Versione: 10 settembre 2014

**Università di Pisa**

**Corso di laurea in Matematica**

**Testi e soluzioni degli scritti d'esame di**

# Analisi in più variabili 2

**a.a. 2013-14**

**Giovanni Alberti e Vincenzo M. Tortorelli**


Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

**Avvertenze.** Gli scritti d'esame per il corso di Analisi in più Variabili 2 consistono solitamente di otto problemi a cui dare una soluzione articolata. Di questi, i primi quattro sono relativamente semplici, nel senso che a possono essere facilmente ricondotti a fatti e/o calcoli noti. Il tempo a disposizione è di tre ore.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una traccia delle soluzioni.

**Programma del corso [versione: 15 dicembre 2013].** Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Spazi $L^p$
   - 1.1 Disuguaglianze di Jensen, Hölder e di Minkowski.
   - 1.2 Spazi $L^p$. Completezza degli spazi $L^p$.
   - 1.3 Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^n$ e disuguaglianze collegate alle norme $L^p$. Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori. Approssimazione e regolarizzazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
2. Spazi di Hilbert
   - 2.1 Spazi di Hilbert reali; basi di Hilbert (sistemi ortonormali completi). Rappresentazione di un elemento dello spazio in termini di una base.
   - 2.2 Proiezione di un vettore su un sottospazio chiuso, e caratterizzazione in termini di minima distanza. Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
   - 2.3 *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*
3. Serie di Fourier ed applicazioni
   - 3.1 Le funzioni esponenziali $e^{inx}$ (opportunamente rinormalizzate) formano una base di Hilbert di $L^2(-\pi, \pi)$. Serie di Fourier complessa per funzioni in $L^2(-\pi, \pi)$. Convergenza della serie di Fourier in $L^2$. Convergenza uniforme per le funzioni $2\pi$-periodiche di classe $C^1$. Regolarità delle funzione e comportamento asintotico dei coefficienti.
   - 3.2 *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde.* Soluzione dell'equazione del calore e delle onde con condizioni di periodicità agli estremi tramite la serie di Fourier. Disuguaglianza isoperimetrica nel piano.
   - 3.3 Varianti della serie di Fourier: serie in seni e coseni (serie di Fourier reale); serie in seni. *Basi ortonormali e autovettori di operatori autoaggiunti.*
4. Trasformata di Fourier e applicazioni
   - 4.1 *Derivazione euristica della trasformata di Fourier a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier di funzioni in $L^1(\mathbb{R})$. Proprietà elementari della trasformata di Fourier.
   - 4.2 Dimostrazione della formula di inversione. La trasformata di Fourier preserva il prodotto scalare e la norma $L^2$. Trasformata di Fourier di funzioni in $L^2(\mathbb{R})$.
   - 4.3 *Risoluzione dell'equazione del calore tramite trasformata di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore; disuguaglianza di Heisenberg.*
5. Superfici e integrazione su superfici
   - 5.1 Superfici (sottovarietà) senza bordo di dimensione $d$ e classe $C^k$ in $\mathbb{R}^n$. Spazio tangente ad una superfice in un punto. Differenziale di una mappa di classe $C^1$ tra superfici. Superfici con bordo. Orientazione di una superficie e del suo bordo.
   - 5.2 Jacobiano e formula dell'area. Definizione della misura di volume $d$-dimensionale su una superficie tramite la formula dell'area. Integrazione di funzioni scalari su una superficie.
   - 5.3 Applicazioni $k$-lineari alternanti su uno spazio vettoriale qualunque: prodotto esterno e rappresentazione in termini di una base. Teorema di Binet.
   - 5.4 $k$-forme su un aperto di $\mathbb{R}^n$, rappresentazione in coordinate, prodotto esterno, differenziale e pull-back. Teorema di Stokes.

6. FUNZIONI ARMONICHE (argomento fuori programma)

6.1 *Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di proprietà della media. Principio del massimo e unicità della soluzione dell'equazione di Laplace con dato al bordo assegnato.*

6.2 *Funzioni armoniche e funzioni olomorfe. Risoluzione dell'equazione di Laplace nel disco unitario tramite la serie di Fourier; rappresentazione della soluzione tramite nucleo di Poisson.*

# T E S T I

1. Sia $E$ un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}$, e sia $X$ il sottospazio chiuso di $L^2(\mathbb{R})$ formato dalle funzioni $f$ tali che $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in E$. Trovare la proiezione ortogonale di $L^2(\mathbb{R})$ su $X$.

2. Sia $f$ una funzione in $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p \leq \infty$, e sia $g$ la funzione indicatrice dell'intervallo $[-1, 1]$. Dimostrare che la funzione $f * g$ è Hölderiana di esponente $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$.

3. Tra tutti i polinomi pari $p$ di grado al più 4 trovare quello che minimizza la distanza da $f(x) := \cos x$ in $L^2(-\pi, \pi)$. Cosa succede se si rimuove l'ipotesi che $p$ sia pari?

4. Dato $k = 1, 2, \dots$, sia $X$ il sottospazio di $L^2(0, 1)$ formato dalle funzioni di classe $C^{2k}$ che si annullano in 0 e 1 con tutte le derivate fino a quella di ordine $k - 1$, e sia $T : X \to L^2(0, 1)$ l'operatore differenziale dato da $Tu := P(D)u$ dove $P$ è un polinomio (reale) di grado $2k$. Dimostrare che se $P$ è pari allora $T$ è autoaggiunto. Vale anche il viceversa?

5. Trovare una soluzione $u = u(t, x)$ dell'equazione $u_t = u_{xx} - u$ su $[0, \infty) \times [0, \pi]$ tale che $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ per ogni $t \in [0, \infty)$ e $u(0, x) = x(x - \pi)$ per ogni $x \in [0, \pi]$.

6. Date le funzioni $\alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ e $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ con $\alpha$ continua e $\beta$ in $C^1_{\text{per}}$, si consideri il problema (P) dato dall'equazione $u_t = -iu_{xx} + \alpha(t)\,\beta(x)$ su $[0, +\infty] \times [-\pi, \pi]$ con le condizioni di periodicità agli estremi e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = 0$.

   a) Dimostrare che (P) ammette soluzione se $\alpha(t) := e^{iat}$ con $a \in \mathbb{R}$.

   b) Dire sotto quali ipotesi (su $a$ e su $\beta$) la soluzione al punto precedente è limitata.

   c) Dare delle ipotesi su $\alpha$ per cui (P) ammette soluzione.

7. Date due funzioni $a, b : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiamo la convoluzione discreta $a * b : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ come
$$a * b(n) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(n - k)\, b(k)\,.$$

   a) Dimostrare che dati $a, b \in \ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C})$ allora $a * b$ è una funzione ben definita e limitata.

   b) Dimostrare che $(a, b) \mapsto a * b(n)$ è continua da $\ell^2 \times \ell^2$ in $\mathbb{C}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

   c) Trovare e dimostrare una formula che per ogni $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ esprima i coefficienti di Fourier (complessi) di $fg$ in funzione di quelli di $f$ e di quelli di $g$.

8. Dato $a \in (0, \infty)$ sia $\phi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da
$$\phi_a(t) := \operatorname{sgn}(t)\,|t|^p \quad \text{con} \quad \operatorname{sgn}(t) := \begin{cases} +1 & \text{se } t \geq 0 \\ -1 & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

   a) Dato $p \in (1, +\infty)$, dimostrare che la mappa $\Phi_p : L^p(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ data da $\Phi_p(f) := \phi_p \circ f$ è ben definita e bigettiva, e scriverne l'inversa $\Phi_p^{-1}$.

   b) Dimostrare che la mappa $\Phi_p^{-1}$ è Hölderiana di esponente $1/p$ (usare ed eventualmente dimostrare che $\phi_\alpha$ è Hölderiana di esponente $\alpha$ per ogni $\alpha \leq 1$).

   c) Dimostrare che $\Phi_p^{-1}$ non è Hölderiana per alcun esponente maggiore di $1/p$.

   d) Dimostrare che $\Phi_p$ è localmente Lipschitziana.

1. Nell'ambito delle funzioni in $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, caratterizzare quelle che sono reali e dispari in termini della loro trasformata di Fourier.

2. Dato $n = 0, 1, \dots$, sia $\mathscr{G}_n$ l'insieme delle funzioni della forma $f(x) = p(x)\, e^{-x^2/2}$ con $p$ polinomio di grado $n$. Dimostrare che la trasformata di Fourier porta $\mathscr{G}_n$ in sé.

3. Sia $\omega$ la forma su $\mathbb{R}^3$ data da $\omega(x) := x_1x_2x_3(dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1)$.

   a) Calcolare il differenziale di $\omega$.

   b) Calcolare $g^\#\omega$ dove $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è data da $g(s_1, s_2) := (s_2^2, s_1^2, s_1s_2)$.

4. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := \dfrac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$.

5. Sia $S$ l'insieme delle matrici $X$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$ tali che $X$ è simmetrica e $X^2$ ha traccia $n$.

   a) Dimostrare che $S$ è una superficie compatta di classe $C^\infty$ e senza bordo, specificandone la dimensione.

   b) Determinare lo spazio tangente a $S$ in $I$ (matrice identità).

6. Sia $S$ l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione $y^6 + y^2 = |x|^4$, e sia $S' := S \setminus \{(0, 0)\}$.

   a) Dimostrare che $S'$ è una superficie senza bordo di dimensione $n$ e classe $C^\infty$.

   b) Dimostrare che la proiezione di $S$ su $\mathbb{R}^n$ è tutto $\mathbb{R}^n$.

   c) L'insieme $S$ è una superficie senza bordo?

7. Sia $C$ una curva (intesa come superficie di dimensione 1) compatta di classe $C^1$ e senza bordo contenuta nel quadrante aperto $Q := (0, +\infty)^2$, e sia
$$S := \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \ (|x_1|, |x_2|) \in C\big\}\,.$$

   a) Far vedere che $S$ è una superficie compatta senza bordo di classe $C^1$ e dimensione 3.

   b) Data una parametrizzazione $\gamma$ di $C$, costruire una parametrizzazione di $S$.

   c) Esprimere il volume di $S$ come integrale di un'opportuna funzione su $C$.

8. a) Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $u$ una soluzione su $\mathbb{R}$ dell'equazione
$$x^2u - \ddot{u} = \lambda u\,. \tag{1}$$
   Far vedere (formalmente) che la trasformata di Fourier $\hat{u}$ risolve la stessa equazione.

   b) Dimostrare che per $\lambda = 2n + 1$ con $n = 0, 1, \dots$ esiste una ed una sola soluzione $u_n$ dell'equazione (1) della forma $u_n = p_n\, e^{-x^2/2}$ con $p_n$ polinomio monico di grado $n$.

   c) Dimostrare che tali $u_n$ sono autovettori della trasformata di Fourier.

   d) Dimostrare che tali $u_n$ sono a due a due ortogonali in $L^2(\mathbb{R})$.

1. Scrivere la serie di Fourier reale e complessa della funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ data da $f(x) := |x|$.

2. Sia $\omega := dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_4$. Calcolare $\omega \wedge \omega$.

3. Sia $f(x) := |x|^a/(1+|x|^b)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Dire per quali $a, b > 0$ e $p \geq 1$ si ha che $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. (Cominciare se necessario dal caso $n = 2$).

4. Siano $S_1$ e $S_2$ superfici senza bordo in $\mathbb{R}^n$ di dimensione $d_1$ e $d_2$ rispettivamente, tali che $d_1 + d_2 > n$ e l'intersezione $S := S_1 \cap S_2$ non è vuota.

   a) Far vedere che se $\mathrm{Tan}(S_1, x) \cap \mathrm{Tan}(S_2, x)$ ha dimensione $d = d_1 + d_2 - n$ per ogni $x \in S$ allora $S$ è una superficie senza bordo di dimensione $d$. (Cominciare se necessario dal caso $n = 3$ e $d_1 = d_2 = 2$).

   b) Far vedere con un esempio che quanto detto sopra non vale se $d \neq d_1 + d_2 - n$.

5. a) Scrivere $\sin^3 x$ come combinazione lineare delle funzioni $\sin(nx)$ con $n = 1, 2, \dots$.

   b) Trovare una soluzione $u = u(t, x)$ dell'equazione $u_t = u_{xx} + 2tu$ su $[0, +\infty) \times [0, \pi]$ che soddisfi $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ per ogni $t \in [0, \infty)$ e $u(0, x) = \sin^3 x$ per ogni $x \in [0, \pi]$.

6. Sia $T$ l'operatore lineare dato da $[Tu](x) := \dot{u}(-x)$ per ogni funzione $u$ di classe $C^1$ definita su $[-1, 1]$, e sia $X$ il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ formato delle funzioni $u : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$ tali che $u(-\pi) = u(\pi)$.

   a) Calcolare $T^2 u$ per ogni funzione $u$ di classe $C^2$ su $[-1, 1]$.

   b) Dimostrare che $T$ è autoaggiunto come operatore da $X$ in $L^2(-1, 1)$.

   c) Trovare una base di Hilbert di $L^2(-\pi, \pi)$ formata da autovettori di $T$.

7. Sia $C_0$ lo spazio delle funzioni $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue e infinitesime all'infinito dotato della norma del sup, e sia $X$ il sottospazio formato dalle funzioni $v = \hat{u}$ con $u \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Dimostrare quanto segue:

   a) $X$ è denso in $C_0$;

   b) dato $v \in X$ allora $v^n \in X$ per $n = 1, 2, \dots$,

   c) dato $v \in X$ allora $f \circ v \in X$ per ogni $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che $f(0) = 0$.

8. Fissati $n$ numeri reali distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sia $S$ l'insieme delle matrici reali $n \times n$ che hanno $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ come autovalori.

   a) Dimostrare che, per $n = 2$, $S$ è una superficie senza bordo di dimensione 2.

   b) Dimostrare che $S$ è una superficie senza bordo di dimensione $d := n^2 - n$ in un intorno della matrice diagonale $\Lambda$ data da $\Lambda_{ii} := \lambda_i$ per $i = 1, \dots, n$.

   c) Dimostrare che $S$ è una superficie senza bordo di dimensione $d$.

1. Sia $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + dx_5 \wedge dx_6$. Calcolare $\omega \wedge \omega \wedge \omega$.

2. Usando la trasformata di Fourier calcolare $v := *^n u$ dove $u(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ e $n = 1, 2, \dots$

3. Sia $X$ il sottospazio di $L^2 = L^2(0,1)$ formato dalle funzioni $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$ tali che $u(0) = u(1) = 0$, e date $a \in \mathbb{R}$ sia $T : X \to L^2$ l'operatore definito da $Tu := x\ddot{u} + a\dot{u}$. Dire per quali $a$ l'operatore $T$ è autoaggiunto.

4. Scrivere la serie di Fourier reale e complessa di $f(x) := |\sin x|$.

5. Sia (P) il problema dato dall'equazione $u_t = u_{xxx}$, dalle condizioni agli estremi $u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi)$ e $u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi)$, e dalla condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$.

   a) Trovare una soluzione di (P) per $u_0(x) := 2\cos x$.

   b) Dimostrare che se $u_0 \in C^\infty_{\mathrm{per}}$ allora (P) ammette una soluzione di classe $C^\infty$ su $\mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$.

   c) Discutere l'unicità della soluzione.

6. Data $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funzione di classe $C^1$, dimostrare che $\int_0^1 \exp(ia\, g(x))\, dx$ tende a 0 quando $a \to +\infty$ se si verifica una delle seguenti condizioni:

   a) $\dot{g}$ è strettamente positiva;

   b) $\dot{g}$ si annulla in un numero finito di punti.

7. Sia $D$ l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^3$ tali che $|x|^2 \le 2|x| + x_1$, e per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia
$$\omega_a(x) := |x|^a (x_1\, dx_2 \wedge dx_3 - x_2\, dx_1 \wedge dx_3 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2)\,.$$

   a) Dimostrare che 0 è un punto interno di $D$.

   b) Dimostrare che $D$ è un compatto con frontiera regolare.

   c) Calcolare $\int_{\partial D} \omega_a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

8. Data $g$ funzione reale su $\mathbb{R}$ sia $G$ la funzione su $[-\pi, \pi]$ definita da
$$G(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x + 2\pi k)\,.$$

   a) Dimostrare che se $g$ è positiva allora $G(x)$ è ben definita per ogni $x$ e $\|G\|_1 = \|g\|_1$.

   b) Dimostrare che se $g \in L^1(\mathbb{R})$ allora $G(x)$ è ben definita per q.o. $x$ e $\|G\|_1 \le \|g\|_1$.

   c) Data $g \in L^1(\mathbb{R})$, esprimere i coefficienti di Fourier di $G$ in termini di $\hat{g}$.

   d) Far vedere che per ogni $p > 1$ esiste $g \in L^p(\mathbb{R})$ tale che $G(x) = +\infty$ per ogni $x$.

1. Data $\omega := \displaystyle\sum_{1 \le i < j \le 4} dx_i \wedge dx_j$, calcolare $\omega \wedge \omega$.

2. Sia $f$ la funzione su $[-\pi, \pi]$ definita da $f(x) := \cos(x/2)$. Scrivere le serie di Fourier reale e complessa di $f$.

3. Calcolare il determinante Jacobiano della mappa $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da:
$$g(\alpha, \beta) := (\cos\alpha, \sin\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta)\,.$$

4. Data $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ funzione continua a media nulla, si consideri il problema dato dall'equazione differenziale $u_t = u_{xx} + g(x)$ con le condizioni di periodicità agli estremi e la condizione iniziale $u(0, x) = 0$.
   a) Trovare un cambio di variabile che permetta di ricondursi all'equazione del calore.
   b) Discutere l'esistenza, l'unicità e la regolarità della soluzione.

5. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sia $T$ l'operatore da $L^2(\mathbb{R})$ in sé dato da $T = \tau_a + \tau_b$, dove $\tau_h$ indica come al solito l'operatore di traslazione definito da $\tau_h u(x) := u(x - h)$ per ogni $u \in L^2(\mathbb{R})$.
   a) Calcolare l'aggiunta di $T$ e dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ l'operatore $T$ è autoaggiunto.
   b) Nel caso autoaggiunto, dimostrare che $T$ non ha autovettori tranne che per $a = b = 0$, [*Suggerimento: usare la trasformata di Fourier*.]

6. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata, e per ogni $p \in [2, +\infty]$ sia $s_p$ la costante che minimizza $\|f - s\|_p$ tra tutti i numeri reali $s$.
   a) Dimostrare che $s_p$ esiste ed è unica per ogni $p \in [2, +\infty)$.
   b) Calcolare $s_2$.
   c) Dimostrare che $s_\infty$ esiste ed è unica, e calcolarla.
   d) Trovare una funzione $f$ non costante tale che $s_p$ non dipende da $p$.

7. a) Sia $S$ una superficie di classe $C^1$ senza bordo in $\mathbb{R}^n$, e sia $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$ tale che $\nabla h(x) \perp \mathrm{Tan}(S, x)$ per ogni $x \in S$. Dimostrare che $h$ è localmente costante su $S$.
   b) Siano $k, m, n$ numeri interi positivi con $k \le n, m$, e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una mappa di classe $C^1$ tale che $\nabla f(x)$ ha rango $k$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che $S := f^{-1}(0)$ è una superficie senza bordo di classe $C^1$ di dimensione $n - k$.

8. a) Date $u \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $\rho \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, dimostrare che $\widehat{u * \rho} = \hat{u}\,\hat{\rho}$;
   b) Date $u \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $v \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, dimostrare che se $\hat{u} = \hat{v}$ q.o. allora $u = v$ q.o.
   c) Detto $X$ lo spazio delle funzioni $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ della forma $w = u + v$ con $u \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $v \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, far vedere che è possibile definire la trasformata di Fourier $\mathscr{F}$ su $X$ e che questa è iniettiva, vale a dire che $\mathscr{F}(w) = 0$ q.o. implica $w = 0$ q.o.

1. Sia $X$ il sottospazio di $L^2(0, +\infty)$ generato dalle funzioni $e^{-x}$ e $e^{-2x}$. Trovare la proiezione della funzione $e^{-3x}$ su $X$.

2. Sia $C$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e sia $\gamma : (-1, 1) \to C$ un *omeomorfismo* di classe $C^1$. Far vedere con un esempio che $C$ non è necessariamente una curva regolare (nel senso di superficie senza bordo di dimensione 1).

3. Dato $w \in \mathbb{R}^n$ sia $\alpha \in \wedge^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ l'applicazione $(n-1)$-lineare alternante definita da
$$\alpha(v_1, \dots v_{n-1}) := \det(w, v_1, \dots, v_{n-1}) \quad \text{per ogni } v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n.$$
Scrivere $\alpha$ come combinazione lineare degli elementi della base canonica di $\wedge^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, vale a dire
$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \widehat{dx_i} \quad \text{dove} \quad \widehat{dx_i} := \bigwedge_{j \neq i} dx_j \, .$$

4. Per ogni $a > 0$ sia $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da
$$f_a(x) = \frac{1}{|x|^3 + |x|^a} \, .$$
Dire per quali $a$ e quali $p \geq 1$ la funzione $f_a$ appartiene a $L^p(\mathbb{R}^2)$.

5. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.

6. Sia $X$ il sottospazio di $L^2 = L^2(-1, 1)$ formato dalle funzioni $u : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$ tali che $u(-1) = u(1) = 0$, e date $a, b$ funzioni di classe $C^2$ su $[-1, 1]$, sia $T : X \to L^2$ l'operatore definito da $Tu := a\ddot{u} + b\dot{u}$. Dire per quali $a$ e $b$ l'operatore $T$ è autoaggiunto.

7. Dato $n \geq 1$, sia $S$ l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tali che
$$|x| = |y| = |z| \, .$$
a) Dimostrare che $S' := S \setminus \{(0, 0, 0)\}$ è una superficie senza bordo di dimensione $3n - 2$.
b) Dimostrare che $S$ non è una superficie (con o senza bordo).

8. Sia $f$ una funzione di classe $C^1$ su $\mathbb{R}$ tale che $f' \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p \leq +\infty$.
a) Dimostrare che $f$ è Hölderiana di esponente $\alpha := 1 - \frac{1}{p}$.
b) Far vedere con un esempio che il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ può non esistere.
c) Dimostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $f(x)$ tende a 0 per $x \to +\infty$.

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la mappa data da $f(s) := (s_1^2, s_1 s_2, s_2^2)$ e sia $\omega$ la forma su $\mathbb{R}^3$ data da
$$\omega(x) := x_2 x_3 \, dx_1 - x_1 x_3 \, dx_2 + x_1 x_2 \, dx_3 \, .$$
Calcolare $d\omega$, $f^\# \omega$ e $f^\#(d\omega)$.

2. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := x^2 \exp(-\frac{1}{2}|x|)$.

3. Data $A$ matrice $n \times n$ invertibile, calcolare l'aggiunta dell'operatore $T$ da $L^2(\mathbb{R}^n)$ in sé definito da $[Tu](x) := u(Ax)$ per ogni $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

4. a) Determinare la serie in seni della funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := 1$.
b) Determinare la serie in seni della funzione $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ data da $g(x) := \frac{1}{2} x(x - \pi)$.

5. Si consideri il problema dato dall'equazione differenziale $u_t = u_{xx}$, dalle condizioni agli estremi $u(t, 0) = u(t, \pi) = t$ (attenzione!) e dalla condizione iniziale $u(0, x) = 0$.
a) Dimostrare che tale problema ammette una soluzione continua su $[0, +\infty) \times [0, \pi]$ e di classe $C^\infty$ su $(0, +\infty) \times [0, \pi]$.
b) Discutere l'unicità di questa soluzione.

6. a) Data $g$ funzione su $\mathbb{R}^n$ di classe $C^1$ con supporto compatto e $j = 1, \dots, n$, esprimere la trasformata di Fourier della derivata parziale $\partial_j g$ in termini della trasformata di $g$.
b) Sia $G$ una campo di vettori su $\mathbb{R}^3$ di classe $C^1$ con supporto compatto. Esprimere la trasformata di Fourier della divergenza e del rotore di $G$ in termini di $\widehat{G}$.
c) Dimostrare che se tale $G$ ha divergenza e rotore nulli allora è nullo.
[*La trasformata di Fourier di una funzione* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *è definita come*
$$\hat{g}(y) := \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-iy \cdot x} dx \quad \textit{per ogni } y \in \mathbb{R}^n,$$
*dove* $y \cdot x$ *è il prodotto scalare di* $x$ *e* $y$*. La trasformata di Fourier di un campo di vettori viene ottenuta trasformando componente per componente.*]

7. Dato $r > 0$, sia $S_r$ l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che
$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)^2 + z^2 = r^2 \, . \tag{1}$$
a) Dimostrare che $S_r$ è una superficie senza bordo compatta e di classe $C^\infty$ per $r < 1$.
b) Trovare una parametrizzazione di $S_r$ e calcolarne l'area (per $r < 1$).
c) Dire se $S_r$ è una superficie o meno per $r \geq 1$.

8. Data $\rho \in L^1(\mathbb{R})$, sia $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ l'operatore lineare dato da $Tu := \rho * u$.
a) Dire per quali $\rho$ l'operatore $T$ è autoaggiunto.
b) Far vedere che $T$ non ammette autovettori per $\rho(x) := e^{-|x|}$.
c) Esiste una funzione $\rho$ non q.o. nulla tale che $T$ ammette degli autovettori?

# SOLUZIONI

1. Dimostriamo che la proiezione su $X$ è la mappa lineare $P : L^2(\mathbb{R}) \to X$ data da $Pf := (1-\mathbf{1}_E)f$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$, dove $\mathbf{1}_E$ è la funzione caratteristica dell'insieme $E$. Si vede subito che $Pf$ appartiene ad $X$ per ogni $f$, e per completare la dimostrazione basta osservare che $f-Pf = \mathbf{1}_E f$ è ortogonale ad $X$; in effetti data $g \in X$ si ha che $g = 0$ quasi ovunque in $E$, mentre ovviamente $f - Pf = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R} \setminus E$; da questo segue che $(f - Pf)g = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$, e in particolare $\langle f - Pf\,;\, g\rangle = 0$.

2. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha che
$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)\big(g(x-t) - g(y-t)\big)\,dt \right| \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, \underbrace{\big|g(x-t) - g(y-t)\big|}_{h(t)}\,dt \le \|f\|_p \|h\|_q\,, \end{aligned} \tag{1}$$
dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato la disuguaglianza di Hölder. Ora la funzione $h(t) := \big|g(x-t) - g(y-t)\big|$ è l'indicatrice della differenza simmetrica degli intervalli $[x-1, x+1]$ e $[y-1, y+1]$, e siccome la misura di questa differenza simmetrica è minore o uguale a $2|x-y|$ otteniamo che $\|h\|_q \le (2|x-y|)^{1/q}$, e quindi la (1) diventa
$$|f * g(x) - f * g(y)| \le C|x-y|^{1/q} \quad \text{con } C := 2^{1/q}\|f\|_p.$$

3. Sia $X$ l'insieme dei polinomi pari di grado al più 4, visto come sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$. La proiezione di $f$ su $X$ è il polinomio $p$ della forma $p(x) = a + bx^2 + cx^4$ caratterizzato dal fatto che $f - p$ è ortogonale a $X$, ovvero dal fatto che $f - p$ è ortogonale alle funzioni 1, $x^2$ e $x^4$. Riscriviamo queste condizioni di ortogonalità come
$$\begin{cases} \langle a + bx^2 + cx^4\,;\, 1\rangle = \langle f(x)\,;\, 1\rangle \\ \langle a + bx^2 + cx^4\,;\, x^2\rangle = \langle f(x)\,;\, x^2\rangle \\ \langle a + bx^2 + cx^4\,;\, x^4\rangle = \langle f(x)\,;\, x^4\rangle \end{cases} \quad \text{vale a dire} \quad \begin{cases} a + \frac{\pi^2 b}{3} + \frac{\pi^4 c}{5} = 0 \\ \frac{a}{3} + \frac{\pi^2 b}{5} + \frac{\pi^4 c}{7} = -\frac{2}{\pi^2} \\ \frac{a}{5} + \frac{\pi^2 b}{7} + \frac{\pi^4 c}{9} = -\frac{4}{\pi^2} + \frac{24}{\pi^4} \end{cases}$$
e risolvendo questo sistema (con un molta, moltissima pazienza) si ottiene infine
$$a = \frac{105}{8\pi^4}(27 - 2\pi^2)\,, \quad b = -\frac{315}{4\pi^6}(45 - 4\pi^2)\,, \quad c = \frac{1575}{8\pi^8}(21 - 2\pi^2)\,.$$
Facciamo ora vedere che il polinomio $p$ appena ottenuto è anche la proiezione di $f$ sollo spazio $X'$ dei polinomi di grado al più 4. Siccome $p$ appartiene a $X$ e quindi anche a $X'$, ci basta far vedere che $f - p$ è ortogonale a $X'$. In effetti abbiamo che $f - p$ è ortogonale a 1, $x^2$ e $x^4$ per la scelta di $p$, e in quanto funzione pari è anche ortogonale rispetto a tutte le funzioni dispari, incluse in particolare $x$ e $x^3$. Dunque $f - p$ è ortogonale a $x^k$ per $k = 0, \dots, 4$, e di conseguenza è ortogonale anche a $X'$.

4. Siano dati $u, v \in X$, $i = 1, \dots, k$ e $j = 0, \dots, 2k-1$. Integrando per parti l'integrale che definisce il prodotto scalare $\langle D^i u\,;\, D^j v\rangle$ si ottiene che
$$\langle D^i u\,;\, D^j v\rangle = \left| D^{i-1}u\, D^j v \right|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} D^{i-1}u\, D^{j+1}v\,dx = -\langle D^{i-1}u\,;\, D^{j+1}v\rangle\,, \tag{2}$$
e applicando ripetutamente la (2) si ottiene che per ogni $h = 0, \dots, k$
$$\langle D^{2h}u\,;\, v\rangle = (-1)^h \langle D^h u\,;\, D^h v\rangle = \langle u\,;\, D^{2h}v\rangle\,.$$
Dunque $D^{2h}$ è un operatore autoaggiunto da $X$ a $L^2(0,1)$. Ne segue che $P(D)$ è autoaggiunto per ogni polinomio pari $P$ di grado al più $2k$ (usiamo il fatto che una combinazione lineare di operatori autoaggiunti è un operatore autoaggiunto).
Allo stesso modo si ottiene che se $P$ è un polinomio dispari di grado al più $2k-1$ allora l'aggiunta di $P(D)$ è $-P(D)$. Per l'unicità dell'aggiunta (che segue dal fatto che $X$ è denso in $L^2(0,1)$) si ha che $P(D)$ non può essere autoaggiunto a meno di non essere identicamente nullo, cosa che si verifica solo se $P$ è nullo; se infatti $P$ non è il polinomio nullo allora il ker di $P(D)$ ha dimensione finita – si tratta di un sottospazio delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti – mentre $X$ ha dimensione infinita.
Scrivendo infine un generico polinomio $P$ (di grado al più $2k$) come somma di un polinomio

pari $P_p$ e di uno dispari $P_d$ si ottiene che $P(D)$ è autoaggiunto se e solo se $P_d = 0$, ovvero se e solo se $P$ è pari.

5. Integrando per parti due volte si ottiene che i coefficienti dello sviluppo in serie di seni del dato iniziale $x(x-\pi)$ sono

$$b_n^0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(x-\pi)\,\sin(nx)\,dx = \begin{cases} -\frac{8}{\pi n^3} & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Per ogni $t \geq 0$ sviluppiamo la funzione incognita $u(t,x)$ in serie di seni nella variabile $x$ ed indichiamo con $b_n(t)$ i corrispondenti coefficienti. Procedendo come visto a lezione si ottiene che per $n = 1, 2, \dots$ la funzione $b_n(t)$ risolve l'equazione $\dot y = -(n^2+1)y$ con la condizione iniziale $y(0) = b_n(0)$, e quindi

$$b_n(t) = \begin{cases} -\frac{8}{\pi n^3} e^{-(n^2+1)t} & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Pertanto la soluzione cercata dovrebbe essere

$$u(t,x) = -\sum_{\substack{n \text{ dispari} \\ n\geq 1}} \underbrace{\frac{8}{\pi n^3} e^{-(n^2+1)t} \sin(nx)}_{u_n} \,.$$

Mostriamo adesso che la funzione $u$ è ben definita e risolve il problema proposto. Tramite semplici conti si ottiene che

$$\|u_n\|_\infty = \frac{8}{\pi n^3} \quad \text{in } [0,+\infty)\times\mathbb{R}, \tag{3}$$

e per ogni $\delta > 0$ e $h, k = 0, 1, 2, \dots$

$$\|\partial_t^h \partial_x^k u_n\|_\infty = \frac{8}{\pi}(n^2+1)^h n^{k-3} e^{-(n^2+1)\delta} \sim C n^{2h+k-3} e^{-\delta n^2} \quad \text{in } [\delta,+\infty)\times\mathbb{R}. \tag{4}$$

Dalla (3) segue che la serie delle funzioni $u_n$ converge totalmente su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, e quindi $u$ è una funzione ben definita e continua su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ che chiaramente soddisfa le condizioni agli estremi e la condizione iniziale del problema di partenza. Dalla (4) segue invece che la serie delle derivate $\partial_t^h\partial_x^k u_n$ converge totalmente su $[\delta,+\infty)\times\mathbb{R}$ per ogni $\delta>0$ e per ogni $h,k = 0,1,\dots,$ e quindi $u$ è una funzione di classe $C^\infty$ sull'aperto $A := (0,+\infty)\times\mathbb{R}$.
Infine $u$ soddisfa l'equazione differenziale $u_t = u_{xx} - u$ (su $A$) perché lo stesso vale per ogni addendo $u_n$.

6. Per ogni $t \geq 0$ sviluppiamo la funzione incognita $u(t,x)$ in serie di Fourier (complessa) nella variabile $x$ ed indichiamo con $c_n(t)$ i corrispondenti coefficienti. Come visto a lezione la funzione $c_n(t)$ risolve l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$\dot y = in^2 y + \beta_n \alpha(t)$$

con la condizione iniziale $y(0) = 0$, dove $\beta_n$ sono i coefficienti di Fourier della funzione $\beta$. La soluzione di questa equazione è

$$c_n(t) = e^{in^2 t}\int_0^t e^{-in^2 s}\alpha(s)\,ds = \int_0^t e^{in^2(t-s)}\alpha(s)\,ds\,,$$

e quindi la soluzione di (P) dovrebbe essere

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\beta_n\left[\int_0^t e^{in^2(t-s)}\alpha(s)\,ds\right] e^{inx}}_{u_n} \,. \tag{5}$$

c) Facciamo vedere che la funzione $u$ data in (5) è ben definita e risolve (P) sotto l'ipotesi che $\sum n^2|\beta_n| < +\infty$ – cosa che si verifica quando $\beta$ appartiene a $C^3_{\text{per}}$. Ponendo

$$A(t) := \sup_{0\leq s\leq t} |\alpha(s)| \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

otteniamo che per ogni $n$ ed ogni $t > 0$

$$\left| \int_0^t e^{in^2(t-s)} \alpha(s)\, ds \right| \leq A(t)\, T\, .$$

Utilizzando questa stima otteniamo quindi che per ogni $n$ e ogni $T > 0$ si ha

$$\|\partial_t u_n\|_\infty \leq A(T)(n^2 T + 1)|\beta_n| \quad \text{su } [0, T] \times \mathbb{R}, \tag{6}$$

e per ogni $k = 0, 1, \ldots$

$$\|\partial_x^k u_n\|_\infty \leq A(T)\, T\, |n|^k |\beta_n| \quad \text{su } [0, T] \times \mathbb{R} \text{ per } k = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

Utilizzando l'ipotesi sui coefficienti $\beta_n$ e le stime (6) e (7) otteniamo allora che le serie delle funzioni $u_n$, $\partial_x u_n$, $\partial_x^2 u_n$ e $\partial_t u_n$ convergono totalmente su $[0, T] \times \mathbb{R}$ per ogni $T > 0$.
Ne segue che $u$ è una funzione ben definita su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, $2\pi$-periodica in $x$, di classe $C^1$ nelle due variabili e di classe $C^2$ in $x$; inoltre $u$ soddisfa le condizioni agli estremi che la condizione iniziale in (P) perché la soddisfano anche gli addendi $u_n$, e soddisfa l'equazione in (P), vale a dire $u_t = -iu_{xx} + \alpha(t)\, \beta(x)$, perché gli addendi $u_n$ soddisfano l'equazione $u_t = -iu_{xx} + \alpha(t)\, \beta_n e^{inx}$.
a) Se $\alpha(t) = e^{iat}$ allora l'integrale in (5) può essere calcolato esplicitamente e se $a$ non è il quadrato di alcun numero naturale si ottiene

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\beta_n \frac{e^{iat} - e^{in^2 t}}{i(a - n^2)} e^{inx}}_{u_n}\, . \tag{8}$$

Se invece $a = m^2$ per un qualche numero naturale $m$ la formula precedente va modificata come segue:

$$u(t, x) = te^{im^2 t} g(x) + \sum_{n \neq \pm m} \beta_n \frac{e^{im^2 t} - e^{in^2 t}}{i(a - n^2)} e^{inx} \tag{8'}$$

dove

$$g(x) := \begin{cases} \beta_m e^{imx} + \beta_{-m} e^{-imx} & \text{se } m \neq 0, \\ \beta_0 & \text{se } m = 0. \end{cases}$$

Inoltre per ogni $k = 0, 1, \ldots$ si ha che

$$\|\partial_x^k u_n\|_\infty \leq \frac{2|\beta_n|\, |n|^k}{|n^2 - a|} \sim 2|\beta_n|\, |n|^{k-2}\, , \quad \|\partial_t u_n\|_\infty \leq \frac{|\beta_n|(|a| + n^2)}{|n^2 - a|} \sim |\beta_n|$$

Pertanto, usando il fatto che $\sum |\beta_n| < +\infty$ – che segue dall'ipotesi $\beta \in C^1_{\text{per}}$ – si ottiene che la funzione $u$ data in (8) o (8') è ben definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $2\pi$-periodica in $x$, di classe $C^1$ in entrambe le variabili e di classe $C^2$ nella $x$, e risolve (P).
b) Per quanto visto al punto precedente le serie in (8) e in (8') convergono ad una funzione limitata, mentre il primo addendo alla destra dell'uguale in (8'), vale a dire

$$te^{im^2 t} g(x)\, ,$$

è una funzione illimitata a meno che $\beta_m$ e $\beta_{-m}$ non siano entrambi nulli (infatti $|te^{im^2 t} g(x)| = t|g(x)|$ tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$ per ogni $x$ tale che $g(x) \neq 0$, e la funzione $g(x) = \beta_m e^{imx} + \beta_{-m} e^{-imx}$ è identicamente nulla se e solo se $\beta_m = \beta_{-m} = 0$ – e lo stesso vale quando $m = 0$ e $g(x) = \beta_0$).
Da queste considerazioni segue che la soluzione $u$ è una funzione limitata quando $a$ non è il quadrato di alcun numero naturale, mentre quando $a = m^2$ per qualche naturale $m$ allora $u$ è limitata se e solo se

$$\beta_m = \beta_{-m} = 0\, .$$

7. a) In questo esercizio $\ell^2$ indica lo spazio di Hilbert complesso delle funzioni $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tali che

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a(k)|^2 < +\infty\, ,$$

dotato dell'ovvio prodotto scalare. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ sia $T_n : \ell^2 \to \ell^2$ l'isometria definita da $[T_n a](k) := a(n-k)$ per ogni $a \in \ell^2$ e $k \in \mathbb{Z}$. Allora

$$a * b(n) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(n-k)\, b(k) = \langle T_n a\,;\, \bar{b}\rangle \tag{9}$$

dove $\langle \cdot\,;\,\cdot\rangle$ è il prodotto scalare in $\ell^2$. In particolare $a * b(n)$ è ben definito per ogni $n$, e per la disuguaglianza di Schwartz si ha che

$$|a * b(n)| = |\langle T_n a\,;\, b\rangle| \le \|T_n a\|\,\|b\| = \|a\|\,\|b\|\,,$$

e di conseguenza $a * b$ è una funzione limitata in modulo da $\|a\|\,\|b\|$.

b) La continuità della mappa $(a, b) \mapsto a * b(n)$ segue dalla formula (9) usando la continuità del prodotto scalare (e di $T_n$, che è un'isometria).

c) Per ogni funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ indichiamo con $\hat{f}$ la funzione in $\ell^2$ tale che $\hat{f}(n)$ è il coefficiente di Fourier $n$-esimo di $f$. Moltiplicando le serie di fourier di $f$ e di $g$ otteniamo, almeno formalmente,

$$\begin{aligned} f(x)\,g(x) &= \Bigg[\sum_{h\in\mathbb{Z}} \hat{f}(h)\, e^{ihx}\Bigg] \Bigg[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(k)\, e^{ikx}\Bigg] \\ &= \sum_{h,k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(h)\,\hat{g}(k)\, e^{i(h+k)x} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{h,k\in\mathbb{Z}\\ h+k=n}} \hat{f}(h)\,\hat{g}(k)\, e^{i(h+k)x} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n-k)\,\hat{g}(k)\, e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f} * \hat{g}(n)\, e^{inx}\,, \end{aligned}$$

e questo suggerisce che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ l'$n$-esimo coefficiente di Fourier di $fg$ sia

$$\widehat{fg}(n) = \hat{f} * \hat{g}(n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

In effetti, se le serie di Fourier di $f$ e $g$ sono somme finite, vale a dire se $f$ e $g$ sono polinomi trigonometrici, il conto fatto sopra risulta essere completamente rigoroso, e quindi la formula (10) vale.
Per estendere la (10) a tutte le copie di funzioni $f$ e $g$ in $L^2(-\pi, \pi)$ basta ricordare che i polinomi trigonometrici sono densi in $L^2(-\pi, \pi)$ e osservare che sia il termine di sinistra che quello di destra della (10) sono funzioni continue su $L^2 \times L^2$. Per la precisione, la continuità di quello di sinistra segue dalla continuità del prodotto come mappa da $L^2 \times L^2$ in $L^1$ e della funzione che ad ogni $f \in L^1$ associa $\hat{f}(n)$, mentre la continuità di quello di destra segue da quanto dimostrato al punto b) e dalla continuità della mappa che ad ogni $f \in L^2$ associa $\hat{f} \in \ell^2$.

8. a) Per vedere che $\Phi_p$ è ben definita basta dimostrare che $\phi_p \circ f$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$, e in effetti, usando il fatto che $|\phi_p(t)| = |t|^p$ per ogni $t$, otteniamo che

$$\|\Phi_p(f)\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \big|\phi_p(f(x))\big|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, dx = \|f\|_p^p < +\infty\,.$$

Allo stesso modo si dimostra che $\Phi_{1/p} : f \mapsto \phi_{1/p} \circ f$ è una mappa ben definita da $L^1(\mathbb{R})$ a $L^p(\mathbb{R})$. Inoltre partendo dal fatto che $\phi_{1/p}$ è l'inversa di $\phi_p$ si ottiene subito che $\Phi_{1/p}$ è l'inversa di $\Phi_p$, e in particolare quest'ultima è una bigezione.

b) Il fatto che $\phi_{1/p}$ è Hölderiana di esponente $1/p$ (o $1/p$-Hölderiana) significa che esiste una costante $C$ tale che

$$|\phi_{1/p}(t') - \phi_{1/p}(t)| \le C|t' - t|^{1/p} \quad \text{per ogni } t, t' \in \mathbb{R}.$$

Usando questo fatto otteniamo che per ogni $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|\Phi_{1/p}(f) - \Phi_{1/p}(g)\|_p &= \int_{\mathbb{R}} \big|\phi_{1/p}(f(x)) - \phi_{1/p}(g(x))\big|^p\, dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}} C^p |f(x) - g(x)|\, dx = C^p \|f - g\|_1 \end{aligned}$$

e dunque $\Phi_{1/p}$ è $1/p$-Hölderiana.
Il fatto che $\phi_a$ sia $a$-Hölderiana per ogni $a \le 1$ segue facilmente dal fatto che la funzione $t \mapsto t^a$ è $a$-Hölderiana per $t \ge 0$. Per dimostrare quest'ultimo fatto fissiamo $h > 0$ e verifichiamo tramite il calcolo della derivata che la funzione $(t+h)^a - t^a$ è decrescente in $t$, e quindi

$$(t+h)^a - t^a \le h^a \quad \text{per ogni } t \ge 0,$$

da cui segue infine che

$$|t'^a - t^a| \le |t' - t|^a \quad \text{per ogni } t, t' \ge 0.$$

c) Per ogni $h \ge 0$ indichiamo con $f_h$ la funzione indicatrice dell'intervallo $[0, h]$. Ma allora $\Phi_{1/p}(f_h) = f_h$ e un semplice calcolo mostra che per ogni $h' \ge h \ge 0$ si ha

$$\|f_{h'} - f_h\|_1 = |h' - h| , \quad \|\Phi_{1/p}(f_{h'}) - \Phi_{1/p}(f_h)\|_p = |h' - h|^{1/p} ,$$

e da questo segue che $\Phi_{1/p}$ non può essere $a$-Hölderiana per alcun $a > 1/p$.
d) Per ogni $p \ge 1$ la funzione $\phi_p$ è di classe $C^1$ e $\phi'_p(t) = p|t|^{p-1}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Pertanto per ogni $t < t'$ si ha che

$$\begin{aligned}\phi_p(t') - \phi_p(t) &= \int_{t'}^{t} \phi'_p(s)\, ds = \int_{t'}^{t} p|s|^{p-1}\, ds \\ &\le \int_{t'}^{t} p(|t| \vee |t'|)^{p-1}\, ds = p(|t| \vee |t'|)^{p-1}(t' - t)\end{aligned}$$

dove $a \vee b$ sta per $\max\{a, b\}$. Da questa disuguaglianza segue immediatamente che per ogni $t, t' \in \mathbb{R}$

$$|\phi_p(t') - \phi_p(t)| \le p(|t| \vee |t'|)^{p-1}|t' - t| ,$$

e usando questo fatto otteniamo che per ogni $f, g \in L^p(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\|\Phi_p(f) - \Phi_p(g)\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \big|\phi_p(f(x)) - \phi_p(g(x))\big|\, dx \\ &\le p \int_{\mathbb{R}} \big(|f| \vee |g|\big)^{p-1} |f - g|\, dx \\ &\le p \big\|(|f| \vee |g|)^{p-1}\big\|_q \, \|f - g\|_p \\ &= p \big\||f| \vee |g|\big\|_p^{p-1} \, \|f - g\|_p \le p\big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)^{p-1} \, \|f - g\|_p\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio è stata usata la disuguaglianza di Hölder e nell'ultimo la disuguaglianza di Minkowski insieme al fatto che $|f| \vee |g| \le |f| + |g|$). Siccome la quantità $\|f\|_p + \|g\|_p$ è limitata al variare di $f$ e $g$ in un qualunque sottoinsieme limitato di $L^p$, la precedente disuguaglianza implica che $\Phi_p$ è Lipschitziana su ogni sottoinsieme limitato di $L^p$, ed in particolare è localmente Lipschitziana.

## COMMENTI

- Esercizio 1. Molti dei presenti hanno individuato correttamente la proiezione $Pf$, ma per dimostrare che si tratta effettivamente della proiezione ortogonale di $f$ su $X$ si sono limitati a verificare che $Pf \in X$ e che $f - Pf \perp Pf$, ma quest'ultima condizione non è sufficiente a dimostrare che $f - Pf \perp X$.

- Esercizio 1. Una dimostrazione alternativa del fatto che $Pf$ è la proiezione ortogonale di $f$ su $X$ la si ottiene facendo vedere che $\|f - Pf\|_2 \le \|f - g\|_2$ per ogni $g \in X$ (come hanno fatto molti dei presenti).

- Esercizio 1. Diversi dei presenti hanno dimostrato che $P : L^2(\mathbb{R}) \to X$ è un operatore lineare e continuo, anche se questo non era né richiesto né necessario.

- Esercizio 3. Ricavare il valore preciso dei coefficienti $a, b, c$ della proiezione di $\cos x$ su $X$ è assai tedioso; nel correggere questo esercizio è stato ritenuto sufficiente l'aver impostato correttamente i calcoli (che comprensibilmente nessuno ha portato fino in fondo).

- Esercizio 3. Un modo alternativo di risolvere questo esercizio (proposto da molti dei presenti) consiste nell'applicare il procedimento di Gram-Schmidt (in $L^2(-\pi,\pi)$) alla base 1, $x^2$, $x^4$ dello spazio $X$ dei polinomi pari di grado al più 4 per ottenere una base ortonormale di $X$, e poi calcolare le coordinate di $\cos x$ rispetto a questa base usando il prodotto scalare.

- Esercizio 3. Alcuni dei presenti hanno fatto l'ipotesi che la proiezione $p$ di $\cos x$ su $X$ sia il polinomio di Taylor di $\cos x$ di ordine 4 in 0, ma così non è. L'ipotesi sembra esser stata suggerita dalla scomposizione
$$\cos x = \underbrace{\Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\Big)}_{p(x)} + \underbrace{\Big(-\frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\Big)}_{r(x)}$$
e dall'idea (errata) che $r$ sia ortogonale a $X$ perché non contiene monomi di grado 0, 2 o 4.

- Esercizio 4. Alla domanda finale ("vale il viceversa?") possono essere date risposte più o meno forti. Molti dei presenti si sono limitati a dire che la risposta è no perché esiste un polinomio $P$ tale che l'operatore $P(D)$ non è autoaggiunto (tipicamente $P(D) = D$). La risposta più forte è quella data sopra, vale a dire che se se $P(D)$ è autoaggiunto allora $P$ è dispari.
Diversi dei presenti hanno formulato questo enunciato, ma al momento di dimostrarlo hanno dato per buono il seguente fatto: se $\langle P(d)\,u\,;\,v\rangle = 0$ per ogni $u, v \in X$ allora $P$ è il polinomio nullo. Questo fatto è effettivamente immediato senza la condizione che $u$ e $v$ devono appartenere a $X$, ma aggiungendo questa condizione non è poi così ovvio.

- Esercizio 5. Molti dei presenti hanno calcolato erroneamente i coefficienti $b_n^0$ del dato iniziale, ottenendo in particolare che questi sono dell'ordine di $1/n$ per $n \to +\infty$. Purtroppo quest'errore rende quasi impossibile proseguire con la risoluzione dell'esercizio, perché viene meno la convergenza uniforme per $t = 0$ della serie che definisce la soluzione.

- Esercizio 6. Molti dei presenti hanno avuto difficoltà a trovare la soluzione dell'equazione differenziale soddisfatta dai coefficienti della soluzione, vale a dire $\dot y = in^2 y + \beta_n \alpha(t)$, e diversi errori sono stati fatti anche nel caso in cui $\alpha(t) := e^{iat}$.

- Esercizio 7b). Molti dei presenti che hanno affrontato questo punto hanno dimostrato la continuità di $(a,b) \mapsto a*b(n)$ essenzialmente rifacendo la dimostrazione della continuità del prodotto in $\mathbb{R}$. Qualcuno ha usato il fatto (vero, ma non dimostrato) che un'applicazione bilineare da $X \times Y$ in $Z$ con $X, Y, Z$ spazi normati è continua se e solo se è continua in $(0,0)$. Quasi nessuno ha usato la continuità del prodotto scalare.

- Esercizio 7c). Alcuni dei presenti ha proposto la seguente elegante soluzione:
$$\begin{aligned}\widehat{fg}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,e^{-inx}\,dx &= \frac{1}{2\pi}\Big\langle g(x)\,;\,\overbrace{\overline{f(x)}\,e^{inx}}^{h(x)}\Big\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat g(k)\,\overline{\hat h(k)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat g(k)\,\hat f(n-k) = \hat f * \hat g(n)\end{aligned}$$
(nel terzo passaggio si applica l'identità di Parseval).
Si noti che questa dimostrazione non usa né il punto a) né il b), e il fatto che la convoluzione $\hat f * \hat g(n)$ sia ben definita per ogni $n$ segue direttamente dall'identità di Parseval. In effetti si può partire da qui per dimostrare poi a) e b).

1. Si verifica facilmente a partire dalla definizione di trasformata di Fourier che per ogni funzione $g$ in $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ vale
$$\widehat{g(-x)} = \hat{g}(-y) \quad \text{e} \quad \widehat{\overline{g(x)}} = \overline{\hat{g}(-y)} \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$
Utilizzando queste identità otteniamo che:
   (i) $g$ è dispari $\Leftrightarrow g(x) = -g(-x) \Leftrightarrow \hat{g}(y) = -\hat{g}(-y) \Leftrightarrow \hat{g}$ è dispari;
   (ii) $g$ è reale $\Leftrightarrow g(x) = \overline{g(x)} \Leftrightarrow \hat{g}(y) = \overline{\hat{g}(-y)}$.
(La freccia $\Leftarrow$ nella seconda coimplicazione in (i) e in (ii) segue dall'iniettività della trasformata di Fourier.) Infine, combinando queste catene di implicazioni otteniamo
   (iii) $g$ è reale e dispari $\Leftrightarrow \hat{g}$ è dispari e $\hat{g}(y) = \overline{\hat{g}(-y)} = -\overline{\hat{g}(y)}$, cioè $\hat{g}$ è immaginaria pura.

2. Indichiamo con $g$ la funzione gaussiana $g(x) := e^{-x^2/2}$. Per la linearità della trasformata di Fourier ci basta far vedere che data la trasformata di $x^n g$ appartiene a $\mathscr{G}_n$ per ogni $n$. Applicando $n$ volte la formula $\mathscr{F}(-ixf) = (\mathscr{F}f)'$ e ricordando che $\mathscr{F}g = \sqrt{2\pi}\, g$ otteniamo
$$\mathscr{F}(x^n g) = i^n\, \mathscr{F}((-ix)^n g) = \sqrt{2\pi}\, i^n\, D^n g\,. \tag{2}$$
Osserviamo ora che l'operatore di derivazione $D$ porta $\mathscr{G}_k$ in $\mathscr{G}_{k+1}$ per ogni $k$. Data infatti $f = pg$ con $p$ polinomio di grado $k$, si ha che
$$f' = (pg)' = p'g + pg' = p'g + p(-xg) = (p' - xp)g \tag{3}$$
e chiaramente $p' - xp$ è un polinomio di grado $k+1$. Da questo fatto segue che $D^n$ porta $\mathscr{G}_0$ in $\mathscr{G}_n$; in particolare $D^n g$ appartiene a $\mathscr{G}_n$, e quindi anche la trasformata di $x^n g$ appartiene a $\mathscr{G}_n$ (per via della (2)).

3. Si tratta solo di fare i conti:
$$\begin{aligned} d\omega &= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\,, \\ g^\# \omega &= (s_2^2)\,(s_1^2)\,(s_1s_2)\big(d(s_2^2) \wedge d(s_1^2) + d(s_1^2) \wedge d(s_1s_2) + d(s_1s_2) \wedge d(s_2^2)\big) \\ &= s_1^3 s_2^3 \big(4s_2s_1\, ds_2 \wedge ds_1 + 2s_1^2\, ds_1 \wedge ds_2 + 2s_2^2\, ds_1 \wedge ds_2\big) \\ &= 2s_1^3 s_2^3 (s_1 - s_2)^2\, ds_1 \wedge ds_2\,. \end{aligned}$$

4. Come prima cosa osserviamo che
$$f(x) := \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4}\,.$$
Per quanto visto a lezione sappiamo che
$$\mathscr{F}\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big) = \pi e^{-|y|}$$
e che $\frac{1}{2}\mathscr{F}(g(x/2)) = \hat{g}(2y)$ per ogni funzione $g$, per cui
$$\mathscr{F}\Big(\frac{1}{4+x^2}\Big) = \frac{1}{4}\mathscr{F}\Big(\frac{1}{1+(x/2)^2}\Big) = \frac{\pi}{2} e^{-2|y|}\,.$$
Mettendo insieme queste tre formule otteniamo quindi
$$f(y) = \pi e^{-|y|} - \frac{\pi}{2} e^{-2|y|}\,.$$

5. Consideriamo come spazio ambiente lo spazio $\mathbb{R}^{n\times n}_s$ delle matrici simmetriche $n \times n$, visto come sottospazio di $\mathbb{R}^{n\times n}$. Su $\mathbb{R}^{n\times n}_s$ consideriamo il prodotto scalare (e quindi la norma) indotta da $\mathbb{R}^{n\times n}$, vale a dire $\langle X\,;\,Y\rangle := \sum_{ij} X_{ij}Y_{ij}$.

   a) Osserviamo che $\mathbb{R}^{n\times n}_s$ ha dimensione $N = \frac{1}{2}n(n+1)$, e che l'insieme $S$ è definito dall'equazione $f(X) = n$ dove
$$f(X) := \mathrm{tr}(X^2) = \mathrm{tr}(X^tX) = \sum_{i,j} X_{ij}^2 = |X|^2\,.$$
Pertanto $S$ non è altro che la sfera centrata in 0 di raggio $\sqrt{n}$, ed è noto che questa è una superficie compatta, senza bordo, di classe $C^\infty$ e codimensione 1. In particolare la dimensione è $d = N - 1 = \frac{1}{2}(n+2)(n-1)$.

b) Siccome il gradiente di $f$ è $\nabla f(X) = 2X$, si ha che

$$\mathrm{Tan}(S, I) = \nabla f(I)^\perp = I^\perp = \{\text{matrici simmetriche con traccia nulla}\}\,.$$

6. a) L'insieme $S$ è definito dall'equazione $f(x, y) = 0$ dove $f(x, y) := y^6 + y^2 - |x|^4$. Osserviamo che $f$ è una funzione di classe $C^\infty$ (anzi polinomiale) definita su tutto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, e che il gradiente di $f$ è dato da

$$\nabla f(x, y) = \big( - 4|x|^2 x, 2y(3y^4 + 1)\big)\,,$$

e quindi si annulla (ovvero ha rango non massimo) se e solo se $x = 0$ e $y = 0$. Dunque $f(x, y) = 0$ è una buona equazione per $S$ relativamente all'aperto $U := \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0)\}$, e siccome $S' = S \cap U$, ne segue che $S'$ è una superficie senza bordo di classe $C^\infty$ e dimensione $n$.

b) Ci basta far vedere che l'equazione $y^6 + y^2 = t$ ammette almeno una soluzione $y$ per ogni $t \geq 0$, ovvero che l'immagine della funzione $\varphi(y) := y^6 + y^2$ contiene la semiretta $[0, +\infty)$. Ma questo segue immediatamente dal fatto che $\varphi$ è continua, assume il valore 0 per $y = 0$ e tende a $+\infty$ per $y \to \pm\infty$.

c) $S$ non è una superficie senza bordo in alcun intorno del punto $p := (0, 0)$. Supponiamo per assurdo che lo sia: allora lo spazio tangente a $S$ in $p$ è $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Dato infatti un qualunque cammino $\gamma = (\gamma_x, \gamma_y)$ di classe $C^1$ a valori in $S$ tale che $\gamma(0) = P$, per $t$ che tende a 0 si ha

$$|\gamma_x(t)|^4 = \gamma_y^6(t) + \gamma_y^2(t) \sim \gamma_y^2(t) \ \Rightarrow\ \gamma_y(t) = O(|\gamma_x(t)|^2) = O(t^2) \ \Rightarrow\ \dot\gamma_y(0) = 0\,,$$

e dunque $\dot\gamma(0)$ è un vettore in $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Questo dimostra che $\mathrm{Tan}(S, p)$ è contenuto in $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ e quindi, avendo dimensione $n$, coincide con $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.
Ora, il fatto che $\mathrm{Tan}(S, p) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ implica che la superficie $S$ si rappresenta in un intorno di $p$ come grafico di una funzione $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ma questo è in contraddizione con il fatto seguente: per ogni $(x, y)$ in $S$ si ha che anche $(x, -y)$ appartiene a $S$ (e $y \neq 0$ per $x \neq 0$).

7. a) Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la mappa definita da

$$\varphi(x_1, x_2) := (|x_1|, |x_2|)\,.$$

Allora $S := \varphi^{-1}(C)$, e quindi l'insieme $S$ è chiuso perché $C$ è chiuso e $\varphi$ è continua, ed è limitato perché $C$ è limitato e $\varphi(x)$ tende all'infinito quando $x$ tende all'infinito. Dunque $S$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, e quindi è compatto.
Per far vedere che $S$ è una superficie senza bordo di classe $C^1$ partiamo dal fatto che $C$ è una curva regolare senza bordo e quindi può essere ricoperta da una famiglia di aperti $U$ contenuti in $Q$ in $C$ cui è descritta da un'equazione del tipo $f(y) = 0$ con $f : U \to \mathbb{R}$ funzione di classe $C^1$ con gradiente non nullo in $U$.
Ma allora l'insieme $S$ è ricoperto dagli aperti $V := \varphi^{-1}(U)$ e in questi è descritto dall'equazione $f(\varphi(x)) = 0$; per concludere la dimostrazione basta quindi far vedere che $f \circ \varphi$ è una funzione di classe $C^1$ con gradiente non nullo su $V$. Che questa funzione si dia classe $C^1$ segue dal fatto che $f$ è di classe $C^1$ su $U$, che $\varphi$ è di classe $C^\infty$ sull'aperto

$$A := \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \neq 0\} = \varphi^{-1}(Q)\,,$$

e che infine ciascun $V$ è contenuto in $A$ (perché $U$ è contenuto in $Q$). Inoltre

$$\nabla(f \circ \varphi)(x) = \Big(\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{x_1}{|x_1|}, \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{x_2}{|x_2|}\Big)$$

dove le derivate di $f$ sono calcolate in $y := \varphi(x)$, e quindi $\nabla(f \circ \varphi) \neq 0$ perché $\nabla f \neq 0$.

b) L'osservazione chiave è che per ogni $y = (y_1, y_2) \in Q$ l'insieme $\varphi^{-1}(y)$ è il prodotto delle due circonferenze centrate in 0 di raggi $y_1$ e $y_2$ rispettivamente, e in particolare ne possiamo parametrizzare i punti come

$$(y_1 \cos\theta_1, y_1 \sin\theta_1, y_2 \cos\theta_2, y_2 \sin\theta_2) \quad \text{con } 0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi.$$

Pertanto, data una parametrizzazione $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \to C$, una parametrizzazione di $S$ è la mappa $g : [a, b] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to S$ data da

$$g(t, \theta_1, \theta_2) := (\gamma_1 \cos\theta_1, \gamma_1 \sin\theta_1, \gamma_2 \cos\theta_2, \gamma_2 \sin\theta_2)\,. \tag{4}$$

In particolare se $\gamma$ è bigettiva da $[a, b)$ a $C$ allora $g$ è bigettiva da $[a, b) \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ a $S$.

c) Calcoliamo il volume di $S$ applicando la formula dell'area alla parametrizzazione $g$. Per farlo dobbiamo prima calcolare lo Jacobiano di $g$: usando la formula

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \dot\gamma_1 \cos\theta_1 & -\gamma_1 \sin\theta_1 & 0 \\ \dot\gamma_1 \sin\theta_1 & \gamma_1 \cos\theta_1 & 0 \\ \dot\gamma_2 \cos\theta_2 & 0 & -\gamma_2 \sin\theta_2 \\ \dot\gamma_2 \sin\theta_2 & 0 & \gamma_2 \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$|Jg| = \big[\det((\nabla g)^t\, \nabla g)\big]^{1/2} = \left[\det \begin{pmatrix} \dot\gamma_1^2 + \dot\gamma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2^2 \end{pmatrix}\right]^{1/2} = \gamma_1\gamma_2 |\dot\gamma| \,,$$

e quindi, ricordando che $g$ è una bigezione da $E := [a,b) \times [0,2\pi) \times [0,2\pi)$ in $S$,

$$\sigma_3(S) = \int_E Jg\, dt\, d\theta_1\, d\theta_2 = (2\pi)^2 \int_a^b \gamma_1\gamma_2|\dot\gamma|\, dt = (2\pi)^2 \int_C y_1 y_2\, d\sigma_1(y)\,.$$

8. a) Usando le note formule

$$\mathscr{F}(-ixu) = \dot{\hat u} \quad \text{e} \quad \mathscr{F}(\dot u) = iy\hat u$$

otteniamo

$$\mathscr{F}(x^2 u - \ddot u) = -\mathscr{F}((-ix)^2 u) - \mathscr{F}(\ddot u) = -\ddot{\hat u} - (iy)^2 \hat u = y^2 \hat u - \ddot{\hat u}$$

da cui segue immediatamente la tesi.

b) Poniamo $g(x) := e^{-x^2/2}$ come nell'esercizio 2. Data allora una funzione $u$ della forma $u = pg$, la formula (3) diventa $\dot u = D(pg) = (\dot p - xp)g$ e applicando due volte questa formula otteniamo

$$\ddot u = D((\dot p - xp)g) = \big(D(\dot p - xp) - x(\dot p - xp)\big)g = (\ddot p - 2x\dot p - p + x^2 p)g\,;$$

quindi l'equazione (1) diventa

$$\ddot p = 2x\dot p - (\lambda - 1)p\,. \tag{5}$$

Dobbiamo dunque dimostrare che se $\lambda = 2n+1$ esiste uno ed un solo polinomio monico $p$ di grado $n$ che soddisfa (5). Scrivendo $p$ come $\sum a_k x^k$, i due termini della (5) diventano

$$\ddot p = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k\,,$$

$$2x\dot p - 2np = \sum_{k=0}^{n} 2(k-n) a_k x^k\,,$$

e quindi l'equazione (5) più la condizione $a_n = 1$ si traducono nella seguente relazione ricorsiva "a scendere" per i coefficienti $a_k$:

$$\begin{cases} a_n = 1\,, \\ a_{n-1} = 0\,, \\ a_k = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2(k-n)} a_{k+2} \quad \text{per } k = n-2, n-1, \dots, 0. \end{cases}$$

Dunque i coefficienti $a_k$ sono univocamente determinati, e la dimostrazione è conclusa. Anche se non ne abbiamo bisogno, scriviamo esplicitamente gli $a_k$:

$$a_{n-k} = \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ dispari,} \\ \dfrac{(-1)^{k/2}\, n!}{2^{k/2}\,(k/2)!\,(n-k)!} & \text{per } k \text{ pari.} \end{cases}$$

c) Per quanto visto nell'esercizio 2 la trasformata $\hat u_n$ si scrive come prodotto di un polinomio di grado $n$ per $g$, e in particolare si scrive come $\hat u_n = cqg$ con $c$ costante e $q$ polinomio *monico* di grado $n$. Inoltre per quanto visto al punto a) di questo esercizio $\hat u_n$ risolve l'equazione (1) con $\lambda = 2n+1$ e quindi lo stesso vale per $\hat u/c = qg$. Ma allora, per il risultato di unicità dimostrato al punto c), $qg$ coincide con $u_n$ e dunque $\hat u_n = cqg = cu_n$.
(Per completare questa dimostrazione bisognerebbe giustificare tutti i passaggi "formali" fatti nella soluzione di a), ma questo non è difficile.)

d) Sia $X$ il sottospazio di $L^2(\mathbb{R})$ formato delle funzioni di $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe $C^2$ tali che

$$u = O(1/x^3)\,,\ \dot{u}, \ddot{u} = O(1/x) \text{ per } x \to \pm\infty, \tag{6}$$

e sia $T : X \to L^2$ l'operatore dato da

$$T : u \mapsto x^2 u - \ddot{u}$$

(non è difficile vedere usando la condizione (6) che $T$ porta effettivamente $X$ in $L^2$).
Le funzioni $u_n$ appartengono tutte a $X$ e siccome soddisfano l'equazione (1) sono autovettori di $T$ corrispondenti ad autovalori *distinti*. Pertanto sono a due a due ortogonali in $L^2(\mathbb{R})$ perché $T$ è un operatore autoaggiunto. Verifichiamo quest'ultima affermazione: date $u, v \in X$ si ha

$$\begin{aligned}
\langle Tu\,;\, v\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 u)\, \bar{v}\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{u}\, \bar{v}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2u\, \overline{(x^2 v)}\, dx - \Big|\dot{u}\, \bar{v}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}\, \overline{\dot{v}}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2u\, \overline{(x^2 v)}\, dx - \Big|\dot{u}\, \bar{v}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \Big|u\, \overline{\dot{v}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u\, \overline{\ddot{v}}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2u\, \overline{(x^2 v)}\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} u\, \overline{\ddot{v}}\, dx = \langle u\,;\, Tv\rangle\,.
\end{aligned}$$

(Nel secondo e nel terzo passaggio abbiamo integrato per parti il secondo dei due integrali; il secondo e il terzo addendo nella terza riga vanno intesi come limiti, e sono nulli per via della condizione (6); gli integrali in questa catena di uguaglianze sono ben definiti sempre per via della (6).)

## COMMENTI

- Esercizio 1. Ad essere precisi, dire che una funzione $g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ è dispari significa che $g(x) = -g(-x)$ per *quasi* ogni $x$. Di conseguenza la catena di implicazioni (i) nella dimostrazione data sopra andrebbe scritta come segue: $g$ è dispari (in senso $L^1$) $\Leftrightarrow$ $g(x) = -g(-x)$ per quasi ogni $x$ $\Leftrightarrow$ $\hat{g}(y) = -\hat{g}(-y)$ per ogni $y$ $\Leftrightarrow$ $\hat{g}$ è dispari. Un discorso analogo vale per la nozione di funzione reale in $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e per la catena di implicazioni (ii).

- Esercizio 4. È anche possibile calcolare la trasformata di $f$ direttamente a partire dalla definizione, usando il metodo di residui.

- Esercizio 5a). Ci si può chiedere se l'aver scelto di vedere $S$ come sottoinsieme dello spazio delle matrici simmetriche invece che di quello di tutte le matrici sia rilevante ai fini del risultato. La risposta è no: se $S$ un sottoinsieme di $V$ e $V$ è sottospazio vettoriale dello spazio $W$, allora $S$ è una superficie in $V$ se e solo se è una superficie in $W$ (questo è evidente usando la caratterizzazione delle superfici in termini di parametrizzazioni).

- Esercizio 6. Si può dare una descrizione molto precisa della struttura di $S$: sia $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ la funzione (bigettiva) data da $\varphi(y) := y^6 + y^2$, e sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione data da $g(x) = \varphi^{-1}(|x|)$; allora $S$ è l'unione dei grafici delle funzioni $g$ e $-g$. Essendo $g$ strettamente positiva ovunque tranne che in 0, dove vale 0, i due grafici hanno in comune solo il punto $p = (0,0)$, e quindi $S$ è topologicamente equivalente all'unione di due copie di $\mathbb{R}^n$ modulo l'identificazione delle origini.
  Alcuni dei presenti sono partiti da qui per dimostrare che $S$ non è una superficie neanche in senso topologico. Se infatti lo fosse, esisterebbe un intorno $U$ di $p = (0,0)$ in $S$ che è omeomorfo a una palla aperta $B$ di $\mathbb{R}^n$. Di conseguenza $U \setminus \{p\}$ è omeomorfo a $B$ meno un punto, ma questo è assurdo perché $U \setminus \{p\}$ ha *almeno due* componenti connesse, mentre $B$ meno un punto ne ha una sola. (Quanto detto vale per $n > 1$, ma un discorso simile si può fare anche per $n = 1$).

- Esercizio 7a). Per dimostrare che $S$ è compatto si può usare il fatto che $S$ è l'immagine secondo la mappa continua $g$ definita in (4) del compatto $[a,b] \times [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.

- Esercizio 7a). Molti dei presenti hanno cercato di dimostrare che $S$ è una superficie esibendo delle buone parametrizzazioni (locali) di $S$, e per la precisione hanno costruito queste parametrizzazioni $g$ a partire da delle buone parametrizzazioni (locali) $\gamma$ di $C$ tramite la formula (4). Le parametrizzazioni così costruite sono effettivamente delle buone parametrizzazioni, ma quasi nessuno dei presenti ha dimostrato in modo chiaro e convincente che sono degli omeomorfismi (qualcuno ha cercato di ottenerlo, sotto sotto, come conseguenza di questo "principio" generale, che però è falso: se $g$ è una mappa continua e surgettiva da un compatto in un compatto ed è localmente iniettiva allora è localmente un omeomorfismo).

- Esercizio 7d). Qualcuno ha cercato di ottenere l'ortogonalità delle funzioni $u_n$ a partire dal fatto che sono autovettori della trasformata di Fourier. Questo approccio presenta due problemi: il primo è che la trasformata di Fourier non è autoaggiunta (ma lo è sulle funzioni pari e a mano di un fattore $i$ lo è anche sulle dispari, per cui la cosa si sistema), il secondo è che gli autovalori della serie di Fourier sono solo quattro, e quindi le funzioni $u_n$ non possono corrispondere tutte ad autovalori diversi.

- Esercizio 8. A meno di un fattore moltiplicativo i polinomi $p_n$ coincidono con i polinomi di Hermite, e le funzioni $u_n$ con le funzioni di Hermite. In particolare queste ultime, opportunamente rinormalizzate, formano una base di Hilbert di $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ che diagonalizza la trasformata di Fourier.

1. Calcoliamo i coefficienti di Fourier complessi di $f$: usando il fatto che $f(x) = |x|$ è una funzione pari e che $e^{-inx} = \cos(nx) - i\sin(nx)$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$ otteniamo che

$$\begin{aligned} c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, e^{-inx}\, dx &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\cos(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi n}\Big| x\,\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi n^2}\Big|\cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2} & \text{per } n \text{ dispari,} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre $c_0 = \pi/2$, e quindi la serie di Fourier complessa di $f$ è

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n \text{ dispari}}} \frac{2}{\pi n^2} e^{inx}\,;$$

da questa si ottiene subito la serie di Fourier reale:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ dispari}}} \frac{4}{\pi n^2} \cos(nx)\,.$$

2. Si tratta di un calcolo diretto: $\omega \wedge \omega = 2\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.

3. Ricordo la formula per l'integrale di una funzione radiale $g(|x|)$ definita su $\mathbb{R}^n$ (che dovrebbe essere nota almeno per $n = 2$):

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(|x|)\, dx = nc_n \int_0^{+\infty} g(\rho)\,\rho^{n-1}\, d\rho\,,$$

dove $c_n$ è il volume della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$. Applicando questa formula otteniamo

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{ap}}{(1+|x|^b)^p}\, dx = nc_n \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{ap}}{(1+\rho^b)^p}\,\rho^{n-1} d\rho\,,$$

ma l'integranda nel secondo integrale è asintoticamente equivalente a $\rho^{p(a-b)+n-1}$ per $\rho \to +\infty$ e quindi ha integrale finito se e solo se $p(a-b) + n - 1 < -1$, ovvero

$$p(b-a) > n\,.$$

Si verifica a parte che per $p = +\infty$ gli $a, b$ cercati sono quelli per cui $b \geq a$.

4. a) Dato $x_0 \in S$, sappiamo che per $i = 1, 2$ esiste $U_i$ intorno aperto di $x_0$ tale che $S_i$ è descritta in $U_i$ dall'equazione $f_i(x) = 0$ con $f_i : U_i \to \mathbb{R}^{n-d_i}$ funzione regolare tale che $df_i(x)$ ha rango massimo per ogni $x \in S \cap U_i$.
Posto allora $U := U_1 \cap U_2$ si ha che l'intersezione $S$ è descritta in $U$ dall'equazione $f(x) = 0$ dove $f : U \to \mathbb{R}^{n-d_1} \times \mathbb{R}^{n-d_2} \simeq \mathbb{R}^{n-d}$ e la mappa definita da

$$f(x) := (f_1(x), f_2(x))\,.$$

Non ci resta che far vedere che $f$ è una buona equazione per $S$ in $U$, ovvero che $df(x)$ ha rango massimo, cioè $n - d$, per ogni $x \in S \cap U$. Questo equivale a dire che $\ker df(x)$ ha dimensione $d$, e segue dal fatto che

$$\ker df(x) = \ker df_1(x) \cap \ker df_2(x) = \operatorname{Tan}(S_1, x) \cap \operatorname{Tan}(S_2, x)$$

e che $\operatorname{Tan}(S_1, x) \cap \operatorname{Tan}(S_2, x)$ ha dimensione $d$ per ipotesi.
b) Consideriamo due superfici $S_1$ e $S_2$ di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$ che hanno in comune solo il punto $p$, e in questo punto sono tangenti. Allora $\operatorname{Tan}(S_1, x) \cap \operatorname{Tan}(S_2, x)$ ha dimensione due per $x = p$, cioè in ogni punto di $S$, ma $S$ non è una superficie di dimensione due.

5. a) Usando il fatto che $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ otteniamo

$$\begin{aligned}\sin^3 x = \Big(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\Big)^3 &= \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{3ix}}{-8i} \\ &= \frac{3}{4}\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} - \frac{1}{4}\,\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)\,.\end{aligned}$$

b) Procedendo come al solito cerchiamo una soluzione $u$ della forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(t)\,\sin(nx)\,.$$

L'equazione $u_t = u_{xx} + 2tu$ si traduce allora nel fatto che i coefficienti $\gamma_n$ soddisfano l'equazione differenziale

$$\dot y = (-n^2 + 2t)y$$

la cui soluzione generale è $y = ae^{t^2 - n^2 t}$, mentre la condizione iniziale $u(0,x) = \sin^3 x$ si traduce nel fatto che i coefficienti $\gamma_n(0)$ coincidono con i coefficienti della serie in seni di $\sin^3 x$ (calcolata al punto precedente). Dunque

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}e^{t^2 - t} & \text{per } n = 1, \\ -\frac{1}{4}e^{t^2 - 9t} & \text{per } n = 3, \\ 0 & \text{per } n \neq 1, 3, \end{cases}$$

e pertanto la soluzione $u$ *dovrebbe* essere data da

$$u(t,x) = \frac{3}{4}e^{t^2 - t}\sin x - \frac{1}{4}e^{t^2 - 9t}\sin(3x)\,.$$

In effetti $u$ è una funzione di classe $C^\infty$ su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, soddisfa chiaramente sia la condizione iniziale che le condizioni agli estremi del problema di partenza, e soddisfa l'equazione differenziale $u_t = u_{xx} + 2tu$ perché la soddisfano separatamente sia $e^{t^2 - t}\sin(x)$ che $e^{t^2 - 9t}\sin(3x)$.

6. a) Siccome $[Tu(x)]' = (\dot u(-x))' = -\ddot u(-x)$ si ha che $[T^2 u](x) = [Tu]'(-x) = -\ddot u(x)$.

b) Dati $u, v \in X$ si ha che

$$\begin{aligned}\langle Tu\,;\,v\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \dot u(-x)\,v(x)\,dx \\ &= \Big| -u(-x)\,v(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -u(-x)\,\dot v(x)\,dx \\ &= -u(-\pi)\,v(\pi) + u(\pi)\,v(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,\dot v(-t)\,dt = \langle u\,;\,Tv\rangle\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio abbiamo integrato per parti, nel terzo abbiamo applicato il cambio di variabile $t = -x$ nell'integrale, e nel quarto abbiamo usato il fatto che $u$ e $v$ appartengono a $X$ per far vedere che $-u(-\pi)\,v(\pi) + u(\pi)\,v(-\pi) = 0$).

c) Per cominciare cerchiamo tutte le funzioni $u$ di classe $C^2$ su $[-\pi,\pi]$ tali che $Tu = \lambda u$ (essendo $T$ autoaggiunto su $X$ ci limitiamo al caso $\lambda$ reale). Osserviamo che se $u$ soddisfa $Tu = \lambda u$ allora $T^2 u = \lambda^2 u$, quindi $u$ risolve l'equazione differenziale $\ddot u = -\lambda^2 u$, e pertanto deve essere della forma

$$u(x) = a\,\cos(\lambda x) + b\,\sin(\lambda x) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo adesso che per una funzione $u$ di questo tipo si ha

$$[Tu](x) = a\lambda\,\sin(\lambda x) + b\lambda\,\cos(\lambda x)$$

e quindi $Tu = \lambda u$ se e solo se $a = b$. Inoltre $u$ appartiene a $X$, cioè soddisfa $u(\pi) = u(-\pi)$, se e solo se $b = 0$ oppure $\sin(\lambda\pi) = 0$, vale a dire $\lambda \in \mathbb{Z}$. Ricapitolando, l'equazione $Tu = \lambda u$ ammette soluzioni non banali $u \in X$ se e solo se $\lambda \in \mathbb{Z}$, e in tal caso $u$ è della forma

$$u(x) = a\big(\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x)\big) \quad \text{con } a \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(Questa formula vale anche per $\lambda = 0$, ma per questo caso va fatto un calcolo a parte: le funzioni $u$ che soddisfano $T^2 u = 0$ sono della forma $u(x) = ax + b$ e tra queste quelle che soddisfano $Tu = 0$ e appartengono a $X$ sono le funzioni costanti.)

Osserviamo infine che la funzione $u$ in (1) ha norma 1 in $L^2(-\pi,\pi)$ se $a = \pm 1/\sqrt{2\pi}$. Ricordando quindi che due autovettori di un operatore autoaggiunto corrispondenti ad autovalori diversi sono necessariamente ortogonali, otteniamo che le funzioni

$$u_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(\cos(nx)+\sin(nx)\big) \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

formano un sistema ortonormale in $L^2(-\pi,\pi)$. Per far vedere che questo sistema è completo, ovvero è una base di Hilbert, basta osservare che lo spazio vettoriale da esso generato contiene le funzioni $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ con $n = 0, 1, \dots$ e quindi contiene i polinomi trigonometrici reali, che sappiamo già essere densi in $L^2(-\pi,\pi)$.

7. a) Facciamo vedere che $X$ contiene lo spazio $C^1_c$ delle funzioni $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe $C^1$ e con supporto compatto (sottospazio di $C_0$ che sappiamo essere denso). Abbiamo visto a lezione che la trasformata $\hat v$ di tali $v$ appartiene a $L^1 := L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e quindi lo stesso vale per l'antitrasformata $\check v$ perché $\check v(x) = \hat v(-x)$. Pertanto, posto

$$u := \frac{1}{2\pi}\check v$$

si ha che $u$ appartiene a $L^1$ e che

$$\hat u = \frac{1}{2\pi}\hat{\check v} = v$$

e dunque $v$ appartiene a $X$. (Nel secondo passaggio abbiamo usato che $\mathscr{F}(\check v) = 2\pi\, v$ per ogni $v \in L^1$ tale che $\check v \in L^1$; questa formula è una conseguenza immediata del teorema di inversione per la trasformata di Fourier e dell'identità $\check v(x) = \hat v(-x)$).

b) Basta osservare che se $v = \hat u$ con $u \in L^1$ allora

$$*^n u := \underbrace{u * u * \cdots * u}_{n \text{ volte}}$$

appartiene a $L^1$ e applicando $n$ volte la formula $\mathscr{F}(u_1 * u_2) = \hat u_1\, \hat u_2$ si ottiene

$$\widehat{*^n u} = (\hat u)^n = v^n\,. \tag{2}$$

c) Lo serie di Taylor in 0 di una funzione olomorfa $f$ definita su tutto $\mathbb{C}$ ha raggio di convergenza infinito e coincide con la funzione stessa. Scriviamo dunque $f$ come

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$$

(la serie non ha termine di grado zero perché $f(0) = 0$). Data dunque $v := \hat u \in X$, ricordando la formula (2) otteniamo che

$$f \circ v = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, v^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, \widehat{*^n u}$$

e dunque ci aspettiamo che

$$f \circ v = \hat w \quad \text{con} \quad w := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n *^n u\,.$$

Per far vedere che $f \circ v$ appartiene a $X$ dobbiamo quindi *dimostrare* che $w$ appartiene effettivamente a $L^1$ e che vale l'identità $f \circ v = \hat w$.

Per dimostrare che $w$ appartiene a $L^1$ facciamo vedere che la serie che definisce $w$ converge in norma $L^1$: partendo dalla stima $\|u_1 * u_2\|_1 \le \|u_1\|_1 \|u_2\|_1$ otteniamo che $\|*^n u\| \le \|u\|_1^n$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|a_n *^n u\|_1 \le \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\, \|u\|_1^n\,; \tag{3}$$

osserviamo ora che il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum |a_n| z^n$ è uguale a quello della serie $\sum a_n z^n$, cioè $+\infty$, e dunque la seconda serie in (3) converge ad un numero finito.

Dimostriamo ora che $f \circ v = \hat{w}$. Partendo dalla (2) otteniamo che per ogni $m = 1, 2, \dots$ si ha

$$\sum_{n=1}^{m} a_n v^m = \mathscr{F}\Big(\sum_{n=1}^{m} a_n *^n u\Big),$$

e passando al limite per $m \to +\infty$, il termine a sinistra dell'uguale converge puntualmente a $f \circ v$; d'altra parte l'argomento della serie di Fourier a destra dell'uguale converge a $w$ in norma $L^1$ (per quanto visto sopra), e siccome la serie di Fourier è continua come mappa da $L^1$ in $C_0$, il termine a destra dell'uguale converge a $\hat{w}$, e la dimostrazione è completa.

8. Otteniamo l'enunciato a) come caso particolare del c).

b) Osserviamo per cominciare che una matrice $X$ appartiene a $S$ se e solo se il suo polinomio caratteristico si annulla in $\lambda_i$ per ogni $i$; questo significa che $S$ è definito dall'equazione $f(X) = 0$ dove $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^n$ è data da

$$f_i(X) := \det(\lambda_i I - X) \quad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

Per dimostrare che $S$ è una superficie di classe $C^\infty$ senza bordo in un intorno di $X \in S$ ci basta quindi far vedere che $df(X)$ ha rango $n$. Per calcolare $df(X)$ usiamo il seguente fatto (visto a lezione): se $g(X) := \det X$ allora $dg(X) : H \mapsto \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(X)\,H)$ dove $\operatorname{adj}(X)$ è l'aggiunta di $X$, vale a dire la trasposta della matrice dei cofattori di $X$, e ricordando che $f_i(X) = g(\lambda_i I - X)$ otteniamo

$$df_i(X) : H \mapsto -\operatorname{tr}\big(\operatorname{adj}(\lambda_i I - X)\,H\big).$$

Applichiamo ora questa formula con $X := \Lambda$: siccome $\lambda_i I - \Lambda$ è la matrice diagonale che soddisfa $(\lambda_i I - X)_{jj} = \lambda_i - \lambda_j$ per $j = 1, \dots, n$, i cofattori di questa matrice sono tutti nulli tranne quello di indici $ii$, che vale

$$a_i := \prod_{j\neq i} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

Pertanto $df_i(\Lambda) : H \mapsto -a_i H_{ii}$ e quindi

$$df(\Lambda) : H \mapsto (-a_1 H_{11}, \dots, -a_n H_{nn});$$

in particolare $df(\Lambda)$ è chiaramente surgettivo su $\mathbb{R}^n$, ovvero ha rango $n$.

c) Osserviamo che date $A$ e $X$ matrici $n \times n$ con $A$ invertibile, il polinomio caratteristico di $A^{-1}XA$ e quello di $X$ coincidono, e siccome $f(X)$ è il vettore la cui coordinata $i$-esima corrisponde al valore del polinomio caratteristico di $X$ in $\lambda_i$, abbiamo che $f(A^{-1}XA) = f(X)$. Dunque l'automorfismo lineare di $\mathbb{R}^{n\times n}$ dato da $\Psi_A(X) := A^{-1}XA$ soddisfa $f \circ \Psi_A = f$ e porta l'insieme $S$ in sé, e anzi è un omeomorfismo di $S$ in sé.
Usiamo quest'osservazione per far vedere che $f(X) = 0$ è una buona equazione per $S$ in un intorno di una qualunque matrice $X_0 \in S$. Poiché gli autovalori $\lambda_i$ di $X_0$ sono tutti distinti, la forma canonica di Jordan di $X_0$ è $\Lambda$ e quindi possiamo scegliere $A$ tale che $A^{-1}XA = \Lambda$, vale a dire che $\Psi_A$ porta $X_0$ in $\Lambda$. Quindi il fatto che $f(X) = 0$ sia una buona equazione per $S$ in un intorno di $\Lambda$ (dimostrato al punto precedente) implica che $f \circ \Psi_A(X) = 0$ è una buona equazione per $S$ in un intorno di $X_0$, e abbiamo già osservato che $f \circ \Psi_A = f$.

## COMMENTI

- Esercizio 1. Sorprendentemente, diversi dei presenti hanno sbagliato il passaggio dalla serie di Fourier complessa a quella reale (o viceversa).

- Esercizio 6. Alcuni dei presenti hanno sbagliato a calcolare $T^2$, e di conseguenza hanno impostato erroneamente la ricerca degli autovettori di $T$.

- Esercizio 8c). Una dimostrazione alternativa la si ottiene facendo vedere che $df(X_0)$ ha rango $n$ per ogni $X_0 \in S$. Preso infatti $A$ tale che $\Psi_A(X_0) = \Lambda$ e derivando l'identità $f(X) = f(\Psi_A(X))$ in $X_0$ otteniamo
$$df(X_0) = df(\Psi_A(X_0)) \circ \Psi_A = df(\Lambda) \circ \Psi_A,$$

e siccome $\Psi_A$ è un automorfismo di $\mathbb{R}^{n\times n}$, il rango di $df(X_0)$ coincide con quello di $df(\Lambda)$, che in precedenza abbiamo dimostrato essere uguale a $n$.

1. Scriviamo $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ con $\omega_1 := dx_1 \wedge dx_2$, $\omega_2 := dx_3 \wedge dx_4$, $\omega_3 := dx_5 \wedge dx_6$, e svolgiamo il prodotto
$$\wedge^3 \omega = (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \wedge (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \wedge (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$$
usando la proprietà distributiva e il fatto che $\omega_i \wedge \omega_i = 0$ e $\omega_i \wedge \omega_j = \omega_j \wedge \omega_i$ per ogni $i, j$. Così facendo l'unico prodotto non nullo è $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$ con tutte le sue permutazioni, che sono sei. Pertanto
$$\wedge^3 \omega = 6\, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = 6\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_6 \,.$$

2. Usando il fatto che $\hat{u}(y) = \pi e^{-|y|}$ e le ben note formule $\widehat{u_1 * u_2} = \hat{u}_1 \hat{u}_2$ e $\widehat{\sigma_\delta u} = \hat{u}(\delta y)$ otteniamo
$$\hat{v} = (\hat{u})^n = \pi^n e^{-n|y|} = \pi^{n-1} \hat{u}(ny) = \pi^{n-1} \widehat{\sigma_n u}$$
da cui segue, per l'iniettività della trasformata di Fourier su $L^1(\mathbb{R})$, che
$$v(x) = \pi^{n-1} \sigma_n u(x) = \frac{\pi^{n-1}}{n} \, \frac{1}{1 + (x/n)^2} = \frac{\pi^{n-1} n}{n^2 + x^2} \,.$$

3. Prese $u, v \in X$ si ha che
$$\begin{aligned} \langle Tu\,;\, v\rangle &= \int_0^1 \ddot{u}(xv)\, dx + \int_0^1 \dot{u}(av)\, dx \\ &= \int_0^1 u(xv)''\, dx - \int_0^1 u(av)'\, dx \\ &= \int_0^1 u\big(x\ddot{v} + (2-a)\dot{v}\big) dx = \langle u\,;\, x\ddot{v} + (2-a)\dot{v}\rangle \end{aligned}$$
(nel secondo passaggio abbiamo integrato due volte per parti il primo integrale e una volta il secondo; i termini "di bordo" delle varie integrazione per parti sono nulli per via del fatto che $u$ e $v$ sono nulle in 0 e 1). Da questa formula segue che l'aggiunta di $T$ è
$$T^* u = x\ddot{u} + (2-a)\dot{u}$$
e quindi
$$(T - T^*)u = 2(a-1)\dot{u} \,.$$
A questo punto è evidente che $T$ è autoaggiunto se e solo se $a = 1$ (per il "solo se" basta esibire una funzione $u \in X$ tale che $\dot{u} \not\equiv 0$, per esempio $u(x) := \sin(\pi x)$).

4. Poiché la funzione $f$ è pari, i coefficienti dei seni nella corrispondente serie di Fourier reale sono tutti nulli. Quelli dei coseni sono invece dati dati da
$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x\, \cos(nx)\, dx \\ &= \operatorname{Re} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x\, e^{inx}\, dx = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi} e^{i(n+1)x} - e^{i(n-1)x}\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left| -\frac{e^{i(n+1)x}}{n+1} + \frac{e^{i(n-1)x}}{n-1} \right|_0^{\pi} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{per } n \text{ pari,} \\ 0 & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$
(Attenzione, va fatto un conto separato per $a_0$, che vale $2/\pi$, e per $a_1$, che vale $= 0$.)
Pertanto la serie di Fourier reale di $f$ è
$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{4}{\pi(1-n^2)} \cos(nx) \,,$$
e di conseguenza la serie di Fourier complessa è
$$f(x) = \sum_{n=0,\pm 2,\pm 4,\dots} \frac{2}{\pi(1-n^2)} e^{inx} \,.$$

5. Impostiamo il problema scrivendo l'incognita $u$ come serie di Fourier (complessa) nella variabile $x$, vale a dire

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t)\, e^{inx}\,.$$

Così facendo l'equazione $u_t = u_{xxx}$ si traduce in $\dot c_n = -in^3 c_n$ (per ogni $n \in \mathbb{Z}$) mentre la condizione iniziale $u(\cdot) = u_0(\cdot)$ si traduce in $c_n(0) = c_n^0$ dove $c_n^0$ sono i coefficienti di Fourier di $u_0$. Sulla base di ciò si ottiene

$$c_n(t) = c_n^0 e^{-in^3 t} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z},$$

e quindi una soluzione $u$ del problema (P) *dovrebbe* essere

$$u(t,x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_n^0\, e^{i(nx-n^3t)}}_{u_n}\,. \tag{1}$$

a) Se $u_0(x) := 2\cos x = e^{ix} - e^{-ix}$ allora $c_n^0 = 1$ per $n = \pm 1$ e $c_n^0 = 0$ altrimenti, e quindi la (1) diventa

$$u(t,x) := e^{i(x-t)} + e^{i(-x+t)} = 2\cos(x-t)\,,$$

ed è immediato verificare che questa funzione è effettivamente una soluzione di (P).

b) Come prima cosa facciamo vedere che la funzione $u$ data in (1) è di classe $C^\infty$ su tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Per questo basta dimostrare la convergenza totale della serie delle derivate parziali (di un dato ordine) degli addendi $u_n$. Fissati dunque $h, k$ interi positivi o nulli osserviamo che

$$\partial_t^h \partial_x^k u_n = (-in^3)^h (in)^k c_n^0\, e^{i(nx-n^3t)}$$

e quindi

$$\|\partial_t^h \partial_x^k u_n\|_\infty = |n|^{3h+k} |c_n^0|\,.$$

Poiché $u_0$ è una funzione di classe $C^\infty$ si ha che $c_n^0$ è trascurabile rispetto a qualunque potenza (negativa) di $n$ per $n \to \pm\infty$ e insieme alla formula precedente questo garantisce la convergenza totale della serie delle derivate parziali $\partial_t^h \partial_x^k u_n$.

Osserviamo ora che $u$ è ovviamente $2\pi$-periodica in $x$ e quindi soddisfa le condizioni agli estremi di (P), e soddisfa la condizione iniziale per costruzione. Infine $u$ soddisfa l'equazione $u_t = u_{xxx}$ perché la soddisfano gli addendi $u_n$ (possiamo scambiare la serie con le derivate parziali per via della convergenza dimostrata sopra).

c) Osserviamo innanzitutto che la dimostrazione dell'unicità vista a lezione per altre equazioni in questo caso non funziona. La ragione è che nel problema (P) non è stata imposta la condizione agli estremi

$$u_{xx}(\cdot,\pi) = u_{xx}(\cdot,-\pi)\,, \tag{2}$$

data dunque un'eventuale soluzione $u$ che non soddisfa questa condizione, i coefficienti di Fourier di $u_{xxx}$ non sono uguali a $-in^3 c_n$, e quindi non si ha che $\dot c_n = -in^3 c_n$, come invece è stato dato per scontato sopra.

In effetti la soluzione trovata al punto b) oltre alle condizioni agli estremi in (P) soddisfa anche la (2), ed è l'unica soluzione di (P) con questa ulteriore proprietà.

Quanto appena detto suggerisce che in generale (P) non abbia un'unica soluzione, e un modo per dimostrarlo è risolvere (P) aggiungendo una condizione agli estremi incompatibile con la (2), per esempio

$$u_{xx}(\cdot,\pi) - t = u_{xx}(\cdot,-\pi) + t\,. \tag{3}$$

Possiamo risolvere questo nuovo problema tramite il cambio di variabile

$$u = v + \varphi \quad \text{dove} \quad \varphi(t,x) := \frac{1}{6\pi} t x (x^2 - \pi^2)\,.$$

Nella nuova variabile l'equazione $u_t = u_{xxx}$ diventa $v_t = v_{xxx} - \varphi_t + \varphi_{xxx}$, la condizione iniziale resta $v(0,\cdot) = u_0(\cdot)$, mentre le condizioni agli estremi, ivi compresa la (3), diventano $\partial_x^i v(\cdot,\pi) = \partial_x^i v(\cdot,-\pi)$ per $i = 0,1,2$. Scrivendo $v$ in serie di Fourier rispetto alla variabile $x$ si vede che questo nuovo problema è effettivamente risolubile, e questo conclude la verifica della non unicità delle soluzioni di (P).

6. a) L'idea è di ricondursi al lemma di Riemann-Lebesgue. Siccome $f'$ è strettamente positiva, detta $[a,b]$ l'immagine di $g$, si ha che $g$ ammette un'inversa $f : [a,b] \to [0,1]$ di classe $C^1$ e applicando il cambio di variabile $x = f(y)$ otteniamo

$$\int_0^1 \exp(ia\, g(x))\, dx = \int_a^b \exp(iay)\, f'(x)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \exp(iay)\, h(y)\, dy$$

dove $h$ è la funzione $f'$ estesa a 0 fuori da $[a,b]$. Siccome $h$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ (è limitata ed ha supporto compatto) si ha che l'ultimo integrale nella formula precedente converge a 0 per via del lemma di Riemann-Lebesgue, e la dimostrazione è conclusa.

b) Ci riconduciamo al caso precedente ricoprendo una "gran parte" di $[0,1]$ con intervalli chiusi in cui $g'$ è strettamente positiva. Per la precisione, detti $x_1, \dots, x_n$ i punti dove si annulla $g'$, e fissato $\delta > 0$, indichiamo con $A$ l'unione degli intervalli $(x_i - \delta, x_i + \delta)$ intersecati con $[0,1]$; osserviamo quindi che $[0,1] \setminus A$ si scrive come un'unione finita di intervalli chiusi disgiunti che indichiamo con $I_j$. Per costruzione $g'$ è strettamente positiva su ciascun $I_j$ e per quanto visto al punto precedente (applicato a $I_j$ invece che a $[0,1]$) vale che

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{I_j} \exp(ia\, g(x))\, dx = 0\,, \tag{4}$$

mentre usando il fatto che l'insieme $A$ ha misura al più $2n\delta$ (in quanto unione di $n$ intervalli di lunghezza al più $2\delta$) otteniamo che

$$\left| \int_A \exp(ia\, g(x))\, dx \right| \le 2n\delta\,. \tag{5}$$

Osserviamo infine che

$$\left| \int_0^1 \exp(ia\, g(x))\, dx \right| \le \left| \int_A \exp(ia\, g(x))\, dx \right| + \sum_j \left| \int_{I_j} \exp(ia\, g(x))\, dx \right| ,$$

da cui, usando le formule (4) e (5), otteniamo

$$\limsup_{a\to+\infty} \left| \int_0^1 \exp(ia\, g(x))\, dx \right| \le 2n\delta\,,$$

e siccome $\delta$ può essere scelto piccolo a piacere, questo limsup è in realtà un limite e vale 0.

7. a) Possiamo riscrivere la disuguaglianza che definisce $D$ come

$$f(x) \le 0 \quad \text{con} \quad f(x) := |x|^2 - 2|x| - x_1\,. \tag{6}$$

Siccome $x_i \ge -|x|$ e $|x|^2 = o(|x|)$ per $x \to 0$, si ha che $f(x) \le -|x| + o(|x|) \sim -|x|$, dunque la disuguaglianza in (6) è soddisfatta in un intorno di 0 e questo significa che 0 è interno a $D$.

b) L'insieme $D$ è chiuso in $\mathbb{R}^3$ perché controimmagine secondo la funzione continua $f$ dell'insieme chiuso $(-\infty, 0]$. Inoltre $f(x) \sim |x|^2$ per $|x| \to +\infty$ e quindi la disuguaglianza in (6) non vale per alcun $|x| > r$ con $r$ opportunamente grande, il che significa che $D$ è un insieme limitato. Abbiamo dunque dimostrato che $D$ è chiuso e limitato, e quindi è compatto.
La funzione $f$ che definisce $D$ è di classe $C^\infty$ al di fuori di 0, che è un punto interno a $D$, e quindi per far vedere che $D$ è un insieme con frontiera di classe $C^\infty$ (ovvero una superficie con bordo di dimensione 3 e classe $C^\infty$) basta far vedere che per ogni $x \ne 0$ tale che $f(x) = 0$ si ha $\nabla f(x) \ne 0$. A questo scopo osserviamo che dato $x \ne 0$ tale che $\nabla f(x) = 0$ si ha

$$2x - \frac{x}{|x|} - e_1 = 0 \;\Rightarrow\; (2|x| - 1)\frac{x}{|x|} = e_1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = ce_1 \\ (2c-1)\,\mathrm{sgn}(c) = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; x = e_1$$

e tale $x$ non soddisfa $f(x) = 0$.

c) Passando alle coordinate sferiche

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2 \end{cases}$$

la disequazione che definisce l'insieme $D$ diventa

$$r \leq 2 + \cos\theta_1 \,,$$

quindi la frontiera di $D$ è definita dall'equazione $r = 2 + \cos\theta_1$ e possiamo parametrizzarne i punti come

$$x = g(\theta_1, \theta_2) := \begin{pmatrix} (2+\cos\theta_1)\cos\theta_1 \\ (2+\cos\theta_1)\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ (2+\cos\theta_1)\sin\theta_1\sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

con $(\theta_1, \theta_2) \in R := [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.
Ad essere precisi $g$ è una buona parametrizzazione limitatamente alla parte interna del rettangolo $R$, e questa parametrizza tutti i punti di $\partial D$ eccetto un sottoinsieme di area nulla. Si può inoltre verificare (omettiamo i dettagli) che $g$ mantiene l'orientazione e pertanto l'integrale di $\omega_a$ su $\partial D$ è uguale all'integrale del pull-back $g^\# \omega_a$ sul rettangolo $R$, vale a dire

$$\int_{\partial D} \omega_a = \int_R g^\# \omega_a \,.$$

Facendo i conti (armati della necessaria pazienza) si ottiene che

$$g^\# \omega_a = (2+\cos\theta_1)^{a+3} \sin\theta_1 \, d\theta_1 \wedge d\theta_2$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \omega_a = \int_R g^\# \omega_a &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^\pi (2+\cos\theta_1)^{a+3} \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\theta_2 \\ &= 2\pi \int_1^3 t^{a+3}\, dt = \begin{cases} 2\pi \dfrac{3^{a+4}-1}{a+4} & \text{se } a \neq -4, \\ 2\pi \log 3 & \text{se } a = -4. \end{cases} \end{aligned}$$

(Nel terzo passaggio è stato usato il cambio di variabile $t = 2 + \cos\theta_1$.)

8. a) Per ogni $x$, $G(x)$ è la somma di una serie a termini positivi ed è quindi un numero ben definito in $[0, +\infty]$. Inoltre

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} G(x)\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(x + 2\pi k)\, dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x+2\pi k)\, dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx \,. \end{aligned} \tag{7}$$

Vanno tuttavia giustificati il secondo passaggio e il quarto passaggio.
Un modo semplice ed elegante di giustificare lo scambio della somma con l'integrale nel secondo passaggio è vedere la somma infinita come integrale rispetto alla misura che conta i punti: da questo punto il passaggio fatto diventa uno scambio nell'ordine di integrazione, ed è legittimato dal teorema di Fubini (che nel caso delle funzioni positive, com'è questo, vale senza restrizioni se non la misurabilità della funzione coinvolta).
Osserviamo infine che anche il quarto passaggio può essere visto come uno scambio di somma e integrale, e in quanto tale si giustifica allo stesso modo del precedente:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} g(x)\, dx &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} 1_{[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]} g(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 1_{[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]} g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx \end{aligned}$$

b) Sia ora $g$ una funzione non necessariamente positiva, e sia $F$ la funzione definita come $G$ mettendo $|g|$ al posto di $g$. Per quanto visto al punto precedente $F(x)$ è ben definita per ogni $x$ ed è sommabile, per cui deve essere quasi ovunque finita, cioè

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |g(x + 2\pi k)| = F(x) < +\infty \quad \text{per q.o. } x,$$

da cui segue che la serie dai $g(x+2\pi k)$ converge assolutamente e dunque $G(x)$ è ben definita e finita. Inoltre $|G(x)| \le F(x)$ da cui segue che

$$\|G\|_1 \le \|F\|_1 = \|g\|_1 \,.$$

c) Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ l'$n$-esimo coefficiente di Fourier di $G$ è dato da

$$\begin{aligned} c_n(G) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\, e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(x+2\pi k)\, e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(x+2\pi k)\, e^{-in(x+2k\pi)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} g(x)\, e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(n)\,. \end{aligned}$$

Dobbiamo ora giustificare il terzo e il quinto passaggio.
Come già fatto al punto a), vediamo lo scambio tra serie e integrale nel terzo passaggio come un caso particolare del teorema di Fubini, ma in questa occasione la funzione coinvolta non è positiva, e quindi dobbiamo verificare che sia sommabile, vale a dire che

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \big|g(x+2\pi k)\, e^{-in(x+2k\pi)}\big| dx < +\infty\,;$$

e in effetti procedendo come al punto a) si ottiene

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \big|g(x+2\pi k)\, e^{-in(x+2k\pi)}\big| dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx = \|g\|_1 < +\infty\,.$$

Osserviamo infine che anche quinto passaggio può essere visto come uno scambio tra serie e integrale, e si giustifica come il precedente.

d) Basta prendere

$$g(x) := \frac{1}{1+|x|}\,.$$

Questa funzione appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p > 1$, e siccome $g(x+2k\pi)$ a meno di un fattore moltiplicativo è asintoticamente equivalente a $1/|k|$ per $k \to \pm\infty$, si ha che $G(x) = +\infty$ per ogni $x$.

## COMMENTI

- Esercizio 3. Diversi dei presenti hanno avuto delle difficoltà a passare dalla serie di Fourier reale a quella complessa o viceversa. Altri hanno usato una definizione errata dei coefficienti di Fourier.

- Esercizio 5. Quasi tutti i presenti hanno detto che la soluzione del problema (P) è unica, senza notare che il problema è sottodeterminato per via della mancanza della condizione agli estremi (2).

- Esercizio 7. Come hanno osservato alcuni dei presenti, non solo 0 è interno a $D$ e $D$ è limitato, ma per la precisione si ha che $D$ contiene la palla chiusa di centro 0 e raggio 1 ed è contenuto nella palla chiusa di centro 0 e raggio 3. Infatti

$$\begin{aligned} &|x| \le 1 \;\Rightarrow\; f(x) = |x|^2 - 2|x| - x_1 \le |x| - 2|x| + |x| = 0 \;\Rightarrow\; x \in D\,, \\ &|x| > 3 \;\Rightarrow\; f(x) = |x|^2 - 2|x| - x_1 > 3|x| - 2|x| - |x| = 0 \;\Rightarrow\; x \notin D\,. \end{aligned}$$

- Esercizio 7c). Se $a > 0$ allora $\omega_a$ è di classe $C^1$ su tutto $\mathbb{R}^3$ e quindi possiamo calcolare $\int_{\partial D} \omega_a$ usando il teorema di Stokes. Facendo i conti si ottiene che
$$d\omega_a(x) = (a+3)|x|^a \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \,,$$
e quindi
$$\int_{\partial D} \omega_a = \int_D d\omega = \int_D (a+3)|x|^a \, dx = 2\pi \frac{3^{a+4} - 1}{a+4} \,,$$
dove quest'ultimo integrale è stato calcolato passando alle coordinate sferiche. Osserviamo che per $a \le 0$ la forma $\omega_a$ è singolare in 0, che è un punto interno a $D$, e quindi non è possibile applicare il teorema di Stokes come appena fatto.

- Esercizio 8. Per quanto riguarda la dimostrazione dell'identità $\|G\|_1 = \|g\|_1$, il problema dello scambio tra somma e integrale in (7) può essere aggirato sostituendo alla somma infinita una somma finita e poi passando al limite in modo opportuno; per la precisione si pone
$$G_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} g(x + 2\pi k)$$
e si osserva che
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} G_m(x)\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-m}^{m} g(x+2\pi k)\, dx \\ &= \sum_{k=-m}^{m} \int_{-\pi}^{\pi} g(x+2\pi k)\, dx \\ &= \sum_{k=-m}^{m} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} g(x)\, dx = \int_{-(2m+1)\pi}^{(2m+1)\pi} g(x)\, dx \,.\end{aligned}$$
Ora, quando $m$ tende a $+\infty$ il primo integrale in questa catena di uguaglianze converge a $\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\, dx$ per il teorema di convergenza monotona, mentre l'ultimo integrale converge a $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx$, sempre per il teorema di convergenza monotona.
Un discorso analogo vale per la dimostrazione dell'identità $c_n(G) = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(n)$.

- Esercizio 8. Molti dei presenti hanno impostato la soluzione dei punti a) e c) come sopra, senza però giustificare lo scambio di somma e integrale (che almeno nella soluzione di c) richiede una giustificazione).
Riguardo al punto b), molti dei presenti hanno dimostrato correttamente che vale la disuguaglianza $\|G\|_1 \le \|g\|_1$ supponendo che la funzione $G(x)$ sia ben definita per quasi ogni $x$, ma non hanno dimostrato questo assunto.

1. Svolgendo il prodotto $\omega \wedge \omega$ si vede che ad ogni addendo del primo fattore corrisponde un solo addendo del secondo per cui il prodotto dei due addendi non è nullo, e quindi restano da sommare sei prodotti corrispondenti a diverse permutazioni di $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_4$; tenendo conto dei segni si ottiene infine
$$\omega \wedge \omega = 2\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \,.$$

2. I coefficienti complessi di $f$ sono dati da
$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)\, e^{-inx} dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-1/2)x} + e^{-i(n+1/2)x} dx = \frac{2(-1)^{n-1}}{\pi(4n^2-1)} \,.$$
Quindi la serie di Fourier complessa di $f$ è
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1} e^{inx} \,,$$
e di conseguenza quella reale è
$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1} \cos(nx) \,.$$

3. Il gradiente di $g$ è dato da
$$\nabla g(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha\, \cos\beta & -\sin\alpha\, \sin\beta \\ \cos\alpha\, \sin\beta & \sin\alpha\, \cos\beta \end{pmatrix} ,$$
e usando quindi la formula $(Jg)^2 = \sum(\det M)^2$ dove $M$ varia tra i minori $2\times 2$ di $\nabla g$ otteniamo
$$Jg(\alpha,\beta) = \big[(\sin^2\!\alpha\, \sin\beta)^2 + (\sin^2\!\alpha\, \cos\beta)^2 + (\sin^2\alpha\, \cos\alpha)^2\big]^{1/2} = |\sin\alpha| \,.$$

4. Osserviamo innanzitutto che esiste una funzione $G : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$ che soddisfa $G'' = g$ e le condizioni agli estremi
$$G(-\pi) = G(\pi) \,,\ G'(-\pi) = G'(\pi) \,.$$
Presa infatti una qualunque funzione $G_0$ tale che $G_0'' = g$, le altre funzioni che soddisfano questa equazione sono della forma $G(x) = G_0(x) + ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, ed è sempre possibile scegliere $a$ in modo tale che $G(-\pi) = G(\pi)$. Invece la condizione $G'(-\pi) = G'(\pi)$ è sempre soddisfatta per via del fatto che $g$ ha media nulla, infatti
$$G'(\pi) - G'(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} G''(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx = 0 \,.$$
Consideriamo ora il cambio di variabile
$$v(t, x) = u(t, x) + G(x) \,.$$
Si verifica subito che tramite questo l'equazione $u_t = u_{xx} + g(x)$ si riduce all'equazione del calore $v_t = v_{xx}$, le condizioni di periodicità agli estremi vengono mantenute, mentre la condizione iniziale diventa $v(0, x) = G(x)$.
Pertanto il problema nella variabile $v$ ammette una ed una sola soluzione definita e continua su $[0, +\infty) \times [-\pi, \pi]$ e di classe $C^\infty$ su $(0, +\infty) \times [-\pi, \pi]$, e di conseguenza il problema di partenza ammette una ed una sola soluzione $u$ definita e continua su $[0, +\infty) \times [-\pi, \pi]$ e di classe $C^2$ su $(0, +\infty) \times [-\pi, \pi]$ (la funzione $G$ è di classe $C^2$ ma non necessariamente di più).

5. a) Date $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ si ha che
$$\begin{aligned} \langle T^* u\,;\, v\rangle = \langle u\,;\, Tv\rangle &= \int_{\mathbb{R}} u(x)\, v(x-a)\, dx + \int_{\mathbb{R}} u(x)\, v(x-b)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(y+a)\, v(y)\, dy + \int_{\mathbb{R}} u(y+b)\, v(y)\, dy = \langle \tau_{-a} u + \tau_{-b} u\,;\, v\rangle \end{aligned}$$
(nel penultimo passaggio abbiamo usato il cambio di variabile $y = x - a$ per il primo integrale e $y = x - b$ per il secondo). Pertanto
$$T^* = \tau_{-a} + \tau_{-b} \,.$$

Chiaramente se $b = -a$ allora $T$ è autoaggiunto.
Mostriamo ora che questa condizione è anche necessaria, vale a dire che se $b \neq a$ allora esiste $u$ tale che $Tu \neq T^*u$. Possiamo supporre $a \leq b$; presa dunque una funzione continua $u$ strettamente positiva nell'intervallo $(-1, 0)$ e nulla altrove, osserviamo che gli insiemi dove le funzioni $Tu$ e $T^*u$ sono strettamente positive sono rispettivamente

$$(a-1, a) \cup (b-1, b) \text{ e } (-b-1, -b) \cup (-a-1, -a)\,,$$

e in particolare gli estremi superiori di questi insiemi sono rispettivamente $b$ e $-a$. Pertanto se $b \neq -a$ questi insiemi sono diversi, da cui segue che le funzioni $Tu$ e $T^*u$ sono diverse, e trattandosi di funzioni continue sono diverse anche come elementi di $L^2(\mathbb{R})$.

b) Dobbiamo far vedere che nel caso $b = -a$, se $T$ ammette un autovettore allora $a = 0$. Supponiamo dunque di avere $u \in L^2(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $u \neq 0$ e $Tu = \lambda u$. Prendendo la trasformata di Fourier di quest'ultima identità e ricordando che $\widehat{\tau_h u}(y) = e^{-ihy}\hat{u}(y)$ otteniamo

$$2\cos(ay)\,\hat{u}(y) = \lambda\,\hat{u}(y) \quad \text{per q.o. } y \in \mathbb{R},$$

da cui segue in particolare che $2\cos(ay) = \lambda$ per quasi ogni $y$ nell'insieme $\{y : \hat{u}(y) \neq 0\}$, e questo insieme ha misura positiva perché per ipotesi $u \neq 0$ (come elemento di $L^2$). D'altra parte se $a \neq 0$ gli insiemi di livello della funzione $g(y) := 2\cos(ay)$, vale a dire gli insiemi $g^{-1}(s)$ con $s \in \mathbb{R}$, sono tutti discreti, ed in particolare hanno misura nulla.
Dunque si ha necessariamente che $a = 0$.

6. a) Fissato $p \in [2, +\infty)$, sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$g(s) := \|f - s\|_p^p = \int_{-1}^{1} |s - f(x)|^p dx\,.$$

Questa funzione è continua (per il teorema di convergenza dominata) e tende a $+\infty$ per $s \to \pm\infty$ (per il teorema di convergenza monotona) e dunque ammette sicuramente almeno un punto di minimo.
Per dimostrare che tale minimo è unico basta osservare che $g$ è strettamente convessa: infatti la derivata seconda della funzione $s \mapsto |s - c|^p$ è $p(p-1)|s - c|^{p-2}$ per ogni $c$ in $\mathbb{R}$ e quindi, applicando due volte il teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ottiene

$$\ddot{g}(s) = p(p-1) \int_{-1}^{1} |s - f(x)|^{p-2} dx$$

e dunque $\ddot{g}(s) > 0$ tranne che nel caso in cui $f(x) = s$ per ogni $x$, ovvero per tutti i valori di $s$ tranne al più uno.

b) Si noti che $s_2$ non è altro che la proiezione di $f$ sul sottospazio delle funzioni costanti, ed è noto che tale proiezione è uguale alla media di $f$.

c) Detti $m_0$ e $m_1$ rispettivamente il valore minimo e massimo di $f$, si vede facilmente che

$$\|f - s\|_\infty = \max\big\{|m_1 - s|,\, |m_0 - s|\big\} = \Big|\frac{m_0 + m_1}{2} - s\Big|$$

e da questo segue immediatamente che l'unico punti di minimo è

$$s_\infty = \frac{1}{2}(m_0 + m_1)\,.$$

d) Basta prendere $f$ dispari. In tal caso è infatti facile verificare che $\|f - s\|_p = \|f + s\|_p$, ovvero che la funzione $s \mapsto \|f - s\|_p$ è pari, e dunque se $s_p$ è un punto di minimo anche $-s_p$ lo è, da cui segue per l'unicità del minimo che $s_p = 0$ per ogni $p$.

7. a) Basta osservare che, fissato $x_0 \in S$, $h$ è costante su ogni intorno aperto $U$ di $x_0$ in $S$ che sia connesso per cammini di classe $C^1$. Dato infatti un qualunque punto $x_1 \in U$ e preso un cammino $x = \gamma(t)$ che parte da $x_0$ al tempo 0 e arriva a $x_1$ al tempo 1, si ha che $\dot{\gamma}(t)$ appartiene a $\mathrm{Tan}(S, x)$ mentre per ipotesi $\nabla h(x)$ è ortogonale a $\mathrm{Tan}(S, x)$, e quindi

$$(h \circ \gamma)'(t) = \nabla h(x) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0 \quad \text{per ogni } t,$$

da cui segue che $h \circ \gamma$ è costante e in particolare $h(x_1) = h(\gamma(1)) = h(\gamma(0)) = h(x_0)$.

b) Il caso $k = m \leq n$ è stato già considerato a lezione e possiamo quindi supporre $k < m$. Fissato $x_0 \in S$, la matrice $\nabla f(x_0)$ ha rango $k$, dunque ha $k$ righe linearmente indipendenti, e a meno di riordinarle possiamo supporre che si tratti delle prime $k$ righe. Detta allora $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ la funzione formata dalle prime $k$ componenti di $f$, la matrice $\nabla f'(x_0)$ ha rango $k$, e quindi esiste un intorno $V$ di $x_0$ tale che l'insieme

$$S' := \{x \in V : f'(x) = 0\}$$

è una superficie senza bordo di classe $C^1$ e dimensione $n-k$. E a patto di sostituire $V$ con un suo opportuno sottoinsieme aperto, possiamo anche supporre che $S'$ sia connesso.
Per concludere ci basta ora dimostrare che $S \cap V = S'$. L'inclusione $S \cap V \subset S'$ è ovvia perché le equazioni che definiscono $S'$, vale a dire $f_h(x) = 0$ per $h = 1, \dots, k$, sono un sottoinsieme di quelle che definiscono $S$. Per dimostrare l'inclusione opposta basta far vedere che le ulteriori equazioni nella definizione di $S$ sono soddisfatte da tutti i punti di $S'$, ovvero che $f_h$ è nulla su $S'$ per ogni $h > k$.
A questo proposito osserviamo che avendo la matrice $\nabla f(x)$ rango $k$ ed essendo le sue prime $k$ righe linearmente indipendenti, tutte le altre righe si ottengono come combinazioni lineari delle prime $k$. In particolare $\nabla f_h(x)$ è una combinazione lineare dei vettori $\nabla f_i(x)$ con $i = 1, \dots, k$, e siccome questi vettori sono tutti ortogonali a $\mathrm{Tan}(S', x)$, lo stesso vale per $\nabla f_h(x)$. Ma allora, per quanto visto al punto a), $f_h$ è costante su $S'$, e siccome si annulla in $x_0$ (perché $x_0$ appartiene a $S$ per ipotesi) si annulla anche su tutto $S'$.

8. a) L'identità $\widehat{u * \rho} = \hat u\, \hat\rho$ è stata dimostrata a lezione quando sia $u$ che $\rho$ appartengono a $L^1$, e la si estende al caso che ci interessa approssimando $u \in L^2$ con una qualunque successione di funzioni $u_n \in L^2 \cap L^1$, per esempio quelle ottenute moltiplicando $u$ per le funzioni indicatrici degli intervalli $[-n, n]$. In effetti per ogni $n$ si ha

$$\widehat{u_n * \rho} = \hat u_n \hat\rho\,, \tag{1}$$

e il fatto che $u_n \to u$ in $L^2$ (e che $\hat\rho$ è una funzione limitata) implica che

$$u_n * \rho \to u * \rho \text{ in } L^2 \Rightarrow\ \widehat{u_n * \rho} \to \widehat{u * \rho} \text{ in } L^2\,,$$
$$\hat u_n \to \hat u \text{ in } L^2 \Rightarrow\ \hat u_n \hat\rho \to \hat u \hat\rho \text{ in } L^2\,;$$

passando quindi al limite nella (1) otteniamo infine $\widehat{u * \rho} = \hat u\, \hat\rho$.

b) Sia $\rho$ una qualunque funzione in $L^1 \cap L^2$ con integrale 1, e per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo come al solito $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1}\rho(x/\varepsilon)$.
Consideriamo ora le funzioni $u_\varepsilon := u * \rho_\varepsilon$ e $v_\varepsilon := v * \rho_\varepsilon$. Allora $u_\varepsilon$ appartiene a $L^2$ (perché $u \in L^2$ e $\rho \in L^1$) e anche $v_\varepsilon$ appartiene a $L^2$ (perché $v \in L^1$ e $\rho \in L^2$); inoltre

$$\hat u_\varepsilon = \hat u\, \hat\rho_\varepsilon = \hat v\, \hat\rho_\varepsilon = \hat v_\varepsilon$$

dove si intende che tutte le uguaglianza valgono quasi ovunque (la prima uguaglianza segue dalla formula ottenuta al punto a), le seconda dall'ipotesi $\hat u = \hat v$ q.o., la terza dalla formula per la trasformata del prodotto di convoluzione di funzioni $L^1$ vista a lezione.)
Dunque le funzioni $u_\varepsilon$ e $v_\varepsilon$ appartengono entrambe a $L^2$ e le loro trasformate coincidono q.o., e per via dell'iniettività della trasformata di Fourier su $L^2$ ne segue che anche $u_\varepsilon = v_\varepsilon$ q.o.
Ma per quanto visto a lezione, quando $\varepsilon \to 0$ si ha che $u_\varepsilon \to u$ in $L^2$ e $v_\varepsilon \to v$ in $L^1$, e passando ad un'opportuna sottosuccessione degli $\varepsilon$ otteniamo anche che $u_\varepsilon \to u$ e $v_\varepsilon \to v$ q.o., da cui segue che $u = v$ q.o.

c) Data $w \in X$ scriviamo $w = u + v$ con $u \in L^2$ e $v \in L^1$, e poniamo

$$\hat w := \hat u + \hat v\,.$$

Osserviamo che $\hat u$ è la trasformata di Fourier in $L^2$ e $\hat v$ è quella in $L^1$, e la definizione appena data è ben posta, cioè non dipende dalla specifica scomposizione $w = u + v$, perché questi due operatori coincidono sull'intersezione $L^2 \cap L^1$. Inoltre, ricordando il punto b), si ha che

$$\hat w = 0 \text{ q.o.} \ \Rightarrow\ \hat u = -\hat v \text{ q.o.} \ \Rightarrow\ u = -v \text{ q.o.} \ \Rightarrow\ w = 0 \text{ q.o.}$$

e l'iniettività della trasformata di Fourier su $X$ è dimostrata.

## Commenti

- Esercizio 3. Sorprendentemente, nessuno dei presenti ha svolto correttamente questo esercizio.

- Esercizio 5a). Una dimostrazione alternativa del fatto che $T$ è autoaggiunto solo se $a = -b$ la si ottiene considerando la trasformata di Fourier dell'identità $Tu = T^*u$, vale a dire
$$(e^{-iay} + e^{-iby})\hat{u} = (e^{iay} + e^{iby})\hat{u}\,.$$
Presa $u \in L^2$ tale che $\hat{u} \neq 0$ q.o. (per esempio $u(x) = \exp(-|x|)$) si ottiene infatti l'identità
$$e^{-iay} + e^{-iby} = e^{iay} + e^{iby} \quad \text{ovvero} \quad \sin(-ay) = \sin(by)\,,$$
che chiaramente è verificata se e solo $b = -a$.

- Esercizio 5b). In effetti l'operatore $T$ non ha autovettori anche quando non è autoaggiunto. La dimostrazione data sopra funziona anche in questo caso, ma richiede di dimostrare che gli insiemi di livello della funzione $g(y) := e^{-iay} + e^{-iby}$ sono tutti discreti (tranne che per $a = b = 0$) cosa che è vera, ma leggermente meno immediata che nel caso della funzione $g(y) := 2\cos(ay)$.

- Esercizio 5b). Molti dei presenti sono passati dall'identità $2\cos(ay)\,\hat{u} = \lambda\,\hat{u}$ q.o. direttamente a $2\cos(ay) = \lambda$ q.o., come se $\hat{u}$ fosse diversa da 0 q.o.

- Esercizio 6a). In effetti la costante $s_p$ esiste ed è unica per ogni $p > 1$ (mentre esiste ma non è unica per $p = 1$). Per la precisione è vero per ogni $p > 1$ che la funzione $s \mapsto \|f - s\|_p^p$ è continua, tende a $+\infty$ per $s \to \pm\infty$, ed è strettamente convessa (da cui segue l'esistenza ed unicità di $s_p$), ma la dimostrazione della stretta convessità data sopra presenta qualche problema nel caso $p < 2$, che abbiamo quindi deciso di omettere.

- Esercizio 7a). Nella dimostrazione data sopra non abbiamo fatto vedere che ogni punto $x_0$ di una superficie $S$ ammette effettivamente un intorno aperto $U$ connesso per archi di classe $C^1$. In effetti basta prendere $U := g(B)$ dove $g$ è una parametrizzazione regolare di un intorno di $x_0$ e $B$ è una palla centrata in $x_0$ e contenuta nel dominio di definizione di $g$.

1. La proiezione di $f(x) := e^{-3x}$ su $X$ è una funzione della forma
$$g(x) = a_1 e^{-x} + a_2 e^{-2x}$$
caratterizzata dal fatto che $g - f$ è ortogonale a $X$, ovvero
$$\begin{cases} 0 = \langle g - f\,;\, e^{-x}\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} a_1 e^{-2x} + a_2 e^{-3x} - e^{-4x}dx = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} - \frac{1}{4}\,, \\ 0 = \langle g - f\,;\, e^{-2x}\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} a_1 e^{-3x} + a_2 e^{-4x} - e^{-5x}dx = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4} - \frac{1}{5}\,. \end{cases}$$
Risolvendo questo sistema otteniamo $a_1 = -3/10$ e $a_2 = 6/5$.

2. Indichiamo con $e_1, e_2$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e prendiamo $C$ uguale all'unione dei segmenti semiaperti $[0, e_1)$ e $[0, e_2)$. Poniamo inoltre
$$\gamma(t) := \begin{cases} t^2 e_1 & \text{per } -1 < t \le 0, \\ t^2 e_2 & \text{per } 0 < t < 1. \end{cases}$$
Si verifica facilmente che $\gamma$ è una mappa di classe $C^1$, ed è un omeomorfismo da $(-1, 1)$ in $C$: in effetti la bigettività di $\gamma$ è immediata mentre la continuità dell'inversa la si ottiene scrivendone esplicitamente una formula (per esempio $\gamma^{-1}(x_1, x_2) = -\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}$).
Infine $C$ è una spezzata e quindi non è una curva regolare, infatti l'eventuale retta tangente a $C$ in $(0, 0)$ dovrebbe contenere sia il vettore $e_1$ che $e_2$ (in quanto derivate in $t = 0$ dei cammini $\gamma_i : [0, 1) \to S$ dati da $\gamma_i(t) := e_i t$ per $i = 1, 2$).

3. Indichiamo con $e_1, \dots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, e con $w^1, \dots, w^n$ le coordinate di $w$. Per quanto visto a lezione i coefficienti di $\omega$ rispetto alla base canonica di $\wedge^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ sono dati da
$$\begin{aligned} a_i &= \omega(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) \\ &= \det(w, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) = (-1)^{i+1} w^i\,, \end{aligned}$$
dove l'ultima uguaglianza è stata ottenuta sviluppando il determinante secondo la riga $i$-esima.

4. Presi $a > 0$ e $p \ge 1$, usando le coordinate polari otteniamo che
$$\|f_a\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx}{(|x|^3 + |x|^a)^p} = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{r}{(r^3 + r^a)^p}\, dr\,.$$
Consideriamo separatamente tre casi.
*Caso* $a < 3$. La funzione integranda nell'ultimo integrale della formula precedente è asintoticamente equivalente a $r^{1-3p}$ per $r \to +\infty$ e a $r^{1-ap}$ per $r \to 0^+$. Pertanto l'integrale in questione, e quindi anche la norma $\|f_a\|_p$, sono finiti se e solo se $1 - ap > -1$ e $1 - 3p < -1$, ovvero se e solo se $ap < 2$ (la seconda disuguaglianza è sempre verificata perché $p \ge 1$).
*Caso* $a > 3$. Procedendo come sopra si ottiene che $f_a$ appartiene ad $L^p$ se e solo se $1 - ap < -1$ e $1 - 3p > -1$, ma quest'ultima disuguaglianza non è mai verificata perché $p \ge 1$. Pertanto $f_a$ non appartiene ad $L^p$ per alcun $p$.
*Caso* $a = 3$. Anche in questo caso $f_a$ non appartiene ad $L^p$ per alcun $p$.
Riassumendo, $f_a$ appartiene ad $L^p$ per tutti gli $a, p$ tali che
$$p \ge 1 \quad \text{e} \quad 0 < a < 2/p\,.$$

5. Ricordiamo due fatti noti: date due funzioni $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$, la trasformata del prodotto $g_1 g_2$ è uguale a $\frac{1}{2\pi}\hat{g}_1 * \hat{g}_2$, e la trasformata di Fourier di
$$g(x) := \frac{1}{1 + x^2}$$
è $\hat{g}(y) = \pi \exp(-|y|)$. Pertanto, essendo $f = g^2$,
$$\hat{f}(y) = \frac{1}{2\pi}(\hat{g} * \hat{g})(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi e^{-|t|}\, \pi e^{-|y-t|}\, dt = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|-|y-t|}\, dt\,.$$

Calcoliamo quest'ultimo integrale per $y \geq 0$ spezzandolo come somma di tre integrali:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|-|y-t|}\,dt &= \int_{-\infty}^{0} e^{2t-y}\,dt + \int_{0}^{y} e^{-y}\,dt + \int_{y}^{+\infty} e^{-2t+y}\,dt \\ &= \left|\frac{e^{2t-y}}{2}\right|_{-\infty}^{0} + ye^{-y} + \left|\frac{e^{-2t+y}}{2}\right|_{+\infty}^{y} = (1+y)\,e^{-y}\,.\end{aligned}$$

Quindi $\hat{f}(y) = \frac{\pi}{2}(1+y)\,e^{-y}$ per $y \geq 0$, e tenuto conto $\hat{f}$ è una funzione pari (perché $f$ è pari),

$$\hat{f}(y) = \frac{\pi}{2}(1+|y|)\,e^{-|y|}\,.$$

6. Date $u, v \in X$ abbiamo che

$$\begin{aligned}\langle Tu\,;\,v\rangle = \int_{-1}^{1}(a\ddot{u}+b\dot{u})\,v\,dx &= \int_{-1}^{1}\ddot{u}\,(av)\,dx + \int_{-1}^{1}\dot{u}\,(bv)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}u\,(av)''\,dx - \int_{-1}^{1}u\,(bv)'\,dx \qquad (1) \\ &= \int_{-1}^{1}u\,\big[a\ddot{v}+(2\dot{a}-b)\dot{v}+(\ddot{a}-\dot{b})v\big]\,dx\end{aligned}$$

dove la terza uguaglianza è stata ottenuta applicando la formula di integrazione per parti per una volta all'ultimo integrale della prima riga, e per due volte al penultimo integrale (abbiamo inoltre usato che $u(\pm 1) = v(\pm 1) = 0$ per far vedere che i vari termini di bordo dovuti all'integrazione per parti sono nulli).
La formula (1) ci dice che l'aggiunta di $T$ è data da

$$T^*u = a\ddot{u} + (2\dot{a}-b)\dot{u} + (\ddot{a}-\dot{b})u$$

per ogni $u \in X$, e quindi

$$(T^*-T)u = 2(\dot{a}-b)\dot{u} + (\dot{a}-b)'u\,.$$

Da questo segue immediatamente che se $b = \dot{a}$ allora $T$ è autoaggiunto.

Facciamo ora vedere che questa condizione, oltre che sufficiente, è anche necessaria. Supponiamo dunque che $b$ non coincida ovunque con $\dot{a}$; allora possiamo trovare un intervallo $I$ contenuto in $(-1,1)$ tale che $\dot{a}-b \neq 0$ su $I$, e data quindi una funzione $u$ tale che $(T^*-T)u = 0$, allora $u$ soddisfa

$$\dot{u} + cu = 0 \text{ su } I, \text{ con } c := \frac{(\dot{a}-b)'}{2(\dot{a}-b)}. \qquad (2)$$

Siccome le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea in (2) ha dimensione 1, è chiaro che devono esistere funzioni $u \in X$ che non la soddisfano, e che quindi non soddisfano neanche $(T^*-T)u = 0$. In altre parole $T$ non è autoaggiunto.

7. a) Osserviamo che $S$ è il luogo di zeri della mappa $f : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f(x,y,z) := (|x|^2 - |y|^2, |x|^2 - |z|^2)\,;$$

chiaramente $f$ è di classe $C^\infty$ e

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 2x & 0 & -2z \end{pmatrix}$$

(i vettori $x, y, z$ che appaiono nella matrice a destra dell'uguale vanno visti come vettori riga). Osserviamo inoltre che la matrice $\nabla f$ ha rango inferiore a 2 se una delle due righe è multiplo dell'altra, cosa che in questo caso si verifica solo quando una delle due righe è nulla, ovvero quando $x = y = 0$ oppure $x = z = 0$, e l'unico punto di $S$ che verifica una di queste due condizioni è $0 := (0,0,0)$. In conclusione $\nabla f$ ha rango massimo (cioè 2) per tutti i punti di $S' = S \setminus \{0\}$, da cui segue che $S'$ è una superficie senza bordo di classe $C^\infty$ e dimensione $3n-2$.

b) Indichiamo con $T$ l'insieme dei vettori $\dot{\gamma}(0)$ dove $\gamma : [0,\delta) \to S$ è un cammino di classe $C^1$ che parte da 0. Se $S$ fosse una superficie $T$ corrisponderebbe allo spazio tangente ad $S$ nel punto 0, e quindi per dimostrare che $S$ non è una superficie basta far vedere (per esempio) che $T$ non è uno spazio vettoriale. Per far questo facciamo prima vedere che $T$ coincide con $S$ stesso, e poi

verifichiamo che $S$ non è uno spazio vettoriale.
Il punto chiave per dimostrare che $T = S$ consiste nell'osservare che $S$ è un cono rispetto all'origine, nel senso che dato $v \in S$ e $t \geq 0$ si ha $tv \in S$. Dimostriamo ora che $T \subset S$: dato un cammino $\gamma$ come sopra, $\dot\gamma(0)$ è il limite per $h \to 0^+$ di

$$\frac{1}{h}(\gamma(h) - \gamma(0)) = \frac{1}{h}\gamma(h)$$

che appartiene a $S$ per ogni $h > 0$ perché $S$ è un cono; quindi, essendo $S$ chiuso, anche $\dot\gamma(0)$ appartiene $S$.
Dimostriamo ora che $S \supset T$: dato $v \in S$ consideriamo il cammino $\gamma(t) := tv$ con $0 \leq t < 1$ ed osserviamo che $\gamma$ ha valori in $S$ (sempre perché $S$ è un cono) e $\dot\gamma(0) = v$; dunque $v$ appartiene a $T$.
Dimostriamo infine che $S$ non è uno spazio vettoriale. Preso infatti un qualunque vettore non nullo $e$ in $\mathbb{R}^n$ si vede subito che sia $(e, e, e)$ che $(e, -e, -e)$ appartengono a $S$, mentre la loro somma $(2e, 0, 0)$ non ci appartiene.

8. a) Dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ si ha che

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\, dx$$

e quindi, indicando con $1_I$ la funzione caratteristica dell'intervallo $I := [x_1, x_2]$ e con $q$ l'esponente coniugato di $p$, otteniamo

$$\big|f(x_2) - f(x_1)\big| \leq \int_{\mathbb{R}} 1_I\, |f'(x)|\, dx \leq \|f'\|_p \|1_I\|_q = \|f'\|_p |x_2 - x_1|^{1/q}\,, \tag{3}$$

e questo significa che $f$ è Hölderiana di esponente $1/q = 1 - 1/p$.

b) L'idea è di cercare l'esempio tra le funzioni $f(x)$ che presentano infinite oscillazioni della stessa ampiezza per $x \to +\infty$, ma la cui derivata $f'(x)$ tende a zero per $x \to +\infty$ (sperando che questo accada in modo sufficientemente rapido da avere $f' \in L^p(\mathbb{R})$). Una tale funzione può essere ottenuta componendo una qualunque funzione periodica con una funzione che renda il periodo delle oscillazioni sempre maggiore mano a mano che $x$ tende all'infinito, come ad esempio

$$f(x) := \sin(\log(1 + x^2))\,.$$

E in effetti si verifica facilmente che $f'$ appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p > 1$, e chiaramente $f(x)$ non ha limite per $x \to +\infty$.

c) Indichiamo con $L$ e $L'$ rispettivamente il limsup ed il liminf di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Vogliamo far vedere $L = L' = 0$. Il fatto che $f$ appartenga a $L^1$ implica immediatamente che $L \geq 0 \geq L'$; supponiamo quindi per assurdo che $L > 0$ oppure che $L' < 0$.
Nel primo caso (e per l'altro caso vale un discorso analogo) usando la continuità di $f$ possiamo allora trovare una successione di intervalli disgiunti $[x_n, x'_n]$ tali che $x_n$ tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$ e per ogni $n$ si ha

(i) $f(x_n) \geq L/2$;
(ii) $f(x'_n) = L/4$;
(iii) $f(x) \geq L/4$ per $x \in [x_n, x'_n]$.

(Gli $x_n$ li troviamo usando il fatto che il limsup di $f$ a $+\infty$ è strettamente maggiore di $L/2$; scelto $x_n$ prendiamo come $x'_n$ il minimo dell'insieme degli $x \geq x_n$ tali che $f(x) \leq L/4$; osserviamo che tale insieme è chiuso, e non è vuoto perché il liminf di $f$ a $+\infty$ è strettamente inferiore a $L/4$.)
Usando le condizioni (i) e (ii) e la stima (3) si ottiene

$$\frac{L}{4} \leq f(x_n) - f(x'_n) \leq \|f'\|_p\, |x'_n - x_n|^{1/q}$$

e quindi

$$x'_n - x_n \geq \left(\frac{L}{4\|f'\|_p}\right)^q > 0\,. \tag{4}$$

Osserviamo ora che l'insieme

$$\{x : \, f(x) \geq L/4\}$$

contiene tutti gli intervalli $[x_n, x'_n]$ per via della (iii), ed ha quindi misura infinita per via della (4), in contraddizione con il fatto che $f$ appartiene a $L^1$.

Commenti

- Esercizio 4. Sorprendentemente quasi nessuno dei presenti ha risolto completamente questo esercizio, e anzi molti hanno fatto errori gravi (a livello di integrazione in coordinate polari e di integrali impropri).

- Esercizio 5. Un approccio alternativo è il seguente: si osserva che
$$\begin{aligned}[\hat{f}\,]' = \mathscr{F}\big(-ixf\big) &= \mathscr{F}\bigg(\frac{-ix}{(1+x^2)^2}\bigg) \\ &= \frac{i}{2}\mathscr{F}\bigg(\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)'\bigg) = -y\,\mathscr{F}\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big) = -\pi y e^{-|y|}\,,\end{aligned}$$
e quindi $\hat{f}$ coincide con la primitiva di $-\pi y\exp(-|y|)$ che tende a 0 all'infinito, vale a dire $\pi(1+|y|)\exp(-|y|)$ (siccome $\hat{f}$ è una funzione pari, basta trovare la primitiva di $-\pi y\exp(-y)$ per $y \geq 0$, cosa che si ottiene integrando per parti).

- Esercizio 5. Un'ulteriore possibilità consiste nel calcolare direttamente la trasformata di Fourier di $f$ usando il metodo dei residui; nel far questo una piccola difficoltà è data dal fatto che la funzione olomorfa da integrare presenta dei poli di ordine 2, per i quali il calcolo dei residui è più complicato che per il poli semplici.

1. Si tratta di fare i conti:
$$\begin{aligned} d\omega &= -2x_3\, dx_1 \wedge dx_2 + 2x_1\, dx_2 \wedge dx_3\,; \\ f^{\#}\omega &= (s_1 s_2)(s_2^2)\, d(s_1^2) - (s_1^2)(s_2^2)\, d(s_1 s_2) + (s_1^2)(s_1 s_2)\, d(s_2^2) \\ &= s_1^2 s_2^3\, ds_1 + s_1^3 s_2^2\, ds_2 = d(\tfrac{1}{3} s_1^3 s_2^3)\,; \end{aligned}$$
infine $f^{\#}(d\omega) = d(f^{\#}\omega) = 0$ perché $f^{\#}\omega$ è una forma esatta.

2. Ricordo i seguenti fatti noti sulla trasformata di Fourier:
   (i) $\mathscr{F}(-ix\, g(x)) = \hat{g}'$ e quindi $\mathscr{F}(x^2\, g(x)) = -\hat{g}''$;
   (ii) $\mathscr{F}(g(x/\delta)) = \delta\, \hat{g}(\delta y)$ per ogni $\delta > 0$;
   (iii) $\mathscr{F}(\exp(-|x|)) = \frac{2}{1+y^2}$, e quindi $\mathscr{F}(\exp(-|x|/2)) = \frac{4}{1+4y^2}$ per via della (ii).
   Pertanto
$$\hat{f}(y) = -\big[\mathscr{F}(\exp(-|x|/2))\big]'' = -4\left[\frac{1}{1+4y^2}\right]'' = \frac{32(1-12y^2)}{(1+4y^2)^3}\,.$$

3. Prese $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si ha
$$\langle Tu\,;\, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(Ax)\, v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, v(A^{-1}y)\, \frac{dy}{|\det A|}$$
(nel secondo passaggio abbiamo usato il cambio di variabile $y = Ax$). Dunque
$$[T^* u](x) = \frac{u(A^{-1}x)}{|\det A|}\,.$$

4. a) I coefficienti dello sviluppo in seni di una generica funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ sono dati da
$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, \sin(nx)\, dx\,.$$
In particolare per $f = 1$ otteniamo
$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \left| \frac{\cos(nx)}{n} \right|_\pi^0 = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari,} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{per } n \text{ dispari,} \end{cases}$$
e quindi lo sviluppo di $f$ è
$$1 = f(x) = \sum_{n \text{ dispari}} \frac{4}{\pi n} \sin(nx)\,. \tag{2}$$
b) Siccome $g(0) = g(\pi) = 0$ e $\ddot{g} = 1$, per quanto visto a lezione si ha $a_n(f) = -n^2 a_n(g)$, quindi
$$a_n(g) = -\frac{a_n(f)}{n^2} = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari,} \\ -\frac{4}{\pi n^3} & \text{per } n \text{ dispari,} \end{cases}$$
e infine
$$\frac{1}{2} x(x - \pi) = g(x) = -\sum_{n \text{ dispari}} \frac{4}{\pi n^3} \sin(nx)\,. \tag{3}$$

5. a) La peculiarità di questo esercizio sta nelle condizioni agli estremi $u(t, 0) = u(t, \pi) = t$, che non rientrano tra quelle considerate di solito. Risolviamo questa difficoltà utilizzando il cambio di variabile
$$u(t, x) = v(t, x) + t\,.$$
Riscrivendo infatti il problema di partenza nell'incognita $v$ otteniamo
$$\begin{cases} v_t = v_{xx} - 1 \\ v(t, 0) = v(t, \pi) = 0 \\ v(0, x) = 0 \end{cases} \tag{4}$$
e risolviamo questo problema scrivendo $v$ in serie di seni nella variabile $x$, vale a dire
$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, \sin(nx)\,.$$

Procediamo ora come al solito: la condizione iniziale $v(0,x)=0$ si traduce in

$$a_n(0) = 0 \quad \text{per } n = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

e grazie allo sviluppo in serie di seni della funzione costante 1 dato in (2) l'equazione $v_t = v_{xx} - 1$ si traduce in

$$\begin{cases} \dot a_n = -n^2 a_n & \text{per } n \text{ pari,} \\ \dot a_n = -n^2 a_n - \frac{4}{\pi n} & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases} \tag{6}$$

Risolvendo l'equazione differenziale (6) con la condizione iniziale (5) otteniamo infine

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari,} \\ \frac{4}{\pi n^3}(e^{-n^2 t} - 1) & \text{per } n \text{ dispari,} \end{cases}$$

e quindi, almeno formalmente, la soluzione del problema (2) dovrebbe essere

$$v(t,x) = \sum_{n \text{ dispari}} \frac{4}{\pi n^3}(e^{-n^2 t} - 1) \sin(nx) \,. \tag{7}$$

Verifichiamo ora che $v$ è effettivamente una funzione continua su $[0,+\infty) \times [0,\pi]$ e di classe $C^\infty$ su $(0,+\infty) \times [0,\pi]$ e che risolve il problema (4). La continuità di $v$ segue dal fatto che la serie in (7) converge totalmente. Per la regolarità $C^\infty$ riscriviamo la $v$ utilizzando lo sviluppo in (3):

$$v(t,x) = \frac{1}{2} x(x-\pi) + \sum_{n \text{ dispari}} \underbrace{\frac{4}{\pi n^3} e^{-n^2 t} \sin(nx)}_{v_n} \tag{8}$$

e procediamo come visto a lezione dimostrando che la serie delle derivate di ogni ordine delle funzioni $v_n$ converge totalmente su $[\delta, +\infty) \times [0,\pi]$ per ogni $\delta > 0$.
Si vede subito dalla (7) che $v$ soddisfa sia la condizione iniziale che le condizioni agli estremi del problema (4); inoltre $v$ soddisfa l'equazione lineare non omogenea $v_t = v_{xx} - 1$ per $t > 0$ perché $g$ soddisfa la stessa equazione mentre ogni $v_n$ soddisfa l'equazione lineare omogenea $v_t = v_{xx}$ (usiamo la convergenza discussa sopra per scambiare la derivate parziali con la serie dove necessario).

b) La soluzione del problema (4) ottenuta sopra è unica nella classe delle funzioni $v$ continue su $[0,+\infty) \times [0,\pi]$ e di classe $C^2$ su $(0,+\infty) \times [0,\pi]$. Infatti i coefficienti $a_n$ di un'eventuale soluzione in questa classe sono funzioni continue su $[0,+\infty)$ e di classe $C^1$ su $(0,+\infty)$ che soddisfano necessariamente la condizione iniziale (5) e l'equazione differenziale (6) (per $t > 0$) e quindi sono univocamente determinati. Questo implica che anche ;a soluzione $u$ del problema di partenza è univocamente determinata.

6. a) Partendo dalla definizione di trasformata di Fourier otteniamo

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_1 g}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 g(x)\, e^{-iy\cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \partial_1 g(x)\, e^{-iy\cdot x} dx_1 \right] dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[ \int_{\mathbb{R}} -g(x)\, \partial_1 (e^{-iy\cdot x})\, dx_1 \right] dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, iy_1 e^{-iy\cdot x} dx = iy_1\, \hat g(y) \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio abbiamo usato il teorema di Fubini per scrivere l'integrale su $\mathbb{R}^n$ come integrale prima nella variabile $x_1$ e poi in tutte le altre; nel terzo passaggio abbiamo applicato la formula di integrazione per parti all'integrale tra parentesi quadre, approfittando del fatto che $g$ ha supporto compatto, nel quarto abbiamo usato che la derivata parziale di $\exp(-iy \cdot x)$ rispetto alla variabile $x_1$ è $-iy_1 \exp(-iy \cdot x)$).
Allo stesso modo otteniamo che per ogni $j = 1, \dots, n$

$$\widehat{\partial_j g}(y) = iy_j\, \hat g(y) \,.$$

b) Scriviamo $\nabla \cdot G$ e $\nabla \times G$ rispettivamente per la divergenza e per il rotore di $G = (g_1, g_2, g_3)$. Applicando la formula trovata al punto a) otteniamo

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\nabla \cdot G) &= \mathscr{F}\bigg(\sum_{j=1}^{3} \partial_j g_j\bigg) = \sum_{j=1}^{3} i y_j \, \widehat{g}_j = iy \cdot \widehat{G}\,,\\ \mathscr{F}(\nabla \times G) &= \big(\mathscr{F}(\partial_2 g_3 - \partial_3 g_2)\,,\ \mathscr{F}(\partial_3 g_1 - \partial_1 g_3)\,,\ \mathscr{F}(\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1)\big)\\ &= \big(iy_2\,\widehat{g}_3 - iy_3\,\widehat{g}_2\,,\ iy_3\,\widehat{g}_1 - iy_1\,\widehat{g}_3\,,\ iy_1\,\widehat{g}_2 - iy_2\,\widehat{g}_1\big) = iy \times \widehat{G}\,.\end{aligned}$$

c) Siccome la divergenza di $G$ è nulla, lo stesso vale per la sua trasformata, e usando quanto fatto al punto precedente otteniamo $y \cdot \widehat{G}(y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^3$; quindi il vettore $\widehat{G}(y)$ è ortogonale a $y$. Analogamente il fatto che $G$ ha rotore nullo implica $y \times \widehat{G}(y) = 0$, da cui segue che il vettore $\widehat{G}(y)$ è parallelo a $y$. Per $y \neq 0$ l'unica possibilità è quindi che $\widehat{G}(y) = 0$ (questa identità si estende poi a $y = 0$ grazie alla continuità di $\widehat{G}(y)$).
Dunque $\widehat{G} = 0$, e per l'iniettività della trasformata di Fourier deve essere $G = 0$ (quasi ovunque, e quindi ovunque perché $G$ è continuo).

7. a) L'insieme $S_r$ è descritto dall'equazione $f(x,y,z) = 0$ dove $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è la funzione data da

$$f(x,y,z) := \big(\sqrt{x^2+y^2} - 1\big)^2 + z^2 - r^2\,.$$

Siccome $f$ è continua, $S_r$ è un'insieme chiuso. Dimostriamo ora che $S_r$ è limitato, e quindi anche compatto: dato un punto $(x,y,z)$ in $S_r$, usando l'equazione (1) si ottiene infatti che $|z| \leq r$ e $|\sqrt{x^2+y^2} - 1| \leq r$, da cui segue che $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1 + r$.
Osserviamo ora che $f$ è una funzione di classe $C^\infty$ sull'aperto

$$A := \big\{(x,y,z)\ :\ (x,y) \neq (0,0)\big\}$$

(vale a cire il complementare dell'asse $z$), e quindi $S_r$ è una superficie senza bordo di classe $C^\infty$ se si verifica che
(i) $S_r$ è contenuto in $A$;
(ii) $\nabla f \neq 0$ per ogni punto di $S_r$.
Per dimostrare (i) osserviamo che per i punti della forma $(0,0,z)$, l'equazione (1) si riduce a $z^2 = r^2 - 1$, che non ha soluzioni perché $r^2 - 1 < 0$. Per dimostrare (ii) osserviamo che, fatte le dovute semplificazioni, l'equazione $\nabla f = 0$ equivale al sistema

$$\begin{cases} x\big(\sqrt{x^2+y^2} - 1\big) = 0 \\ y\big(\sqrt{x^2+y^2} - 1\big) = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

le cui soluzioni sono date dal punto $(0,0,0)$, che non appartiene ad $A$, e dai punti della forma $(x,y,0)$ con $x^2+y^2 = 1$, e si verifica facilmente che nessuno di questi punti appartiene a $S_r$ (l'equazione (1) si riduce a $0 = r^2$).

b) Ricordo il seguente fatto elementare: dati $a, b, r$ numeri reali tali che $a^2 + b^2 = r^2$ ed $r > 0$, esiste uno ed un solo $s \in [0, 2\pi)$ tale che $a = r\cos s$ e $b = r \sin s$. Sia ora $(x,y,z)$ un punto di $S_r$: usando l'equazione (1) e quanto appena detto otteniamo che esiste un unico $s \in [0,2\pi)$ tale che

$$z = r\sin s\,, \quad \sqrt{x^2+y^2} - 1 = r\cos s\,,$$

e riscrivendo la seconda equazione come $x^2 + y^2 = (1 + r\cos s)^2$ vediamo che esiste un unico $t \in [0, 2\pi)$ tale che

$$x = (1 + r\cos s)\cos t\,, \quad y = (1 + r\cos s)\sin t\,.$$

Dunque ogni $(x,y,z) \in S_r$ si scrive in modo unico come $(x,y,z) = g(s,t)$ con $s, t \in [0,2\pi)$ e

$$g(s,t) := \big((1 + r\cos s)\cos t\,,\ (1 + r\cos s)\sin t\,,\ r\sin s\big)\,.$$

D'altra parte è facile verificare che ogni punto della forma $(x,y,z) = g(s,t)$ appartiene alla superficie $S_r$, che quindi è parametrizzata dalla restrizione di $g$ al quadrato $Q := [0,2\pi)^2$. Ora, il gradiente di $g$ è

$$\nabla g(s) = \begin{pmatrix} -r\sin s\,\cos t & -(1 + r\cos s)\,\sin t \\ -r\sin s\,\sin t & +(1 + r\cos s)\,\cos t \\ r\cos s & 0 \end{pmatrix}$$

e ne calcoliamo il determinante $Jg$ usando la formula $(Jg)^2 = \sum(\det M)^2$ dove $M$ varia tra i minori $2 \times 2$ di $\nabla g$; così facendo otteniamo

$$Jg(s,t) = r(1 + r\cos s)\,,$$

e quindi

$$\sigma_2(S_r) = \int_Q Jg(s,t)\,ds\,dt = 2\pi r \int_0^{2\pi} 1 + r\cos s\,ds = 4\pi^2 r\,.$$

c) A differenza di quello che succede per $r < 1$, per $r \geq 1$ l'insieme $S_r$ non è contenuto in $A$ e in particolare l'intersezione di $S_r$ con il complementare di $A$ (l'asse $z$) è data dai punti $(0,0,\pm z_r)$ con $z_r := \sqrt{r^2-1}$. Quindi la dimostrazione data sopra del fatto che $S_r$ è una superficie non funziona. In effetti per $r \geq 1$ l'insieme $S_r$ non è mai una superficie, né con né senza bordo. Per dimostrarlo consideriamo l'insieme $T_r$ dei vettori $\dot\gamma(0)$ dove $\gamma$ è un cammino di classe $C^1$ in $S_r$ che parte dal punto $(0,0,z_r)$, e facciamo vedere che $T_r$ non può essere né un piano né un semipiano.
Cominciamo dal caso $r > 1$. Utilizzando il cambio di variabile $z = z_r + h$, l'equazione (1) diventa

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2+y^2} + h^2 = 2z_r h = 0$$

da cui segue che per i punti di $S_r$ si ha $h \sim \frac{1}{z_r}\sqrt{x^2+y^2}$ quando $(x,y)$ tende a $(0,0)$. A partire da questo fatto si ottiene quindi che $T_r$ coincide con l'insieme dei vettori $(x,y,h)$ con $h = \frac{1}{z_r}\sqrt{x^2+y^2}$, ed in particolare è un cono (quindi né un piano né un semipiano). Per $r = 1$ si dimostra invece che $T_r$ coincide con l'asse $z$ (ometto i dettagli).

8. Sia $\tilde\rho$ la funzione definita da $\tilde\rho(x) := \rho(-x)$. Date $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ si ha che

$$\begin{aligned}\langle Tu\,;\,v\rangle = \langle \rho * u\,;\,v\rangle &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x-t)\,\rho(t)\,v(x)\,dt\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(y)\,\rho(x-y)\,v(x)\,dy\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(y)\,\tilde\rho(y-x)\,v(x)\,dx\,dy = \langle u\,;\,\tilde\rho * v\rangle\,;\end{aligned}$$

nel terzo passaggio abbiamo usato il cambio di variabile $t = x - y$, e nel quarto la definizione di $\tilde\rho$ e il teorema di Fubini; osserviamo che è possibile applicare Fubini perché

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |u(x-t)|\,|\rho(t)|\,|v(x)|\,dt\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \big(|u| * |\rho|\big)(x)\,|v(x)|\,dx \\ &\leq \big\||u| * |\rho|\big\|_2 \|v\|_2 \leq \|\rho\|_1 \|u\|_2 \|v\|_2 < +\infty\,.\end{aligned}$$

Pertanto l'aggiunta $T^*$ è data da $T^*u = \tilde\rho * u$ e quindi se $\rho$ è una funzione *pari* in senso $L^1$ (cioè $\rho(x) = \rho(-x) = \tilde\rho(x)$ per q.o. $x$) allora $T$ è autoaggiunto.
Facciamo vedere ora che la condizione che $\rho$ sia pari (in senso $L^1$) è anche *necessaria* affinché $T$ sia autoaggiunto. Supponiamo dunque che $T$ sia autoaggiunto, vale a dire che $(T^* - T)u = 0$ per ogni $u \in L^2(\mathbb{R})$. Applicando la trasformata di Fourier a questa identità otteniamo

$$0 = \mathscr{F}((T^* - T)u) = \mathscr{F}((\tilde\rho - \rho) * u) = \mathscr{F}(\tilde\rho - \rho)\,\hat u$$

(stiamo usando il fatto che $\widehat{v * u} = \hat v\,\hat u$ per ogni $v \in L^1(\mathbb{R})$ e ogni $u \in L^2(\mathbb{R})$) e presa in particolare una funzione $u$ tale che $\hat u \neq 0$ q.o. (ad esempio $u(x) := \exp(-x^2/2)$) otteniamo $\mathscr{F}(\tilde\rho - \rho) = 0$ q.o., che per l'iniettività della serie di Fourier su $L^1$ implica $\tilde\rho - \rho = 0$ q.o., ovvero che $\rho$ è pari.
b) Supponiamo di avere $u \in L^2(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che

$$Tu = \lambda u\,, \tag{9}$$

ovvero $\rho * u - \lambda u = 0$ q.o. Applicando la trasformata di Fourier a quest'ultima identità otteniamo

$$(\hat\rho - \lambda)\hat u = 0 \quad \text{q.o.} \tag{10}$$

e siccome la funzione

$$\hat\rho(y) - \lambda = \frac{2}{1+y^2} - \lambda$$

è diversa da zero q.o. (anzi, assume il valore zero in al più due $y$), dalla (10) otteniamo che $\hat{u} = 0$ q.o., da cui segue che $u = 0$ q.o.

c) La risposta è sì.
Ripercorrendo la dimostrazione al punto precedente, ci accorgiamo infatti che l'equazione (9) è soddisfatta se e solo se $\hat{u}(y) = 0$ per q.o. $y$ nell'insieme $E := \hat{\rho}^{-1}(\lambda)$. Ne segue che esiste $u \in L^2(\mathbb{R})$ non q.o. nulla che soddisfa la (9) se (e solo se) $E$ ha misura positiva (basta infatti prendere $u$ uguale all'antitrasformata di una qualunque funzione in $L^2(\mathbb{R})$ che sia nulla q.o. fuori di $E$ ma che non sia nulla q.o.).
Per concludere la dimostrazione osserviamo che per qualunque $\lambda$ esiste una funzione $\rho$ tale che $E$ ha misura positiva: basta infatti prendere come $\rho$ l'antitrasformata di una funzione di classe $C^1$ con supporto compatto che assume il valore $\lambda$ su un intervallo (abbiamo visto a lezione che la trasformata di una funzione $C^1$ con supporto compatto appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, e chiaramente lo stesso vale per l'antitrasformata).

## COMMENTI

- Esercizio 3, Molti dei presenti hanno applicato erroneamente la formula di cambio di variabile per gli integrali multipli!

- Esercizio 5. Usando il cambio di variabile
$$u(t,x) = v(t,x) + t + g(x) \quad \text{con} \quad g(x) := \frac{1}{2}x(x-\pi)\,,$$
il problema si riduce all'equazione del calore $v_t = v_{xx}$ con le condizioni agli estremi $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$ e la condizione iniziale $v(0,x) = -g(x)$, ed è noto che tale problema ammette una ed una sola soluzione $v$ continua su $[0,+\infty) \times [0,\pi]$ e di classe $C^\infty$ su $(0,+\infty) \times [0,\pi]$.

- Esercizio 5. Alcuni dei presenti hanno detto ottenuto la soluzione nella forma (7) e hanno detto che tale serie di funzioni converge totalmente con tutte le derivate su $[\delta,+\infty)\times\mathbb{R}$ per ogni $\delta > 0$. Questo è falso: si ha solo la convergenza totale delle funzioni e delle loro derivate rispetto alle variabile $x$.

- Esercizio 7. Esaminando l'equazione ci si rende conto che l'insieme $S_r$ è invariante per rotazioni attorno all'asse $z$, e dunque lo si ottiene facendo ruotare attorno a tale asse l'insieme $C_r$ dato dai punti di $S_r$ che appartengono al piano $xz$ e soddisfano $x \geq 0$. Per tali punti l'equazione (1) si riduce a $(x-1)^2 + z^2 = r^2$, e dunque $C_r$ è l'intersezione della circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio $r$ (nel piano $xz$) con il semipiano $x \geq 0$. Per $r < 1$ tale circonferenza è completamente contenuta nel semipiano $x > 0$, e quindi $S_r$ è un toro. Mentre per $r \geq 1$ ci si rende conto che $S_r$ non è una superficie (anche se questa non è una dimostrazione vera e propria).

- Per calcolare l'area di $S_r$ è anche possibile usare due diverse parametrizzazioni, una per l'intersezione di $S_r$ con il semispazio $z > 0$ e l'altra per l'intersezione con il semispazio $z < 0$ (l'intersezione di $S_r$ con il piano $z = 0$ ha area nulla), vale a dire
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \pm\sqrt{r^2 - (\rho-1)^2} \end{cases} \qquad \text{con } \rho \in (1-r, 1+r),\ \theta \in [0, 2\pi).$$
Usando queste parametrizzazioni i calcoli sono leggermente più complicati di quelli svolti sopra.