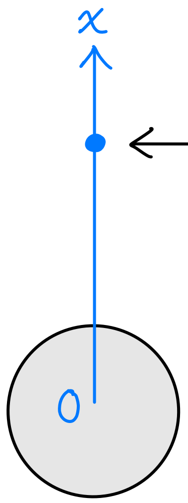
AM1 gest 20/21 lezione 56

18/12/2020

# Esempi di problemi in cui appaiono equaz. differ.

1| solido in caduta libera




$x(t)$ = distanza del solido dal centro della terra al tempo $t$

Problema: trovare la legge oraria del solido, cioè la formula di $x(t)$.

Parto da $f = ma$ sapendo che

- $a = \ddot{x}$
- $f = \begin{cases} a) \; -mg & \text{(se posso supporre } g \text{ costante)} \\ b) \; -\dfrac{GMm}{x^2} & \end{cases}$

$G$: cost. di grav. univ.
$M$: massa della terra

$\boxed{\text{Caso a)}}$

$$m\ddot{x} = ma = f = -mg$$

$$\ddot{x} = -g \qquad \text{(equaz. diff. 2° ordine)}$$

prendendo la primitiva (cioè integrando entrambi i termini)

$$\dot{x} = -gt + c_0 \qquad \text{con } c_0 \in \mathbb{R}$$

prendendo di nuovo la primitiva

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + c_0 t + c_1 \qquad \text{con } c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Per trovare le costanti $C_0$ e $C_1$ ho bisogno di altri dati sul moto del solido, per esempio posizione e velocità in certo istante $t_0$ (cioè $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$).

$\boxed{\text{Caso b}}$

$$m\ddot{x} = ma = f = -\frac{GMm}{x^2}$$

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{x^2}$$

equaz. diff. 2° ordine non lineare, non rientra tra quelle che sappiamo risolvere.

Moltiplico l'equazione per $\dot{x}$

$$\dot{x}\ddot{x} = -GM\frac{\dot{x}}{x^2}$$

$(\dot{x}(t))^2 = 2\dot{x}(t)\,\ddot{x}(t)$

$$\left(\tfrac{1}{2}\dot{x}^2\right)' \qquad \left(\frac{GM}{x}\right)'$$

$$\left(\frac{1}{x(t)}\right)' = -\frac{\dot{x}(t)}{(x(t))^2}$$

e ottengo $\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)' = \left(\frac{GM}{x}\right)'$ quindi

$$(*) \qquad \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{GM}{x} + C_0 \quad \text{con } C_0 \in \mathbb{R}$$

Posso riscrivere questa equazione come

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\text{energia cinetica}} - \underbrace{\frac{GMm}{x}}_{\text{energia potenziale}} = C_0$$

ho riottenuto la conservazione dell'energia.
Questa procedura funziona ogni volta che la forza $f$ ammette un potenziale.

Ripartendo da (*) ottengo

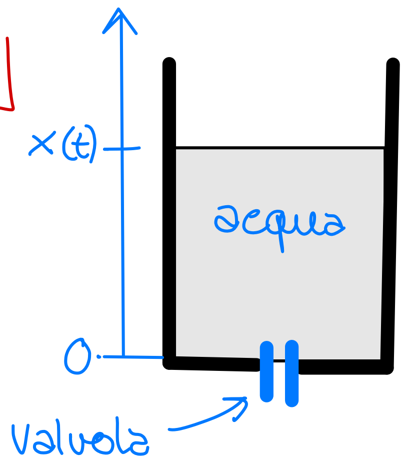
$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2GM}{x} + 2C_0}$$

Questa è un' equazione a variabili separabili.

Si può risolvere esplicitamente nel caso $C_0 = 0$.

Di più non si può fare (in questo corso).

2




recipiente cilindrico pieno d'acqua con valvola di scarico con portata proporzionale alla pressione

Voglio trovare la formula di $x(t)$ (altezza dell' acqua al tempo $t$)

volume di acqua uscita nell' intervallo di tempo $\Delta t$ $= (x(t) - x(t+\Delta t)) \cdot A$

con $A$ = area della base del cilindro.

$$\text{portata} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$\|$$

cost. x pressione e la pressione è proporzionale a $x(t)$

$$\|$$

$kx$ dove la costante $k$ dipende dalla valvola

Quindi
$$\frac{x(t) - x(t+\Delta t)}{\Delta t} = k\,x(t)$$

cioè
$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -k\,x(t)$$

e passando al limite per $\Delta t \to 0$

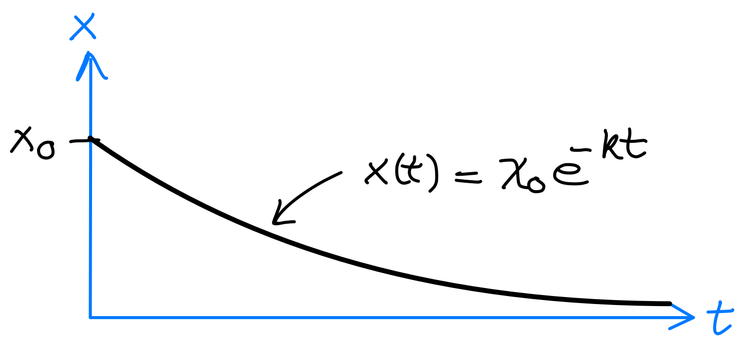
$$\dot{x} = -kx$$

equazione lineare del primo ordine a coeff. costanti e omogenea $\dot{x} + kx = 0$.
Eq. caratteristica $\lambda + k = 0$ cioè $\lambda = -k$.
La soluzione è

$$x(t) = c\, e^{-kt} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Se $x_0$ = altezza dell'acqua al tempo $t=0$ allora
$x_0 = x(0) = c e^{-k \cdot 0} = c$ e quindi

$$x(t) = x_0 e^{-kt}$$




## 3| Equazione di decadimento

Avete una certa quantità di sostanza $x(t)$ che decresce nel tempo, per esempio

a) isotopo instabile (per esempio uranio)

b) molecola instabile per effetto della luce, o del calore, o di altre condiz. esterne,

c) materiale che si scioglie in un liquido (per esempio sale in acqua)

Supponete di sapere che la frazione $k$ di materiale che si perde per unità di tempo è costante.

Questo è sicuramente il caso del materiale radioattivo, ma anche quello del sale nell'acqua almeno se il sale è trascurabile rispetto alla quantità di liquido.

Allora per $\Delta t$ piccolo

$$\frac{\overbrace{x(t)-x(t+\Delta t)}^{\text{materiale che si perde}}}{\Delta t} = k \cdot x(t)$$

allora

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = -k\, x(t)$$

e passando al limite per $t=0$

$$\dot{x} = -kx \quad \longleftarrow \text{equazione di decadim.}$$

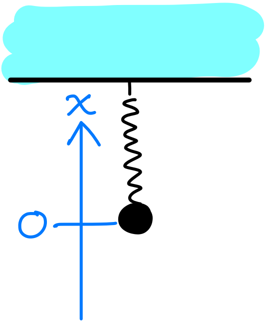
Esattamente come prima la soluzione è

$$x(t) = x_0\, e^{-kt}$$

$\uparrow$ quantità di materiale a $t=0$

# 4 Oscillatore armonico

Versione base : peso attaccato ad una molla:




indico con $x(t)$ l'altezza del peso rispetto alla posizione di riposo ($x=0$ è la posiz. di riposo)

Voglio determinare $x(t)$.

Parto dall'equazione $f = ma$ e uso che $a = \ddot{x}$ e $f$ è proporzionale allo spostamento dalla posizione di riposo (legge di Hooke):

$$f = -kx \qquad \text{(attenzione al segno }-\text{)}$$

$k$: costante elastica della molla

Allora $m\ddot{x} = ma = f = -kx$, cioè

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

equazione diff. del 2° ordine, lineare, a coeff. costanti e omogenea.

L'eq. caratteristica è $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ ha soluzioni $\lambda = \pm i\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega}$. La soluzione è

$$x(t) = c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per farsi un' idea di come sono fatte queste soluzioni le riscrivo in maniera diversa:

prendo $r$ e $\alpha$ coordinate polari di $(c_1, c_2)$ cioè $c_1 = r\cos\alpha$, $c_2 = r\sin\alpha$, e allora

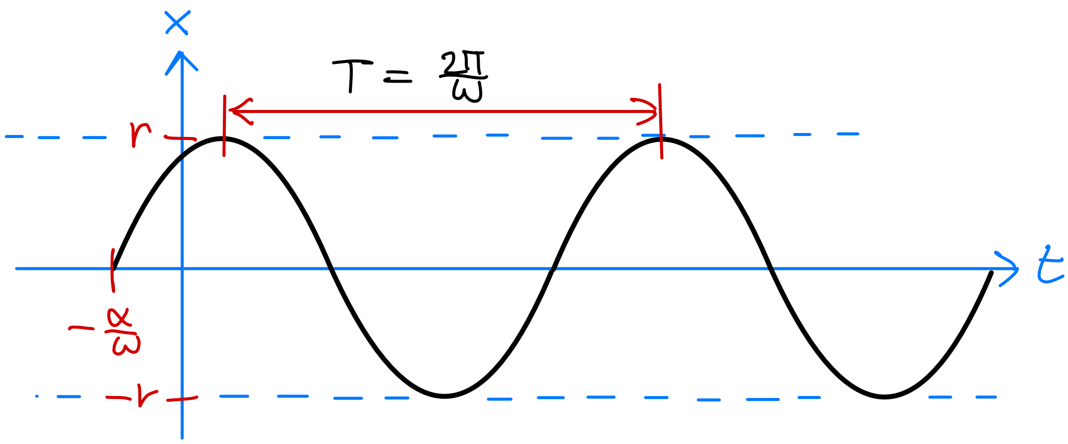
$$x(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$$

$$= r\left(\cos\alpha \cdot \sin(\omega t) + \sin\alpha \cos(\omega t)\right)$$

$$= r \sin(\omega t + \alpha)$$

Quindi le soluzioni si possono scrivere come

$$x(t) = r \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{con } r \geq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$




## 5 | Oscillatore armonico smorzato

Suppongo ora che la massa del caso precedente sia anche sottoposta ad una forza di attrito proporzionale alla velocità cioè

$$f = -kx - \delta \dot{x}$$

In questo caso l'equazione diventa

$$\ddot{x} + \frac{\delta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

equaz. diff. 2° ordine a coeff. costanti e omogenea. L'eq. caratt. è $\lambda^2 + \frac{\delta}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$ e ha soluzioni

$$\lambda = \underbrace{-\frac{\delta}{2m}}_{p} \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\delta^2}{4m^2}}}_{\omega}$$

(se il coefficiente di attrito $\delta$ è suffic. piccolo, cioè $\delta \leq 2\sqrt{mk}$).

La soluzione è

$$x(t) = e^{pt}\left(c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\right) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

oppure

$$x(t) = r e^{pt} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \quad \text{con } r > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$