CORSO: **Analisi in più Variabili 2**
DOCENTI: **Giovanni Alberti (titolare) e Vincenzo M. Tortorelli**
CORSO DI STUDIO: **Matematica (primo livello, ex lege 270)**
COLLOCAZIONE: **primo semestre del terzo anno**
CODICE ESAME: **518AA**
NUMERO DI CREDITI: **6**
NUMERO DI ORE: **60**
ANNO ACCADEMICO: **2013-14**

Avvertenza. Questo corso sostituisce il corso di "Analisi in più Variabili III", non più attivato. Per gli studenti che hanno in piano di studi il corso di Analisi in più Variabili III l'esame verrà registrato con il vecchio titolo ed il vecchio codice (042AA).

Obiettivi formativi. Alla fine del corso lo studente deve avere una buona conoscenza teorica ed operativa dei seguenti argomenti: spazi L^p e spazi di Hilbert, serie e trasformata di Fourier (in L^1 e L^2), superfici regolari in $\mathbb{R}^n$, integrazione di k-forme e teorema di Stokes, funzioni armoniche.

Programma del corso [versione: 15 dicembre 2013]
Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Spazi L^p
   - 1.1 Disuguaglianze di Jensen, Hölder e di Minkowski.
   - 1.2 Spazi L^p. Completezza degli spazi L^p.
   - 1.3 Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^n$ e disuguaglianze collegate alle norme L^p. Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori. Approssimazione e regolarizzazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
2. Spazi di Hilbert
   - 2.1 Spazi di Hilbert reali; basi di Hilbert (sistemi ortonormali completi). Rappresentazione di un elemento dello spazio in termini di una base.
   - 2.2 Proiezione di un vettore su un sottospazio chiuso, e caratterizzazione in termini di minima distanza. Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
   - 2.3 *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*
3. Serie di Fourier ed applicazioni
   - 3.1 Le funzioni esponenziali e^{inx} (opportunamente rinormalizzate) formano una base di Hilbert di $L^2(-\pi,\pi)$. Serie di Fourier complessa per funzioni in $L^2(-\pi,\pi)$. Convergenza della serie di Fourier in L^2. Convergenza uniforme per le funzioni 2π-periodiche di classe C^1. Regolarità delle funzione e comportamento asintotico dei coefficienti.
   - 3.2 *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde.* Soluzione dell'equazione del calore e delle onde con condizioni di periodicità agli estremi tramite la serie di Fourier. Disuguaglianza isoperimetrica nel piano.
   - 3.3 Varianti della serie di Fourier: serie in seni e coseni (serie di Fourier reale); serie in seni. *Basi ortonormali e autovettori di operatori autoaggiunti.*
4. Trasformata di Fourier e applicazioni
   - 4.1 *Derivazione euristica della trasformata di Fourier a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier di funzioni in $L^1(\mathbb{R})$. Proprietà elementari della trasformata di Fourier.
   - 4.2 Dimostrazione della formula di inversione. La trasformata di Fourier preserva il prodotto scalare e la norma L^2. Trasformata di Fourier di funzioni in $L^2(\mathbb{R})$.
   - 4.3 *Risoluzione dell'equazione del calore tramite trasformata di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore; disuguaglianza di Heisenberg.*
5. Superfici e integrazione su superfici
   - 5.1 Superfici (sottovarietà) senza bordo di dimensione d e classe C^k in $\mathbb{R}^n$. Spazio tangente ad una superfice in un punto. Differenziale di una mappa di classe C^1 tra superfici. Superfici con bordo. Orientazione di una superficie e del suo bordo.
   - 5.2 Jacobiano e formula dell'area. Definizione della misura di volume d-dimensionale su una superficie tramite la formula dell'area. Integrazione di funzioni scalari su una superficie.

5.3 Applicazioni k-lineari alternanti su uno spazio vettoriale qualunque: prodotto esterno e rappresentazione in termini di una base. Teorema di Binet.
5.4 k-forme su un aperto di $\mathbb{R}^n$, rappresentazione in coordinate, prodotto esterno, differenziale e pull-back. Teorema di Stokes.

6. Funzioni armoniche (argomento fuori programma)

6.1 *Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di proprietà della media. Principio del massimo e unicità della soluzione dell'equazione di Laplace con dato al bordo assegnato.*
6.2 *Funzioni armoniche e funzioni olomorfe. Risoluzione dell'equazione di Laplace nel disco unitario tramite la serie di Fourier; rappresentazione della soluzione tramite nucleo di Poisson.*

Prerequisiti. Il contenuto dei corsi di analisi e geometria dei primi due anni. Serviranno in particolare le nozioni fondamentali di algebra lineare, topologia in spazi metrici, derivate e integrali di funzioni in più variabili, teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, formula di cambio di variabile negli integrali multipli e teorema di Fubini, convergenza uniforme e totale per serie di funzioni, teorema della divergenza nella forma classica, funzioni olomorfe e calcolo degli integrali con il metodo dei residui.

Mailing list e pagina web del corso. Le comunicazioni riguardanti corso ed esami vengono inviate per posta elettronica a chi si è iscritto alla mailing list del corso, e pubblicizzate sulla pagina web del docente: `http://www.dm.unipi.it/~alberti/`. Su tale pagina saranno disponibili gli appunti del corso, e i testi e le soluzioni delle varie prove d'esame.

Appelli ed esami. L'esame è suddiviso in una prova scritta ed una prova orale. Per l'ammissione alla prova orale è necessario aver superato la prova scritta; la prova orale va sostenuta nello stesso appello della prova scritta. Non è consentito l'uso di libri di testo o appunti durante le prove scritte. Durante il corso è previsto lo svolgimento di due prove in itinere (compitini) che sostituiscono la prova scritta del primo o del secondo appello. In tutto l'anno accademico sono previsti cinque appelli d'esame (indicativamente a gennaio, febbraio, giugno, luglio e settembre). Gli studenti interessati a sostenere l'esame in un dato appello sono pregati di utilizzare la procedura di iscrizione online (le istruzioni si trovano sulla pagina web di cui sopra).

Testi di riferimento. Il corso non segue alcun testo preciso e si raccomanda quindi la frequenza. La maggior parte degli argomenti contenuti nelle sezioni 1-4 si trova in [1], mentre gli argomenti nella sezione 5 si trovano invece sia in [2] che in [3]. Si noti tuttavia che la presentazione proposta in questi testi differisce a volte significativamente da quella data a lezione.

[1] W. Rudin: *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill 1974 (traduzione italiana: *Analisi reale e complessa*, Boringhieri, 1974).
[2] W.H. Fleming: *Functions of several variables.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1977.
[3] R. Courant e F. John: *Introduction to Calculus and Analysis. Volume 2.* Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1974.