Versione: 23 settembre 2016

Università di Pisa

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi Matematica I

a.a. 2015-16

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 19 dicembre 2015]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - 1.1 Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
   - 1.2 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, immagine, funzione inversa; funzioni crescenti e decrescenti.
   - 1.3 Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.4 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
2. Limiti di funzioni e continuità
   - 2.1 Limiti di funzioni, proprietà elementari, forme indeterminate.
   - 2.2 Funzioni continue. Esistenza del minimo e del massimo di una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass).
3. Derivate
   - 3.1 Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico.
   - 3.2 Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.3 Segno della derivata e monotonia. Segno della derivata seconda e convessità. Individuazione dei punti di massimo e di minimo (locali) di una funzione. Uso delle derivate per disegnare il grafico di una funzione.
   - 3.4 Teoremi di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - 3.5 Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero.
   - 3.6 Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione, espressione del resto come "o grande" e nella forma di Lagrange. Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
4. Alcuni risultati astratti
   - 4.1 *Numeri interi, razionali e reali. Estremo superiore ed inferiore di un insieme qualunque di numeri reali. Completezza dei numeri reali.*
   - 4.2 Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.
   - 4.3 Teorema di esistenza degli zeri. Algoritmo di bisezione e algoritmo di Newton.
   - 4.4 *Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Dimostrazione parziale del teorema di de l'Hôpital. Dimostrazione rigorosa (non grafica) della relazione tra monotonia e segno della derivata. Dimostrazione del teorema dello sviluppo di Taylor con resto di Lagrange.*
5. Integrali
   - 5.1 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. Un'interpretazione fisica dell'integrale.
   - 5.2 Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale.
   - 5.3 Regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti.
   - 5.4 Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

5.5 Legge oraria di un punto in movimento nel piano o nello spazio, velocità ed accelerazione come derivate, distanza percorsa come integrale del modulo della velocità.

6. Integrali impropri

6.1 Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
6.2 Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
6.3 Integrali impropri non semplici.

7. Serie numeriche e serie di potenze

7.1 Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Esempio fondamentale: la serie geometrica.
7.2 Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: dell'integrale, del confronto e del confronto asintotico, Esempio fondamentale: la serie armonica generalizzata.
7.3 Criteri di convergenza per le serie a termini di segno variabile: della convergenza assoluta, della radice e del rapporto.
7.4 Serie di potenze e raggio di convergenza.
7.5 Serie di Taylor. Calcolo del raggio di convergenza per le serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Coincidenza della serie di Taylor con la funzione per alcune funzioni elementari. *Espressione dei numeri e e π come serie. Giustificazione della formula* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

8. Equazioni differenziali

8.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica. Significato delle condizioni iniziali.
8.2 Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
8.3 Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee, e ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee (per certe classi di termini noti).

T E S T I

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin(\pi x) \geq 1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1/2, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $(-\infty, 1]$ della funzione $f(x) := \arctan(x^3 - x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} a(x^2+1) & \text{per } x \geq 2, \\ (x/2)^b - a & \text{per } x < 2. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (2x + a)\exp(x^2)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{e^x - 1}{(\sin(\pi x))^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+2x^3)}{x^3 e^x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2} + x^2}{e^{3x}}$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 7 della funzione $f(x) := \dfrac{\log(1 - x^3)}{x^2}$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{e^x(1 - \log x)}{x^3 - x^2} = o(x^a)$ per $x \to 0^+$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $(|x| - 1)^3 \leq y \leq \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin(\pi x) \leq -1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1/2, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $(-\infty, 0]$ della funzione $f(x) := \arctan(x^3 - 6x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} x^3 - a & \text{per } x \geq 1, \\ a(x^b+1) & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (-x + a)\exp(2x^2)$ è decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to-1/2} \frac{e^x - 1}{(\cos(\pi x))^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x - 1}{\log x - 2x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+\sin x)}{x^2}$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 8 della funzione $f(x) := \dfrac{4x^2}{1 - 2x^3}$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{\sin x + \log^2 x}{x \log x} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $|x^3 + 1| \geq \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin(\pi x) \leq 1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1/2, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $(-\infty, 1]$ della funzione $f(x) := \arctan(-x^3 + x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} x^2 - b & \text{per } x \geq 2, \\ be^{a(x-2)} & \text{per } x < 2. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (3x + a)\exp(x^2)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(1+x)}{\sin(\pi x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2 + \log(1-x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} e^{3x}(e^{x^2} - x^2)$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 4 della funzione $f(x) := \dfrac{(1-x^2)^8 - 1}{x^2}$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{\log(1+x^2)}{\log x} = o(x^a)$ per $x \to 0^+$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $(|x| - 1)^3 \leq \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos(\pi x) \geq 1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $[0, +\infty)$ della funzione $f(x) := \arctan(-x^3 + 6x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} x^3 - b & \text{per } x \geq 1, \\ be^{a(x-1)} & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (-2x + a)\exp(2x^2)$ è decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to (1/2)^+} \frac{\log x}{\cos(\pi x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2} + 1}{e^{2x} + 1}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sin(1/x)\,\log(x+1)$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 8 della funzione $f(x) := (1 + x^4)\cos(x^2)$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $x2^x = O(e^{ax})$ per $x \to +\infty$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|x^3 - 1| \leq y \leq \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin(\pi x) \leq -1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $(-\infty, 1]$ della funzione $f(x) := \arctan(x^3 - x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} x^2 + a & \text{per } x \geq 1, \\ a(x^b - 2) & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (2x + a)\exp(2x^2)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(1+x)}{(\sin(\pi x))^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2(1+\log x)^6$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-4x^4}-1}{\sin(x^4)}$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 4 della funzione $f(x) := \dfrac{\log(1-2x^2)}{x^2}$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{\sin x + \log^2 x}{x\log x} = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $(|x|-1)^3 \geq \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin(\pi x) \leq 1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1/2, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $(-\infty, 0]$ della funzione $f(x) := \arctan(x^3 - 6x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} a(x^3-1) & \text{per } x \geq 2, \\ (x/2)^b + a & \text{per } x < 2. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (-x + a)\exp(x^2)$ è decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{e^x-1}{(\cos(\pi x))^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{x^2}-1}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2\sin x)}{x}$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 7 della funzione $f(x) := \dfrac{(1-x^3)^6-1}{x^2}$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\log(1+x^2)\log x = O(x^a)$ per $x \to 0^+$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|x^3+1| \leq y \leq \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 7.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos(\pi x) \leq -1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $(-\infty, 0]$ della funzione $f(x) := \arctan(-x^3 + x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} x^2 - 2b & \text{per } x \geq 1, \\ be^{a(x-1)} & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (3x + a)\exp(2x^2)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{e^x-1}{\sin(\pi x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x+1}{\log x - x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x^3+1)\sin(2/x^3)$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 10 della funzione $f(x) := (1+x^4)\sin(x^2)$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{e^x(1-\log x)}{x^3-x^2} = O(x^a)$ per $x \to 0^+$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $(|x|-1)^3 \le y \le \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 8.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos(\pi x) \le -1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1/2, 1]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $[0,+\infty)$ della funzione $f(x) := \arctan(-x^3+6x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} x^3+2b & \text{per } x \ge 2, \\ be^{a(x-2)} & \text{per } x < 2. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (-2x+a)\exp(x^2)$ è decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to-(1/2)^+} \frac{\log(1+x)}{\cos(\pi x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sqrt[3]{1+x^4}-1}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{4x}(e^{x^2}+x^2)$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 7 della funzione $f(x) := \dfrac{4x}{1-4x^3}$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $x2^x = o(e^{ax})$ per $x \to +\infty$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $|x^3-1| \ge \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt{\log(1+4x^4)}$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^2}$ per ogni $a \ne 1/2$.
   c) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{2x^2}$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione
$$\exp(x^2) = a(3-x^2)\,. \qquad (*)$$
   a) Dire quante sono le soluzioni $x \ge 0$ dell'equazione (*) per $a = 1/3$.
   b) Dire quante sono le soluzioni $x \ge 0$ dell'equazione (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.
   c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, indichiamo con $x(a)$ la più piccola soluzione di (*) (quando ne esiste almeno una); determinare il limite di $x(a)$ per $a \to +\infty$; trovare quindi $p, q \in \mathbb{R}$ per cui vale il seguente "sviluppo" di $x(a)$:
$$x(a) = p + \frac{q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0,0)$, $(a,0)$ e $(0,1/a^2)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \ge 0$.
   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.
   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.

Seconda parte, gruppo 2.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt{\log(1+16x^8)}$.

   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^4}$ per ogni $a \neq 1/4$.

   c) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{4x^4}$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione
$$\exp(x^2/2) = a(2 - x^2)\,. \tag{*}$$
   a) Dire quante sono le soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (*) per $a = 1/3$.

   b) Dire quante sono le soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.

   c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, indichiamo con $x(a)$ la più piccola soluzione di (*) (quando ne esiste almeno una); determinare il limite di $x(a)$ per $a \to +\infty$; trovare quindi $p, q \in \mathbb{R}$ per cui vale il seguente "sviluppo" di $x(a)$:
$$x(a) = p + \frac{q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0,0)$, $(a,0)$ e $(0, 1/a^3)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.

   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.

   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.

Seconda parte, gruppo 3.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt{\log(1+16x^4)}$.

   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^2}$ per ogni $a \neq 1/4$.

   c) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{4x^2}$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione
$$\exp(x^2/2) = a(4 - x^2)\,. \tag{*}$$
   a) Dire quante sono le soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (*) per $a = 1/3$.

   b) Dire quante sono le soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.

   c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, indichiamo con $x(a)$ la più piccola soluzione di (*) (quando ne esiste almeno una); determinare il limite di $x(a)$ per $a \to +\infty$; trovare quindi $p, q \in \mathbb{R}$ per cui vale il seguente "sviluppo" di $x(a)$:
$$x(a) = p + \frac{q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0,0)$, $(a,0)$ e $(0, 1/a^2)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.

   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.

   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.

Seconda parte, gruppo 4.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt{\log(1+4x^8)}$.

   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^4}$ per ogni $a \neq 1/2$.

c) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{2x^4}$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione
$$\exp(x^2) = a(2 - x^2)\,. \tag{*}$$
a) Dire quante sono le soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (*) per $a = 1/3$.

b) Dire quante sono le soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.

c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, indichiamo con $x(a)$ la più piccola soluzione di (*) (quando ne esiste almeno una); determinare il limite di $x(a)$ per $a \to +\infty$; trovare quindi $p, q \in \mathbb{R}$ per cui vale il seguente "sviluppo" di $x(a)$:
$$x(a) = p + \frac{q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0, 0)$, $(a, 0)$ e $(0, 1/a^3)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.

a) Tracciare un disegno approssimativo di A.

b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione
$$f(x) := \frac{x}{1+x^2}$$
relativamente all'intervallo $0 \le x \le 3$, ed in caso affermativo calcolarli.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 - x^4)}{1-\cos(2x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{x+2}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(e^x)}{1+x}$.

3. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ del punto che si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\arctan(t^2),\, \exp(-t^3)\big)\,.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{4-2x^2}}\, dx$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2n}{4^{2n}+1} x^n$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^{ax}}{\sin(x^{2a}+x^a)} dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^{2x}\sin(2t)$ che soddisfa $x(\pi/2) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $(|x|-1)^2 \le y \le -\arctan x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione
$$f(x) := \frac{x}{2+x^2}$$
relativamente all'intervallo $0 \le x \le 3$, ed in caso affermativo calcolarli.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2+e^x)}{2x+1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x\sqrt{x^4+2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x^3)}{1-\cos(2x^2)}$.

3. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ del punto che si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\arctan(t^3),\, \exp(-t^2)\big)\,.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^2 \frac{8x}{\sqrt[3]{8-2x^2}}\, dx$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n} - 2}{5^n+n^2} x^n$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(a/x^2)}{x^{2a}+x^a} dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^{4x}\sin(2t)$ che soddisfa $x(\pi) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $(|x|-1)^2 \ge -\arctan x$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione
$$f(x) := \frac{-x}{1+4x^2}$$
relativamente all'intervallo $1 \leq x < +\infty$, ed in caso affermativo calcolarli.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log x}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+4x^2)}{\sin(2x^2-4x^4)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2+e^x)}{1-2\sqrt{x}}$.

3. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ del punto che si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\arctan(t^2),\, \exp(-t^2)\big)\,.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{8x}{\sqrt[3]{8-2x^2}}\,dx$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-n^2}{4^{2n}+3}x^n$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{\log(1+ax^2)}{x^{2a}+x^a}dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^{4x}\sin(4t)$ che soddisfa $x(\pi/2) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $(|x|+1)^2 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione
$$f(x) := \frac{x}{1+x^2}$$
relativamente all'intervallo $1/2 \leq x < +\infty$, ed in caso affermativo calcolarli.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\sin(x^2+x^4)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\log(2+e^x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(e^x)}{1+x}$.

3. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ del punto che si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\exp(-t^3),\, \arctan(t^2)\big)\,.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{4-2x^2}}\,dx$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}+1}{3^n+n}x^n$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{2a}+x^a}{2^x+x^a}dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^{2x}\sin(2t)$ che soddisfa $x(-\pi) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $(|x|-1)^2 \leq \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione
$$f(x) := \frac{x}{2+x^2}$$
relativamente all'intervallo $-3 \le x < +\infty$, ed in caso affermativo calcolarli.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{\log(3+e^x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 3^x\sqrt{x^6-2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x^2)}{\log(1+x^3)}$.

3. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ del punto che si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\exp(-t^2),\, \arctan(t^3)\big)\,.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n-n}{3^{2n}-2}x^n$.

6. Dire per quali $a>0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^{2a}+x^a}{xe^{ax}}dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot x = e^{4x}\sin(2t)$ che soddisfa $x(-\pi)=0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $(|x|-1)^2 \le y \le \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione
$$f(x) := \frac{-x}{1+4x^2}$$
relativamente all'intervallo $-3 \le x < +\infty$, ed in caso affermativo calcolarli.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\log x}}{\log(\log(x))}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2+x^4)}{\log(1-4x^2)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sqrt{x}}{\log(3+e^x)}$.

3. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ del punto che si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\exp(-t^2),\, \arctan(t^2)\big)\,.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}-2}{4^n+n^2}x^n$.

6. Dire per quali $a>0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^{2a}+x^a}{\log(1+a/x^2)}dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot x = e^{4x}\sin(4t)$ che soddisfa $x(\pi/4)=0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $(|x|+1)^2 \ge \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log(3 + \cos x) - \log 4$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

2. a) Trovare il più grande numero m tale che $e^{8x} + 8 \geq m\big(e^{2x} + 1\big)^4$ per ogni $x \geq 0$.
   b) Trovare il più piccolo numero M tale che $e^{8x} + 8 \leq M\big(e^{2x} + 1\big)^4$ per ogni $x \geq 0$.

3. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $0 \leq y \leq f(x)$, dove
   $$f(x) := (1 + x)\exp(-x/2)\,.$$
   a) Disegnare il grafico della funzione f e l'insieme A.
   b) Disegnare il solido V_x ottenuto ruotando A attorno all'asse x e calcolarne il volume.
   c) Disegnare il solido V_y ottenuto ruotando A attorno all'asse y e calcolarne il volume.

4. Dato a numero reale consideriamo l'equazione differenziale
   $$\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2 - a)x = 4e^{-t}\,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 1$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 1$.
   c) Dimostrare che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha che $x(t) = o(e^t)$ per $t \to +\infty$.
   d) Trovare il più piccolo numero c tale che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha $x(t) = o(e^{ct})$ per $t \to +\infty$.

5. a) Indichiamo con C la curva costituita dai punti del piano le cui coordinate polari α, r soddisfano $\alpha \in [0, \infty)$ e $r = e^{-\alpha}$. Tracciare un disegno approssimativo di C.
   b) Trovare la legge oraria di un punto P che percorre tutta la curva C, ed usarla per calcolare la lunghezza di C.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log(4 + \cos x) - \log 5$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

2. a) Trovare il più grande numero m tale che $e^{12x} + 9 \geq m\big(e^{4x} + 1\big)^3$ per ogni $x \geq 0$.
   b) Trovare il più piccolo numero M tale che $e^{12x} + 9 \leq M\big(e^{4x} + 1\big)^3$ per ogni $x \geq 0$.

3. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $0 \leq y \leq f(x)$, dove
   $$f(x) := (1 - x)\exp(x/2)\,.$$
   a) Disegnare il grafico della funzione f e l'insieme A.
   b) Disegnare il solido V_x ottenuto ruotando A attorno all'asse x e calcolarne il volume.
   c) Disegnare il solido V_y ottenuto ruotando A attorno all'asse y e calcolarne il volume.

4. Dato a numero reale consideriamo l'equazione differenziale
   $$\ddot{x} + 4a\dot{x} + (2 - 2a)x = 6e^{-t}\,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 1/2$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 1/2$.

c) Dimostrare che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha che $x(t) = o(e^t)$ per $t \to +\infty$.

d) Trovare il più piccolo numero c tale che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha $x(t) = o(e^{ct})$ per $t \to +\infty$.

5. a) Indichiamo con C la curva costituita dai punti del piano le cui coordinate polari α, r soddisfano $\alpha \in [0, \infty)$ e $r = e^{-\alpha}$. Tracciare un disegno approssimativo di C.

   b) Trovare la legge oraria di un punto P che percorre tutta la curva C, ed usarla per calcolare la lunghezza di C.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log(5 + \cos x) - \log 6$.

   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

2. a) Trovare il più grande numero m tale che $e^{12x} + 8 \geq m\big(e^{3x} + 1\big)^4$ per ogni $x \geq 0$.

   b) Trovare il più piccolo numero M tale che $e^{12x} + 8 \leq M\big(e^{3x} + 1\big)^4$ per ogni $x \geq 0$.

3. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $0 \leq y \leq f(x)$, dove

$$f(x) := (2 + x)\exp(-x/4)\,.$$

   a) Disegnare il grafico della funzione f e l'insieme A.

   b) Disegnare il solido V_x ottenuto ruotando A attorno all'asse x e calcolarne il volume.

   c) Disegnare il solido V_y ottenuto ruotando A attorno all'asse y e calcolarne il volume.

4. Dato a numero reale consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2 - a)x = 4e^{-t}\,. \tag{*}$$

   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 1$.

   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 1$.

   c) Dimostrare che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha che $x(t) = o(e^t)$ per $t \to +\infty$.

   d) Trovare il più piccolo numero c tale che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha $x(t) = o(e^{ct})$ per $t \to +\infty$.

5. a) Indichiamo con C la curva costituita dai punti del piano le cui coordinate polari α, r soddisfano $\alpha \in [0, \infty)$ e $r = e^{-\alpha}$. Tracciare un disegno approssimativo di C.

   b) Trovare la legge oraria di un punto P che percorre tutta la curva C, ed usarla per calcolare la lunghezza di C.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log(1 + \cos x) - \log 2$.

   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

2. a) Trovare il più grande numero m tale che $e^{6x} + 9 \geq m\big(e^{2x} + 1\big)^3$ per ogni $x \geq 0$.

   b) Trovare il più piccolo numero M tale che $e^{6x} + 9 \leq M\big(e^{2x} + 1\big)^3$ per ogni $x \geq 0$.

3. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $0 \leq y \leq f(x)$, dove

$$f(x) := (2 - x) \exp(x/4) .$$

   a) Disegnare il grafico della funzione f e l'insieme A.

   b) Disegnare il solido V_x ottenuto ruotando A attorno all'asse x e calcolarne il volume.

   c) Disegnare il solido V_y ottenuto ruotando A attorno all'asse y e calcolarne il volume.

4. Dato a numero reale consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + (2 - 2a)x = 6e^{-t} . \qquad (*)$$

   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 1/2$.

   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 1/2$.

   c) Dimostrare che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha che $x(t) = o(e^t)$ per $t \to +\infty$.

   d) Trovare il più piccolo numero c tale che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha $x(t) = o(e^{ct})$ per $t \to +\infty$.

5. a) Indichiamo con C la curva costituita dai punti del piano le cui coordinate polari α, r soddisfano $\alpha \in [0, \infty)$ e $r = e^{-\alpha}$. Tracciare un disegno approssimativo di C.

   b) Trovare la legge oraria di un punto P che percorre tutta la curva C, ed usarla per calcolare la lunghezza di C.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Calcolare le derivate delle seguente funzioni: a) $\dfrac{2+3x}{2-3x}$; b) x^{-2x}; c) $\log\left(\dfrac{5x^4}{2^x}\right)$.

2. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{2+8x^2}$.

3. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$:
$$\underbrace{1+2^{x^2}}_{a} \ll \underbrace{x^3+4^{x+2}}_{b} \ll \underbrace{x^2 4^x}_{c} \ll \underbrace{\frac{2^x+1}{4^x-1}}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := (1+x^3)\sqrt[4]{1-4x^3}$.

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{3^{2n}}$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^a}$.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $0 \le x \le 2$, $e^{-x} \le y \le 1 - \cos(\pi x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Calcolare le derivate delle seguente funzioni: a) $\dfrac{3-4x}{3+4x}$; b) x^{3x}; c) $\log\left(\dfrac{3^x}{5x^6}\right)$.

2. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{3+12\,x^2}$.

3. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$:
$$\underbrace{\frac{x^3+1}{x-1}}_{a} \ll \underbrace{\log^2 x}_{b} \ll \underbrace{\sin(e^x)}_{c} \ll \underbrace{x^2\log x + 1}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 della funzione $f(x) := (1+x^2)\sqrt[3]{1-3x^2}$.

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{4n}}$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(9-x^2)^{3a}}$.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Trovare graficamente le $x \in [0, 2]$ che risolvono la disequazione $1 - \cos(\pi x) \le e^{-x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Calcolare le derivate delle seguente funzioni: a) $\dfrac{3+2x}{3-2x}$; b) x^{-4x}; c) $\log\left(\dfrac{4x^5}{3^x}\right)$.

2. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{2+18\,x^2}$.

3. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$:
$$\underbrace{3^{2x-1}}_{a} \ll \underbrace{x^3 2^x}_{b} \ll \underbrace{\sin(4^x)}_{c} \ll \underbrace{\frac{4^x-1}{2^x+1}}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 della funzione $f(x) := (1+x^2)\sqrt[4]{1-4x^2}$.

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{4^{2n}}$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^{2a}}$.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $-1 < x \le 1,\ \ 1-\sin(\pi x) \le y \le \log(x+1)$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Calcolare le derivate delle seguente funzioni: a) $\dfrac{2-3x}{2+3x}$; b) x^{2x}; c) $\log\left(\dfrac{2^x}{5x^4}\right)$.

2. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{2+8x^2}$.

3. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$:
$$\underbrace{\frac{\log x}{x^2}}_{a} \ll \underbrace{\log\log x}_{b} \ll \underbrace{\frac{x+1}{x^3-1}}_{c} \ll \underbrace{\frac{x-1}{x^4+1}}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := (1+x^3)\sqrt[3]{1-3x^3}$.

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n-1}}{3^{2n}}$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(9-x^2)^{a}}$.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Trovare graficamente le $x \in (-1,1]$ che risolvono la disequazione $\log(x+1) \le 1 - \sin(\pi x)$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Calcolare le derivate delle seguente funzioni: a) $\dfrac{3+4x}{3-4x}$; b) x^{-3x}; c) $\log\left(\dfrac{5x^6}{3^x}\right)$.

2. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{3+12\,x^2}$.

3. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$:
$$\underbrace{1+x2^x}_{a} \ll \underbrace{\frac{4^x-1}{2^x+1}}_{b} \ll \underbrace{\sin(4^x)}_{c} \ll \underbrace{\frac{x^4+1}{x-1}}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 8 della funzione $f(x) := (1+x^4)\sqrt[4]{1-4x^4}$.

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{2^{4n}}$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^{3a}}$.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x}+4\dot{x}+5x=0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0)=0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $-2 \le x \le 0$, $(x+1)^3 \le y \le 1-\cos(\pi x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Calcolare le derivate delle seguente funzioni: a) $\dfrac{3-2x}{3+2x}$; b) x^{4x}; c) $\log\left(\dfrac{3^x}{4x^5}\right)$.

2. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{dx}{2+18\,x^2}$.

3. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$:
$$\underbrace{x^2\log x+1}_{a} \ll \underbrace{\frac{x^3+1}{x-1}}_{b} \ll \underbrace{\sin(2^x)}_{c} \ll \underbrace{\frac{4^x-1}{2^x+1}}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 8 della funzione $f(x) := (1+x^4)\sqrt[3]{1-3x^4}$.

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n-1}}{4^{2n}}$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(9-x^2)^{2a}}$.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0)=0$.

8. Trovare graficamente le $x \in [-2,0]$ che risolvono la disequazione $1-\cos(\pi x) \le (x+1)^3$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che
$$7 \le y \le \frac{16}{1+x^4}\,.$$
b) Tra tutti i rettangoli inscritti in A e con base sulla retta di equazione $y=7$, trovare quelli di area massima e di area minima (ammesso che esistano).

2. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \int_4^{x^2} \frac{dt}{(1+t^4)^a} \,.$$
a) Dire per quali $a > 0$ la funzione f ha limite finito a $+\infty$.
b) Determinare il dominio di definizione, la derivata, e i punti di massimo e minimo di f.
c) Scrivere la derivata seconda di f e dire per quali $a > 0$ questa funzione è convessa.
d) Determinare i punti in cui f vale zero e studiare il segno di f.
e) Disegnare il grafico di f per $a = 1/7$.

3. a) Per ogni numero intero k indichiamo con $f_k(x)$ la restrizione della funzione $\sin x$ all'intervallo $\pi\bigl(k - \frac{1}{2}\bigr) \le x \le \pi\bigl(k + \frac{1}{2}\bigr)$. Mostrare che la funzione f_k è invertibile e calcolarne l'inversa.
b) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^t / \cos x$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = \pi$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
$$11 \le y \le \frac{24}{1+x^6} \,.$$
b) Tra tutti i rettangoli inscritti in A e con base sulla retta di equazione $y = 11$, trovare quelli di area massima e di area minima (ammesso che esistano).

2. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \int_9^{x^2} \frac{dt}{(1+t^4)^a} \,.$$
a) Dire per quali $a > 0$ la funzione f ha limite finito a $+\infty$.
b) Determinare il dominio di definizione, la derivata, e i punti di massimo e minimo di f.
c) Scrivere la derivata seconda di f e dire per quali $a > 0$ questa funzione è convessa.
d) Determinare i punti in cui f vale zero e studiare il segno di f.
e) Disegnare il grafico di f per $a = 1/3$.

3. a) Per ogni numero intero k indichiamo con $f_k(x)$ la restrizione della funzione $\sin x$ all'intervallo $\pi\bigl(k - \frac{1}{2}\bigr) \le x \le \pi\bigl(k + \frac{1}{2}\bigr)$. Mostrare che la funzione f_k è invertibile e calcolarne l'inversa.
b) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^t / \cos x$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = -\pi$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
$$7 \le y \le \frac{16}{1+2x^4} \,.$$
b) Tra tutti i rettangoli inscritti in A e con base sulla retta di equazione $y = 7$, trovare quelli di area massima e di area minima (ammesso che esistano).

2. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \int_4^{x^2} \frac{dt}{(1+t^6)^a} \,.$$
a) Dire per quali $a > 0$ la funzione f ha limite finito a $+\infty$.
b) Determinare il dominio di definizione, la derivata, e i punti di massimo e minimo di f.

c) Scrivere la derivata seconda di f e dire per quali $a > 0$ questa funzione è convessa.

d) Determinare i punti in cui f vale zero e studiare il segno di f.

e) Disegnare il grafico di f per $a = 1/3$.

3. a) Per ogni numero intero k indichiamo con $f_k(x)$ la restrizione della funzione $\sin x$ all'intervallo $\pi\big(k - \frac{1}{2}\big) \le x \le \pi\big(k + \frac{1}{2}\big)$. Mostrare che la funzione f_k è invertibile e calcolarne l'inversa.

   b) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^t/\cos x$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = \pi$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
$$11 \le y \le \frac{24}{1 + 2x^6} .$$
   b) Tra tutti i rettangoli inscritti in A e con base sulla retta di equazione $y = 11$, trovare quelli di area massima e di area minima (ammesso che esistano).

2. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \int_9^{x^2} \frac{dt}{(1 + t^6)^a} .$$
   a) Dire per quali $a > 0$ la funzione f ha limite finito a $+\infty$.

   b) Determinare il dominio di definizione, la derivata, e i punti di massimo e minimo di f.

   c) Scrivere la derivata seconda di f e dire per quali $a > 0$ questa funzione è convessa.

   d) Determinare i punti in cui f vale zero e studiare il segno di f.

   e) Disegnare il grafico di f per $a = 1/7$.

3. a) Per ogni numero intero k indichiamo con $f_k(x)$ la restrizione della funzione $\sin x$ all'intervallo $\pi\big(k - \frac{1}{2}\big) \le x \le \pi\big(k + \frac{1}{2}\big)$. Mostrare che la funzione f_k è invertibile e calcolarne l'inversa.

   b) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^t/\cos x$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = -\pi$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := 1 - x^2 \log x$ relativamente all'intervallo $1/2 \le x < +\infty$, ed in caso affermativo determinarli.

2. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\log(1 + 2x^3) - 2x^3}{(1 + x^8)^4 - 1}$.

3. Calcolare la derivata della funzione $F(x) := \displaystyle\int_1^{x^3} \sin\left(\sqrt[3]{t}\right) dt$.

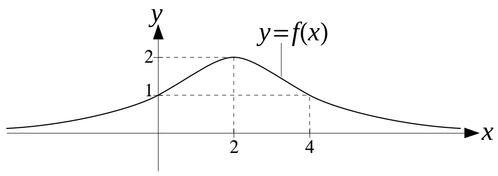
4. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 2$ da un punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) := \left(t^3/3 - t,\, t^2 + 1\right) .$$

5. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3 + t^{3a+3}}{(2 + t^a)^a} dt$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n^3 + 3} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 3t^2(1 + 4x^2)$ che soddisfa $x(1) = 0$.

8. Detta f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura sottostante, disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(-x) \le y \le 2f(x) - 1$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := 2 + x^3 \log x$ relativamente all'intervallo $1/2 \le x < +\infty$, ed in caso affermativo determinarli.

2. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\sin(x^4) - x^4}{\sqrt[3]{1 + x^4} - 1}$.

3. Calcolare la derivata della funzione $F(x) := \displaystyle\int_2^{x^4} \exp\left(\sqrt[4]{t}\right) dt$.

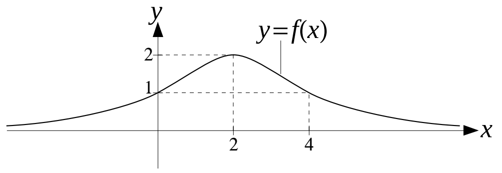
4. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 2$ da un punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) := \left(t - t^5/5,\, 2 - 2t^3/3\right) .$$

5. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2t^{a+1} + t^{a+2}}{(\sin(t^a))^a} dt$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4 + 2}{(-3)^n} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 3t^2(1 + 9x^2)$ che soddisfa $x(1) = 0$.

8. Detta f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura sottostante, risolvere graficamente la disequazione $f(-x) \le 2f(x) - 1$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := 3 - x^2 \log x$ relativamente all'intervallo $0 < x \le 1/2$, ed in caso affermativo determinarli.

2. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\log(1 + 2x^5) - 2x^5}{(1 + x^4)^4 - 1}$.

3. Calcolare la derivata della funzione $F(x) := \displaystyle\int_3^{x^5} \sin\left(\sqrt[5]{t}\right) dt$.

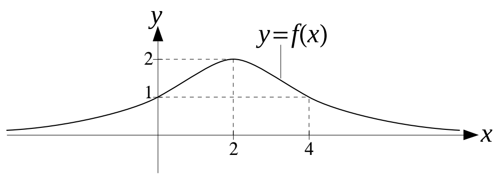
4. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$ da un punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) := \left(2 - t^2,\, t - t^3/3\right) .$$

5. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(1 + t^a)^a}{3t^a + t^{4a+6}} dt$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{n^5 + 1} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4t^3(1 + 4x^2)$ che soddisfa $x(1) = 0$.

8. Detta f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura sottostante, disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $2 - f(x) \le y \le f(2x)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := 4 + x^2 \log x$ relativamente all'intervallo $0 < x \le 2$, ed in caso affermativo determinarli.

2. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{(1 - x^4)^8 - 1}{\log(1 + x^3) - x^3}$.

3. Calcolare la derivata della funzione $F(x) := \displaystyle\int_4^{x^3} \exp\left(\sqrt[3]{t}\right) dt$.

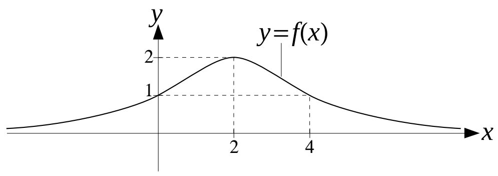
4. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$ da un punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) := \left(1 + 2t^3/3,\, t - t^5/5\right) .$$

5. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{2t^{a+1}}{(t^{2a}+t^a)^a}\,dt$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+3}{(-2)^n} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4t^3(1+9x^2)$ che soddisfa $x(2) = 0$.

8. Detta f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura sottostante, risolvere graficamente la disequazione $2 - f(x) \le f(2x)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := 5 - x^3 \log x$ relativamente all'intervallo $0 < x \le 2$, ed in caso affermativo determinarli.

2. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sin(3x^4)-3x^4}$.

3. Calcolare la derivata della funzione $F(x) := \displaystyle\int_5^{x^4} \sin\left(\sqrt[4]{t}\right) dt$.

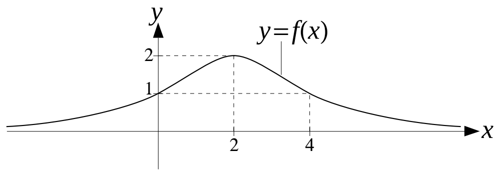
4. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 2$ da un punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) := \left(2 - 2t^3/3,\, t^5/5 - t\right) .$$

5. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{a+1}+t^{4a+4}}{(1+t^a)^a}\,dt$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{n^4+2} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2t(1+4x^2)$ che soddisfa $x(2) = 0$.

8. Detta f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura sottostante, disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $1 - f(x) \le y \le f(2x)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := 6 + x^3 \log x$ relativamente all'intervallo $0 < x \le 1/2$, ed in caso affermativo determinarli.

2. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{(1-x^8)^8 - 1}{\log(1+x^5) - x^5}$.

3. Calcolare la derivata della funzione $F(x) := \displaystyle\int_6^{x^5} \exp\big(\sqrt[5]{t}\big)\, dt$.

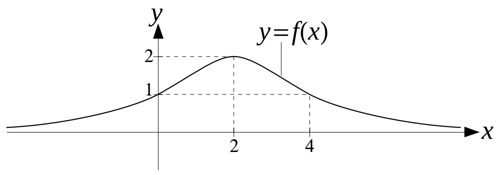
4. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$ da un punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) := \big(t - t^3/3,\, t^2 - 2\big)\ .$$

5. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{(t^{3a} + t^a)^a}{2t^{2a+4}}\, dt$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5+1}{(-4)^n} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2t(1 + 9x^2)$ che soddisfa $x(2) = 0$.

8. Detta f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura sottostante, risolvere graficamente la disequazione $f(2x) \leq 1 - f(x)$.



SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 4a\dot{x} + (3a^2 - 2a - 1)x = 6e^{-2t} \qquad (*)$$
a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a \neq -1$.
b) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a = -1$.
c) Determinare per ogni $a \neq -1$ il numero delle soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni
$$x(0) = 0\,, \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0\,. \qquad (**)$$
(Cominciare eventualmente dal caso $a = 0$.)

2. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f_-(x) \leq y \leq f_+(x)$ con
$$f_-(x) := -x^4\,, \quad f_+(x) := 2 + x^2 - 2x^4\,.$$
a) Disegnare i grafici di f_-, f_+, l'insieme A e la retta di equazione $y = -4$.
b) Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta $y = -4$.

3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \big(\cos(2x)\big)^{-1/x} - 1$.
b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 6a\dot{x} + (5a^2 - 8a - 4)x = 10\, e^{-3t} \qquad (*)$$
a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a \neq -1$.

b) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a = -1$.

c) Determinare per ogni $a \neq -1$ il numero delle soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni

$$x(0) = 0\,, \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0\,. \tag{**}$$

(Cominciare eventualmente dal caso $a = 0$.)

2. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f_-(x) \le y \le f_+(x)$ con

$$f_-(x) := -x^4\,, \quad f_+(x) := 3 + 2x^2 - 2x^4\,.$$

a) Disegnare i grafici di f_-, f_+, l'insieme A e la retta di equazione $y = -9$.

b) Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta $y = -9$.

3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \big(\cos(2x)\big)^{-1/x} - 1$.

b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + (3a^2 + 2a - 1)x = 6e^{-2t} \tag{*}$$

a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a \neq 1$.

b) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a = 1$.

c) Determinare per ogni $a \neq -1$ il numero delle soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni

$$x(0) = 0\,, \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0\,. \tag{**}$$

(Cominciare eventualmente dal caso $a = 0$.)

2. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f_-(x) \le y \le f_+(x)$ con

$$f_-(x) := 2x^4 - x^2 - 2\,, \quad f_+(x) := x^4\,.$$

a) Disegnare i grafici di f_-, f_+, l'insieme A e la retta di equazione $y = 4$.

b) Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta $y = 4$.

3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \big(\cos(2x)\big)^{-1/x} - 1$.

b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 6a\dot{x} + (5a^2 + 8a - 4)x = 10\,e^{-3t} \tag{*}$$

a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a \neq 1$.

b) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a = 1$.

c) Determinare per ogni $a \neq -1$ il numero delle soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni

$$x(0) = 0\,, \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0\,. \tag{**}$$

(Cominciare eventualmente dal caso $a = 0$.)

2. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f_-(x) \le y \le f_+(x)$ con

$$f_-(x) := 2x^4 - 2x^2 - 3\,, \quad f_+(x) := x^4\,.$$

a) Disegnare i grafici di f_-, f_+, l'insieme A e la retta di equazione $y = 9$.

b) Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta $y = 9$.

3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \big(\cos(2x)\big)^{-1/x} - 1$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Dire per quali $\alpha \in [-\pi, \pi]$ l'identità $\sin(x + \alpha) = \cos(\pi/3 - x)$ vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$; b) $\arctan(x^2)$; c) $\log\left(\dfrac{x^{2x}}{(2x)^x}\right)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine per $x \to +\infty$:

$$\underbrace{x^2 \log x}_{a} \ll \underbrace{2x^2 \log\log x}_{b} \ll \underbrace{x^{-1/2} \log^4 x}_{c} \ll \underbrace{\log(e^x + 1)}_{d} .$$

4. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 9 della funzione $f(x) := \sin(6x^3 + x^9)$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 + x}{\sqrt[a]{1 + 2x^4}}\, dx$ converge a un numero finito.

6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{1 + 3^n}\, x^n$ converge ad un numero finito.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 10$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\sqrt{4 - x} \le y \le 4 - x^4$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Dire per quali $\alpha \in [-\pi, \pi]$ l'identità $\sin(x + \alpha) = \cos(2\pi/3 - x)$ vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arctan(x^3)$; b) $\dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$; c) $\log\left(\dfrac{(4x)^x}{x^{4x}}\right)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine per $x \to +\infty$:

$$\underbrace{2x^{1/2} \log\log x}_{a} \ll \underbrace{x^{-1/3} \log^5 x}_{b} \ll \underbrace{\log(e^x + 1)}_{c} \ll \underbrace{x^{1/2} \log x}_{d} .$$

4. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := \sin(6x^2 - x^6)$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1 + x}{\sqrt[a]{x^3 + 2x^4}}\, dx$ converge a un numero finito.

6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2 - 4^n}\, x^n$ converge ad un numero finito.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 5$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $4 - x^2 \le y \le \sqrt{1 - x}$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Dire per quali $\alpha \in [-\pi, \pi]$ l'identità $\sin(x + \pi/6) = \cos(\alpha - x)$ vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^4+1}{x^4-1}$; b) $\arcsin(x^2)$; c) $\log\left(\dfrac{(2x)^x}{x^{2x}}\right)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{x^3 \log x}_{a} \ll \underbrace{\log(e^x+2)}_{b} \ll \underbrace{3x^3 \log\log x}_{c} \ll \underbrace{x^{-1/3}\log^5 x}_{d} .$$

4. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := \log(1+2x^3-x^6)$.

5. Dire per quali $a>0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt[a]{x^2+2x^3}}\,dx$ converge a un numero finito.

6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^{3n}}{1+4^n}\,x^n$ converge ad un numero finito.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=10$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0)=0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $4-x^2 \le \sqrt{1-x}$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Dire per quali $\alpha \in [-\pi,\pi]$ l'identità $\sin(x+3\pi/4)=\cos(\alpha-x)$ vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(x^3)$; b) $\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$; c) $\log\left(\dfrac{x^{4x}}{(4x)^x}\right)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{3x^{1/3}\log\log x}_{a} \ll \underbrace{x^{1/3}\log x}_{b} \ll \underbrace{x^{-1/2}\log^4 x}_{c} \ll \underbrace{\log(e^x+2)}_{d} .$$

4. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 della funzione $f(x) := \log(1+2x^2+x^4)$.

5. Dire per quali $a>0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{\sqrt[a]{1+2x^3}}\,dx$ converge a un numero finito.

6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n}}{2-3^n}\,x^n$ converge ad un numero finito.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x}-2\dot{x}+5x=5$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0)=0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{4-x} \le 4-x^4$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Consideriamo la funzione $f(x) := 2\log x - \log\log x$.

   a) Disegnare il grafico di f.

   b) Tra tutte le rette tangenti al grafico di f trovare quella per cui il punto di intersezione con l'asse delle y è più basso possibile.

   c) Disegnare l'insieme A dei punti del piano compresi tra il grafico di f, la retta tangente descritta al punto b), e la retta di equazione $x=1$. Dire se A ha area finita o meno.

2. Sia V il solido dato dall'unione di due sfere di raggi r_1, r_2 i cui centri distano d. Disegnare il solido V e calcolarne il volume nei seguenti casi:

   a) $d = 6$, $r_1 = r_2 = 4$;

   b) $d = 6$, $r_1 = 4 + a$, $r_2 = 4 - a$ con $0 \leq a < 4$.

3. Consideriamo la serie di potenze
$$f(x) := \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n(n^2 - n)} \,.$$

   a) Calcolarne il raggio di convergenza e discuterne il comportamento al variare di $x \in \mathbb{R}$.

   b) Trovare il valore di $f(x)$ per gli x per cui è finito. [*Suggerimento: scrivere la serie di* f''.]

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Consideriamo la funzione $f(x) := 6 \log x - \log\log x$.

   a) Disegnare il grafico di f.

   b) Tra tutte le rette tangenti al grafico di f trovare quella per cui il punto di intersezione con l'asse delle y è più basso possibile.

   c) Disegnare l'insieme A dei punti del piano compresi tra il grafico di f, la retta tangente descritta al punto b), e la retta di equazione $x = 1$. Dire se A ha area finita o meno.

2. Sia V il solido dato dall'unione di due sfere di raggi r_1, r_2 i cui centri distano d. Disegnare il solido V e calcolarne il volume nei seguenti casi:

   a) $d = 3$, $r_1 = r_2 = 2$;

   b) $d = 3$, $r_1 = 2 + a$, $r_2 = 2 - a$ con $0 \leq a < 2$.

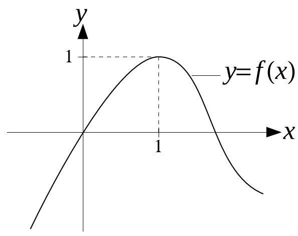
3. Consideriamo la serie di potenze
$$f(x) := \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n(n^2 - n)} \,.$$

   a) Calcolarne il raggio di convergenza e discuterne il comportamento al variare di $x \in \mathbb{R}$.

   b) Trovare il valore di $f(x)$ per gli x per cui è finito. [*Suggerimento: scrivere la serie di* f''.]

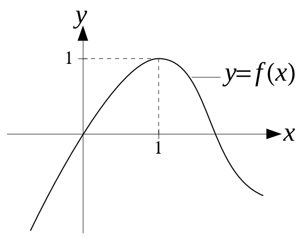
Prima parte, gruppo 1.

1. Calcolare le coordinate polari ρ e α dei seguenti punti, scegliendo se possibile l'angolo α nell'intervallo $(-\pi, \pi]$: a) $(-2,-2)$, b) $(0,-3)$, c) $(-1,\sqrt{3})$.
2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x^4 + ax^3 + 6x^2 + ax + 1$ risulta essere convessa.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{\sin(x^6 + x^8)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^+} \frac{1+\sin x}{\cos x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\log\log x}$.
4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$.
5. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$.
6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4\sqrt{x}\cos(2t)$ che soddisfa $x(0) = 4$.
7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\sin x} \frac{dt}{(1-t^2)^8}$.
8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := -f(|x|)$.



Prima parte, gruppo 2.

1. Calcolare le coordinate polari ρ e α dei seguenti punti, scegliendo se possibile l'angolo α nell'intervallo $(-\pi, \pi]$: a) $(-\sqrt{3},3)$, b) $(-3,-3)$, c) $(0,-2)$.
2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x^4 + 4x^3 + ax^2 + 4x + a$ risulta essere convessa.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{\sin^2 x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^4+2)2^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^6 e^x}{x^3 + \log(1-x^3)}$.
4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$.
5. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$.
6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4\sqrt{x}\cos(2t)$ che soddisfa $x(0) = 1$.
7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\cos x} \frac{dt}{(1-t^2)^6}$.
8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $1-f(x) \le y \le f(x)$.



Prima parte, gruppo 3.

1. Calcolare le coordinate polari ρ e α dei seguenti punti, scegliendo se possibile l'angolo α nell'intervallo $(-\pi, \pi]$: a) $(-2,-2)$, b) $(-3,0)$, c) $(\sqrt{3},-1)$.
2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x^4 + ax^3 - 6x^2 + ax + 1$ risulta essere convessa.

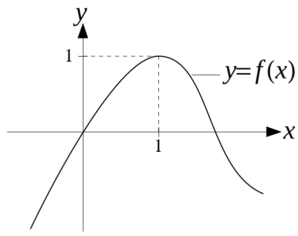
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\log x}{\log^2 x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^6+x^8)}{\sin(x^2)-x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\cos^2 x}{\sin x}$.

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$.

5. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n!}$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot x = 6\sqrt{x}\sin(3t)$ che soddisfa $x(0)=4$.

7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\sin x}\frac{dt}{(1-t^2)^6}$.



8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $|y|\le f(x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Calcolare le coordinate polari ρ e α dei seguenti punti, scegliendo se possibile l'angolo α nell'intervallo $(-\pi,\pi]$: a) $(3,-\sqrt{3})$, b) $(-3,-3)$, c) $(-2,0)$.

2. Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x^4-4x^3+ax^2-4x+a$ risulta essere convessa.

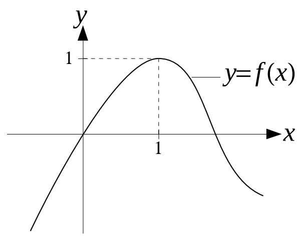
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\log(1-x^2)}{x^4e^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x}{2^{x^2}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin(3x)}{\cos x}$.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$.

5. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3n+1}}$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot x = 6\sqrt{x}\sin(3t)$ che soddisfa $x(0)=1$.

7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\cos x}\frac{dt}{(1-t^2)^8}$.



8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := |f(x)|-1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Dato $a\in\mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot x + 4x = 8t^2+\sin(at)\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a>0$ e $a\neq 2$.
b) Trovare la soluzione generale della (*) per $a=2$.

2. Discutere al variare di $a\in\mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty}(e^x-e^2)^{2-a}dx$.

3. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) nel piano che sono compresi tra l'asse delle x e il grafico della funzione $f(x) := 8+2x^2-x^4$.
b) Disegnare il solido V ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse $x=-3$ e calcolarne il volume.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4x = -8t^2 + \cos(at)\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 2$.
b) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 2$.

2. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} (e^x - e^2)^{2+a} dx$.

3. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano che sono compresi tra l'asse delle x e il grafico della funzione $f(x) := 8 + 2x^2 - x^4$.
b) Disegnare il solido V ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse $x = -4$ e calcolarne il volume.

Prima parte, gruppo 1.

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f data sotto risulta essere continua:
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & \text{if } x \leq 3 \\ ax - b & \text{if } x > 3 \end{cases}$$

2. Dire se esistono punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 - 3x + 1$ relativamente all'intervallo $[-2, +\infty)$, ed in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[6]{x}}{\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{2e^x}{1-x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x^2)}{2x^2}$.

4. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := (x^4 - 6)\sin(x^2)$.

5. Calcolare la distanza percorsa dal punto P di coordinate $x(t) := t^3 - 3t + 1$ e $y(t) := 3t^2 - 1$ nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^6 \log(1 + 1/n^3)}{n^{2a} + n^a + 1}$ converge.

7. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := at^2 + b$ risolve l'equazione $t^2\ddot{x} - x = 3t^2 + 2$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \leq y \leq 1 - e^{-x}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f data sotto risulta essere continua:
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & \text{if } x \leq 2 \\ ax - b & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

2. Dire se esistono punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 - 3x - 2$ relativamente all'intervallo $(-\infty, 2]$, ed in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{\sin(4x^2)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi^+} \frac{1}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^5 2^x$.

4. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := (x^3 - 2)\log(1 + x^3)$.

5. Calcolare la distanza percorsa dal punto P di coordinate $x(t) := 3t^2 - 1$ e $y(t) := t^3 - 3t + 1$ nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 \log(1 + 1/n^2)}{n^{2a} + n^a + 1}$ converge.

7. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := at^2 + b$ risolve l'equazione $t^2\ddot{x} - x = 3t^2 - 2$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \leq y \leq 0$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f data sotto risulta essere continua:
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & \text{if } x \leq -1 \\ ax - b & \text{if } x > -1 \end{cases}$$

2. Dire se esistono punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 - 12\,x + 1$ relativamente all'intervallo $[-3, 1]$, ed in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \log\log x$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3}{\sin(2x^3)}$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{xe^x}$.

4. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 della funzione $f(x) := (x^2 - 3)\sin(2x)$.

5. Calcolare la distanza percorsa dal punto P di coordinate $x(t) := t^3 - 3t + 2$ e $y(t) := 3t^2 + 1$ nell'intervallo di tempo $-1 \le t \le 0$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{3a} + n^a + 1}{n^6 \log(1 + 1/n^3)}$ converge.

7. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := at^2 + b$ risolve l'equazione $t^2\ddot{x} + 2x = 8t^2 + 4$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \le y \le e^x - 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f data sotto risulta essere continua:
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & \text{if } x \le -2 \\ ax - b & \text{if } x > -2 \end{cases}$$

2. Dire se esistono punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 - 12\,x - 2$ relativamente all'intervallo $[-1, 3]$, ed in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \cos(2 + e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{\log\log x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x^3)}{2x^2}$.

4. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 della funzione $f(x) := (x^2 - 4)\log(1 + x^2)$.

5. Calcolare la distanza percorsa dal punto P di coordinate $x(t) := 3t^2 + 1$ e $y(t) := t^3 - 3t + 2$ nell'intervallo di tempo $-1 \le t \le 0$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{3a} + n^a + 1}{n^4 \log(1 + 1/n^2)}$ converge.

7. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := at^2 + b$ risolve l'equazione $t^2\ddot{x} + 2x = 8t^2 - 4$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \ge y \ge e^x - 1$.

SECONDA PARTE.

1. a) Dire se la disuguaglianza $x^2 + \frac{1}{2} \le \frac{3}{5}e^{x^2}$ vale per ogni $x \in \mathbb{R}$ oppure no.

   b) Trovare tutti i valori del parametro reale a per cui la disuguaglianza $x^2 + \frac{1}{2} \le ae^{x^2}$ vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. a) Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ di $f(x) := \log\left(\dfrac{x^4 + 4}{x^4 + 1}\right)$.

   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to +\infty$ di $f(x) + \dfrac{a}{x^4}$.

3. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 - 4x + 2 \le y \le 18 - x^2$, e sia V il solido ottenuto facendo ruotare l'insieme A attorno alla retta di equazione $y = -1$.

a) Disegnare A e calcolarne l'area.

b) Disegnare V e calcolarne il volume.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = \exp(x^2 - 2x)$ nel punto di ascissa $x = 2$.
2. Dire se esistono i punti di massimo e minimo (assoluti) della funzione xe^{2x} relativamente all'intervallo $x \leq 0$ ed in caso affermativo calcolarli.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{1 - \sqrt[3]{1 + x^4}}{x^3 - \log(1 + x^3)}$.
4. Per ogni $a > 0$ calcolare la primitiva $\displaystyle\int xe^{ax}\, dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2 + x^2}{1 + x^a + x^{2a}} dx$ converge ad un numero finito.
6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 10 + 10\, e^t$.
7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{(x - 1)^2} - 1$ e risolvere *graficamente* $f(x) \leq 1 - x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = \exp(x^2 + 3x)$ nel punto di ascissa $x = -3$.
2. Dire se esistono i punti di massimo e minimo (assoluti) della funzione xe^{2x} relativamente all'intervallo $-2 \leq x \leq 0$ ed in caso affermativo calcolarli.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{x^2 - \log(1 + x^2)}{1 - \sqrt[4]{1 + x^6}}$.
4. Per ogni $a > 0$ calcolare la primitiva $\displaystyle\int x^a \log x\, dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2 + \sin x}{1 + x^a + x^{3a}} dx$ converge ad un numero finito.
6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = -5 + 4\, e^t$.
7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{(x + 1)^3} - 1$ e risolvere *graficamente* $f(x) \geq 1 + x$.

SECONDA PARTE.

1. Si consideri la funzione $f(x) := \sqrt[6]{1 + x^6}$.
   a) Trovare la più grande costante $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq a(1 + x)$ per ogni $x \geq 0$.
   b) Trovare la più piccola costante $b \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq b(1 + x)$ per ogni $x \geq 0$.
2. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \leq y \leq e^{-x}$ e $x \geq 0$, e sia V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta di equazione $y = 1$. Tracciare un disegno approssimativo di A e di

V e calcolare il volume di V.

3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt{3 + \cos(2x^2)} - 2$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) + ax^4$.

SOLUZIONI

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. $1/2 \leq x \leq 3/4$.

2. Il punto di massimo è $x = -1/\sqrt{3}$, il punto di minimo non esiste.

3. La continuità di f si traduce nella condizione $5a = 1 - a$, mentre per la derivabilità si traduce in $4a = b/2$, e alla fine si ottiene $a = 1/6$, $b = 4/3$.

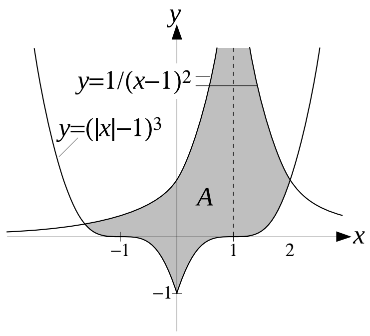
4. $-\sqrt{8} \leq a \leq \sqrt{8}$.

5. a) $-\infty$; b) 2; c) $+\infty$.

6. Il polinomio cercato è $P_7(x) = -x - \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^7}{3}$.

7. $a < -2$.

8.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. $5/4 \leq x \leq 7/4$.

2. Il punto di massimo è $x = -\sqrt{2}$, il punto di minimo non esiste.

3. La continuità di f si traduce nella condizione $1 - a = 2a$, mentre per la derivabilità si traduce in $3 = ab$, e alla fine si ottiene $a = 1/3$, $b = 9$.

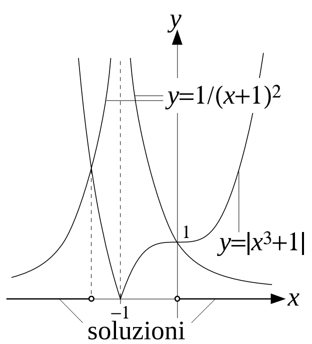
4. $-1 \leq a \leq 1$.

5. a) $-\infty$; b) $-\infty$; c) $+\infty$.

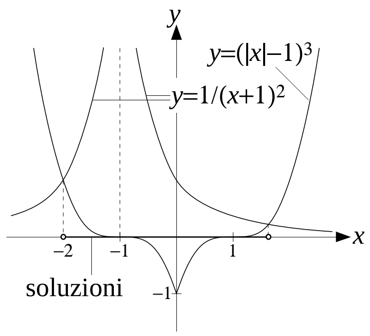
6. Il polinomio cercato è $P_8(x) = 4x^2 + 8x^5 + 16x^8$.

7. $a > -1$.

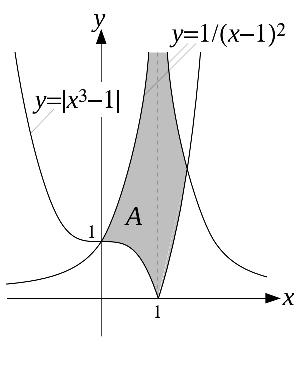
8.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. $3/4 \leq x \leq 2$.
2. Il punto di massimo non esiste, il punto di minimo è $x = -1/\sqrt{3}$.
3. La continuità di f si traduce nella condizione $4 - b = b$, mentre per la derivabilità si traduce in $4 = ab$, e alla fine si ottiene $a = 2$, $b = 2$.
4. $-\sqrt{18} \leq a \leq \sqrt{18}$.
5. a) Non esiste; b) $-\infty$; c) $+\infty$.
6. Il polinomio cercato è $P_4(x) = -8 + 28x^2 - 56x^4$.
7. $a \leq 2$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. $7/4 \leq x \leq 2$.
2. Il punto di massimo è $x = \sqrt{2}$, il punto di minimo non esiste.
3. La continuità di f si traduce nella condizione $1 - b = b$, mentre per la derivabilità si traduce in $3 = ab$, e alla fine si ottiene $a = 6$, $b = 1/2$.
4. $-2 \leq a \leq 2$.
5. a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) 0.
6. Il polinomio cercato è $P_8(x) = 1 + \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{11x^8}{24}$.
7. $a > \log 2$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. $5/4 \leq x \leq 7/4$.

2. Il punto di massimo è $x = -1/\sqrt{3}$, il punto di minimo non esiste.

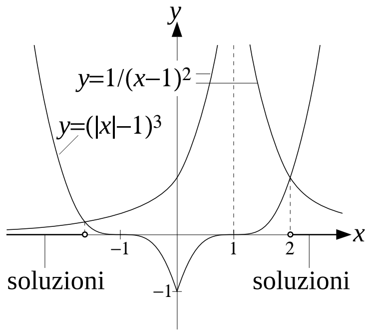
3. La continuità di f si traduce nella condizione $1 + a = -a$, mentre per la derivabilità si traduce in $2 = ab$, e alla fine si ottiene $a = -1/2$, $b = -4$.

4. $-2 \leq a \leq 2$.

5. a) $+\infty$; b) 0; c) -4.

6. Il polinomio cercato è $P_4(x) = -2 - 2x^2 - \dfrac{8x^4}{3}$.

7. $a > -1$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. $3/4 \leq x \leq 2$.

2. Il punto di massimo è $x = -\sqrt{2}$, il punto di minimo non esiste.

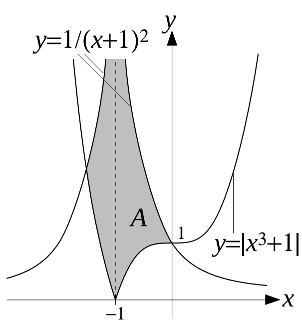
3. La continuità di f si traduce nella condizione $7a = 1 + a$, mentre per la derivabilità si traduce in $12a = b/2$, e alla fine si ottiene $a = 1/6$, $b = 4$.

4. $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$.

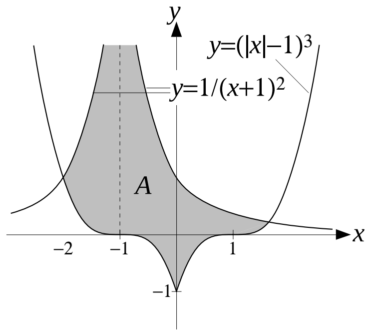
5. a) $+\infty$; b) 0; c) 2.

6. Il polinomio cercato è $P_7(x) = -6x + 15x^4 - 20x^7$.

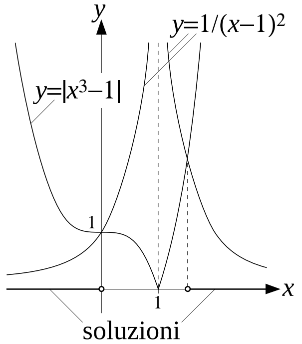
7. $a < 2$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 7.

1. $1 \leq x \leq 5/4$.
2. Il punto di massimo non esiste, il punto di minimo è $x = -1/\sqrt{3}$.
3. La continuità di f si traduce nella condizione $1 - 2b = b$, mentre per la derivabilità si traduce in $2 = ab$, e alla fine si ottiene $a = 6$, $b = 1/3$.
4. $-3 \leq a \leq 3$.
5. a) Non esiste; b) $-\infty$; c) 2.
6. Il polinomio cercato è $P_{10}(x) = x^2 + \dfrac{5x^6}{6} - \dfrac{19x^{10}}{120}$.
7. $a < -2$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 8.

1. $3/4 \leq x \leq 1$.
2. Il punto di massimo è $x = \sqrt{2}$, il punto di minimo non esiste.
3. La continuità di f si traduce nella condizione $8 + 2b = b$, mentre per la derivabilità si traduce in $12 = ab$, e alla fine si ottiene $a = -3/2$, $b = -8$.
4. $-\sqrt{8} \leq a \leq \sqrt{8}$.
5. a) $-\infty$; b) 3; c) $+\infty$.
6. Il polinomio cercato è $P_7(x) = 4x + 16x^4 + 64x^7$.
7. $a > \log 2$.
8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Usando il fatto che $\log(1+y) \sim y$ per $y \to 0$ con il cambio di variabile $y = 4x^4$ otteniamo

$$f(x) := \sqrt{\log(1+4x^4)} \sim \sqrt{4x^4} = 2x^2 \quad \text{per } x \to 0.$$

b) Per quanto visto al punto a), per ogni $a \neq 1/2$ si ha

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{a}{x^2} \sim \Big(\frac{1}{2} - a\Big)\frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to 0.$$

c) Siccome la parte principale di $1/f(x)$ è proprio $1/(2x^2)$, non possiamo procedere come al punto precedente, ma dobbiamo invece utilizzare uno sviluppo più preciso della funzione $f(x)$. In effetti, usando lo sviluppo $\log(1+y) = y - y^2/2 + O(y^3)$ con $y = 4x^4$ otteniamo che, per $x \to 0$,

$$f(x) := \sqrt{\log(1+4x^4)} = \sqrt{4x^4 - 8x^8 + O(x^{12})} = 2x^2\,\sqrt{1 - 2x^4 + O(x^8)}\,,$$

e usando lo sviluppo $\sqrt{1+y} = (1+y)^{1/2} = 1 + y/2 + O(y^2)$ con $y = -2x^4 + O(x^8)$ otteniamo inoltre

$$f(x) = 2x^2\,\sqrt{1 - 2x^4 + O(x^8)} = 2x^2\big(1 - x^4 + O(x^8)\big) = 2x^2 - 2x^6 + O(x^{10})\,.$$

Pertanto

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{2x^2} = \frac{2x^2 - f(x)}{2x^2\,f(x)} = \frac{2x^6 + O(x^{10})}{2x^2\,f(x)} \sim \frac{2x^6}{2x^2\,2x^2} = \frac{x^2}{2}\,.$$

2. Osserviamo che la domanda a) corrisponde al caso particolare $a = 1/3$ della domanda b); partiamo pertanto da quest'ultima.

b) Riscriviamo l'equazione (*) come

$$f(x) = a \quad \text{con} \quad f(x) := \frac{\exp(x^2)}{3 - x^2}\,, \quad x \geq 0\,. \tag{1}$$

Studiamo dunque la funzione $f(x)$ ristretta alla semiretta degli $x \geq 0$ per poi disegnarne sommariamente il grafico.

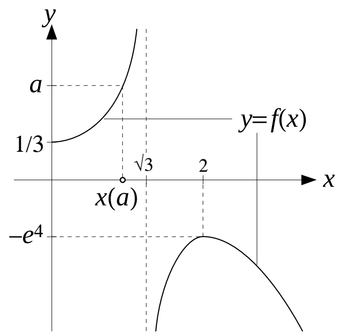
Osserviamo che la funzione è ben definita per $x \neq \sqrt{3}$, positiva per $x < \sqrt{3}$, negativa per $x > \sqrt{3}$, e

$$\lim_{x \to (\sqrt{3})^{\pm}} f(x) = \frac{e^3}{0^{\mp}} = \mp\infty\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{3-y} = -\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = -\infty\,.$$

Inoltre, studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{2x(4 - x^2)\exp(x^2)}{(3 - x^2)^2}$$

otteniamo che f è crescente nell'intervallo $[0, \sqrt{3})$ e nell'intervallo $(\sqrt{3}, 2]$, ed è decrescente nella semiretta $[2, +\infty)$. In particolare $x = 2$ è un punto di massimo relativo.
Usando queste informazioni tracciamo il grafico di f (in modo puramente qualitativo: la figura sotto non riporta infatti il grafico con le proporzioni corrette).



Sulla base di questo disegno si vede chiaramente che il numero di soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (1), o equivalentemente l'equazione (*), è

- una per $a \geq 1/3$;

- nessuna per $-e^4 < a < 1/3$;
- una per $a = -e^4$;
- due per $a < -e^4$.

a) Per quanto detto al punto precedente, la risposta è "una soluzione".

c) Dal disegno sopra si vede subito che $x(a)$ tende a $\sqrt{3}$ (da sinistra) quando $a \to +\infty$. In particolare, se è possibile scrivere $x = x(a)$ nella forma $x = p + q/a + o(1/a)$, deve necessariamente essere $p = \sqrt{3}$, vale a dire

$$x = \sqrt{3} + \frac{q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) . \tag{2}$$

Per calcolare q sostituiamo la x nell'equazione (*) con l'espressione (2): usando il fatto che

$$x^2 = \Big[\sqrt{3} + \frac{q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big)\Big]^2 = 3 + \frac{\sqrt{12}\,q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) = 3 + o(1)$$

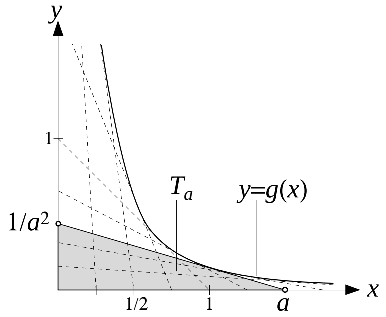
otteniamo infatti

$$e^{3+o(1)} = a\Big[-\frac{\sqrt{12}\,q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big)\Big] \quad \text{cioè} \quad e^3 + o(1) = -\sqrt{12}\,q + o(1) ,$$

da cui segue che $q = -e^3/\sqrt{12}$, e quindi

$$x(a) = \sqrt{3} - \frac{e^3}{\sqrt{12}\,a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. a) Tracciano i triangoli T_a per alcuni valori di a si ottiene la figura riportata sotto.



b) Per ogni $a > 0$ la retta $R_a$che contiene che contiene l'ipotenusa del triangolo T_a ha equazione $y = 1/a^2 - x/a^3$. Questo significa che, fissato $x > 0$, la retta R_a interseca la retta verticale di ascissa x all'altezza

$$h_x(a) := \frac{1}{a^2} - \frac{x}{a^3} = \frac{a-x}{a^3} .$$

Ora, $g(x)$ corrisponde chiaramente all'altezza massima di tale intersezione, vale a dire

$$g(x) = \max_{a>0} h_x(a) .$$

Dobbiamo dunque trovare il massimo della funzione $h_x(a)$ relativamente alla semiretta $a > 0$. Studiando il segno della derivata della funzione $h_x(a)$ *rispetto alla variabile* a, vale a dire

$$h'_x(a) = \frac{-2}{a^3} + \frac{3x}{a^4} = \frac{3x - 2a}{a^4} ,$$

otteniamo che $a = 3x/2$ è il punto di massimo assoluto di h_x, e quindi

$$g(x) = h_a\Big(\frac{3x}{2}\Big) = \frac{4}{27\,x^2} \quad \text{per ogni } x > 0.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Analogo al gruppo 1.

a) $f(x) = \sqrt{\log(1 + 16x^8)} \sim 4x^4$ per $x \to 0$.

b) Per quanto visto al punto a), per ogni $a \neq 1/4$ vale che $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^4} \sim \Big(\dfrac{1}{4} - a\Big)\dfrac{1}{x^4}$ per $x \to 0$.

c) Usando il fatto che $f(x) = 4x^4 - 16x^{12} + O(x^{20})$, e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{4x^4} \sim x^4 \quad \text{per } x \to 0.$$

2. Analogo al gruppo 1.

b) Riscriviamo l'equazione (*) nella forma

$$f(x) = a \quad \text{con} \quad f(x) := \frac{\exp(x^2/2)}{2 - x^2}\,, \quad x \geq 0\,.$$

Tracciando il grafico di f si vede subito che il numero di soluzioni dell'equazione (*) è

- una per $a \geq 1/2$;
- nessuna per $-e^2/2 < a < 1/2$;
- una per $a = -e^2/2$;
- due per $a < -e^2/2$.

a) Per quanto detto al punto precedente, la risposta è "nessuna soluzione".

c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene

$$x(a) = \sqrt{2} - \frac{e}{\sqrt{8}\,a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Analogo al gruppo 1. In questo caso

$$g(x) = \max_{a>0} \frac{a - x}{a^4} = \frac{27}{256\,x^3} \quad \text{per ogni } x > 0.$$

Seconda parte, gruppo 3.

1. Analogo al gruppo 1.

a) $f(x) = \sqrt{\log(1 + 16x^4)} \sim 4x^2$ per $x \to 0$.

b) Per quanto visto al punto a), per ogni $a \neq 1/4$ vale che $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^2} \sim \Big(\dfrac{1}{4} - a\Big)\dfrac{1}{x^2}$ per $x \to 0$.

c) Usando il fatto che $f(x) = 4x^2 - 16x^6 + O(x^{10})$, e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{4x^2} \sim x^2 \quad \text{per } x \to 0.$$

2. Analogo al gruppo 1.

b) Riscriviamo l'equazione (*) nella forma

$$f(x) = a \quad \text{con} \quad f(x) := \frac{\exp(x^2/2)}{4 - x^2}\,, \quad x \geq 0\,.$$

Tracciando il grafico di f si vede subito che il numero di soluzioni dell'equazione (*) è

- una per $a \geq 1/4$;
- nessuna per $-e^3/2 < a < 1/4$;
- una per $a = -e^3/2$;
- due per $a < -e^3/2$.

a) Per quanto detto al punto precedente, la risposta è "una soluzione".

c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene

$$x(a) = 2 - \frac{e^2}{4a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Analogo al gruppo 1.
   a) $f(x) = \sqrt{\log(1 + 4x^8)} \sim 2x^4$ per $x \to 0$.
   b) Per quanto visto al punto a), per ogni $a \neq 1/2$ vale che $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^4} \sim \Big(\dfrac{1}{2} - a\Big)\dfrac{1}{x^4}$ per $x \to 0$.
   c) Usando il fatto che $f(x) = 2x^4 - 2x^{12} + O(x^{20})$, e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{2x^4} \sim \frac{x^4}{2} \quad \text{per } x \to 0.$$

2. Analogo al gruppo 1.
   b) Riscriviamo l'equazione (*) nella forma
$$f(x) = a \quad \text{con} \quad f(x) := \frac{\exp(x^2)}{2 - x^2}\,, \quad x \geq 0\,.$$
   Tracciando il grafico di f si vede subito che il numero di soluzioni dell'equazione (*) è
   - una per $a \geq 1/2$;
   - nessuna per $-e^3 < a < 1/2$;
   - una per $a = -e^3$;
   - due per $a < -e^3$.

   a) Per quanto detto al punto precedente, la risposta è "nessuna soluzione".
   c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$x(a) = \sqrt{2} - \frac{e^2}{\sqrt{8}\,a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Uguale al gruppo 2.

Commenti

- Prima parte, esercizio 3. Questo esercizio ha presentato difficoltà di impostazione per molti dei presenti: il punto è che la funzione $f(x)$ è da una formula per ogni $x \geq 2$, e da un'altra formula per $x < 2$ (mi riferisco qui al gruppo 1), e per far sì che f sia continua (in $x = 2$) si deve imporre che valori delle due formule in 2 coincidano, vale a dire $5a = 1 - a$, mentre per averla derivabile si deve imporre che i valori delle derivate delle due formule in 2 coincidano, vale a dire $4a = b/2$; alla fine si ottiene quindi $a = 1/6$, $b = 4/3$.

- Prima parte, esercizio 8. Molti dei presenti hanno confuso la domanda del tipo "risolvere graficamente la disequazione $f(x) \leq g(x)$" con la domanda "disegnare l'insieme del punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq g(x)$".

- Seconda parte, esercizio 1. Nelle soluzioni date sopra i resti degli sviluppi sono espressi come "o grandi", ma in questo caso esprimerli come "o piccoli" non avrebbe fatto alcuna differenza.

- Seconda parte, esercizio 1. Per rispondere al punto c) si può anche procedere sviluppando $1/f(x)$ come segue (mi riferisco qui al gruppo 1):
$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} &= \big(\log(1 + 4x^4)\big)^{-1/2}\\ &= \big(4x^4 - 8x^8 + O(x^{12})\big)^{-1/2}\\ &= \frac{1}{2x^2}\big(1 - 2x^4 + O(x^8)\big)^{-1/2}\\ &= \frac{1}{2x^2}\big(1 + x^4 + O(x^8)\big) = \frac{1}{2x^2} + \frac{x^2}{2} + O(x^6)\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio si usa lo sviluppo $\log(1+y) = y - y^2/2 + O(y^3)$ e nel quarto lo sviluppo $(1+y)^{-1/2} = 1 - y/2 + O(y^2)$). Quindi

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{2x^2} = \frac{x^2}{2} + O(x^6) \sim \frac{x^2}{2}\,.$$

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Il punto di minimo assoluto è 0, il punto di massimo assoluto è 1.

2. a) 1/2; b) $+\infty$; c) 0.

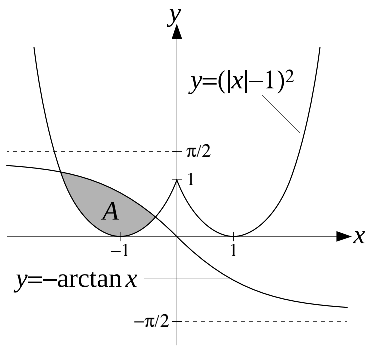
3. $\vec{v} = \left(\dfrac{2t}{1+t^4},\ -3t^2 \exp(-t^3)\right)$; $\vec{a} = \left(\dfrac{2-6t^4}{(1+t^4)^2},\ (9t^4-6t)\exp(-t^3)\right)$.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 4-2x^2$ si ottiene
$$\int \frac{4x}{\sqrt{4-2x^2}}\,dx = -\int y^{-1/2} dy = -2y^{1/2} + c = -2\sqrt{4-2x^2} + c\,.$$

5. $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^{2n}+1}{3^n-2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(4^2)^n}{3^n}} = \dfrac{16}{3}$.

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^{ax}}{\sin(x^{2a}+x^a)}dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{x^{a-1}}$, e quindi l'integrale è finito per $a<2$.

7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{2}\log\big(2+\cos(2t)\big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Il punto di minimo assoluto è 0, il punto di massimo assoluto è $\sqrt{2}$.

2. a) 1/2; b) 0; c) non esiste.

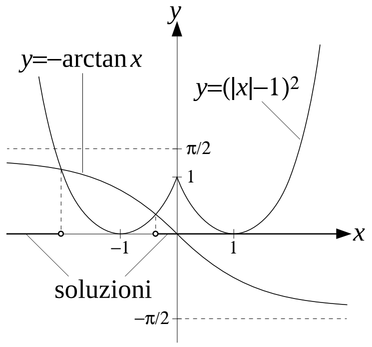
3. $\vec{v} = \left(\dfrac{3t^2}{1+t^6},\ -2t\exp(-t^2)\right)$; $\vec{a} = \left(\dfrac{6t-12t^7}{(1+t^6)^2},\ (4t^2-2)\exp(-t^2)\right)$.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 8-2x^2$ si ottiene
$$\int_0^2 \frac{8x}{\sqrt[3]{8-2x^2}}\,dx = -2\int_8^0 y^{-1/3}dy = -3\Big|\,y^{2/3}\Big|_8^0 = 12\,.$$

5. $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{5^n+n^2}{3^{2n}-2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{5^n}{(3^2)^n}} = \dfrac{5}{9}$.

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(a/x^2)}{x^{2a}+x^a}dx \approx \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2a+2}}$, e quindi l'integrale è finito per ogni $a>0$.

7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{4}\log\big(2\cos(2t)-1\big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Il punto di minimo assoluto è 1, il punto di massimo assoluto non esiste.

2. a) 0; b) 2; c) $-\infty$.

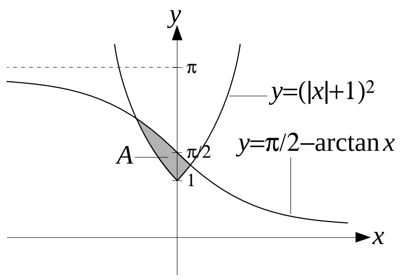
3. $\vec{v} = \left(\dfrac{2t}{1+t^4},\, -2t\,\exp(-t^2)\right)$; $\vec{a} = \left(\dfrac{2-6t^4}{(1+t^4)^2},\, (4t^2-2)\,\exp(-t^2)\right)$.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 8 - 2x^2$ si ottiene
$$\int \frac{8x}{\sqrt[3]{8-2x^2}}\,dx = -2\int y^{-1/3}dy = -3y^{2/3} + c = -3(8-2x^2)^{2/3} + c\,.$$

5. $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^{2n}+3}{2^n - n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(4^2)^n}{2^n}} = 8.$

6. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\log(1+ax^2)}{x^{2a}+x^a}dx \approx \int_0^2 \frac{dx}{x^{a-2}}dx$, e quindi l'integrale è finito per $a < 3$.

7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{4}\log\big(\cos(4t)\big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Il punto di minimo assoluto non esiste, il punto di massimo assoluto è 1.

2. a) 2; b) 0; c) 0.

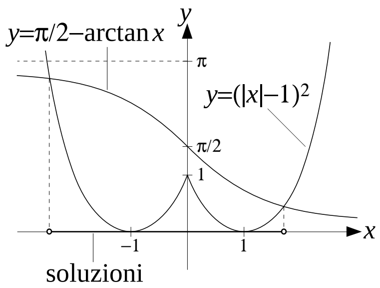
3. $\vec{v} = \left(-3t^2\,\exp(-t^3),\, \dfrac{2t}{1+t^4}\right)$; $\vec{a} = \left((9t^4-6t)\,\exp(-t^3),\, \dfrac{2-6t^4}{(1+t^4)^2}\right)$.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 4 - 2x^2$ si ottiene
$$\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{4-2x^2}}\,dx = -\int_4^2 y^{-1/2}dy = -2\Big|\,y^{1/2}\,\Big|_4^2 = 2(2-\sqrt{2})\,.$$

5. $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n+n}{2^{2n}+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{(2^2)^n}} = \dfrac{3}{4}$.

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{2a}+x^a}{2^x+x^a} dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{x^{2a}}{2^x} dx$, e quindi l'integrale è finito per ogni $a>0$.

7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{2} \log\big(\cos(2t)\big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Il punto di minimo assoluto è $-\sqrt{2}$, il punto di massimo assoluto è $\sqrt{2}$.

2. a) 2; b) 0; c) 0.

3. $\vec{v} = \left(-2t\,\exp(-t^2),\ \dfrac{3t^2}{1+t^6}\right)$; $\vec{a} = \left((4t^2-2)\,\exp(-t^2),\ \dfrac{6t-12t^7}{(1+t^6)^2}\right)$.

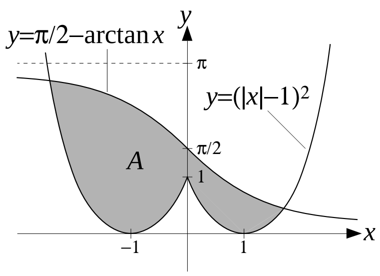
4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 4-x^2$ si ottiene

$$\int \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -2\int y^{-1/2}dy = -4y^{1/2}+c = -4\sqrt{4-x^2}+c\,.$$

5. $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^{2n}-2}{5^n-n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(3^2)^n}{5^n}} = \dfrac{9}{5}$.

6. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x^{2a}+x^a}{xe^{ax}} dx \approx \int_0^{2} \frac{dx}{x^{1-a}} dx$, e quindi l'integrale è finito per ogni $a>0$.

7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{4} \log\big(2\cos(2t)-1\big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Il punto di minimo assoluto è $1/2$, il punto di massimo assoluto è $-1/2$.

2. a) $+\infty$; b) $-1/2$; c) 0.

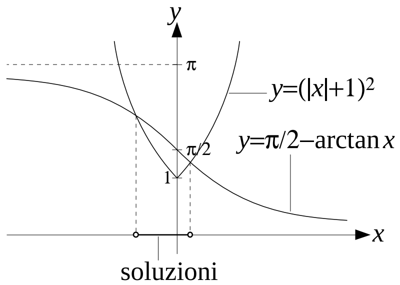
3. $\vec{v} = \left(-2t\exp(-t^2),\ \dfrac{2t}{1+t^4}\right)$; $\vec{a} = \left((4t^2-2)\exp(-t^2),\ \dfrac{2-6t^4}{(1+t^4)^2}\right)$.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 4 - x^2$ si ottiene
$$\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -2\int_4^0 y^{-1/2}dy = -4\Big|\, y^{1/2}\Big|_4^0 = 8\,.$$

5. $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^n+n^2}{3^{2n}-2}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^n}{(3^2)^n}} = \dfrac{4}{9}$.

6. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^{2a}+x^a}{\log(1+a/x^2)}dx \approx \int_2^{+\infty} x^{2a+2}dx$, e quindi l'integrale non è finito per alcun $a>0$.

7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{4}\log\big(2+\cos(4t)\big)$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Usando le proprietà del logaritmo si ottiene che, per $x \to 0$,
$$\begin{aligned} f(x) &= \log(3+\cos x) - \log 4 \\ &= \log\Big(1 + \frac{\cos x - 1}{4}\Big) \sim \frac{\cos x - 1}{4} \sim -\frac{x^2}{8}\,, \end{aligned}$$
dove nel secondo passaggio abbiamo usato lo sviluppo $\log(1+y) \sim y$ per $y \to 0$ con $y = \cos x - 1$, e nel terzo lo sviluppo $1 - \cos x \sim x^2/2$ per $x \to 0$.

b) Per quanto fatto al punto precedente abbiamo che, per $x \to 0$,
$$f(x) + ax^2 \sim \Big(a - \frac{1}{8}\Big)x^2 \quad \text{se } a \neq 1/8.$$
Il caso $a = 1/8$ va trattato a parte. Per farlo, ripercorriamo quando fatto nel punto precedente utilizzando degli sviluppi più precisi:
$$\begin{aligned} f(x) &= \log\Big(1 + \frac{\cos x - 1}{4}\Big) \\ &= \frac{\cos x - 1}{4} - \frac{(\cos x - 1)^2}{32} + O\big((\cos x - 1)^3\big) \\ &= \frac{1}{4}\Big[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\Big] - \frac{1}{32}\Big[-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\Big]^2 + O\big((O(x^2))^3\big) \\ &= \Big[-\frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{96} + O(x^6)\Big] - \frac{1}{32}\Big[\frac{x^4}{4} + O(x^6)\Big] + O(x^6) \\ &= -\frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{96} - \frac{x^4}{128} + O(x^6) = -\frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{384} + O(x^6)\,, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato lo sviluppo $\log(1+y) = y - y^2/2 + O(y^3)$ per $y \to 0$ con $y = \cos x - 1$, e nel terzo gli sviluppi

$$\cos x - 1 = -x^2/2 + x^4/24 + O(x^6) = -x^2/2 + O(x^4) = O(x^2)\,.$$

Possiamo ora concludere, dando la parte principale di $f(x) + ax^2$ per $a = 1/8$:

$$f(x) + \frac{x^2}{8} = \frac{x^4}{384} + O(x^6) \sim \frac{x^4}{384}\,.$$

2. Affrontiamo insieme i punti a) e b). Dividendo entrambe le disequazioni per $(e^{2x}+1)^4$ il problema diventa trovare il più grande numero m ed il più piccolo numero M per cui vale

$$m \le \frac{e^{8x}+8}{(e^{2x}+1)^4} \le M \quad \text{per ogni } x \ge 0;$$

questo significa che m è il valore minimo della funzione

$$f(x) := \frac{e^{8x}+8}{(e^{2x}+1)^4}$$

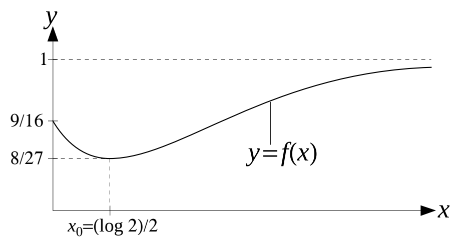
tra tutti gli $x \ge 0$, oppure, se tale minimo non esiste, l'estremo inferiore. Analogamente M è il valore massimo di f tra tutti gli $x \ge 0$, oppure l'estremo superiore se il massimo non esiste.
Per determinare m e M studiamo il grafico di f limitatamente alla semiretta $[0, +\infty)$. Osserviamo innanzitutto che $f(x)$ è ben definita e positiva per ogni $x \ge 0$, vale $9/16$ in 0, e tende a 1 per $x \to +\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{8e^{8x}\,(e^{2x}+1)^4 - (e^{8x}+8)\,4(e^{2x}+1)^3\,2e^{2x}}{\big(e^{2x}+1\big)^8} = \frac{8e^{2x}\,\big(e^{6x}-8\big)}{\big(e^{2x}+1\big)^5}$$

otteniamo che f è decrescente nell'intervallo $[0, x_0]$ e crescente nella semiretta $[x_0, +\infty)$, dove

$$x_0 := \frac{\log 2}{2}\,.$$

Usando queste informazioni tracciamo il grafico di f relativamente alla semiretta $[0, +\infty)$.



In particolare x_0 è il punto di minimo assoluto di f e quindi

$$m = f(x_0) = \frac{e^{4\log 2}+8}{(e^{\log 2}+1)^4} = \frac{16+8}{(2+1)^4} = \frac{8}{27}\,.$$

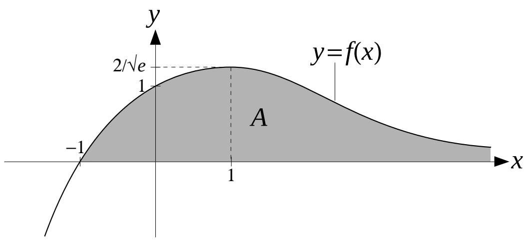
D'altra parte f non ha punti di massimo assoluto, e l'estremo superiore dei valori $f(x)$ viene raggiunto per $x \to +\infty$; quindi

$$M = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1\,.$$

3. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, positiva per $x \ge -1$ e negativa altrimenti, tende a 0 per $x \to +\infty$ e a $-\infty$ per $x \to -\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{1-x}{2}\exp(-x/2)$$

si ottiene che f è crescente nella semiretta $(-\infty, 1]$ e decrescente nella semiretta $[1, +\infty)$ (ed in particolare 1 è il punto di massimo assoluto). Sulla base di queste informazioni otteniamo il grafico di f e l'insieme A riportato nella figura sotto.



b) Il volume del solido di rotazione V_x è dato dalla formula

$$\text{volume}(V_x) = \pi \int_{-1}^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\, dx = \pi \int_{-1}^{+\infty} (1+x)^2 e^{-x}\, dx\,;$$

integrando per parti due volte, e usando il fatto che la primitiva di e^{-x} è $-e^{-x}$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\text{volume}(V_x) &= \pi \Big|(1+x)^2(-e^{-x})\Big|_{-1}^{+\infty} - \pi \int_{-1}^{+\infty} 2(1+x)\,(-e^{-x})\, dx \\
&= 2\pi \int_{-1}^{+\infty} (1+x)\, e^{-x}\, dx \\
&= 2\pi \Big|(1+x)\,(-e^{-x})\Big|_{-1}^{+\infty} - 2\pi \int_{-1}^{+\infty} (-e^{-x})\, dx \\
&= 2\pi \int_{-1}^{+\infty} e^{-x}\, dx = 2\pi \Big|(-e^{-x})\Big|_{-1}^{+\infty} = 2\pi e
\end{aligned}$$

c) Osserviamo che V_y può essere ottenuto facendo ruotare attorno all'asse delle y solamente la parte di A che si trova a destra dell'asse delle y (nel senso che la rotazione della parte sinistra di A è contenuta nella rotazione della parte destra). Pertanto il volume di V_y è dato dalla formula

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi \int_0^{+\infty} x\, f(x)\, dx = 2\pi \int_0^{+\infty} (x+x^2)\, e^{-x/2}\, dx\,,$$

e integrando per parti due volte otteniamo

$$\begin{aligned}
\text{volume}(V_y) &= 2\pi \Big|(x+x^2)\,(-2e^{-x/2})\Big|_0^{+\infty} - 2\pi \int_0^{+\infty} (1+2x)\,(-2e^{-x/2})\, dx \\
&= 4\pi \int_0^{+\infty} (1+2x)\, e^{-x/2}\, dx \\
&= 4\pi \Big|(1+2x)\,(-2e^{-x/2})\Big|_0^{+\infty} - 4\pi \int_0^{+\infty} 2\,(-2e^{-x/2})\, dx \\
&= 8\pi + 16\,\pi \int_0^{+\infty} e^{-x/2}\, dx = 8\pi + 16\,\pi \Big|(-2e^{-x/2})\Big|_0^{+\infty} = 40\,\pi
\end{aligned}$$

4. a), b) L'equazione differenziale (*) è lineare e a coefficienti costanti. Pertanto la soluzione generale è data da

$$x = x_{\rm om} + \tilde{x} \tag{1}$$

dove $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione *omogenea* associata alla (*), mentre $\tilde{x}$ è una soluzione *particolare* della (*).
Cominciamo con il calcolo di $x_{\rm om}$. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è

$$\lambda^2 + 2a\lambda + (2-a) = 0\,.$$

Distinguiamo quindi tre casi a seconda del segno del discriminante di questa equazione.
Caso $a > 1$. Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono reali e distinte,

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2+a-2}\,, \tag{2}$$

e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Caso $a = 1$. Le soluzioni dell'equazione caratteristica coincidono con -1 e quindi

$$x_{\rm om}(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Caso $1 > a \geq 0$. Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono complesse,

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \omega i \quad \text{con } \omega := \sqrt{2 - a - a^2}\,,$$

e quindi

$$x_{\rm om}(t) = e^{-t}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Passiamo alla ricerca della soluzione particolare $\tilde{x}$. Anche qui si presentano due casi distinti.
Caso $a \neq 1$. Cerchiamo $\tilde{x}$ della forma $\tilde{x}(t) = ce^{-t}$; sostituendo questa espressione nella (*) otteniamo $c = 4/(3 - 3a)$, ovvero

$$\tilde{x}(t) = \frac{4e^{-t}}{3 - 3a}\,. \tag{4}$$

Caso $a = 2$. Cerchiamo $\tilde{x}$ della forma $\tilde{x}(t) = ct^2e^{-t}$; sostituendo questa espressione nella (*) otteniamo $c = 2$, ovvero

$$\tilde{x}(t) = 2t^2e^{-t}\,.$$

c) Per via della formula (1) ci basta far vedere che $\tilde{x}(t) = o(e^t)$ e $x_{\rm om}(t) = o(e^t)$ per ogni $a \geq 2$. La prima affermazione è un'immediata conseguenza della formula (4), mentre usando le formule (2) e (3) riduciamo la seconda affermazione alla disuguaglianza

$$-a + \sqrt{a^2 + a - 2} < 1\,;$$

sommando a ad entrambi e termini ed elevandoli al quadrato, questa disequazione diventa $a^2 + a - 2 < (1 + a)^2$, vale a dire $-3 \leq a$, ed in particolare è verificata per ogni $a \geq 2$.

d) Procedendo come al punto c) si vede che l'affermazione $x(t) = o(e^{ct})$ per ogni soluzione della (*) equivale alla disequazione

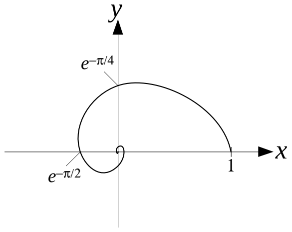
$$-a + \sqrt{a^2 + a - 2} < c\,,$$

che a sua volta si riscrive come

$$-(2 + c^2) \leq (2c - 1)a\,. \tag{5}$$

Distinguiamo tre casi: se $2c - 1 > 0$ la disequazione (5) è verificata per $a \geq -(2 + c^2)/(2c - 1)$, ed in particolare è verificata per ogni $a \geq 2$; Se $2c - 1 = 0$ la (5) è verificata per ogni a; se infine $2c - 1 < 0$ la (5) è verificata per $a \leq -(2 + c^2)/(2c - 1)$, ed in particolare ci sono dei valori $a \geq 2$ per cui non è verificata.
Riassumendo, i valori di c tali che $x(t) = o(e^{ct})$ per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione della (*) sono quelli che soddisfano $2c - 1 \geq 0$, ovvero $c \geq 1/2$. In particolare il più piccolo di questi valori è $c = 1/2$.

5. a) Siccome la funzione $e^{-\alpha}$ è decrescente in α, e tende a 0 per $\alpha \to +\infty$, la curva C è una spirale che parte dal punto $(1, 0)$ e si avvicina rapidamente all'origine girandoci intorno infinite volte in senso antiorario, come mostrato nel disegno sotto (eseguito senza rispettare la distanze, in modo da rendere meglio l'idea).



b) Scegliamo come legge oraria di P quella per cui ad ogni istante t l'angolo α è uguale a t. In tal caso la posizione di P all'istante t, espressa in coordinate cartesiane, è

$$P(t) = \big(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t\big)\,.$$

Quindi la velocità di P è

$$\vec{v}(t) = \big(e^{-t}(-\cos t - \sin t),\ e^{-t}(-\sin t + \cos t)\big)\,,$$

e un semplice calcolo mostra che $|\vec{v}(t)| = \sqrt{2}\, e^{-t}$. Pertanto la lunghezza della curva è

$$L = \int_0^{+\infty} |\vec{v}(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} \sqrt{2}\, e^{-t}\, dt = \sqrt{2}\,.$$

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1: per $x \to 0$ si ha

$$f(x) \sim -\frac{x^2}{10}\,; \quad f(x) + ax^2 \sim \begin{cases} \Big(a - \dfrac{1}{10}\Big) x^2 & \text{per } a \neq 1/10, \\ \dfrac{x^4}{300} & \text{per } a = 1/10. \end{cases}$$

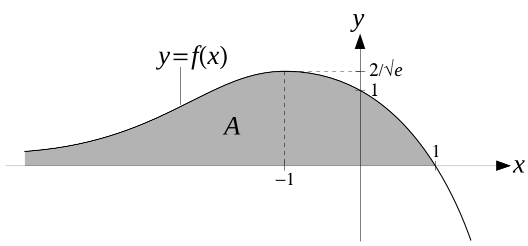
2. Analogo al gruppo 1: m ed M sono rispettivamente il valore minimo e massimo della funzione

$$f(x) := \frac{e^{12x} + 9}{(e^{4x} + 1)^3}$$

relativamente alla semiretta $[0, +\infty)$, oppure estremo inferiore e superiore se massimo e minimo non esistono. Facendo i conti si ottiene che il punto di minimo assoluto di f è $x_0 := (\log 3)/4$, mentre il punto di massimo assoluto è 0. Pertanto

$$m = f(x_0) = \frac{e^{3\log 3} + 9}{(e^{\log 3} + 1)^3} = \frac{9}{16}\,; \quad M = f(0) = \frac{5}{4}\,.$$

3. Analogo al gruppo 1. a) Il grafico della funzione f e l'insieme A sono come in figura:



b) Il volume di V_x è dato da

$$\text{volume}(V_x) = \pi \int_{-\infty}^{1} \big(f(x)\big)^2\, dx = \pi \int_{-\infty}^{1} (x-1)^2\, e^x\, dx = 2\pi e\,.$$

c) Il solido V_y è ottenuto ruotando attorno all'asse delle y la parte di A che si trova a *sinistra* dell'asse delle y, e quindi il volume di V_y è dato da

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi \int_{-\infty}^{0} (-x)\, f(x)\, dx = \pi \int_{-\infty}^{0} (x^2 - x)\, e^{x/2}\, dx = 40\,\pi\,.$$

4. Analogo al gruppo 1.
a), b) La soluzione generale della (*) è $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}$ dove x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) mentre $\tilde{x}$ è una soluzione particolare dell'equazione. La soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \text{ con } \lambda_{1,2} := -2a \pm \sqrt{4a^2 + 2a - 2} & \text{per } a > 1/2, \\ e^{-t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 1/2, \\ e^{-2at}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) \text{ con } \omega := \sqrt{2 - 2a - 4a^2} & \text{per } 1/2 > a \geq 0 \end{cases}$$

(in questa formula c_1, c_2 sono numeri reali arbitrari), mentre la soluzione particolare è data da

$$\tilde{x}_(t) = \begin{cases} \dfrac{2e^{-t}}{1 - 2a} & \text{per } a \neq 1/2; \\ 3t^2 e^{-t} & \text{per } a = 1/2. \end{cases}$$

c) Analogo al gruppo 1.
d) Analogo al gruppo 1, il valore cercato è $c = 1/2$.

5. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Analogo al gruppo 1: per $x \to 0$ si ha

$$f(x) \sim -\frac{x^2}{12}\,; \quad f(x) + ax^2 \sim \begin{cases} \left(a - \frac{1}{12}\right)x^2 & \text{per } a \neq 1/12, \\ \frac{x^4}{288} & \text{per } a = 1/12. \end{cases}$$

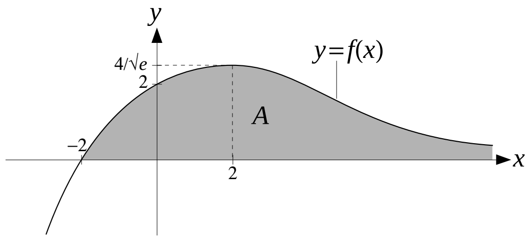
2. Analogo al gruppo 1: m ed M sono rispettivamente il valore minimo e massimo della funzione

$$f(x) := \frac{e^{12x} + 8}{(e^{3x} + 1)^4}$$

relativamente alla semiretta $[0, +\infty)$, oppure estremo inferiore e superiore se massimo e minimo non esistono. Facendo i conti si ottiene che il punto di minimo assoluto di f è $x_0 := (\log 2)/3$, mentre il punto di massimo assoluto non esiste, e l'estremo superiore dei valori $f(x)$ viene raggiunto per $x \to +\infty$. Pertanto

$$m = f(x_0) = \frac{e^{4\log 2} + 8}{(e^{\log 2} + 1)^4} = \frac{8}{27}\,; \quad M = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1\,.$$

3. Analogo al gruppo 1. a) Il grafico della funzione f e l'insieme A sono come in figura:



b) Il volume di V_x è dato da

$$\text{volume}(V_x) = \pi \int_{-2}^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\,dx = \pi \int_{-2}^{+\infty} (x+2)^2\,e^{-x/2}\,dx = 16\,\pi e\,.$$

c) Il solido V_y è ottenuto ruotando attorno all'asse delle y la parte di A che si trova a *destra* dell'asse delle y, e quindi il volume di V_y è dato da

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi \int_0^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \pi \int_{-2}^{+\infty} (2x + x^2)\,e^{-x/4}\,dx = 320\,\pi\,.$$

4. Uguale al gruppo 1.

5. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1: per $x \to 0$ si ha

$$f(x) \sim -\frac{x^2}{4}\,; \quad f(x) + ax^2 \sim \begin{cases} \left(a - \frac{1}{4}\right)x^2 & \text{per } a \neq 1/4, \\ -\frac{x^4}{96} & \text{per } a = 1/4. \end{cases}$$

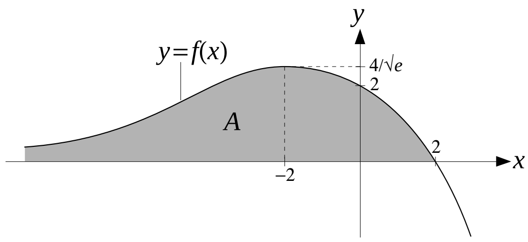
2. Analogo al gruppo 1: m ed M sono rispettivamente il valore minimo e massimo della funzione

$$f(x) := \frac{e^{6x} + 9}{(e^{2x} + 1)^3}$$

relativamente alla semiretta $[0, +\infty)$, oppure estremo inferiore e superiore se massimo e minimo non esistono. Facendo i conti si ottiene che il punto di minimo assoluto di f è $x_0 := (\log 3)/2$, mentre il punto di massimo assoluto è 0. Pertanto

$$m = f(x_0) = \frac{e^{3\log 3} + 9}{(e^{\log 3} + 1)^3} = \frac{9}{16}\,; \quad M = f(0) = \frac{5}{4}\,.$$

3. Analogo al gruppo 1. a) Il grafico della funzione f e l'insieme A sono come in figura:



b) Il volume di V_x è dato da

$$\text{volume}(V_x) = \pi \int_{-\infty}^{2} \big(f(x)\big)^2\,dx = \pi \int_{-\infty}^{2} (x-2)^2\, e^{x/2}\,dx = 16\,\pi e\,.$$

c) Il solido V_y è ottenuto ruotando attorno all'asse delle y la parte di A che si trova a *sinistra* dell'asse delle y, e quindi il volume di V_y è dato da

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi \int_{-\infty}^{0} (-x)\, f(x)\,dx = \pi \int_{-\infty}^{2} (x^2 - 2x)\, e^{x/4}\,dx = 320\,\pi\,.$$

4. Uguale al gruppo 2.

5. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 3c). Consideriamo in generale il solido V_y ottenuto ruotando attorno all'asse delle y il sottografico A di una funzione f *positiva* definita in un intervallo $[a, b]$. Nel caso in cui l'intervallo $[a, b]$ si trova *a destra* dell'origine, vale a dire $0 \le a \le b$, la formula per il volume di V_y è stata data a lezione:

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\,dx\,. \tag{6}$$

Nel caso in cui $[a, b]$ si trovi a sinistra dell'origine, vale a dire $a \le b \le 0$, la formula per il volume è

$$\text{volume}(V_y) = -2\pi \int_a^b x\, f(x)\,dx\,,$$

e la si ottiene facilmente riflettendo A rispetto all'asse delle y e usando la formula precedente. Per un intervallo $[a, b]$ qualunque, indichiamo con A_d la parte di A a destra dell'asse delle y, e con A_s la parte a sinistra: allora l'integrale in (6) è uguale al volume del solido dato dalla rotazione di A_d attorno all'asse y meno il volume di quello dato dalla rotazione di A_s. In particolare, nel caso del gruppo 1, l'integrale

$$2\pi \int_{-1}^{+\infty} (x + x^2)\, e^{-x/2}\,dx$$

è strettamente inferiore al volume di V_y. (Un discorso simile vale per gli altri gruppi.)

Prima parte, gruppo 1.

1. a) $\dfrac{12}{(2-3x)^2}$; b) $-2(\log x+1)x^{-2x}$; c) $\left[\log\left(\dfrac{5x^4}{2^x}\right)\right]' = [\log 5 + 4\log x - x\log 2]' = \dfrac{4}{x} - \log 2$.

2. Usando il cambio di variabile $2x = t$ si ottiene
$$\int \frac{dx}{2+8x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\arctan t + c = \frac{1}{4}\arctan(2x) + c\,.$$

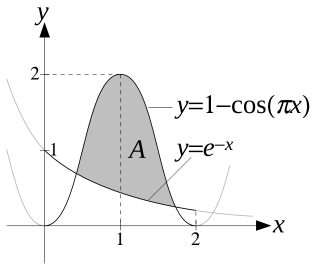
3. L'ordine corretto è $d \ll b \ll c \ll a$.

4. $f(x) = (1+x^3)\left[1 + \dfrac{1}{4}(-4x^3) - \dfrac{3}{32}(-4x^3)^2 + o(x^6)\right] = 1 - \dfrac{5}{2}x^6 + o(x^6)$.

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{3^{2n}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n = 2\frac{1}{1-8/9} = 18.$

6. L'integrale è improprio in $x = 2$, e utilizzando il cambio di variabile $x = 2 - t$ si ottiene
$$\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^a} = \int_0^2 \frac{dt}{(4t-t^2)^a} \approx \int_0^2 \frac{dt}{(4t)^a} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^a}$$
e quindi l'integrale è finito per $a < 1$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = cte^{-2t}$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. a) $\dfrac{-24}{(3+4x)^2}$; b) $3(\log x+1)x^{3x}$; c) $\left[\log\left(\dfrac{3^x}{5x^6}\right)\right]' = [x\log 3 - \log 5 - 6\log x]' = -\dfrac{6}{x} + \log 3$.

2. Usando il cambio di variabile $2x = t$ si ottiene
$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{3+12\,x^2} = \frac{1}{3}\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{6}\Big|\arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{24}\,.$$

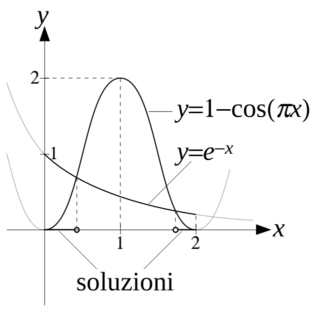
3. L'ordine corretto è $c \ll b \ll a \ll d$.

4. $f(x) = (1+x^2)\left[1 + \dfrac{1}{3}(-3x^2) - \dfrac{1}{9}(-3x^2)^2 + o(x^4)\right] = 1 - 2x^4 + o(x^4)$.

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{4n}} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^2}{2^4}\right)^n = 3\frac{1}{1-9/16} = \frac{48}{7}.$

6. L'integrale è improprio in $x = 3$, e utilizzando il cambio di variabile $x = 3 - t$ si ottiene
$$\int_0^3 \frac{dx}{(9-x^2)^{3a}} = \int_0^3 \frac{dt}{(6t-t^2)^{3a}} \approx \int_0^3 \frac{dt}{(6t)^{3a}} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^{3a}}$$
e quindi l'integrale è finito per $a < 1/3$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{-t} \sin t$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. a) $\dfrac{12}{(3-2x)^2}$; b) $-4(\log x + 1)x^{-4x}$; c) $\left[\log\left(\dfrac{4x^5}{3^x}\right)\right]' = [\log 4 + 5\log x - x\log 3]' = \dfrac{5}{x} - \log 3$.

2. Usando il cambio di variabile $3x = t$ si ottiene
$$\int \frac{dx}{2+18\,x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{6}\arctan t + c = \frac{1}{6}\arctan(3x) + c\,.$$

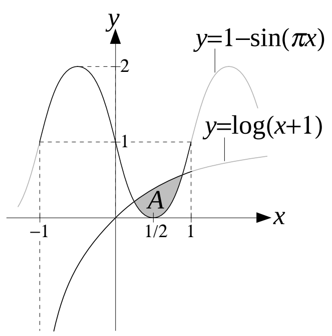
3. L'ordine corretto è $c \ll d \ll b \ll a$.

4. $f(x) = (1+x^2)\left[1 + \frac{1}{4}(-4x^2) - \frac{3}{32}(-4x^2)^2 + o(x^4)\right] = 1 - \frac{5}{2}x^4 + o(x^4)$.

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{4^{2n}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^3}{4^2}\right)^n = 2\frac{1}{1-1/2} = 4$.

6. L'integrale è improprio in $x = 2$, e utilizzando il cambio di variabile $x = 2 - t$ si ottiene
$$\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^{2a}} = \int_0^2 \frac{dt}{(4t-t^2)^{2a}} \approx \int_0^2 \frac{dt}{(4t)^{2a}} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^{2a}}$$
e quindi l'integrale è finito per $a < 1/2$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = cte^{2t}$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. a) $\dfrac{-12}{(2+3x)^2}$; b) $2(\log x + 1)x^{2x}$; c) $\left[\log\left(\dfrac{2^x}{5x^4}\right)\right]' = [x\log 2 - \log 5 - 4\log x]' = -\dfrac{4}{x} + \log 2$.

2. Usando il cambio di variabile $2x = t$ si ottiene
$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{2+8x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\Big|\arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16}\,.$$

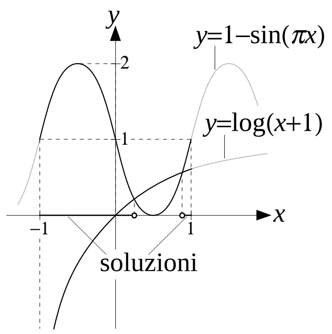
3. L'ordine corretto è $d \ll c \ll a \ll b$.

4. $f(x) = (1+x^3)\left[1 + \frac{1}{3}(-3x^3) - \frac{1}{9}(-3x^3)^2 + o(x^6)\right] = 1 - 2x^6 + o(x^6)$.

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n-1}}{3^{2n}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-8/9} = \frac{9}{2}$.

6. L'integrale è improprio in $x = 3$, e utilizzando il cambio di variabile $x = 3 - t$ si ottiene
$$\int_0^3 \frac{dx}{(9-x^2)^a} = \int_0^3 \frac{dt}{(6t-t^2)^a} \approx \int_0^3 \frac{dt}{(6t)^a} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^a}$$
e quindi l'integrale è finito per $a < 1$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^t \sin t$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. a) $\dfrac{24}{(3-4x)^2}$; b) $-3(\log x + 1)x^{-3x}$; c) $\left[\log\left(\dfrac{5x^6}{3^x}\right)\right]' = [\log 5 + 6\log x - x\log 3]' = \dfrac{6}{x} - \log 3$.

2. Usando il cambio di variabile $2x = t$ si ottiene
$$\int \frac{dx}{3+12\,x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{6}\arctan t + c = \frac{1}{6}\arctan(2x) + c\,.$$

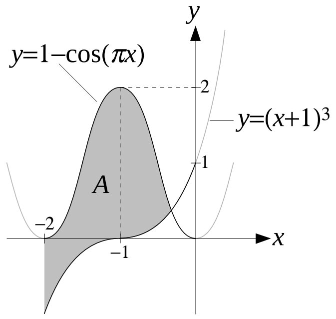
3. L'ordine corretto è $c \ll d \ll b \ll a$.

4. $f(x) = (1+x^4)\left[1 + \frac{1}{4}(-4x^4) - \frac{3}{32}(-4x^4)^2 + o(x^8)\right] = 1 - \frac{5}{2}x^8 + o(x^8)$.

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{2^{4n}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^2}{2^4}\right)^n = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-9/16} = \frac{16}{21}$.

6. L'integrale è improprio in $x = 2$, e utilizzando il cambio di variabile $x = 2 - t$ si ottiene
$$\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^{3a}} = \int_0^2 \frac{dt}{(4t-t^2)^{3a}} \approx \int_0^2 \frac{dt}{(4t)^{3a}} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^{3a}}$$
e quindi l'integrale è finito per $a < 1/3$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{-2t} \sin t$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. a) $\dfrac{-12}{(3+2x)^2}$; b) $4(\log x+1)x^{4x}$; c) $\left[\log\left(\dfrac{3^x}{4x^5}\right)\right]' = [x\log 3-\log 4-5\log x]' = -\dfrac{5}{x}+\log 3.$

2. Usando il cambio di variabile $3x=t$ si ottiene
$$\int_0^{1/3}\frac{dx}{2+18\,x^2}=\frac{1}{2}\int_0^{1/3}\frac{dx}{1+(3x)^2}=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{6}\Big|\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{24}\,.$$

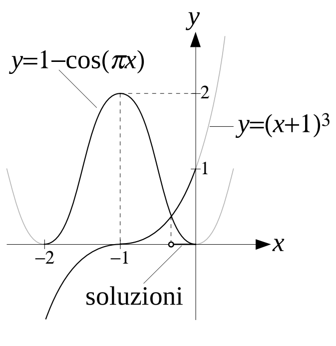
3. L'ordine corretto è $c \ll b \ll a \ll d$.

4. $f(x)=(1+x^4)\left[1+\frac{1}{3}(-3x^4)-\frac{1}{9}(-3x^4)^2+o(x^8)\right]=1-2x^8+o(x^8).$

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n-1}}{4^{2n}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^3}{4^2}\right)^n=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-1/2}=1.$

6. L'integrale è improprio in $x=3$, e utilizzando il cambio di variabile $x=3-t$ si ottiene
$$\int_0^3\frac{dx}{(9-x^2)^{2a}}=\int_0^3\frac{dt}{(6t-t^2)^{2a}}\approx\int_0^3\frac{dt}{(6t)^{2a}}\approx\int_0^1\frac{dt}{t^{2a}}$$
e quindi l'integrale è finito per $a<1/2$.

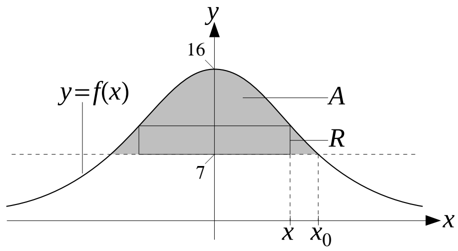
7. Le soluzioni cercate sono $x(t)=cte^{-t}$ con $c\in\mathbb{R}$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) la funzione
$$f(x):=\frac{16}{1+x^4}$$
è definita per ogni $x\in\mathbb{R}$, è pari e strettamente positiva, e tende a 0 per $x\to\pm\infty$. Studiando il segno della derivata prima
$$f'(x):=\frac{-64\,x^3}{(1+x^4)^2}$$

si vede che la f è crescente sulla semiretta $(-\infty, 0]$ e decrescente sulla semiretta $[0, +\infty)$. Utilizzando questi dati possiamo tracciare il grafico di f e l'insieme A (per renderlo più comprensibile, il disegno sotto è stato tracciato senza rispettare le corrette proporzioni).



b) Ci interessando i rettangoli R rappresentati nella figura sopra; se indichiamo con x l'ascissa dei due vertici di destra di R, abbiamo che R stesso è univocamente determinato da x, e che x varia nell'intervallo $[0, x_0]$, dove x_0 è la soluzione positiva l'equazione $f(x) = 7$ e vale quindi

$$x_0 = \sqrt[4]{9/7} \, .$$

Osserviamo ora che la base di R è $2x$ mentre l'altezza è $f(x) - 7$, e quindi l'area, espressa in funzione di x, è

$$a(x) := 2x\big(f(x) - 7\big) = \frac{18\,x - 14\,x^5}{1 + x^4} \, .$$

Dobbiamo quindi determinare i punti di massimo e minimo della funzione a relativamente all'intervallo $[0, x_0]$. La derivata di a è data da

$$a'(x) = \frac{18 - 124\,x^4 - 14\,x^8}{(1 + x^4)^2} \, ;$$

per studiarne il segno usiamo il cambio di variabile $t = x^4$, che permette di ricondursi allo studio del segno di un polinomio di secondo grado, ed otteniamo che a è crescente nell'intervallo $[0, x_m]$ con $x_m := 1/\sqrt[4]{7}$, e decrescente nell'intervallo $[x_m, x_0]$.
In particolare x_m è il punto di massimo assoluto di a, ed il corrispondente valore massimo è $a(x_m) = 2 \cdot 7^{3/4}$, mentre 0 e x_0 sono i punti di minimo assoluto, ed il valore minimo è 0; in effetti a questi due punti corrispondono rettangoli degeneri, con base o altezza uguale a zero (quindi il valore minimo dell'area non viene raggiunto tra i rettangoli "veri").

2. a) Per definizione di integrale improprio

$$L := \lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_4^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^4)^a} \approx \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{4a}}$$

ed in particolare L è finito per $a > 1/4$.
b) Si vede subito che la funzione $f(x)$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è pari. Studiando il segno della derivata prima

$$f'(x) = \frac{2x}{(1 + x^8)^a}$$

si ottiene che f cresce nella semiretta $[0, +\infty)$ e decresce nella semiretta $(-\infty, 0]$. In particolare 0 è il punto di minimo assoluto, mentre non esistono punti di massimo, e l'estremo superiore dei valori viene raggiunto per $x \to \pm\infty$ ed è uguale al limite L studiato al punto a).
c) La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = 2\frac{1 + (1 - 8a)\,x^8}{(1 + x^8)^{a+1}} \, .$$

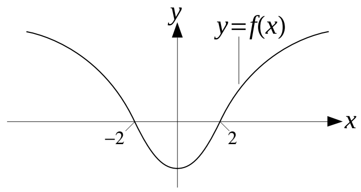
Distinguiamo ora due casi:

- se il coefficiente $1 - 8a$ che appare al numeratore è positivo, vale a dire se $a \leq 1/8$, allora la derivata seconda di f è chiaramente sempre positiva, ed f è convessa su tutto $\mathbb{R}$;
- se $a > 1/8$, studiando il segno del numeratore della derivata seconda otteniamo che f è convessa nell'intervallo $[-x_c, x_c]$ con $x_c := (8a - 1)^{-1/8}$ e concava nelle semirette $(-\infty, -x_c]$ e $[x_c, +\infty)$, in particolare la funzione non è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

d) Poiché la funzione integranda $(1+t^4)^{-a}$ che appare nella definizione di f è sempre strettamente positiva, abbiamo che l'integrale che definisce è nullo, positivo o negativo a seconda che l'estremo di integrazione x^2 sia uguale, maggiore o minore di 4. Per la precisione

- $f(x) = 0$ quando $x^2 = 4$, cioè per $x = \pm 2$;
- $f(x) > 0$ quando $x^2 > 4$, cioè per $x < -2$ oppure $x > 2$,
- $f(x) < 0$ quando $x^2 < 4$, cioè per $-2 < x < 2$.

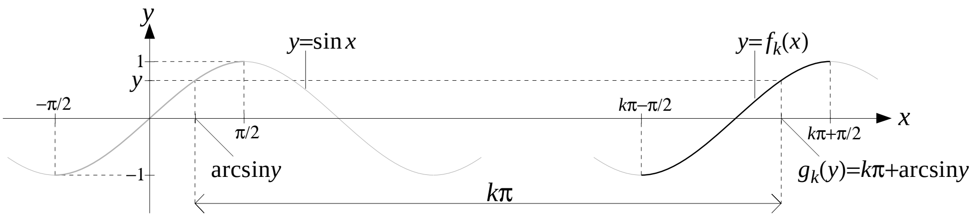
e) Utilizzando quanto detto ai punti precedenti otteniamo il grafico riportato sotto.



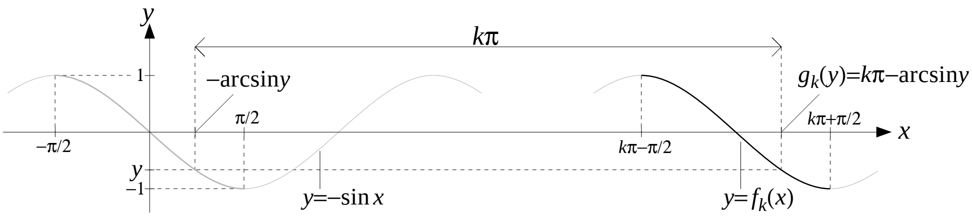
3. a) Osservando il grafico di $\sin x$ si vede subito che l'immagine di f_k è l'intervallo $[-1, 1]$, ed f_k è strettamente crescente per k pari e strettamente decrescente per k dispari. Quindi f_k ammette una funzione inversa

$$g_k : [-1,1] \to \left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right] .$$

Caso k pari:



Caso k dispari:



Dal disegno si vede chiaramente che quando k è pari il grafico di f_k è la traslazione orizzontale di $k\pi$ (verso destra se k è positivo) del grafico della restrizione di $y = \sin x$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, e siccome l'inversa di quest'ultima funzione è (per definizione) $x = \arcsin y$, abbiamo che

$$g_k(y) = k\pi + \arcsin y \quad \text{per } k \text{ pari.}$$

Viceversa, per k dispari il grafico di f_k è la traslazione orizzontale di $k\pi$ del grafico della restrizione di $y = -\sin x$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, e siccome l'inversa di quest'ultima funzione è $x = -\arcsin y$, abbiamo che

$$g_k(y) = k\pi - \arcsin y \quad \text{per } k \text{ dispari.}$$

b) Si tratta di un'equazione a variabili separabili. Procedendo al solito modo si arriva all'equazione $\sin x = e^t + c$, ed imponendo la condizione iniziale $x(0) = \pi$ si ottiene $c = -1$, ovvero

$$\sin x = e^t - 1 .$$

Resta dunque da esplicitare la x, tuttavia $x(t) = \arcsin(e^t - 1)$ non è la soluzione cercata, perché per $t = 0$ vale 0 invece di π. Il punto è che $\arcsin y$ è l'inversa "sbagliata" di $\sin x$ perché porta 0 in 0, mentre quella giusta è quella che porta 0 in π, vale a dire, per quanto visto al punto precedente, $g_1(y) = \pi - \arcsin y$. Pertanto la soluzione cercata è

$$x(t) = \pi - \arcsin(e^t - 1) .$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Analogo al gruppo 1. In questo caso x varia tra 0 e $x_0 := \sqrt[6]{13/11}$ e l'area del rettangolo R, espressa in funzione di x, è pari a
$$a(x) = \frac{26\,x - 22\,x^7}{1 + x^6}\,,$$
il valore massimo dell'area è $2 \cdot 11^{5/6}$ e viene assunto per $x = 1/\sqrt[6]{11}$, mentre il valore minimo è 0 e viene assunto per $x = 0$ e $x = x_0$ (valori che corrispondono a rettangoli degeneri).

2. a) Uguale al gruppo 1.
   b) Uguale al gruppo 1.
   c) Uguale al gruppo 1.
   d) Analogo al gruppo 1. La funzione f è nulla per $x = \pm 3$, strettamente positiva per $x < -3$ e $x > 3$, strettamente negativa per $-3 < x < 3$.

3. a) Uguale al gruppo 1.
   b) Analogo al gruppo 1. La soluzione è $x(t) = g_{-1}(e^t - 1) = -\pi - \arcsin(e^t - 1)$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Analogo al gruppo 1. In questo caso x varia tra 0 e $x_0 := \sqrt[4]{9/14}$ e l'area del rettangolo R, espressa in funzione di x, è pari a
$$a(x) = \frac{18\,x - 28\,x^5}{1 + 2x^4}\,,$$
il valore massimo dell'area è $14^{3/4}$ e viene assunto per $x = 1/\sqrt[4]{14}$, mentre il valore minimo è 0 e viene assunto per $x = 0$ e $x = x_0$ (valori che corrispondono a rettangoli degeneri).

2. a) Analogo al gruppo 1. Il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ è finito per $a > 1/4$.
   b) Analogo al gruppo 1. La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e pari, e studiando il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{2x}{(1 + x^{12})^a}$$
   si ottiene che 0 è il punto di minimo assoluto, che non ci sono punti di massimo, e che l'estremo superiore dei valori è raggiunto per $x \to \pm\infty$.
   c) La derivata seconda di f è data da
$$f''(x) = 2\frac{1 + (1 - 12\,a)\,x^{12}}{(1 + x^{12})^{a+1}}\,,$$
   in particolare la funzione f è convessa se e solo se $a \leq 1/12$.
   d) Uguale al gruppo 1.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1. In questo caso x varia tra 0 e $x_0 := \sqrt[6]{13/22}$ e l'area del rettangolo R, espressa in funzione di x, è pari a
$$a(x) = \frac{26\,x - 44\,x^7}{1 + 2x^6}\,,$$
il valore massimo dell'area è $22^{5/6}$ e viene assunto per $x = 1/\sqrt[6]{22}$, mentre il valore minimo è 0 e viene assunto per $x = 0$ e $x = x_0$ (valori che corrispondono a rettangoli degeneri).

2. a) Uguale al gruppo 3.
   b) Uguale al gruppo 3.
   c) Uguale al gruppo 3.
   d) Uguale al gruppo 2.

3. Uguale al gruppo 2.

Commenti

- Prima parte, esercizio 4. Quasi tutti i presenti hanno dato una risposta sbagliata, perché hanno usato uno sviluppo insufficiente dell'espressione sotto radice. Per esempio, nel caso del gruppo 1 lo svolgimento sembra essere stato il seguente:
$$(1+x^3)\sqrt[4]{1-4x^3} = (1+x^3)\big[1-x^3+o(x^3)\big] = 1-x^6+o(x^3)\,,$$
ma il resto $o(x^3)$ non autorizza a dire che il polinomio ottenuto è lo sviluppo di Taylor di ordine 6 della funzione (e infatti non lo è). Tuttavia questo errore risulta evidente solo scrivendo il resto...

- Prima parte, esercizio 6. Molti dei presenti hanno dato una risposta sbagliata. Nel caso del gruppo 1 (e un analogo discorso vale per gli altri gruppi) molti non si siano accorti che l'integrale è improprio in 2 e non in 0, mentre altri lo hanno erroneamente ricondotto all'integrale improprio $\int_0^1 dt/t^{2a}$ invece che $\int_0^1 dt/t^a$.

- Seconda parte, esercizio 1. Quasi tutti i presenti hanno disegnato correttamente l'insieme A, ma non i rettangoli di cui si deve studiare l'area, e di conseguenza, anche quando il problema è stato impostato correttamente, non hanno spiegato a cosa si riferisce la variabile x. In particolare alcuni hanno indicato con x la base del rettangolo (invece che l'ascissa dei vertici di destra), ma poi, nel calcolare l'altezza del rettangolo, hanno implicitamente indicato con x l'ascissa dei vertici.
Inoltre quasi nessuno ha spiegato chiaramente dove varia la x, e molti hanno esplicitamente considerato valori di x negativi, per i quali, sulla base della formula data, l'area del rettangolo è negativa...

- Seconda parte, esercizio 2. Diversi dei presenti invece della funzione $f(x)$ hanno studiato $1/(1+x^4)^a$ (qui mi riferisco al gruppo 1). Quasi nessuno dei presenti ha studiato il segno di f, e quasi nessuno ha tracciato il grafico di f, anche se diversi avevano tutti gli elementi necessari per farlo.

- Seconda parte, esercizio 3. Diversi dei presenti che hanno svolto l'esercizio hanno spiegato perché la funzione f_k è invertibile, e in alcuni (pochi) casi hanno anche disegnato correttamente il grafico della funzione inversa, ma *nessuno* ne ha scritto la formula giusta.
Inoltre quasi nessuno dei presenti sembra aver fatto il collegamento tra il punto a) ed il punto b), e tutti quelli che hanno affrontato questo punto hanno dato come soluzione $x(t) = \arcsin(e^t - 1)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Il punto di minimo non esiste; il punto di massimo è $x = \exp(-1/2) = 1/\sqrt{e} \simeq 0{,}61$.

2. $f(x) := \dfrac{\log(1+2x^3) - 2x^3}{(1+x^8)^4 - 1} \sim \dfrac{-2x^6}{4x^8} = -\dfrac{1}{2x^2}$.

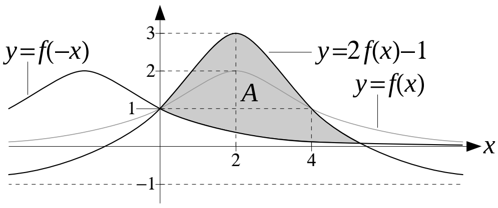
3. $F'(x) := 3x^2 \sin x$.

4. $d = \displaystyle\int_0^2 \big|\vec{v}(t)\big|\, dt = \int_0^2 \sqrt{(t^2-1)^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^2 t^2 + 1\, dt = \left|\frac{t^3}{3} + t\right|_0^2 = \frac{14}{3}$.

5. Poiché $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3 + t^{3a+3}}{(2+t^a)^a} dt \approx \int_1^{+\infty} \frac{t^{3a+3}}{t^{a^2}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{a^2-3a-3}}$, l'integrale è finito per $a > 4$.

6. Usando il criterio del rapporto (o della radice) si ottiene $R = 1/2$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{2}\tan(2t^3 - 2)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Il punto di minimo è $x = \exp(-1/3) = 1/\sqrt[3]{e} \simeq 0{,}72$; il punto di massimo non esiste.

2. $f(x) := \dfrac{\sin(x^4) - x^4}{\sqrt[3]{1+x^4} - 1} \sim \dfrac{-x^{12}/6}{x^4/3} = -\dfrac{x^8}{2}$.

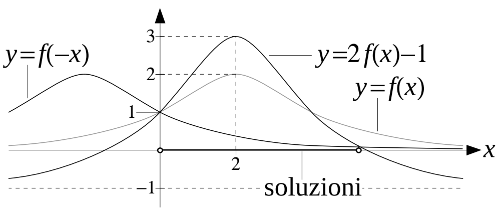
3. $F'(x) := 4x^3 e^x$.

4. $d = \displaystyle\int_0^2 \big|\vec{v}(t)\big|\, dt = \int_0^2 \sqrt{(1-t^4)^2 + (-2t^2)^2}\, dt = \int_0^2 t^4 + 1\, dt = \left|\frac{t^5}{5} + t\right|_0^2 = \frac{42}{5}$.

5. Poiché $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t^{a+1} + t^{a+2}}{(\sin(t^a))^a} dt \approx \int_0^1 \frac{t^{a+1}}{t^{a^2}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{a^2-a-1}}$, l'integrale è finito per $a < 2$.

6. Usando il criterio del rapporto (o della radice) si ottiene $R = 3$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{3}\tan(3t^3 - 3)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Il punto di minimo non esiste; il punto di massimo è $x = 1/2$.

2. $f(x) := \dfrac{\log(1+2x^5)-2x^5}{(1+x^4)^4-1} \sim \dfrac{-2x^{10}}{4x^4} = -\dfrac{x^6}{2}.$

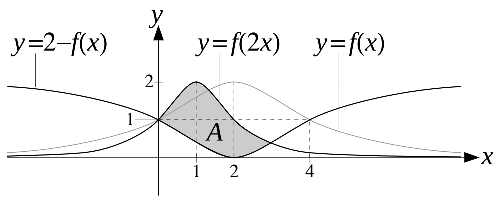
3. $F'(x) := 5x^4 \sin x.$

4. $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\,dt = \int_0^1 \sqrt{(-2t)^2+(1-t^2)^2}\,dt = \int_0^1 t^2+1\,dt = \left|\frac{t^3}{3}+t\right|_0^1 = \frac{4}{3}.$

5. Poiché $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(1+t^a)^a}{3t^a+t^{4a+6}}dt \approx \int_1^{+\infty} \frac{t^{a^2}}{t^{4a+6}}dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{-a^2+4a-6}}$, l'integrale è finito per $a<5$.

6. Usando il criterio del rapporto (o della radice) si ottiene $R=1/4$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{2}\tan(2t^4-2)$.

8.


Prima parte, gruppo 4.

1. Il punto di minimo è $x=\exp(-1/2)=1/\sqrt{e}\simeq 0{,}61$; il punto di massimo è $x=2$.

2. $f(x) := \dfrac{(1-x^4)^8-1}{\log(1+x^3)-x^3} \sim \dfrac{-8x^4}{-x^6/2} = \dfrac{16}{x^2}.$

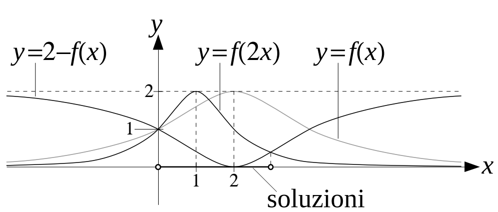
3. $F'(x) := 3x^2e^x.$

4. $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\,dt = \int_0^1 \sqrt{(2t^2)^2+(1-t^4)^2}\,dt = \int_0^1 t^4+1\,dt = \left|\frac{t^5}{5}+t\right|_0^1 = \frac{6}{5}.$

5. Poiché $\displaystyle\int_0^2 \frac{2t^{a+1}}{(t^{2a}+t^a)^a}dt \approx \int_0^1 \frac{t^{a+1}}{t^{a^2}}dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{a^2-a-1}}$, l'integrale è finito per $a<2$.

6. Usando il criterio del rapporto (o della radice) si ottiene $R=2$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{3}\tan(3t^4-48)$.

8.


Prima parte, gruppo 5.

1. Il punto di minimo è $x=2$; il punto di massimo è $x=\exp(-1/3)=1/\sqrt[3]{e}\simeq 0{,}72$.

2. $f(x) := \dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sin(3x^4)-3x^4} \sim \dfrac{x^3/2}{-\frac{9}{2}x^{12}} = -\dfrac{1}{9x^9}.$

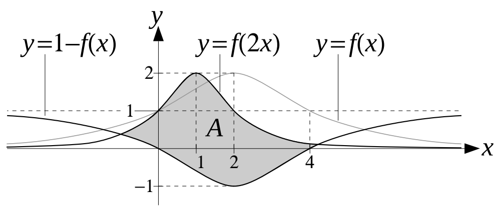
3. $F'(x) := 4x^3 \sin x$.

4. $d = \int_0^2 |\vec{v}(t)|\, dt = \int_0^2 \sqrt{(-2t^2)^2 + (t^4-1)^2}\, dt = \int_0^2 t^4 + 1\, dt = \left| \frac{t^5}{5} + t \right|_0^2 = \frac{42}{5}$.

5. Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{t^{a+1} + t^{4a+4}}{(1+t^a)^a} dt \approx \int_1^{+\infty} \frac{t^{4a+4}}{t^{a^2}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{a^2-4a-4}} dt$, l'integrale è finito per $a > 5$.

6. Usando il criterio del rapporto (o della radice) si ottiene $R = 1/3$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \frac{1}{2}\tan(2t^2 - 8)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Il punto di minimo è $x = 1/2$; il punto di massimo non esiste.

2. $f(x) := \frac{(1-x^8)^8 - 1}{\log(1+x^5) - x^5} \sim \frac{-8x^8}{-x^{10}/2} = \frac{16}{x^2}$.

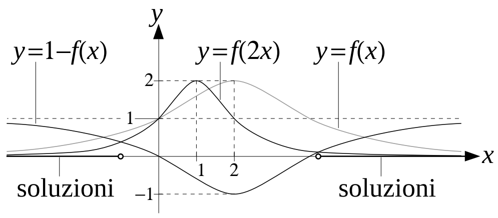
3. $F'(x) := 5x^4 e^x$.

4. $d = \int_0^1 |\vec{v}(t)|\, dt = \int_0^1 \sqrt{(1-t^2)^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^1 t^2 + 1\, dt = \left| \frac{t^3}{3} + t \right|_0^1 = \frac{4}{3}$.

5. Poiché $\int_0^2 \frac{(t^{3a} + t^a)^a}{2t^{2a+4}} dt \approx \int_0^1 \frac{t^{a^2}}{t^{2a+4}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{-a^2+2a+4}}$, l'integrale è finito per $a > 3$.

6. Usando il criterio del rapporto (o della radice) si ottiene $R = 4$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \frac{1}{3}\tan(3t^2 - 12)$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 4a\lambda + 3a^2 - 2a - 1 = 0$, e per $a \neq -1$ ha due soluzioni reali e distinte $3a+1$ e $a-1$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è
$$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^{(3a+1)t} + c_2 e^{(a-1)t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Poiché il coefficiente -2 nel termine noto non coincide con le soluzioni dell'equazione caratteristica per $a \neq -1$, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione (*) della forma $\tilde{x}(t) = be^{-2t}$; sostituendo questa espressione nell'equazione otteniamo $b = 2/(a+1)^2$, e quindi

la soluzione dell'equazione (*) è

$$x(t) = c_1 e^{(3a+1)t} + c_2 e^{(a-1)t} + \frac{2e^{-2t}}{(a+1)^2} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

b) Per $a = -1$ le soluzioni dell'equazione caratteristica sono entrambe uguali a -2, pertanto

$$x_{\text{om}}(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

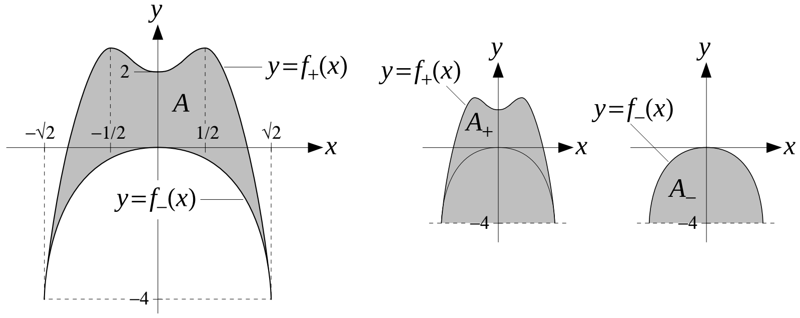
Inoltre il coefficiente -2 nel termine noto coincide con le soluzioni dell'equazione caratteristica, cerchiamo quindi una soluzione particolare dell'equazione (*) della forma $\tilde{x}(t) = bt^2 e^{-2t}$; sostituendo questa espressione nell'equazione otteniamo $b = 3$, e quindi la soluzione dell'equazione (*) è

$$x(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2 t + 3t^2) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Concentriamoci prima sulla seconda condizione in (**), vale a dire che il limite della soluzione $x(t)$ per $t \to +\infty$ deve essere zero.
Il limite della soluzione particolare per $t \to +\infty$ è sempre zero. Il limite di $e^{(3a+1)t}$ è zero solo quando il coefficiente $3a + 1$ è strettamente negativo, ed in tal caso il limite di $c_1 e^{(3a+1)t}$ è zero per ogni c_1, mentre in caso contrario il limite è zero solo quando $c_1 = 0$ (e un discorso analogo vale per il limite di $c_2 e^{(a-1)t}$).
Dobbiamo quindi distinguere diversi casi a seconda del segno dei coefficienti $3a + 1$ e $a - 1$.

- Se $a \geq 1$ allora $3a + 1$ e $a - 1$ sono entrambi positivi o nulli, e quindi la soluzione $x(t)$ data in (1) converge a 0 per $t \to +\infty$ se e solo se $c_1 = c_2 = 0$, ma per tali c_1, c_2 la condizione $x(0) = 0$ non è soddisfatta; pertanto non c'è alcuna soluzione di (*) che soddisfa le condizioni in (**).
- Se $-1/3 \leq a < 1$ allora il coefficiente $3a + 1$ è positivo o nullo, mentre $a - 1$ è negativo, e quindi $x(t)$ tende a 0 per $t \to +\infty$ se e solo se $c_1 = 0$, e in tal caso la condizione $x(0) = 0$ è soddisfatta per $c_2 = -2(a+1)^{-2}$; pertanto c' una ed una sola soluzione di (*) che soddisfa (**).
- Se $a < -1/3$ allora le soluzioni $3a+1$ e $a-1$ sono entrambe negative, e quindi $x(t)$ tende a 0 per $t \to +\infty$ per tutte le scelte di c_1, c_2; d'altra parte la condizione $x(0) = 0$ è soddisfatta per $c_2 = -c_1 - 2(a + 1)^{-2}$; pertanto ci sono infinite soluzioni di (*) che soddisfano (**).

2. a) Il grafico di $f_-(x) := -x^4$ è noto. Per disegnare il grafico di $f_+(x) := 2 + x^2 - 2x^4$ osserviamo che si tratta di una funzione pari che tende a $-\infty$ per $x \to \pm\infty$. Inoltre, studiando il segno della derivata $f'_+(x) = 2x(1 - 4x^2)$, otteniamo che $f_+(x)$ cresce per $x \leq -1/2$ e $0 \leq x \leq 1/2$, e decresce altrimenti.
Osserviamo infine che $f_-(x) \leq f_+(x)$ per $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.
Utilizzando quanto appena detto possiamo tracciare i grafici di f_- e f_+, e l'insieme A (nel disegno sotto le proporzioni non sono state rispettate).



b) Indico con A_- ed A_+ gli insieme dei punti (x, y) tali che $-4 \leq y \leq f_-(x)$ e $-4 \leq y \leq f_+(x)$, rispettivamente (vedere nella figura sopra), e con V_- e V_+ i solidi ottenuti ruotando tali insiemi attorno alla retta $y = -4$. Dunque A_+ è uguale all'unione di A_- e A, V_+ è uguale all'unione di V_- e V, e infine

$$\text{volume}(V) = \text{volume}(V_+) - \text{volume}(V_-)\,.$$

Per calcolare i volumi di V_+ e V_- li trasliamo verso l'alto di 4 lungo l'asse delle y, in modo da far coincidere l'asse di rotazione con l'asse delle x e poter utilizzare la solita formula per il volume dei solidi di rotazione attorno all'asse x:

$$\begin{aligned}
\text{volume}(V_+) &= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (f_+(x)+4)^2\,dx \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} 36 + 12\,x^2 - 23\,x^4 - 4x^6 + 4x^8\,dx \\
&= 2\pi \left| 36\,x + 4x^3 - \frac{23}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{4}{9}x^9 \right|_0^{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}\,\frac{17.728}{315} \simeq 250{,}04\,,
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}
\text{volume}(V_-) &= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (f_-(x)+4)^2\,dx \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} 16 - 8x^4 + x^8\,dx \\
&= 2\pi \left| 16\,x - \frac{8}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9 \right|_0^{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}\,\frac{1.024}{45} \simeq 101{,}10\,.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\text{volume}(V) = \text{volume}(V_+) - \text{volume}(V_-) = \pi\sqrt{2}\,\frac{704}{21} \simeq 148{,}94\,.$$

3. a) Scriviamo $f(x)$ nella forma

$$f(x) := \exp(g(x)) - 1 \quad \text{con} \quad g(x) := -\frac{\log\big(\cos(2x)\big)}{x}\,.$$

Usando prima lo sviluppo $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^4)$ con $t = 2x$ e poi $\log(1+y) = y + O(y^2)$ con $y = -2x^2 + O(x^4)$ otteniamo

$$g(x) = -\frac{\log(1-2x^2+O(x^4))}{x} = -\frac{(-2x^2+O(x^4))+O(x^4)}{x} = 2x + O(x^3)\,. \tag{2}$$

Infine, usando lo sviluppo $e^t = 1 + t + O(t^2)$ con $t = 2x + O(x^3)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp(2x + O(x^3)) - 1 \\
&= 1 + (2x + O(x^3)) + O(x^2) - 1 = 2x + O(x^2) \sim 2x\,.
\end{aligned}$$

b) Per quanto visto al punto precedente,

$$f(x) + ax \sim (2+a)x \quad \text{per } a \neq -2.$$

Il caso $a = -2$ va trattato a parte. Ripartiamo dalla formula (2), usando stavolta lo sviluppo $e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3)$ (sempre con $t = 2x + O(x^3)$):

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\big(2x + O(x^3)\big) - 1 \\
&= 1 + \big(2x + O(x^3)\big) + \frac{1}{2}\big(2x + O(x^3)\big)^2 + O(x^3) - 1 = 2x + 2x^2 + O(x^3)\,,
\end{aligned}$$

e quindi

$$f(x) - 2x = 2x^2 + O(x^3) \sim 2x^2\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Analogo al gruppo 1: $x(t) = c_1 e^{(5a+2)t} + c_2 e^{(a-2)t} + \dfrac{2e^{-3t}}{(a+1)^2}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

   b) Analogo al gruppo 1: $x(t) = e^{-3t}(c_1 + c_2 t + 5t^2)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

   c) Analogo al gruppo 1. Il numero di soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni in (**) è
   - nessuna se $a \geq 2$;
   - una se $-2/5 \leq a < 2$;
   - infinite se $a < -2/5$.

2. a) Analogo al gruppo 1.
   b) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$\text{volume}(V_+) = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (f_+(x) + 9)^2 \, dx = \pi\sqrt{3}\, \frac{8.256}{35} \simeq 1383{,}55\,,$$
$$\text{volume}(V_-) = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (f_-(x) + 9)^2 \, dx = \pi\sqrt{3}\, \frac{576}{5} \simeq 626{,}85\,,$$
   e pertanto
$$\text{volume}(V) = \text{volume}(V_+) - \text{volume}(V_-) = \pi\sqrt{2}\, \frac{4224}{35} \simeq 656{,}70\,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) Analogo al gruppo 1: $x(t) = c_1 e^{-(a+1)t} + c_2 e^{-(3a-1)t} + \dfrac{2e^{-2t}}{(a-1)^2}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
   b) Uguale al gruppo 1.
   c) Analogo al gruppo 1. Il numero di soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni in (**) è
      - nessuna se $a \leq -1$;
      - una se $-1 \leq a \leq 1/3$;
      - infinite se $a > 1/3$.

2. a) Analogo al gruppo 1.
   b) Uguale al gruppo 1.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) Analogo al gruppo 1: $x(t) = c_1 e^{-(5a-2)t} + c_2 e^{-(a+2)t} + \dfrac{2e^{-3t}}{(a-1)^2}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
   b) Uguale al gruppo 2.
   c) Analogo al gruppo 1. Il numero di soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni in (**) è
      - nessuna se $a \leq -2$;
      - una se $-2 \leq a \leq 2/5$;
      - infinite se $a > 2/5$.

2. a) Analogo al gruppo 1.
   b) Uguale al gruppo 2.

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 6. molti dei presenti hanno applicato le formule per il calcolo del raggio di convergenza dimenticando inserendo i coefficienti invece dei valori assoluti dei coefficienti, ed hanno quindi ottenuto un risultato negativo. Questo è un errore grave, perché il raggio di convergenza non può essere negativo.

- Seconda parte, esercizio 1. Molti dei presenti non si sono accorti che il discriminante dell'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è un quadrato perfetto, per cui non

può mai succedere che il discriminante sia negativo. In particolare diversi dei presenti hanno discusso il segno del discriminante ottenendo che è negativo per certi valori del parametro a.
Il fatto che il discriminante sia un quadrato perfetto implica inoltre che è possibile semplificare l'espressione delle radici dell'equazione caratteristica eliminando la radice quadrata, cosa che semplifica la discussione del punto c).

- Seconda parte, esercizio 1. Nessuno dei presenti ha risolto in modo chiaro il punto c).

- Seconda parte, esercizio 2. Un modo alternativo, e forse più chiaro, per impostare il calcolo del volume di V è utilizzare la formula per il calcolo del volume di un solido qualunque. Fissato un punto x sull'asse delle x, osserviamo che l'intersezione di V con il piano ortogonale all'asse delle x che passa per il punto x è una corona circolare con centro nel punto di coordinate $y = -4$ e $z = 0$ (sto facendo riferimento al gruppo 1), raggio esterno $R = R(x) = f_+(x) + 4$ e raggio interno $r = r(x) = f_-(x) + 4$. Pertanto l'area di questa corona circolare è
$$\begin{aligned} a(x) = \pi(R^2 - r^2) &= \pi\big((f_+(x) + 4)^2 - (f_-(x) + 4)^2\big) \\ &= \pi(20 + 12\,x^2 - 15\,x^4 - 4x^6 + 3x^8) \end{aligned}$$
e quindi il volume di V è
$$\text{volume}(V) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} a(x)\,dx = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 20 + 12\,x^2 - 15\,x^4 - 4x^6 + 3x^8\,dx = \dots$$

- Seconda parte, esercizio 2. Sorprendentemente pochi dei presenti hanno disegnato correttamente l'insieme A (in particolare la posizione di A rispetto all'asse di rotazione), e solo un paio hanno impostato correttamente il calcolo del volume di V.

- Seconda parte, esercizio 3. Nella soluzione data sopra, nel passare dallo sviluppo di f di grado 1 a quello di grado 2 viene aumentata la precisione dello sviluppo della funzione esponenziale, ma non dello sviluppo di g. Che questa procedura sia corretta può sembrare strano (ma i resti mostrano chiaramente che è corretta); in effetti tutto funziona perché $g(x)$ è una funzione pari e quindi il suo polinomio di Taylor grado due coincide con quello di grado uno...

- Seconda parte, esercizio 3. Molti dei presenti hanno risolto il punto a) come segue:
$$\big(\cos(2x)\big)^{-1/x} = (1 - 2x^2 + \cdots)^{-1/x} = 1 + (-1/x)(-2x^2) + \cdots = 1 + 2x + \cdots$$
In particolare nel secondo passaggio hanno utilizzato lo sviluppo $(1+t)^a = 1 + at + o(t)$ con $t = 2x^2$ e $a = -1/x$. Questo passaggio non è corretto perché in questo sviluppo a deve essere una costante, ed il fatto che il risultato sia giusto è un puro caso dovuto al fatto che nello sviluppo del coseno non appare il monomio di grado 1. Infatti utilizzando questo approccio per risolvere il punto b) (nel caso $a = -2$) si ottiene il risultato sbagliato.
Per chiarire ulteriormente il problema, osserviamo che utilizzando questo approccio per calcolare limite per $x \to 0$ di $(1 + x)^{1/x}$ si ottiene
$$(1 + x)^{1/x} = 1 + (1/x)x + o(x) = 2 + o(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2\,,$$
mentre com'è noto tale limite è e.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. $\alpha = \pi/6$.

2. a) $\dfrac{8x^3}{(x^4+1)^2}$; b) $\dfrac{2x}{1+x^4}$; c) $[x(\log x - \log 2)]' = \log x + 1 - \log 2 = \log\left(\dfrac{ex}{2}\right)$.

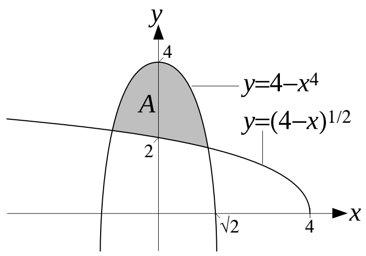
3. $c \ll d \ll b \ll a$.

4. $f(x) = 6x^3 - 35\,x^9 + O(x^{15})$.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x}{\sqrt[a]{1+2x^4}}\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{4/a-1}}\,dx$, ed è quindi finito per $0 < a < 2$.

6. Il raggio di convergenza è 3 e la serie converge per $-3 < x < 3$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{-2t}\sin t - 2e^{-2t}\cos t + 2$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. $\alpha = -\pi/6$.

2. a) $\dfrac{3x^2}{1+x^6}$; b) $\dfrac{6x^2}{(x^3+1)^2}$; c) $[x(\log 4 - 3\log x)]' = \log 4 - 3 - 3\log x = \log\left(\dfrac{4}{(ex)^3}\right)$.

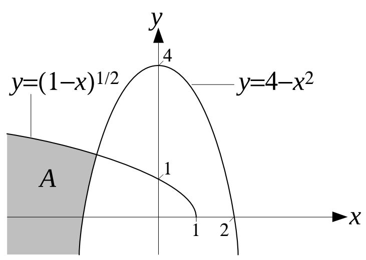
3. $b \ll a \ll d \ll c$.

4. $f(x) = 6x^2 - 37\,x^6 + O(x^{10})$.

5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1+x}{\sqrt[a]{x^3+2x^4}}\,dx \approx \int_0^{1} \frac{dx}{x^{3/a}}$, ed è quindi finito per $a > 3$.

6. Il raggio di convergenza è 4 e la serie converge per $-4 < x < 4$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{2t}\sin t - e^{2t}\cos t + 1$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. $\alpha = \pi/3$.

2. a) $\dfrac{-8x^3}{(x^4-1)^2}$; b) $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; c) $[x(\log 2 - \log x)]' = \log 2 - 1 - \log x = \log\left(\dfrac{2}{ex}\right)$.

3. $d \ll b \ll c \ll a$.

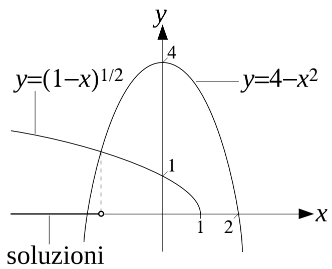
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^6 + O(x^9)$.

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt[a]{x^2+2x^3}}\,dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{x^{2/a}}$, ed è quindi finito per $a > 2$.

6. Il raggio di convergenza è $1/2$ e la serie converge per $-1/2 < x < 1/2$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{-t}\sin(2t) - 2e^{-t}\cos(2t) + 2$ con $c \in \mathbb{R}$.

8.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. $\alpha = -\pi/4$.

2. a) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$; b) $\dfrac{-6x^2}{(x^3-1)^2}$; c) $[x(3\log x - \log 4)]' = 3\log x + 3 - \log 4 = \log\left(\dfrac{(ex)^3}{4}\right)$.

3. $c \ll a \ll b \ll d$.

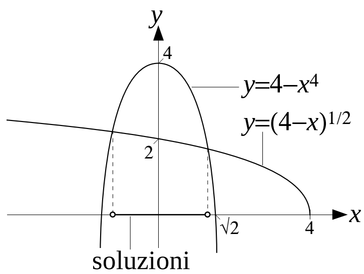
4. $f(x) = 2x^2 - x^4 + O(x^6)$.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{\sqrt[a]{1+2x^3}}\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/a-2}}\,dx$, ed è quindi finito per $0 < a < 1$.

6. Il raggio di convergenza è $1/3$ e la serie converge per $-1/3 < x < 1/3$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{t}\sin(2t) - e^{t}\cos(2t) + 1$ con $c \in \mathbb{R}$.

8.

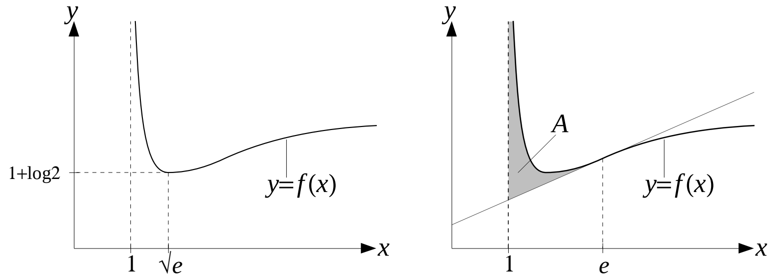


SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) La funzione $f(x)$ è ben definita e continua per ogni $x > 1$, e tende a $+\infty$ per $x \to 1^+$ e per $x \to +\infty$. Studiando il segno della derivata prima

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x\log x} = \frac{2\log x - 1}{x\log x}$$

si ottiene che f è decrescente nell'intervallo $(1, \sqrt{e}]$ e crescente nell'intervallo $[\sqrt{e}, +\infty)$. In particolare $\sqrt{e}$ è il punto di minimo (assoluto) di f, mentre il valore minimo è $f(\sqrt{e}) = 1 + \log 2$ (da cui segue che f è sempre positiva).
Sulla base di questi dati e del fatto che f è asintoticamente equivalente a $2 \log x$ per $x \to +\infty$ si ricava il disegno del grafico di f riportato nella figura sotto, a sinistra.



b) La retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa t ha equazione

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)\,,$$

in particolare l'altezza h dell'intersezione con l'asse delle y si ottiene ponendo $x = 0$ e vale quindi

$$h := -f'(t)t + f(t) = -2 + \frac{1}{\log t} + 2\log t - \log\log t\,.$$

Studiando il segno della derivata

$$h'(t) = -\frac{1}{t \log^2 t} + \frac{2}{t} - \frac{1}{t \log t} = \frac{2\log^2 t - \log t - 1}{t \log^2 t}$$

si ottiene che il punto di minimo assoluto di h è $t = e$, e la retta cercata è quindi quella di equazione

$$y = \frac{x}{e} + 1\,.$$

c) L'insieme A è quello disegnato nella figura sopra, a destra, e l'area è data da

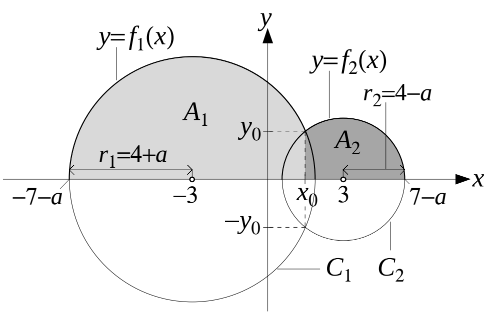
$$\text{area}(A) = \int_1^e f(x) - \frac{x}{e} - 1\,dx = \int_1^e 2\log x - \log\log x - \frac{x}{e} - 1\,dx\,.$$

Questo integrale è improprio in 1, e siccome la funzione integranda è asintoticamente equivalente a $\log\log x$ per $x \to 1^+$ (le altre funzioni sono definite e continue in 1), basta determinare il comportamento del seguente integrale improprio, che studiamo utilizzando il cambio di variabile $y = \log x$:

$$\int_1^e -\log\log x\,dx = \int_0^1 -\frac{\log y}{e^y}\,dy \approx \int_0^1 -\log y\,dy = \Big| y(1 - \log y) \Big|_0^1 = 1\,.$$

Dunque l'area di A è finita.

2. Ponendo $a = 0$ nel punto b) si ottiene il punto a) come caso particolare. Ci limitiamo dunque a risolvere il punto b).
Il solido V è dato dall'unione dei due pezzi di sfera V_1 e V_2 ottenuti facendo ruotare attorno all'asse x gli insiemi A_1 e A_2 nella figura sottostante.



Tenuto conto che le equazioni delle circonferenze C_1 e C_2 sono rispettivamente

$$(x+3)^2 + y^2 = r_1^2 = (4+a)^2\,, \quad (x-3)^2 + y^2 = r_2^2 = (4-a)^2\,, \tag{1}$$

le corrispondenti semicirconferenze superiori corrispondono ai grafici delle funzioni

$$f_1(x) := \sqrt{(4+a)^2 - (x+3)^2}\,, \quad f_2(x) := \sqrt{(4-a)^2 - (x-3)^2}\,,$$

mentre i punti di intersezione delle due circonferenze $(x_0, \pm y_0)$ sono ottenuti risolvendo il sistema di equazioni (1):

$$x_0 = \frac{4a}{3}\,, \quad y_0 = \sqrt{\frac{7}{9}(9-a^2)}\,. \tag{2}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\text{volume}(V) &= \text{volume}(V_1) + \text{volume}(V_2) \\
&= \pi \int_{-3-r_1}^{x_0} f_1^2(x)\, dx + \pi \int_{x_0}^{3+r_2} f_2^2(x)\, dx \\
&= \pi \int_{-7-a}^{4a/3} (4+a)^2 - (x+3)^2\, dx + \pi \int_{4a/3}^{7-a} (4-a)^2 - (x-3)^2\, dx \\
&= \frac{98\,\pi}{3}(5+a^2)
\end{aligned}$$

Osserviamo infine che per $a > 3$ le due circonferenze non si intersecano (l'argomento della radice nella formula (2) è negativo e quindi y_0 non è un numero reale) mentre per $a = 3$ si intersecano in un solo punto (perché $y_0 = 0$): il fatto è che in questi casi la circonferenza C_1 contiene C_2 e quindi, contrariamente a quando mostrato nella figura sopra, V coincide con la sfera più grande, vale a dire quella di raggio $r_1 = 4 + a$, e di conseguenza volume$(V) = \frac{4\pi}{3}(4+a)^3$.

Riassumendo, le risposte sono:

a) volume$(V) = \dfrac{490\,\pi}{3}$.

b) volume$(V) = \dfrac{98\,\pi}{3}(5+a^2)$ se $0 \le a < 3$ e volume$(V) = \dfrac{4\pi}{3}(4+a)^3$ se $3 \le a \le 4$.

3. a) Il raggio di convergenza lo calcoliamo usando il criterio del rapporto:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}((n+1)^2 - (n+1))}{2^n(n^2-n)} = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{n^2+n}{n^2-n} = 2\,.$$

Pertanto il teorema sulle serie di potenze ci dice che la serie converge ad un numero finito per ogni x tale che $|x| < 2$, e non converge ad un numero finito quando $|x| > 2$.
Entrando più in dettaglio si vede che per $x > 2$ l'addendo generico della serie tende a $+\infty$ e quindi la serie diverge a $+\infty$, mentre per $x < -2$ l'addendo generico della serie tende a $+\infty$ in valore assoluto, alternando segno positivo e negativo; questo suggerisce (ma non dimostra) che in questo caso la serie non converge e non diverge.
Restano da considerare i casi esclusi dal teorema sulle serie di potenze, vale a dire $x = \pm 2$. Per $x = 2$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-n} \tag{3}$$

che ha termini positivi e converge ad un numero finito per confronto asintotico con la serie $\sum 1/n^2$. Invece per $x = -2$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^2}{n^2-n}$$

che ha termini a segno variabile e converge ad un numero finito per il criterio della convergenza assoluta (infatti la serie dei valori assoluti, che è quella in (3), converge).

b) Nell'intervallo $(-2,2)$ la funzione f è derivabile infinite volte, e le derivate di qualunque ordine possono essere ottenute derivando la serie termine a termine. In particolare

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{x^n}{2^n(n^2-n)} \right]'' \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^m = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x/2} \end{aligned}$$

(nel quarto passaggio abbiamo utilizzato il cambio di indice $m = n-2$). Pertanto

$$f'(x) = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1-x/2} = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} \log y + c = -\frac{1}{2} \log(1-x/2) + c$$

(nel secondo e quarto passaggio abbiamo usato il cambio di variabile $y = 1 - x/2$). Per determinare il valore della costante c ci basta trovare il valore di f' in un punto; in effetti partendo dall'identità

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{x^n}{2^n(n^2-n)} \right]' = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n(n-1)}$$

si ottiene che $f'(0) = 0$, da cui segue che $c = 0$ e

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \log(1-x/2)\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} f(x) = -\frac{1}{2} \int \log(1-x/2)\, dx = \int \log y\, dy &= y \log y - y + c \\ &= (1-x/2)\log(1-x/2) + x/2 - 1 + c \end{aligned}$$

(nel secondo e quarto passaggio abbiamo nuovamente usato il cambio di variabile $y = 1 - x/2$). Utilizzando il fatto che $f(0) = 0$ otteniamo $c = 1$ e infine

$$f(x) = (1-x/2)\log(1-x/2) + x/2\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Analogo al gruppo 1.

   a) A differenza del gruppo 1 il punto di minimo è $\sqrt[6]{e}$, ed il valore minimo è $f(\sqrt[6]{e}) = 1 + \log 6$.

   b) La retta cercata è quella tangente al grafico di f nel punto di ascissa $\sqrt{e}$, ed ha equazione $y = 4x/\sqrt{e} + \log 2 - 1$.

   c) Come per il gruppo 1, l'area di A è finita.

2. Analogo al gruppo 1.

   a) $\text{volume}(V) = \dfrac{245\,\pi}{12}$.

   b) $\text{volume}(V) = \dfrac{49\pi}{12}(5+4a^2)$ se $0 \le a < 3/2$ e $\text{volume}(V) = \dfrac{4\pi}{3}(2+a)^3$ se $3/2 \le a \le 2$.

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 6. Per rispondere a questa domanda basta calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze in questione e applicare il teorema visto a lezione. Solo pochissimi dei presenti lo hanno fatto.

- Seconda parte, esercizio 1a). Tutti i presenti hanno disegnato il grafico della funzione f come se fosse sempre convessa, cosa che invece non è. Per accorgersene non era necessario studiare la concavità della funzione, ma bastava osservare che f è asintoticamente equivalente a $2 \log x$ per $x \to +\infty$ (mi riferisco al gruppo 1).

- Seconda parte, esercizio 1b). Se si disegna il grafico di f tenendo conto anche della concavità e convessità, di vede che la funzione è convessa per $x \leq e$ e concava per $x \geq e$ (mi riferisco al gruppo 1), e ci si rende conto che la retta cercata è quella tangente al grafico nell'unico punto di flesso di f, vale a dire $x = e$.

- Seconda parte, esercizio 2. Il punto a) è decisamente più semplice del punto b). Infatti le due sfere hanno lo stesso raggio, e quindi, impostando la risoluzione come sopra (mi riferisco al gruppo 1), si vede subito che $x_0 = 0$ e che il volume di V è pari al doppio di quello del pezzo di sfera ottenuto ruotando attorno all'asse delle x l'insieme A delimitato dagli assi e dal grafico della funzione $f_2(x) = \sqrt{4^2 - (3-x)^2}$. Dunque
$$\text{volume}(V) = 2\pi \int_0^7 4^2 - (3-x)^2 \, dx = \frac{490\,\pi}{3} \, .$$

- Seconda parte, esercizio 2. Nessuno dei presenti ha impostato correttamente il punto a) di questo esercizio, e tanto meno il punto b).

Prima parte, gruppo 1.

1. a) $\rho = 2\sqrt{2}$, $\alpha = -3\pi/4$, b) $\rho = 3$, $\alpha = -\pi/2$, c) $\rho = 2$, $\alpha = -\pi/3$.

2. Affinché f sia convessa la derivata seconda $f''(x) := 12\,x^2 + 6ax + 12$ deve essere positiva, cosa che si verifica quando il discriminante di questo polinomio di secondo grado è negativo o nullo. Pertanto $-4 \leq a \leq 4$.

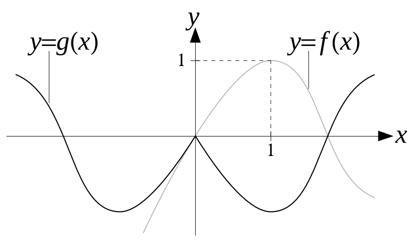
3. a) $-1/6$; b) $-\infty$; c) $+\infty$.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = -x^2$ si ottiene
$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^y\,dy = \frac{1}{2}\Big|e^y\Big|_{-1}^0 = \frac{e-1}{2e}\,.$$

5. Ci si riconduce alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} = 2e^2$.

6. Equazione a variabili separabili. Si arriva a $\sqrt{x} = \sin(2t) + c$ con $c \in \mathbb{R}$; calcolando la costante c per cui è verificata la condizione iniziale si ottiene $x(t) = (\sin(2t) + 2)^2$.

7. $f'(x) := \dfrac{1}{(\cos x)^{15}}$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. a) $\rho = 2\sqrt{3}$, $\alpha = 2\pi/3$, b) $\rho = 3\sqrt{2}$, $\alpha = -3\pi/4$, c) $\rho = 2$, $\alpha = -\pi/2$.

2. Affinché f sia convessa la derivata seconda $f''(x) := 12\,x^2 + 24\,x + 2a$ deve essere positiva, cosa che si verifica quando il discriminante di questo polinomio di secondo grado è negativo o nullo. Pertanto $a \geq 6$.

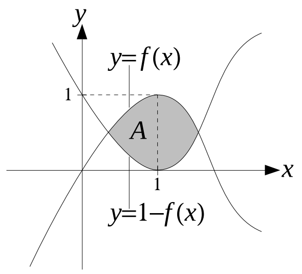
3. a) $-\infty$; b) 0; c) -2.

4. Integrando per parti si ottiene
$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} + c\,.$$

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(2/3)^n = \frac{2}{1-2/3} = 6$.

6. Equazione a variabili separabili. Si arriva a $\sqrt{x} = \sin(2t) + c$ con $c \in \mathbb{R}$; calcolando la costante c per cui è verificata la condizione iniziale si ottiene $x(t) = (\sin(2t) + 1)^2$.

7. $f'(x) := -\dfrac{1}{(\sin x)^{11}}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) $\rho = 2\sqrt{2}$, $\alpha = -3\pi/4$, b) $\rho = 3$, $\alpha = \pi$, c) $\rho = 2$, $\alpha = -\pi/6$.

2. Affinché f sia convessa la derivata seconda $f''(x) := 12\,x^2 + 6ax - 12$ deve essere positiva, cosa che si verifica quando il discriminante di questo polinomio di secondo grado è negativo o nullo. Pertanto nessun a va bene.

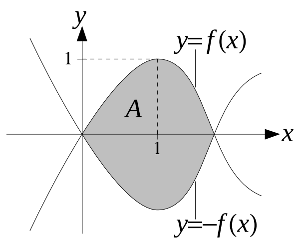
3. a) 0; b) -6; c) non esiste.

4. Integrando per parti si ottiene
$$\int_0^1 xe^{-x}dx = -\Big|xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -\frac{1}{e} - \Big|e^{-x}\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}\,.$$

5. Ci si riconduce alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n!} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!} = 3e^3$.

6. Equazione a variabili separabili. Si arriva a $\sqrt{x} = -\cos(3t) + c$ con $c \in \mathbb{R}$; calcolando la costante c per cui è verificata la condizione iniziale si ottiene $x(t) = (-\cos(3t) + 3)^2$.

7. $f'(x) := \dfrac{1}{(\cos x)^{11}}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) $\rho = 2\sqrt{3}$, $\alpha = -\pi/6$, b) $\rho = 3\sqrt{2}$, $\alpha = -3\pi/4$, c) $\rho = 2$, $\alpha = \pi$.

2. Affinché f sia convessa la derivata seconda $f''(x) := 12\,x^2 - 24\,x + 2a$ deve essere positiva, cosa che si verifica quando il discriminante di questo polinomio di secondo grado è negativo o nullo. Pertanto $a \geq 6$.

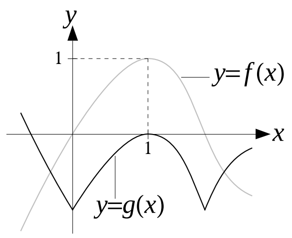
3. a) $-1/2$; b) 0; c) non esiste.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = -x^2$ si ottiene
$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^y\,dy = -\frac{e^y}{2} + c = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c\,.$$

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1/2^3)^n = \frac{1}{2(1-1/8)} = \frac{4}{7}$.

6. Equazione a variabili separabili. Si arriva a $\sqrt{x} = -\cos(3t) + c$ con $c \in \mathbb{R}$; calcolando la costante c per cui è verificata la condizione iniziale si ottiene $x(t) = (-\cos(3t) + 2)^2$.

7. $f'(x) := -\dfrac{1}{(\sin x)^{15}}$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Ricordo che la soluzione generale dell'equazione (*) si ottiene sommando la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} + 4x = 0$ a una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$\ddot{x} + 4x = 8t^2 \,, \tag{1}$$

e a una soluzione particolare x_2 dell'equazione non omogenea

$$\ddot{x} + 4x = \sin(at) \,. \tag{2}$$

L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 + 4 = 0$ ed ha come soluzioni $\lambda = \pm 2i$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è

$$x_{\mathrm{om}}(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.\,. \tag{3}$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare x_1 della (1). Siccome il termine noto è un polinomio di secondo grado, cerchiamo x_1 tra i polinomi di secondi grado, vale a dire $x_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Sostituendo questa espressione nell'equazione di partenza arriviamo all'identità

$$4a_2 t^2 + 4a_1 t + 4a_0 + 2a_2 = 8t^2 \,,$$

che è verificata (per ogni t) se $a_2 = 2$, $a_1 = 0$ e $a_0 = -1$. La soluzione particolare cercata è dunque

$$x_1(t) = 2t^2 - 1 \,. \tag{4}$$

Cerchiamo infine una soluzione particolare x_2 della (2), trattando separatamente i casi a) $a \neq 2$ con $a > 0$, e b) $a = 2$ (come suggerito nel testo).

a) Se $a \neq 2$ e $a > 0$ cerchiamo x_2 della forma $x_2(t) = b_1 \cos(at) + b_2 \sin(at)$. Sostituendo questa espressione nell'equazione di partenza otteniamo l'identità

$$b_1(4 - a^2)\cos(at) + b_2(4 - a^2)\sin(at) = \sin(at)$$

che è verificata (per ogni t) se $b_1 = 0$ e $b_2 = 1/(4 - a^2)$. La soluzione cercata è dunque

$$x_2(t) = \frac{\sin(at)}{4 - a^2} \,. \tag{5}$$

Pertanto la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + 2t^2 - 1 + \frac{\sin(at)}{4 - a^2} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Per $a = 2$ non esistono soluzioni della (2) della forma considerata al punto a), perché tutte le funzioni di questa forma sono soluzioni dell'equazione omogenea (e infatti la formula (5) non ha senso per $a = 2$). Dobbiamo invece cercare x_2 della forma $x_2(t) = b_1 t \cos(at) + b_2 t \sin(at)$, e sostituendo questa espressione nell'equazione di partenza otteniamo l'identità

$$-4b_1 \sin(2t) + 4b_2 \cos(2t) = \sin(2t)$$

che è verificata (per ogni t) se $b_1 = -1/4$ e $b_2 = 0$. La soluzione cercata è dunque

$$x_2(t) = -\frac{t\cos(2t)}{4}\,. \tag{6}$$

Pertanto la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + 2t^2 - 1 - \frac{t\cos(2t)}{4} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Osserviamo per cominciare che la base della funzione integranda $(e^x - e^2)^{2-a}$ è strettamente positiva per $x > 2$, ma si annulla per $x = 2$. Pertanto tale integranda è una funzione ben definita e continua per $x > 2$, ma se l'esponente $2 - a$ è negativo non è definita per $x = 2$. Questo significa che l'integrale in questione è improprio (semplice) in $+\infty$ se $a < 2$ (caso I), mentre è improprio sia in 2 che in $+\infty$ quando $a \geq 2$ (caso II). Inoltre, essendo l'integranda positiva, l'integrale improprio esiste sempre, e si tratta solo di vedere quando è finito e quando no.
   Caso I: $a < 2$. Poiché $(e^x - e^2)^{2-a} \sim e^{(2-a)x}$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, abbiamo che l'integrale improprio vale $+\infty$.
   Caso II: $a \geq 2$. Spezziamo l'integrale come somma di due integrali impropri semplici:

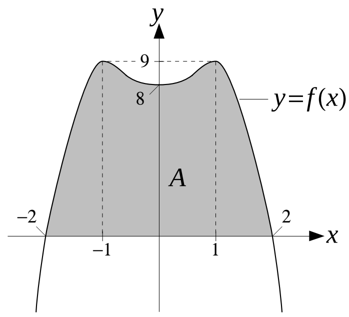
$$\int_2^{+\infty} (e^x - e^2)^{2-a} dx = \int_2^3 (e^x - e^2)^{2-a} dx + \int_3^{+\infty} (e^x - e^2)^{2-a} dx\,.$$

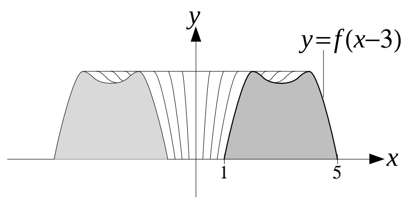
   Riguardo al secondo dei due integrali a destra dell'uguale, osserviamo che $(e^x - e^2)^{2-a} \sim e^{(2-a)x}$ per $x \to +\infty$, e dunque tale integrale è finito se e solo se $2 - a < 0$, ovvero $a > 2$.
   Esaminiamo ora il primo integrale a destra dell'uguale: usando il cambio di variabile $x = 2 + y$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int_2^3 (e^x - e^2)^{2-a} dx &= \int_0^1 (e^{2+y} - e^2)^{2-a} dy \\ &= e^{2(2-a)} \int_0^1 (e^y - 1)^{2-a} dy \approx \int_0^1 y^{2-a} dy\end{aligned}$$

   e quest'ultimo integrale è finito se e solo se $2 - a > -1$, vale a dire $a < 3$ (nel secondo passaggio abbiamo raccolto e^2 nella base, nel terzo abbiamo usato che $e^y - 1 \sim y$ per $y \to 0$).
   Concludendo, l'integrale di partenza è finito se e solo se $2 < a < 3$, altrimenti vale $+\infty$.

3. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, pari, positiva per $-2 \leq x \leq 2$ e negativa altrimenti, e tende a ∞ per $x \to \pm\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata prima $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2)$ si ottiene che la funzione cresce negli intervalli $(-\infty, -1]$ e $[0, 1]$ e decresce in $[-1, 0]$ e $[1, +\infty)$. In particulare ± 1 sono i punti di massimo assoluto, mentre 0 è un punto di minimo relativo. Utilizzando queste informazioni otteniamo il disegno di A riportato qui sotto a sinistra.





   b) Per calcolare il volume di V, trasliamo questo solido verso destra di 3, in modo da far coincidere l'asse di rotazione con l'asse delle y ed applicare la formula vista a lezione. Così facendo V diventa il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse delle y la figura piana delimitata dall'asse delle x e il grafico della funzione $f(x-3)$ (vedere la figura sopra, a destra), ed il volume è dato da

$$
\begin{aligned}
\mathrm{volume}(V) &= \int_1^5 2\pi y\, f(x-3)\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} 2\pi(t+3)\, f(t)\, dt \\
&= 2\pi \int_{-2}^{2} 24 + 8t + 6t^2 + 2t^3 - 3t^4 - t^5\, dt \\
&= 2\pi \left| 24t + 4t^2 + 2t^3 + \frac{t^4}{2} - \frac{3t^5}{5} - \frac{t^6}{6} \right|_{-2}^{2} = \frac{896\,\pi}{5} \simeq 562{,}97
\end{aligned}
$$

(nel secondo passaggio abbiamo usato il cambio di variabile $t = x - 3$).

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1.

   a) $x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) - 2t^2 + 1 + \dfrac{\cos(at)}{4 - a^2}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

   b) $x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) - 2t^2 + 1 + \dfrac{t \sin(2t)}{4}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Analogo al gruppo 1. L'integrale esiste sempre, ed è improprio (semplice) in $+\infty$ se $a > -2$, mentre è improprio (non semplice) in 2 e $+\infty$ se $a \leq -2$. Infine l'integrale è finito se e solo se $-3 < a < -2$.

3. a) Uguale al gruppo 1.

   b) Analogo al gruppo 1:

$$\mathrm{volume}(V) = \int_2^6 2\pi x\, f(x-4)\, dx = 2\pi \int_{-2}^{2} (t+4)\, f(t)\, dt = \frac{3584\,\pi}{15} \simeq 750{,}63\,.$$

Commenti

- Prima parte, esercizio 1. La quasi totalità dei presenti ha sbagliato questo esercizio perché ha utilizzato sistematicamente la formula $\alpha = \arctan(y/x)$ per calcolare la coordinata angolare del punto di coordinate cartesiane (x, y). In realtà tale formula vale solo se il punto (x, y) appartiene al primo e quarto quadrante e va opportunamente modificata negli altri casi.

- Prima parte, esercizio 6. Diversi dei presenti hanno fatto il seguente errore (mi riferisco qui al gruppo 1, ma un discorso analogo vale per il gruppo 2): arrivati all'equazione
$$\sqrt{x} = \sin(2t) + c\,, \tag{7}$$
sono andati avanti elevandola al quadrato e ottenendo $x = (\sin(2t) + c)^2$, e poi hanno imposto la condizione iniziale $x(0) = 4$ ottenendo $c^2 = 4$, ovvero $c = \pm 2$. Il problema è che solo per $c = 2$ si ottiene una soluzione del problema di partenza, non per $c = -2$ come si vede chiaramente dalla (7). Il punto è che elevando al quadrato una qualunque equazione si ottiene una nuova equazione che ha piú soluzioni di quella di partenza.

- Seconda parte, esercizio 1. Molti dei presenti hanno cercato la soluzione particolare dell'equazione non omogenea $\ddot{x} + 4x = 8t^2$ (mi riferisco al gruppo 1) tra le funzioni del tipo $x = at^2$, dove è una *costante*, invece che tra tutti i polinomi di grado 2. Sostituendo questa espressione nell'equazione si ottiene
$$2a + 4at^2 = 8t^2$$
e a questo punto l'unica conclusione corretta è che non esiste alcuna costante a per cui questa identità è valida per ogni t. Invece molti sono arrivati alla conclusione che $a = 8t^2/(2 + 4t^2)$. Questo è un errore grave, perché nell'impostare la risoluzione si parte dall'ipotesi che a sia una

costante e non una funzione (altrimenti si avrebbe $\ddot{x} = \ddot{a}t^2 + 4\dot{a}t + 2a$ e non semplicemente $\ddot{x} = 2a$).

- Seconda parte esercizio 3. Sorprendentemente, quasi nessuno dei presenti ha impostato correttamente l'integrale per il calcolo del volume di V

Prima parte, gruppo 1.

1. La funzione f è sempre continua per $x \neq 3$, e affinché sia continua in $x = 3$ i valori delle due funzioni che definiscono f devono coincidere. Questo porta all'equazione $9a + b = 3a - b$ che è risolta per $b = -3a$ (o equivalentemente per $a = -b/3$).

2. All'interno dell'intervallo considerato la derivata di f si annulla in $x = \pm 1$ e confrontando il valore di f in questi punti con quelli agli estremi dell'intervallo si ottiene che i punti di minimo sono $-2, 1$ e non esistono punti di massimo.

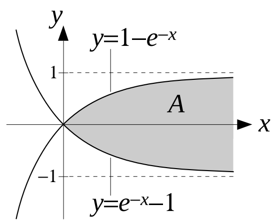
3. a) 0; b) $-\infty$; c) 2.

4. $f(x) := -6x^2 + 2x^6 + O(x^{10})$.

5. Il modulo della velocità è $|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 3t^2 + 3$ e la distanza è $L = 14$.

6. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2a-3}}$ e quindi converge per $a > 2$.

7. La funzione data risolve l'equazione per $a = 3, b = -2$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. La funzione f è sempre continua per $x \neq 2$, e affinché sia continua in $x = 2$ i valori delle due funzioni che definiscono f devono coincidere. Questo porta all'equazione $4a + b = 2a - b$ che è risolta per $b = -a$ (o equivalentemente per $a = -b$).

2. All'interno dell'intervallo considerato la derivata di f si annulla in $x = \pm 1$ e confrontando il valore di f in questi punti con quelli agli estremi dell'intervallo si ottiene che non esistono punti di minimo e i punti di massimo sono $-1, 2$.

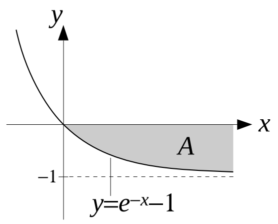
3. a) 0; b) $-\infty$; c) 0.

4. $f(x) := -2x^3 + 2x^6 + O(x^9)$.

5. Il modulo della velocità è $|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 3t^2 + 3$ e la distanza è $L = 14$.

6. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2a-2}}$ e quindi converge per $a > 3/2$.

7. La funzione data risolve l'equazione per $a = 3, b = 2$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. La funzione f è sempre continua per $x \neq -1$, e affinché sia continua in $x = -1$ i valori delle due funzioni che definiscono f devono coincidere. Questo porta all'equazione $a + b = -a - b$ che è risolta per $b = -a$ (o equivalentemente per $a = -b$).

2. All'interno dell'intervallo considerato la derivata di f si annulla in $x = -2$ e confrontando il valore di f in questo punto con quelli agli estremi dell'intervallo si ottiene che il punto di minimo è 1 e il punto di massimo è -2.

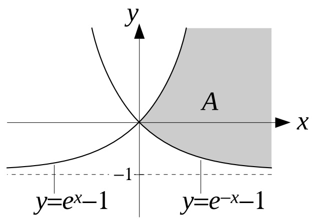
3. a) $-\infty$; b) 2; c) $-\infty$.

4. $f(x) := -6x + 6x^3 + O(x^5)$.

5. Il modulo della velocità è $|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 3t^2 + 3$ e la distanza è $L = 4$.

6. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3-3a}}$ e quindi converge per $a < 2/3$.

7. La funzione data risolve l'equazione per $a = 2, b = 2$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. La funzione f è sempre continua per $x \neq -2$, e affinché sia continua in $x = -2$ i valori delle due funzioni che definiscono f devono coincidere. Questo porta all'equazione $4a + b = -2a - b$ che è risolta per $b = -3a$ (o equivalentemente per $a = -b/3$).

2. All'interno dell'intervallo considerato la derivata di f si annulla in $x = 2$ e confrontando il valore di f in questo punto con quelli agli estremi dell'intervallo si ottiene che il punto di minimo è 2 e il punto di massimo è -1.

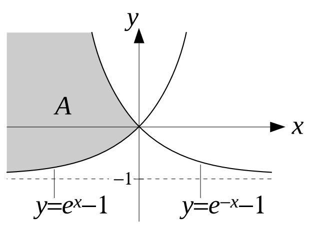
3. a) $\cos 2$; b) $+\infty$; c) 0.

4. $f(x) := -4x^2 + 3x^4 + O(x^6)$.

5. Il modulo della velocità è $|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 3t^2 + 3$ e la distanza è $L = 4$.

6. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2-3a}}$ e quindi converge per $a < 1/3$.

7. La funzione data risolve l'equazione per $a = 2, b = -2$.

8. 

Seconda parte.

1. Comincio dal punto b), la cui soluzione dà anche la soluzione del punto a).

   b) Riscrivo la disuguaglianza di partenza $x^2 + \frac{1}{2} \le ae^{x^2}$ come
$$f(x) := e^{-x^2}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \le a\,.$$
   È quindi evidente che i valori di a per cui questa disuguaglianza è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$ sono tutti e soli quelli per cui
$$a \ge m \quad \text{dove} \quad m := \max_{x\in\mathbb{R}} f(x)\,.$$
   (Se il massimo di f non esiste va sostituito con l'estremo superiore dei valori di f).

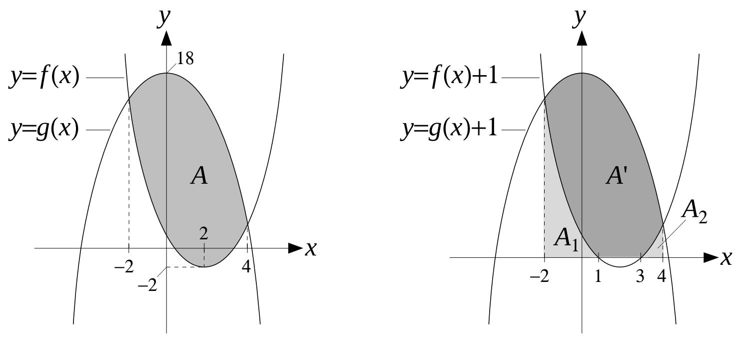
   Si tratta dunque di calcolare m. Per farlo osserviamo che la funzione f è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, sempre positiva, *pari*, e converge a 0 per $x \to \pm\infty$. Inoltre, studiando il segno della derivata
$$f'(x) := e^{-x^2} x(1 - 2x^2)$$
   otteniamo che i punti di massimo *assoluti* di f sono $x = \pm 1/\sqrt{2}$, e quindi
$$m = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0{,}6065\dots$$
   a) Siccome $3/5 = 0{,}6 < m$, la disequazione considerata non è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Raccogliendo x^4 sia al numeratore che al denominatore del rapporto che appare nella definizione di $f(x)$, e usando quindi le proprietà del logaritmo, otteniamo che
$$f(x) := \log\left(\frac{x^4+4}{x^4+1}\right) = \log\left(\frac{1+4/x^4}{1+1/x^4}\right) = \log\left(1+\frac{4}{x^4}\right) - \log\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\,. \tag{1}$$
   Osserviamo che questo modo di scrivere f risulta essere particolarmente conveniente nel momento in cui cerchiamo la parte principale per $x \to +\infty$.

   a) Usando la (1) e lo sviluppo $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$, otteniamo che, per $x \to +\infty$,
$$f(x) = \left[\frac{4}{x^4} + o\left(\frac{4}{x^4}\right)\right] - \left[\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right] = \frac{3}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \sim \frac{3}{x^4}\,.$$
   b) Partendo dal punto a), otteniamo che per $a \ne -3$ e per $x \to +\infty$,
$$f(x) + \frac{a}{x^4} \sim \frac{3+a}{x^4}\,.$$
   Per $a = -3$ dobbiamo utilizzare invece uno sviluppo più preciso di f. Procediamo come al punto a), utilizzando tuttavia lo sviluppo $\log(1+t) = t - t^2/2 + o(t^2)$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{4}{x^4} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x^4}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^8}\right)\right] - \left[\frac{1}{x^4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^4}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^8}\right)\right] \\ &= \frac{3}{x^4} - \frac{15}{2x^8} + o\left(\frac{1}{x^8}\right)\,, \end{aligned}$$
   da cui segue che
$$f(x) - \frac{3}{x^4} \sim -\frac{15}{2x^8}\,.$$

3. a) I grafici delle funzioni $f(x) := x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$ e $g(x) := 18 - x^2$ sono due parabole; possiamo quindi disegnarne i grafici senza bisogno di studiarle, e cos facendo otteniamo il disegno dell'insieme A riportato nella figura sotto a sinistra (al fine di ottenere una rappresentazione più chiara, la figura è stata disegnata senza rispettare i rapporti tra le distanze). I punti di intersezione dei due grafici quelli le cui ascisse soddisfano l'equazione $f(x) = g(x)$, vale a dire $x = -2, 4$, e quindi
$$\text{area}(A) = \int_{-2}^{4} g(x) - f(x)\,dx = \int_{-2}^{4} 16 - 4x - 2x^2\,dx = 72\,.$$

b) Per portare l'asse di rotazione a coincidere con l'asse delle x sposto verso l'alto di 1 entrambi i grafici, vale a dire che considero le funzioni $f+1$ e $g+1$ invece di f e g. Osservo quindi che la funzione $f+1$ interseca l'asse delle x per $x = 1, 3$.



Considero quindi gli insiemi A', A_1 ed A_2 dati nella figura sopra a destra, e indico con A_0 l'unione di questo tre insiemi, e con con V', V_0, V_1 e V_2 i solidi ottenuti per rotazione attorno all'asse delle x. Osservo ora che V ha lo stesso volume di V', che quest'ultimo insieme lo si ottiene sottraendo V_1 e V_2 da V_0, e che ciascuno di questi tre solidi è dato dalla rotazione del sottografico di una funzione positiva attorno all'asse delle x e quindi il suo volume può essere calcolato direttamente con la formula vista a lezione. Pertanto

$$\begin{aligned}\text{volume}(V) &= \text{volume}(V') \\ &= \text{volume}(V_0) - \text{volume}(V_1) - \text{volume}(V_2) \\ &= \pi \int_{-2}^{4} (g(x)+1)^2\,dx - \pi \int_{-2}^{1} (f(x)+1)^2\,dx - \pi \int_{3}^{4} (f(x)+1)^2\,dx \\ &= \frac{\pi \cdot 19 \cdot 2^{10}}{15} = \frac{\pi \cdot 19.456}{15} = 4074{,}85\dots\end{aligned}$$

Commenti

- Seconda parte, esercizio 2. Una via alternativa consiste nello scrivere f nella forma
$$f(x) := \log\left(\frac{x^4+4}{x^4+1}\right) = \log\left(1 + \frac{3}{1+x^4}\right)$$
e poi utilizzare lo sviluppo di $\log(1+t)$ per $t \to 0$ con $t := 3/(1+x^4)$. Diversi dei presenti hanno adottato questo approccio, ma tra questi molti hanno fatto un errore che può essere schematizzato come segue: al momento di ritornare alla variabile x, hanno sostituito t con $3/x^4$ invece che $3/(1+x^4)$: questo va bene per trovare la parte principale di f, ma non per trovare lo sviluppo più preciso che serve a risolvere il punto b) dell'esercizio.

- Seconda parte, esercizio 3. Molti dei presenti hanno impostato correttamente il calcolo dell'area di A, ma quasi nessuno ha impostato correttamente il calcolo del volume di V.

Prima parte, gruppo 1.

1. $y = 2x - 3$.

2. Il punto di minimo assoluto è $x = -1/2$, il punto di massimo assoluto è $x = 0$.

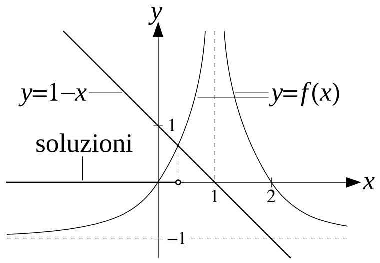
3. $f(x) \sim -\dfrac{2}{3x^2}$.

4. Integriamo per parti: $\displaystyle\int xe^{ax}\,dx = x\cdot\frac{e^{ax}}{a} - \int 1\cdot\frac{e^{ax}}{a}\,dx = e^{ax}\left[\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right] + c$.

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2+x^2}{1+x^a+x^{2a}}dx \approx \int_1^\infty \frac{x^2}{x^{2a}}dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2a-2}}$ converge per $2a-2>1$, ovvero $a>3/2$.

6. La soluzione è $x(t) = e^{2t}(c_1\cos t + c_2\sin t) + 2 + e^t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

7. Ci si riconduce alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n!} = \exp(x^2)$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. $y = -3x - 8$.

2. Il punto di minimo assoluto è $x = -1/2$, il punto di massimo assoluto è $x = 0$.

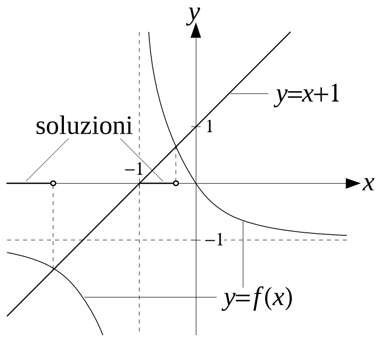
3. $f(x) \sim -\dfrac{2}{x^2}$.

4. Per parti: $\displaystyle\int x^a \log x\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\cdot\log x - \int \frac{x^{a+1}}{a+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx = x^{a+1}\left[\frac{\log x}{a+1} - \frac{1}{(a+1)^2}\right] + c$.

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2+\sin x}{1+x^a+x^{3a}}dx \approx \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3a}}dx$ converge per $3a>1$, ovvero $a>1/3$.

6. La soluzione è $x(t) = e^{-2t}(c_1\cos t + c_2\sin t) - 1 + 2e^t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

7. Ci si riconduce alla serie armonica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \frac{1}{1-x^2/2} = \frac{2}{2-x^2}$.

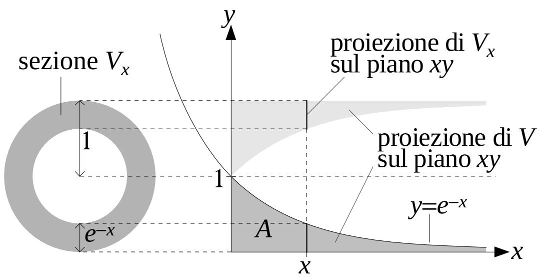
8. 

SECONDA PARTE.

1. Riscriviamo le disequazioni $a(1+x) \le f(x) \le b(1+x)$ come
$$a \le g(x) \le b \quad \text{dove} \quad g(x) := \frac{\sqrt[6]{1+x^6}}{1+x}\, m,$$
e quindi i valori di a e b cercati corrispondono rispettivamente al valore minimo e al valore massimo di g relativamente alla semiretta $x \ge 0$, o più precisamente all'estremo superiore e all'estremo inferiore dei valori di g su questa semiretta.

   Per trovare tali valori, studiamo il grafico di g relativamente alla semiretta $x \ge 0$. La funzione g è ben definita e positiva su tutta la semiretta, e studiando il segno della derivata
$$g'(x) = \frac{x^5 - 1}{(1+x)^2(1+x^6)^{5/6}}$$
si ottiene che g decresce nell'intervallo $0 \le x \le 1$, e cresce nella semiretta $x \ge 1$. In particolare $x = 1$ è il punto di minimo assoluto, e il valore minimo di g è $g(1) = 2^{-5/6}$. Inoltre, tenuto conto che $g(0) = 1$ e che $g(x)$ tende a 1 per $x \to +\infty$, otteniamo che $x = 0$ è il punto di massimo di g, e il valore massimo è $g(0) = 1$.
In conclusione, i valori cercati di a e di b sono $a = 2^{-5/6} \simeq 0{,}56$ e $b = 1$.

2. Per ogni $x \ge 0$ indichiamo con V_x la sezione piana del solido V data dall'intersezione di V con il piano ortogonale all'asse delle x che passa per il punto di ascissa x.



   Come si vede dal disegno, V_x è una corona circolare di raggio esterno $r_e = 1$ e raggio interno $r_i = 1 - e^{-x}$, e quindi
$$\text{area}(V_x) := \pi(r_e^2 - r_i^2) = \pi\big(2e^{-x} - e^{-2x}\big)\,.$$
Ricordiamo ora che il volume di V può essere calcolato a partire dall'area delle sezioni V_x, e per la precisione si ha che
$$\begin{aligned}\text{volume}(V) &= \int_0^{+\infty} \text{area}(V_x)\, dx \\ &= \pi \int_0^{+\infty} 2e^{-x} - e^{-2x}\, dx = \pi \left| -2e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{2} \right|_0^{+\infty} = \frac{3\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

3. a) Utilizzando lo sviluppo di Taylor $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^4)$ con $t := 2x^2$ otteniamo
$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{3 + \cos(2x^2)} - 2 \\ &= \sqrt{4 - 2x^4 + O(x^8)} - 2 = 2\sqrt{1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)} - 2\,.\end{aligned}$$
Utilizzando ora lo sviluppo $\sqrt{1+y} = 1 + y/2 + O(y^2)$ con $y := -x^4/2 + O(x^8)$ otteniamo
$$\begin{aligned}f(x) &= 2\sqrt{1+y} - 2 = 2\Big(1 + \frac{y}{2} + O(y^2)\Big) - 2 \\ &\qquad\qquad = y + O(y^2) \sim y = -\frac{x^4}{2} + O(x^8) \sim -\frac{x^4}{2}\,.\end{aligned}$$
b) Usando la parte principale di $f(x)$ ricavata sopra otteniamo che per $a \ne 1/2$ si ha
$$f(x) \sim \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)x^4\,.$$

Per $a = 1/2$ dobbiamo sviluppare $f(x)$ con maggior precisione. Procediamo quindi come sopra, utilizzando al primo passo lo sviluppo $\cos t = 1 - t^2/2 + t^4/24 + O(t^6)$ con $t := 2x^2$:

$$f(x) = \sqrt{3 + \cos(2x^2)} - 2 = 2\sqrt{1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{6} + O(x^{12})} - 2\,.$$

Utilizzando ora lo sviluppo $\sqrt{1+y} = 1 + y/2 - y^2/8 + O(y^3)$ con $y := -x^4/2 + x^8/6 + O(x^{12})$ otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sqrt{1+y} - 2 \\ &= y - \frac{y^2}{4} + O(y^3) \\ &= \Big[-\frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{6} + O(x^{12}) \Big] - \frac{1}{4}\Big[-\frac{x^4}{2} + O(x^8) \Big]^2 + O\bigg(\Big[-\frac{x^4}{2} \Big]^3 \bigg) \\ &= -\frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{6} + O(x^{12}) - \frac{x^8}{16} = -\frac{x^4}{2} + \frac{5x^8}{48} + O(x^{12})\,. \end{aligned}$$

Tramite quest'ultimo sviluppo otteniamo finalmente la parte principale di $f(x) = ax^4$ per $a = 1/2$:

$$f(x) + \frac{x^4}{2} = \frac{5x^8}{48} + O(x^{12}) \sim \frac{5x^8}{48}\,.$$

Commenti

- Seconda parte, esercizio 2. Alternativamente si può calcolare il volume di V utilizzando una delle formule per il volume dei solidi di rotazione. Questo approccio richiede tuttavia diversi passaggi, visto in particolare che V è ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse $y = 1$ e non attorno all'asse delle x. E in effetti uno solo dei presenti ha impostato correttamente questo calcolo.

- Seconda parte, esercizio 3. La maggior parte dei presenti non ha risolto correttamente il punto b) perché ha utilizzato sviluppi insufficienti per $\cos t$ oppure per $\sqrt{1+y}$.