appunti per il corso di Analisi Matematica I
corso di laurea in Ingegneria Gestionale, a.a. 2015-16
autore: Giovanni Alberti

Equazioni differenziali [versione: 20 dicembre 2015]

Richiamo delle nozioni fondamentali

In un'equazione differenziale l'incognita da determinare è una funzione (e non un numero) che indichiamo solitamente con $x(t)$. L'equazione è un'identità che coinvolge la funzione x e le sue derivate $\dot{x}, \ddot{x}, \dots$, e per soluzione si intende una qualunque funzione x che soddisfa questa identità per tutti i valori di t nel suo dominio di definizione. Per esempio $x(t) := e^{-t}$ è una soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x}(t) + e^t\, x^2(t) = 0$.

Per semplificare la notazione si omette di solito di esplicitare la dipendenza di x dalla variabile indipendente t, scrivendo quindi x al posto di $x(t)$ e così via; in questo modo l'equazione precedente diventa $\dot{x} + e^t x^2 = 0$.

1. Equazioni differenziali del primo ordine. Si chiamano equazioni differenziali del primo ordine tutte quelle che si possono ricondurre alla forma

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

dove f è una funzione delle variabili t e x che si suppone essere nota. In altre parole, si tratta delle equazioni per cui si riesce ad esprimere la derivata $\dot{x}$ tramite una formula (nota) che coinvolge solamente t e x.

Tipicamente le soluzioni di un'equazione differenziale del primo ordine formano una famiglia di funzioni dipendente da un parametro reale. Inoltre, scelti dei numeri t_0 e x_0, esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (1) che soddisfa la *condizione iniziale*

$$x(t_0) = x_0 \,. \tag{2}$$

Quanto appena affermato è il contenuto del teorema di esistenza e unicità (o teorema di Cauchy) per le equazioni differenziali del primo ordine; l'enunciato preciso di questo teorema è piuttosto complesso e quindi lo omettiamo.

Nel seguito diremo che x è la *soluzione generale* dell'equazione (1) se si tratta di una famiglia di funzioni ad un parametro che comprende tutte (o quasi) le soluzioni della (1). Dunque la formula che esprime x in funzione di t deve includere un parametro reale c che può essere scelto liberamente, come ad esempio $x(t) = ce^t + t^2$ con $c \in \mathbb{R}$.

Si noti che la maggior parte delle equazioni differenziali non può essere risolta con formule esplicite ma solo numericamente. Tra le poche equazioni del primo ordine che si possono risolvere esplicitamente considereremo solo quelle lineari e quelle a variabili separabili.

2. Equazioni lineari del primo ordine. Un'equazione differenziale del primo ordine si dice *lineare* se può essere ricondotta alla forma

$$\dot{x} + a(t)\, x = b(t) \tag{3}$$

dove $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni note (ovvero $\dot{x} = f(t, x)$ con $f(t, x) := b(t) - a(t)\, x$). La funzione $a(t)$ è detta *coefficiente* dell'equazione, mentre $b(t)$ è chiamata *termine noto.*

Per risolvere questa equazione la moltiplichiamo per il fattore $e^{A(t)}$ dove $A(t)$ è una qualunque primitiva della funzione $a(t)$. In questo modo il termine di sinistra dell'equazione coincide con la derivata del prodotto $e^{A(t)}x$:

$$e^{A(t)}\dot{x} + a(t)\, e^{A(t)}x = e^{A(t)}b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \big(e^{A(t)}x\big)' = e^{A(t)}b(t)\,.$$

Quindi $e^{A(t)}x$ deve essere una primitiva di $e^{A(t)}b(t)$, vale a dire

$$e^{A(t)}x = \int e^{A(t)}b(t)\, dt + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R},$$

e dividendo per $e^{A(t)}$ otteniamo infine la formula risolutiva

$$x(t) = e^{-A(t)} \left[\int e^{A(t)} b(t)\, dt + c \right] \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Vale la pena di sottolineare che se la funzione b è identicamente nulla (nel qual caso l'equazione (3) si dice *omogenea*) allora la (4) diventa

$$x(t) = c e^{-A(t)} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

3. Equazioni a variabili separabili. Un'equazione differenziale del primo ordine si dice *a variabili separabili* se può essere ricondotta alla forma

$$\dot{x} = g(x)\, h(t) \tag{6}$$

dove g ed h sono funzioni note (vale a dire $\dot{x} = f(t,x)$ con $f(t,x) = g(x)\, h(t)$).

Per risolvere quest'equazione, portiamo $g(x)$ a sinistra dell'uguale, e quindi calcoliamo le primitive (integrali indefiniti) di entrambi i membri dell'equazione così ottenuta, usando il cambio di variabile $x = x(t)$ per quello di sinistra:

$$\frac{\dot{x}}{g(x)} = h(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))}\, dt = \int h(t)\, dt + c \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dx}{g(x)} = \int h(t)\, dt + c\,;$$

la presenza della costante c è dovuta al fatto che due primitive della stessa funzione non sono necessariamente uguali, ma differiscono per una costante.

Supponendo di aver trovato una primitiva G di $1/g$ ed una primitiva H di h, otteniamo quindi

$$G(x) = H(t) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Per concludere basta quindi esplicitare x usando l'inversa della funzione G (supponendo di conoscerla):

$$x(t) = G^{-1}(F(t) + c) \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

4. Osservazioni. (i) Nel procedimento spiegato sopra si suppone implicitamente che la funzione $g(x)$ non si annulli, in modo da poter liberamente dividere per $g(x)$. E in effetti questo metodo permette di trovare tutte le soluzioni x dell'equazione (6) con condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ tale che $g(x_0) \neq 0$. Se invece $g(x_0) = 0$ allora la soluzione cercata è la funzione costante $x(t) := x_0$. In altre parole le soluzioni dell'equazione (6) sono tutte quelle ottenute con la procedura spiegata sopra più le funzioni costanti $x(t) := x_0$ dove x_0 risolve l'equazione $g(x_0) = 0$.

(ii) Se oltre all'equazione (6) viene specificata anche una condizione iniziale come la (2), è possibile determinare il valore della costante c che appare nelle formule (7) e (8) ponendo $t = t_0$ direttamente nella (7) ed ottenendo l'identità $G(x_0) = F(t_0) + c$, da cui si ricava $c = G(x_0) - F(t_0)$.

5. Equazioni del secondo ordine. Si chiamano *equazioni differenziali del secondo ordine* tutte quelle che si possono ricondurre alla forma

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \tag{9}$$

dove f è una funzione di tre variabili data. In altre parole si tratta delle equazioni in cui si riesce ad esprimere la derivata seconda della funzione incognita x tramite una formula che coinvolge solamente t, x e $\dot{x}$.

Tipicamente le soluzioni dell'equazione differenziale (9) sono una famiglia di funzioni dipendente da *due* parametri, e scelti dei numeri t_0, x_0 e x_1, esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (9) che soddisfa le condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(t_0) = x_1\,. \tag{10}$$

Nel seguito diremo che x è la *soluzione generale* dell'equazione (9) se si tratta di una famiglia di funzioni a due parametri che comprende tutte (o quasi) le soluzioni dell'equazione. Dunque la formula che esprime x in funzione di t deve includere due parametri reali c_1 e c_2 che possono essere scelti liberamente, come ad esempio $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

6. Equazioni lineari del secondo ordine. Tra le equazioni del secondo ordine ci limitiamo a considerare quelle *lineari*, vale a dire quelle che possono essere ricondotte alla forma

$$\ddot{x} + a(t)\, \dot{x} + b(t)\, x = c(t)\,.$$

Le funzioni $a(t)$ e $b(t)$ vengono chiamate *coefficienti* dell'equazione, mentre $c(t)$ viene detta *termine noto*. L'equazione si dice *omogenea* se il termine noto $c(t)$ è identicamente nullo, e si dice *a coefficienti costanti* se a e b sono numeri (invece che funzioni di t).

Nei prossimi paragrafi spieghiamo come risolvere le equazioni lineari a coefficienti costanti omogenee oppure con un termine noto $c(t)$ di tipo particolare.

7. Equazioni lineari omogenee. Consideriamo ora l'equazione lineare omogenea

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = 0\,. \tag{11}$$

La proprietà chiave delle equazioni di questo tipo è che l'insieme S delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione due. Il fatto che S sia uno spazio vettoriale significa che

(a) se x è una soluzione della (11) e $c \in \mathbb{R}$ allora anche cx è una soluzione della (11);
(b) se x_1 e x_2 sono soluzioni della (11) allora anche $x_1 + x_2$ è una soluzione della (11);

mentre il fatto che abbia dimensione due significa che

(c) se x_1 e x_2 sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (11) allora la soluzione generale della (11) è data da tutte le combinazioni lineari di x_1 e x_2, vale a dire

$$x(t) = c_1\,x_1(t) + c_2\,x_2(t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ricordo che due vettori sono linearmente indipendenti se (e solo se) non sono uno multiplo dell'altro; questo vuol dire che due funzioni x_1 e x_2 sono linearmente indipendenti se (e solo se) non esiste alcuna *costante* c per cui vale l'identità $x_1(t) = c\,x_2(t)$ oppure $x_2(t) = c\,x_1(t)$. In particolare, quando una delle due funzioni non è identicamente nulla, per esempio la prima, allora x_1 e x_2 sono linearmente indipendenti se il rapporto $x_2(t)/x_1(t)$ non è costante (per i t dove è definito).

La conseguenza fondamentale di quanto appena detto (lo ribadisco) è che per risolvere l'equazione differenziale (11) basta trovare due soluzioni x_1 e x_2 che non siano una multipla dell'altra.

8. Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti. Consideriamo ora l'equazione omogenea a coefficienti costanti

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0\,. \tag{12}$$

In questo caso cerchiamo le soluzioni x_1 e x_2 da usare nella formula risolutiva al punto (c) del paragrafo precedente tra le funzioni del tipo $x = e^{\lambda t}$ con λ parametro reale. In questo caso $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ e $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$, e sostituendo queste espressioni nella (11) otteniamo

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0\,,$$

e chiaramente questa uguaglianza è verificata per ogni t se λ risolve l'equazione $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Quindi, dette λ_1 e λ_2 le soluzioni di questa equazione, la soluzione generale della (12) è data dalla combinazioni lineari di $x_1(t) := e^{\lambda_1 t}$ e $x_2(t) := e^{\lambda_2 t}$.

Chiaramente questo ragionamento funziona fintanto che le soluzioni λ_1 e λ_2 sono due numeri reali distinti. Lo procedura di risoluzione che segue riassume quanto detto sopra, includendo anche il caso in cui λ_1 e λ_2 sono uguali, o sono numeri complessi.

Per risolvere la (12) si scrive come prima cosa l'*equazione caratteristica* ad essa associata

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0\,, \tag{13}$$

e se ne calcolano le radici λ_1 e λ_2. A questo punto sono possibili tre casi, al variare del segno del discriminante $\Delta = a^2 - 4b$.

Caso 1: $\Delta > 0$. In questo caso l'equazione caratteristica (13) ha due soluzioni reali e distinte λ_1 e λ_2, quindi $x_1 := e^{\lambda_1 t}$ e $x_2 := e^{\lambda_2 t}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti della (12) e la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Caso 2: $\Delta = 0$. In questo caso l'equazione caratteristica (13) ammette un'unica soluzione reale λ; pertanto una soluzione della (12) è $x_1 := e^{\lambda t}$, come prima, mentre una seconda soluzione è $x_2 := te^{\lambda t}$, e la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Caso 3: $\Delta < 0$. In tal caso l'equazione (13) ammette due soluzioni *complesse* che possono essere scritte nella forma $\lambda_{1,2} = \rho \pm \omega i$, e due soluzioni della (12) sono $x_1 := e^{\rho t}\cos(\omega t)$ e $x_2 := e^{\rho t}\sin(\omega t)$, per cui la soluzione generale è

$$x(t) = e^{\rho t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

9. Osservazioni. (i) Andrebbe verificato che in ciascuno dei casi considerati sopra, le soluzioni proposte x_1 e x_2 sono linearmente indipendenti, cioè non possono essere ottenute una dall'altra tramite moltiplicazione per una costante. Nel caso 1 basta osservare che il rapporto

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_1 t}} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

non è una costante (perché il coefficiente $\lambda_1 - \lambda_2$ è diverso da zero!). Analogamente nel caso 2 abbiamo che

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{te^{\lambda t}}{e^{\lambda t}} = t\,,$$

mentre nel caso 3

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{e^{\rho t}\sin(\omega t)}{e^{\rho t}\cos(\omega t)} = \tan(\omega t)\,.$$

(ii) Cerchiamo di capire da dove viene la soluzione $te^{\lambda t}$ utilizzata nel caso $\Delta = 0$. In questo caso $b = a^2/4$, e l'unica soluzione dell'equazione caratteristica è $\lambda = -a/2$. Consideriamo ora l'equazione modificata

$$\ddot{x} + a\dot{x} + (b - h^2)x = 0$$

dove h è un numero piccolo e positivo; in tal caso le radici dell'equazione caratteristica sono $\lambda_{1,2} = -a/2 \pm h = \lambda \pm h$ e pertanto le soluzioni dell'equazione modificata sono date dalle combinazioni lineari di $x_1(t) := e^{(\lambda+h)t}$ e $x_2(t) := e^{(\lambda-h)t}$; in particolare la combinazione lineare

$$\frac{1}{2h}x_1(t) - \frac{1}{2h}x_2(t) = \frac{e^{(\lambda+h)t} - e^{(\lambda-h)t}}{2h} = \frac{e^{ht} - e^{-ht}}{2h}\, e^{\lambda t}$$

è pure una soluzione, e prendendo il limite di questa soluzione per h che tende a zero otteniamo una soluzione dell'equazione di partenza (12), e questo limite è proprio $te^{\lambda t}$, perché

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{ht} - e^{-ht}}{2h} = t\,.$$

(iii) Cerchiamo di capire da dove vengono le soluzioni $e^{\rho t}\cos(\omega t)$ e $e^{\rho t}\sin(\omega t)$ nel caso $\Delta < 0$. In questo caso le soluzioni dell'equazione caratteristica sono i numeri complessi $\lambda_{1,2} = \rho \pm \omega i$, e si può verificare che anche in questo caso $x_1 := e^{\lambda_1 t}$ ed $x_2 := e^{\lambda_2 t}$ sono soluzioni dell'equazione differenziale (12), a patto di ammettere tra le soluzioni anche funzioni a valori complessi (invece che reali), e ricordando la definizione di esponenziale di un numero immaginario otteniamo

$$x_1 = e^{\rho t + \omega t i} = e^{\rho t}\, e^{\omega t i} = e^{\rho t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$$

e analogamente

$$x_2 = e^{\rho t}(\cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t)) = e^{\rho t}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))\,.$$

Ma allora anche le combinazioni lineari $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ e $\frac{1}{2i}(x_1 - x_2)$ sono soluzioni della (12), e usando le formule precedenti otteniamo

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = e^{\rho t}\cos(\omega t) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2i}(x_1 - x_2) = e^{\rho t}\sin(\omega t)\,.$$

(iv) Dati due numeri reali c_1, c_2, indichiamo con r e α le coordinate polari del punto del piano con coordinate cartesiane (c_2, c_1), per cui $c_1 = r\sin\alpha$ e $c_2 = r\cos\alpha$. Usando allora la formula per il seno della somma di due angoli otteniamo

$$c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) = r\sin\alpha\, \cos(\omega t) + r\cos\alpha\, \sin(\omega t) = r\sin(\omega t + \alpha)\,.$$

Pertanto la soluzione in (16) può essere riscritta nella forma

$$x(t) = re^{\rho t}\sin(\omega t + \alpha) \quad \text{con } r \in [0, +\infty),\ \alpha \in [0, 2\pi). \tag{17}$$

10. Equazioni lineari non omogenee. Ritorniamo all'equazione

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = c(t)\,. \tag{18}$$

Un fatto generale che ci aiuterà nella risoluzione di queste equazioni è il seguente: se x_1 è una soluzione dell'equazione (18) con termine noto $c_1(t)$, vale a dire

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = c_1(t)\,,$$

e x_2 è una soluzione dell'equazione (18) con termine noto $c_2(t)$, vale a dire

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = c_2(t)\,,$$

allora la funzione $x := x_1 + x_2$ risolve l'equazione (18) con termine noto $c_1(t) + c_2(t)$, vale a dire

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = c_1(t) + c_2(t)\,.$$

Da quanto appena detto segue che se $\tilde{x}$ è una soluzione dell'equazione non omogenea (18), e x_{om} è la soluzione generale dell'*equazione omogenea associata* alla (18), vale a dire

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = 0\,, \tag{19}$$

allora

$$x = \tilde{x} + x_{\mathrm{om}} \tag{20}$$

è la soluzione generale dell'equazione non omogenea (18). (Si noti per inciso che x è una famiglia di soluzioni a due parametri perché x_{om} è una famiglia di soluzioni a due parametri).

La formula (20) permette dunque di ottenere la soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea (18) a patto di aver trovato una soluzione particolare $\tilde{x}$ della (18) (quindi non la soluzione generale) e la soluzione generale x_{om} dell'equazione omogenea associata (19). In altre parole abbiamo spezzato il problema in due sottoproblemi: la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione lineare di partenza e la ricerca della soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

11. Equazioni lineari a coefficienti costanti. Vogliamo ora utilizzare la formula (20) per risolvere l'equazione lineare non omogenea a coefficienti costanti

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c(t)\,. \tag{21}$$

L'equazione omogenea associata è a coefficienti costanti e pertanto sappiamo come trovarne la soluzione generale x_{om}. Il problema è quindi trovare una soluzione $\tilde{x}$ dell'equazione non omogenea (21).

Quando il termine noto $c(t)$ appartiene ad alcune particolari classi di funzioni è possibile trovare una soluzione particolare $\tilde{x}$ della (21) tra le funzioni di un certo tipo. Nella colonna di sinistra della tabella sotto sono elencate diverse classi di termini noti $c(t)$, e in corrispondenza nella colonna di destra sono indicate le classi di funzioni in cui cercare una soluzione particolare $\tilde{x}$. I numeri λ_1, λ_2 che appaiono nella tabella sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ dell'equazione omogenea associata alla (21), mentre m e α indicano delle costanti.

tipo di termine noto $c(t)$	**tipo di soluzione particolare** $\tilde{x}(t)$
costante	costante
polinomio di grado d	polinomio di grado d
multiplo di e^{mt}	
se $m \neq \lambda_1, \lambda_2$	multiplo di e^{mt}
se $m = \lambda_1$ o λ_2 e $\lambda_1 \neq \lambda_2$	multiplo di te^{mt}
se $m = \lambda_1 = \lambda_2$	multiplo di t^2e^{mt}
combinazione lineare di $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$	
se $\pm\alpha i \neq \lambda_{1,2}$	combin. lin. di $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$
se $\pm\alpha i = \lambda_{1,2}$	combin. lin. di $t\sin(\alpha t)$ e $t\cos(\alpha t)$
combin. lin. di $e^{mt}\sin(\alpha t)$ e $e^{mt}\cos(\alpha t)$	
se $m \pm \alpha i \neq \lambda_{1,2}$	combin. lin. di $e^{mt}\sin(\alpha t)$ e $e^{mt}\cos(\alpha t)$
se $m \pm \alpha i = \lambda_{1,2}$	combin. lin. di $te^{mt}\sin(\alpha t)$ e $te^{mt}\cos(\alpha t)$

Dunque la procedura per risolvere l'equazione non omogenea a coefficienti costanti (21), almeno nel caso in cui il termine noto appartiene ad una delle classi elencate sopra, è la seguente: prima si scrive e si risolve l'equazione omogenea associata, e poi si cerca una soluzione particolare dell'equazione di partenza seguendo le indicazioni date in tabella.

12. Esempio. Risolviamo l'equazione

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 4t + 8\,.$$

L'equazione omogenea associata è $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$, l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ed ha un'unica soluzione (doppia) $\lambda = 2$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $x_{\text{om}} = e^{2t}(c_1 + c_2 t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Siccome il termine noto $4t + 8$ è un polinomio di grado 1, la tabella ci dice di cercare una soluzione particolare dell'equazione di partenza tra i polinomi di grado 1, vale a dire una soluzione della forma $\tilde{x} = at + b$.

Sostituendo quest'espressione nell'equazione di partenza otteniamo $0 - 4a + 4(at + b) = 4t - 8$ ovvero $(4a - 4)t + (4b - 4a - 8) = 0$, e chiaramente questa identità è verificata per ogni t se i coefficienti $4a - 4$ e $4b - 4a - 8$ sono entrambi nulli, vale a dire per $a = 1$ e $b = 3$.

Dunque $t + 3$ è la soluzione particolare, e la soluzione generale è

$$x(t) = t + 3 + e^{2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

13. Esempio. Risolviamo l'equazione

$$\ddot{x} - x = 6e^{2t}\,.$$

L'equazione omogenea associata è $\ddot{x} - x = 0$, l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 1 = 0$ ed ha soluzioni $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Quindi $x_{\text{om}} = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Siccome il termine noto $6e^{2t}$ è un multiplo di e^{2t}, la tabella ci dice di cercare una soluzione particolare della forma $\tilde{x} = ae^{2t}$ (notare che 2 non è una soluzione dell'equazione caratteristica). Sostituendo quest'espressione nell'equazione di partenza otteniamo $4ae^{2t} - ae^{2t} = 6e^{2t}$ ovvero $(3a - 6)e^{2t} = 0$, e chiaramente questa identità è verificata per ogni t se il coefficiente $3a - 6$ è nullo, cioè per $a = 2$.

Dunque $2e^{2t}$ è una soluzione particolare dell'equazione di partenza, e la soluzione generale è

$$x(t) = 2e^{2t} + c_1 e^t + c_2 e^{-t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

14. Esempio. Modifichiamo il termine noto dell'equazione nell'esempio precedente:

$$\ddot{x} - x = 4e^{-t}\,.$$

In questo caso la tabella ci dice di cercare una soluzione particolare tra le funzioni del tipo $\bar{x} = ate^{-t}$ perché -1 è una delle due soluzioni dell'equazione caratteristica. Sostituendo quest'espressione nell'equazione otteniamo $a(t-2)e^{-t} - ate^{-t} = 4e^{-t}$ ovvero $(-2a - 4)e^t = 0$, e chiaramente questa identità è verificata per ogni t se il coefficiente $-2a - 4$ è nullo, cioè per $a = -2$.

Dunque $-2te^{-t}$ è una particolare soluzione, e la soluzione generale è

$$x(t) = -2te^{-t} + c_1 e^t + c_2 e^{-t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

15. Esempio. Risolviamo l'equazione

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 5t - 1 + 6e^{-t}\,.$$

L'equazione omogenea associata è $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ e la corrispondete equazione caratteristica $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = -2 \pm i$. Pertanto $x_{\text{om}} = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

In questo caso il termine noto $5t - 1 + 6e^{-t}$ non appartiene a nessuna delle classi di funzioni presenti nella tabella, però si scrive come somma di $5t - 1$ e $6e^{-t}$, che invece appaiono nella tabella. Pertanto una soluzione particolare per l'equazione di partenza è data dalla somma di una soluzione particolare di $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 5t - 1$ e di una soluzione particolare di $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 6e^{-t}$. Facendo riferimento alla tabella, cerchiamo una soluzione della prima equazione della forma $x = at + b$ ottenendo $x = t - 1$, e poi cerchiamo una soluzione della seconda equazione della forma $x = ae^{-t}$ ottenendo $x = 3e^{-t}$.

Quindi una soluzione dell'equazione di partenza è $t - 1 + 3e^{-t}$ e la soluzione generale è

$$x(t) = t - 1 + 3e^{-t} + e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

16. Ancora sulle equazioni lineari del primo ordine. La formula risolutiva (7) per le equazioni differenziali lineari del primo ordine è molto generale ma richiede di calcolare un integrale indefinito che talvolta risulta essere piuttosto complicato. Per questa ragione, nel di un'equazione a coefficienti costanti del primo ordine, vale a dire,

$$\dot{x} + ax = b(t)\,,$$

può essere più semplice procedere come per le equazioni a coefficienti costanti del secondo ordine, cioè usare la formula

$$x = \tilde{x} + x_{\mathrm{om}}$$

dove $x_{\mathrm{om}} = ce^{-at}$ è la soluzione dell'equazione omogenea associata $\dot{x} + ax = 0$ e $\tilde{x}$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Quest'ultima può essere trovata seguendo la stessa procedura utilizzata per le equazioni del secondo ordine (chiaramente in questo caso il termine noto è $b(t)$).

17. Esempio. Consideriamo l'equazione

$$\dot{x} - 2x = -5\sin t\,.$$

L'equazione omogenea associata è $\dot{x} - 2x = 0$ e la corrispondete equazione caratteristica $\lambda - 2 = 0$ ha come soluzione $\lambda = 2$; pertanto $x_{\mathrm{om}} = ce^{2t}$ con $c \in \mathbb{R}$.

Inoltre per il termine noto $2\sin t$ la tabella suggerisce di cercare una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = a\cos t + b\sin t$; sostituendo quest'espressione nell'equazione di partenza otteniamo $(b - 2a)\cos t + (-a - 2b + 5)\sin t = 0$, e questa identità è soddisfatta per ogni t se i coefficienti $b - 2a$ e $-a - 2b + 5$ sono entrambi nulli, vale a dire per $a = 1$ e $b = 2$.

Quindi $\cos t + 2\sin t$ è una soluzione particolare dell'equazione di partenza e quella generale è

$$x(t) = \cos t + 2\sin t + ce^{2t} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Esercizi

1. Verificare le seguenti affermazioni (senza ricorrere ad alcuna formula risolutiva):
   a) $x(t) := \sin^2 t$ risolve l'equazione $\dot{x}^2 = 4x(1-x)$;
   b) $x(t) := (t+c)^{-2}$ risolve l'equazione $\dot{x}^2 = 4x^3$ per ogni $c \in \mathbb{R}$;
   c) $x(t) := \log t$ risolve l'equazione $\ddot{x}\,e^x + t^2\dot{x}^3 = 0$;
   d) $x(t) := ce^{-t^2/2}$ risolve l'equazione $\ddot{x} = (t^2-1)x$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

2. Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := t^a$ risolve l'equazione $t^2\ddot{x} - 6x = 0$.

3. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := ae^{bt}$ risolve l'equazione $\ddot{x} - 4x = e^t$.

4. Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali dire se sono a variabili separabili, lineari del primo ordine, lineari del secondo ordine, o altro; nel caso di quelle lineari specificare se sono omogenee e/o a coefficienti costanti:

   a) $\dot{x}x^2 = t$, b) $\dot{x} - 2x^2 = t$, c) $\dot{x} - 2x^2 = 0$, d) $\ddot{x} = tx + e^t$, e) $\ddot{x} + t\dot{x} + 3t^2x = 0$,
   f) $\ddot{x} = t^2x$, g) $\ddot{x} = 3x + 4\dot{x}$, h) $\dot{x} = -2x + e^t$, i) $\dot{x} = x^2 + t^2$, l) $\ddot{x} = tx$.

5. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

   a) $\dot{x} = \dfrac{t}{x}$, b) $\dot{x} = x^2 + 1$, c) $\dot{x} = e^x\cos t$, d) $\dot{x} = e^t(x-1)$, e) $\dot{x} = t^2\sqrt{1-x^2}$.

6. a) Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1/2$.
   b) Cercare le soluzioni delle equazioni d) ed e) dell'esercizio precedente che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 1$.

7. Risolvere le seguenti equazioni lineari del primo ordine utilizzando la formula (7):

   a) $\dot{x} - 4x = 8$, b) $\dot{x} + 2tx = 0$, c) $\dot{x} + \dfrac{x}{t+1} = 6t$, d) $\dot{x} - e^tx = 0$.

8. Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

9. Verificare direttamente (cioè senza utilizzare alcuna formula risolutiva) le seguenti proprietà delle equazioni lineari omogenee del primo e secondo ordine, vale a dire quelle della forma $\dot{x} + a(t)\,x = 0$ oppure $\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = 0$:
   a) Se x_1 e x_2 sono soluzioni dell'equazione allora $x := x_1 + x_2$ è pure una soluzione;
   b) Se x_1 è una soluzione dell'equazione e $c \in \mathbb{R}$ allora $x := cx_1$ è pure una soluzione;
   c) se i coefficienti a e b sono costanti, la funzione $x := e^{\lambda t}$ è una soluzione se λ risolve l'equazione caratteristica associata, vale a dire $\lambda + a = 0$ per quella del primo ordine e $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ per quella del secondo ordine.

10. Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti:
    a) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$, b) $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$, c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$, d) $\ddot{x} + 9x = 0$;
    e) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$, f) $\ddot{x} - 4x = 0$, g) $\dot{x} + 2x = 0$, h) $\dot{x} - 3x = 0$.

11. Trovare le soluzioni dei seguenti problemi ai dati iniziali:
$$\text{a)} \begin{cases} \dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 2 \end{cases}, \quad \text{b)} \begin{cases} \ddot{x} - 4x = 0 \\ x(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}, \quad \text{c)} \begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = -2 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}, \quad \text{d)} \begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}.$$

12. Si consideri l'equazione omogenea a coefficienti costanti $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$. Verificare direttamente che se l'equazione caratteristica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ha un'unica soluzione reale λ allora $te^{\lambda t}$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$. [*Si osservi che in questo caso* $a = -2\lambda$ *e* $b = \lambda^2$.]

13. a) Trovare tutti gli $a \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $x(t) := t^a$ risolve l'equazione lineare omogenea a coefficienti non costanti
$$\ddot{x} - \frac{2\dot{x}}{t} + \frac{2x}{t^2} = 0\,.$$
    b) Scrivere la soluzione generale di quest'equazione.
    c) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(1) = 0$ e $\dot{x}(1) = 1$.

14. a) Scrivere $x(t) := \sin t + \sqrt{3}\,\cos t$ nella forma $x(t) = r\sin(t + \varphi)$ per opportuni r e φ, e disegnarne il grafico.
    d) Scrivere $x(t) := e^{-t}(\sin t + \sqrt{3}\,\cos t)$ nella forma $x(t) = re^{-t}\sin(t + \varphi)$ per opportuni r e φ, e disegnarne il grafico.

15. Trovare una soluzione particolare $\tilde{x}$ per ciascuna delle seguenti equazioni lineari non omogenee seguendo le indicazioni della tabella data sopra (per le prime equazioni queste indicazioni sono esplicitate tra parentesi):
    a) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = e^t$ $[\tilde{x} = ate^t]$, b) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 4e^t$ $[\tilde{x} = at^2e^t]$,
    c) $\dot{x} - 2x = 2t^2$ $[\tilde{x} = at^2 + bt + c]$, d) $\dot{x} + 2x = e^{-2t}$ $[\tilde{x} = ate^{-2t}]$,
    e) $\ddot{x} + 4x = \sin(2t)$ $[\tilde{x} = at\cos(2t) + bt\sin(2t)]$, f) $\dot{x} + x = 3t$,
    g) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^{-t}$, h) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t\cos t$, i) $\dot{x} + 2x = 4\cos(2t)$.

16. Siano x_1 e x_2 rispettivamente soluzioni delle equazioni lineari non omogenee
$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = c_1(t) \quad \text{e} \quad \ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = c_2(t)\,.$$
    Verificare che $x := x_1 + x_2$ risolve l'equazione
$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = c_1(t) + c_2(t)\,.$$

17. Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine $\dot{x} + 2x = 2t - 3e^t$ risolvendo prima l'equazione omogenea associata e poi cercando una soluzione particolare di $\dot{x} + 2x = 2t$ ed una di $\dot{x} + 2x = -3e^t$.

18. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine $\dot{x}+4x = 16t$ risolvendo prima l'equazione omogenea associata e poi trovando una soluzione particolare.
b) Trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

19. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} + x = e^{-2t}$.
b) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.

20. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} + 2x = 4 - 3\sin t + 2\sin(2t)$.

21. Trovare le soluzioni dei seguenti problemi alle condizioni iniziali:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = x^2 \cos t \\ x(0) = 1 \end{cases} , \quad \text{b) } \begin{cases} \ddot{x} - x = 2t \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} , \quad \text{c) } \begin{cases} \dot{x} + 2x = 4 \\ x(0) = 1 \end{cases} , \quad \text{d) } \begin{cases} \dot{x} = 3t^2(1 + x^2) \\ x(0) = 1 \end{cases} .$$

22. Utilizzando il cambio di variabile $x = tz$ risolvere l'equazione differenziale

$$\dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{t}{2x} .$$