando al limite per $h \rightarrow 0$ e prendendo il sup su tutti gli r t.c. $\overline{B(x, r)} \subset A$, otteniamo

$$\left| \frac{\partial u}{\partial e}(x) \right| \leq c \frac{\|u\|_{L^\infty(B(x, d))}}{d} \text{ con } d := \text{dist}(x, \partial A).$$

e quindi

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C_1}{\sqrt{n}} \frac{\|u\|_{L^\infty(B(x,d))}}{d}$$

Ex Usando il fatto che se u è armonica allora anche le derivate parziali di u lo sono, possiamo estendere la stima precedente alle derivate di ordine superiore:

$$|\nabla^k u(x)| \leq C_k \frac{\|u\|_{L^\infty(B(x,d))}}{d^k}$$

con C_k costante opportuna.

Ometto i dettagli...

Ex Usando la stima data nell'esercizio precedente si ottiene quanto segue (teorema di Liouville per le funzioni armoniche): Se u è armonica su \mathbb{R}^n e ha crescita di ordine strettamente inferiore a $d+1$ all'infinito, cioè

$$u(x) = o(|x|^{d+1}) \quad \text{per } |x| \rightarrow +\infty,$$

allora u è un polinomio di grado $\leq d$.

Dimostrazione Usare il fatto che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$

$$|\nabla^{d+1} u(x)| \leq C \frac{\|u\|_{L^\infty(B(x,r))}}{r^{d+1}} = \frac{o(r^{d+1})}{r^{d+1}} = o(1) \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow +\infty$$

e quindi $\nabla^{d+1} u(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow u$ polinomio di grado $\leq d$. □