Trasformata di Fourier

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sotto opportune ipotesi

$$(*) \qquad f(x) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, e^{iyx}\, dy}_{\substack{\text{combinazione lineare} \\ \text{(in senso esteso)} \\ \text{di } \{e^{iyx} \,:\, y \in \mathbb{R}\}}}$$

con $\hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iyx}\, dx$

$\hat{f}$ si chiama Trasformata di Fourier di f.
$(*)$ si chiama formula di inversione.

<u>Derivazione formale di $(*)$</u>

Prendo $f \in C_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $\delta > 0$ t.c. $\mathrm{supp}(f) \subset \left[-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta}\right]$.
Scrivo f in Serie di Fourier su $\left[-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta}\right]$
(serve un cambio per ricondursi alla SdF su $[-\pi,\pi]$)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^\delta\, e^{in\delta x}$$

con $c_n^\delta = \frac{\delta}{2\pi} \int_{\cancel{-\pi/\delta}\ -\infty}^{\cancel{\pi/\delta}\ +\infty} f(x)\, e^{-in\delta x}\, dx = \frac{\delta}{2\pi} \hat{f}(n\delta)$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n\delta) e^{in\delta x} \delta}_{\text{somma di Riemann}} \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta}\right]$$

Quindi prendendo il limite per $\delta \to 0$ ottengo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\, e^{iyx}\, dy$$

Il passaggio al limite è solo formale perché le somme di Riemann convergono all'integrale solo per funzioni continue su intervalli limitati.

Definizione

Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ la TdF di f è la funzione $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$\hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iyx}\, dx$$

Si scrive anche $\hat{f} = \mathcal{F}f$.

Teorema 1

Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, $\hat{f}$ è ben definita, continua, infinitesima all'infinito e $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

In particolare $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ è lineare e continua.

Osservazioni

- La def. di $\hat{f}$ non è ben posta per $f \in L^2$ (ricordo che $L^2 \not\subset L^1$ perché $\mathbb{R}$ ha mis. infinita). La def. di $\hat{f}$ per $f \in L^2$ verrà data dopo.

- E' bene usare lettere distinte (x e y) per le variabili di f e $\hat{f}$.
- Ci sono diverse definizioni di $\hat{f}$, che differiscono per varie costanti.

Dim. teorema 1

- $\hat{f}(y)$ è ben definita $\forall y \in \mathbb{R}$.
Infatti $f(x)e^{-iyx} \in L^1$:

$$\int |f(x)e^{-iyx}|\,dx = \int |f(x)|\,dx = \|f\|_1 .$$

- $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Infatti

$$|\hat{f}(y)| \leq \int |f(x)e^{-iyx}|\,dx = \|f\|_1 .$$

- $\hat{f}$ è continua. Se $y_n \to y$ allora

$$\hat{f}(y_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-iy_n x}\,dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-iyx}\,dx$$

per convergenza dominata (dominaz.: $|f(x)e^{-iy_n x}| = |f(x)|$).

- $\hat{f}(y) \xrightarrow[y\to\pm\infty]{} 0$ per il lemma di Riemann–Lebesgue.
(controllate i dettagli).

$\square$

Do adesso alcune proprietà (semplici) della TdF.

<u>Prop. 2</u>

Data $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$,

- $\widehat{\tau_h f} = e^{-iyh}\hat{f}$ $\forall h \in \mathbb{R}$ $\left(\tau_h f : x \mapsto f(x-h)\right)$;
- $\widehat{e^{ixh} f} = \tau_h \hat{f}$ $\forall h \in \mathbb{R}$;
- $\widehat{\sigma_\delta f} = \hat{f}(\delta y)$ $\forall \delta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\left(\sigma_\delta f : x \to \frac{1}{|\delta|} f\left(\frac{x}{\delta}\right)\right)$.

<u>Dim.</u>

Calcoli diretti. Per esempio

$$\widehat{\tau_h f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h)\, e^{-iyx}\, dx \underset{s=x-h}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, \underbrace{e^{-iy(s+h)}}_{=\,e^{-iys}\cdot e^{-iyh}} ds$$

$$= e^{-iyh}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-iys}\, ds = e^{-iyh}\hat{f}(y).$$

$\square$

<u>Prop. 3</u>

Data $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ di classe C^1 con $f, f' \in L^1$ allora

$$\widehat{f'} = iy\,\hat{f}$$

(analogo della formula $c_n(f') = in\, c_n(f)$).

Dim.

Versione quasi corretta:

$$\widehat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, e^{-iyx}\, dx$$

integrazione per parti $\rightarrow$ $$= \cancel{\Big| f(x) \cdot e^{-iyx} \Big|_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(-iye^{-iyx}\right) dx$$

$\overset{!!}{0}$?

$$= iy \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iyx}\, dx = iy\, \hat{f}(y).$$

Questa dim. funzionerebbe sapendo che $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$.

Versione corretta:

prendo $a_n \to -\infty$, $b_n \to +\infty$ t.c. $f(a_n), f(b_n) \to 0$

(posso trovarli perché $f \in L^1 \Rightarrow \liminf_{x \to \pm\infty} |f(x)| = 0$)

e osservo che

$$\widehat{f'}(y) = \lim_{n \to +\infty} \int_{a_n}^{b_n} f'(x)\, e^{-iyx}\, dx$$

spiegate voi questo passaggio

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\Big| f(x) e^{-iyx} dx \Big|_{a_n}^{b_n} - \int_{a_n}^{b_n} f(x)\left(-iye^{-iyx}\right) dx \right)$$

$$= iy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iyx}\, dx = iy\, \hat{f}(y).$$ $\square$

<u>Osservazione</u> $f \in C \cap L^1 \not\Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$ ma

$f \in C^1 \cap L^1$ & $f' \in L^1 \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$.

Prop. 4

Se $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $xf \in L^1$ allora $\hat{f} \in C^1$ e $\hat{f}' = \widehat{-ixf}$.

($f \in L^1 + xf \in L^1 \iff (1+|x|)f \in L^1$)

Per la dimostrazione serve la seguente versione del teorema di derivazione dell'integrale:

Prop. 5

Sia I intervallo in $\mathbb{R}$, E misurabile in $\mathbb{R}^d$, $g : I \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ misurabile t.c.

- $g(\cdot, x)$ è C^1 per q.o. $x \in E$;
- esistono $h_1, h_2 \in L^1(E)$ t.c. $\forall y \in I, x \in E$
  $|g(y,x)| \leq h_1(x)$, $\left|\frac{\partial g}{\partial y}(y,x)\right| \leq h_2(x)$

Allora

$$G(y) := \int_E g(y,x)\, dx$$

è ben definita $\forall y \in I$, è C^1 e $\forall y \in I$

$$G'(y) = \underbrace{\int_E \frac{\partial g}{\partial y}(y,x)\, dx}_{\tilde{G}(y)}$$

Dim. G e $\tilde{G}$ sono ben definite e continue per il teorema di conv. dominata (si usano le stime $|g| \leq h_1$; $\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \leq h_2$).

Il fatto che G è C^1 e $G' = \tilde{G}$ segue dal teorema fondamentale del calcolo integrale e da

$$G(y_1) - G(y_0) = \int_{y_0}^{y_1} \tilde{G}(y)\,dy \qquad \forall\, y_0, y_1 \in I,\ y_0 < y_1$$

Dimostro questa identità:

$$\int_{y_0}^{y_1} \tilde{G}(y)\,dy = \int_{y_0}^{y_1} \left(\int_E \frac{\partial g}{\partial y}(y,x)\,dx \right) dy$$

Fubini

$$\int_{y_0}^{y_1} \left(\int_E \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| dx \right) dy \leq \int_{y_0}^{y_1} \left(\int h_2\,dx \right) dy = (y_1 - y_0)\, \|h_2\|_1$$

$$\xrightarrow{\text{Fubini}} = \int_E \left(\int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial g}{\partial y}(y,x)\,dy \right) dx$$

$$= \int_E g(y_1,x) - g(y_0,x)\,dx$$

$$= G(y_1) - G(y_0). \qquad \square$$

Dim. Prop. 4

Applico la Prop. 5 con $g(y,x) = f(x)\,e^{-iyx}$ con $h_1(x) = |f(x)|$; $h_2(x) = |x f(x)|$:

$$\hat{f}'(y) = \frac{d}{dy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iyx}\,dx \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(-ix\, e^{-iyx} \right) dx = \widehat{-ixf}. \qquad \square$$

Prop. 6

Date $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ allora $f_1 * f_2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ (fatto già visto) e

$$\widehat{f_1 * f_2} = \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2$$

Dim.

$$\widehat{f_1 * f_2}(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(x-t) f_2(t)\, dt \right) e^{-ixy} dx$$

Fubini

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f_1(x-t) f_2(t)\, e^{-ixy}|\, dt\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f_1| * |f_2|\,(x)\, dx < +\infty$$

perché $|f_1| * |f_2| \in L^1$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(x-t) f_2(t)\, \underset{\underset{e^{-i(x-t)y}\cdot e^{-ity}}{\|}}{e^{-ixy}}\, dx \right) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(\underbrace{x-t}_{s})\, e^{-i\overbrace{(x-t)}^{s}y}\, dx \right) f_2(t)\, e^{-ity} dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(s)\, e^{-iys}\, ds \right) f_2(t)\, e^{-ity} dt$$

$$= \hat{f}_1(y)\, \hat{f}_2(y). \qquad \square$$

Esempi di calcolo della TdF.

1] $f(x) := e^{-|x|}$; $\hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}$

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ixy}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-|x|} \cos(xy)}_{h(x)}\, dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-|x|} \operatorname{sen}(xy)}_{g(x)}\, dx$$

perchè h è pari e g è dispari $\rightarrow$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-x} \cos(xy)\, dx$$

$$= 2\, \mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{x(iy-1)}\, dx\right)$$

$$= 2\, \mathrm{Re}\left(\left| \frac{e^{x(iy-1)}}{iy-1} \right|_0^{+\infty}\right) = 2\, \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-iy}\right) = \frac{2}{1+y^2}$$

2] $f = \mathbb{1}_{[-a,a]}$; $\hat{f}(y) = \frac{2}{y} \operatorname{sen}(ay)$

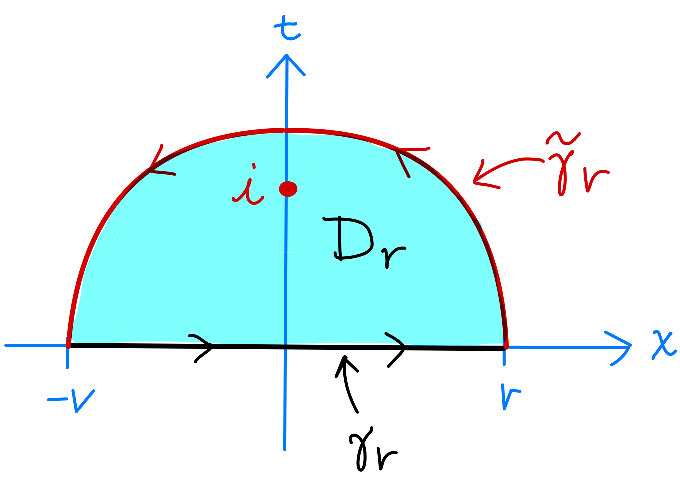
$$\hat{f}(y) = \int_{-a}^{a} e^{-ixy}\, dx = 2\int_0^{a} \cos(xy)\, dx = \frac{2}{y} \operatorname{sen}(ay)$$

Osservazioni utili

- f pari $\Rightarrow$ $\hat{f}$ pari, $\hat{f}(y) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx$;
- f pari + reale $\Rightarrow$ $\hat{f}$ pari + reale;
- f dispari $\Rightarrow$ $\hat{f}$ dispari, $\hat{f}(y) = 2i\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(xy)\,dx$;
- f dispari + reale $\Rightarrow$ $\hat{f}$ dispari + immaginaria pura.

3| $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $\hat{f}(y) = \pi e^{-|y|}$

Calcolo $\hat{f}(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2}\,dx$ usando il metodo dei residui.



Pongo $z = x+it$

e $g(z) := \dfrac{e^{-iyz}}{1+z^2}$

Teorema dei residui

$$(*) \quad \underbrace{\int_{\gamma_r} g(z)\,dz}_{A_r} + \underbrace{\int_{\tilde{\gamma}_r} g(z)\,dz}_{B_r} = \underbrace{2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ sing.} \\ \text{di } f \text{ in } D_r}} \mathrm{Res}(g, z_i)}_{C_r}$$

(i) $A_r \to \hat{f}(y)$ per $r \to +\infty$;

(ii) $B_r \longrightarrow 0$ per $r \to +\infty$ $\boxed{\text{se } y<0}$;

(iii) $C_r = \pi e^y$ per $r>1$.

Passando al limite per $r \to +\infty$ in $(*)$ e usando questi fatti ottengo che

$$\hat{f}(y) = \pi e^y \quad \text{per } y<0;$$

inoltre f è pari, quindi $\hat{f}$ è pari, quindi

$$\hat{f}(y) = \pi e^{-|y|}.$$

Restano da dimostrare i fatti (i)–(iii) sopra:

(i) ovvio (fatto generale già noto);

(ii) segue da una stima su $|g(z)|$:

$$|e^{-iyz}| = e^{-\mathrm{Re}(iyz)} = e^{\mathrm{Im}(yz)} = e^{yt} \underset{\text{se } z\in\tilde{\gamma}_r}{\leq} 1;$$

$$|1+z^2| \geq |z|^2-1 \underset{\text{se } z\in\tilde{\gamma}_r}{=} r^2-1;$$

Quindi

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r^2-1} \Rightarrow |B| \leq \int_{\tilde{\gamma}_r} |g(z)|\, d\sigma_1(z)$$

mis. di lungh.

$$\leq \frac{1}{r^2-1}\cdot \pi r \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0.$$

(iii) per $r>1$ l'unica singolarità di $g(z)$ in D_r è $z=i$ (polo semplice di $g(z)$ cioè zero semplice del denom. z^2+1) quindi

$$\mathrm{Res}(g,i) = \left.\frac{e^{-iyz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = \frac{e^y}{2i};$$

e $C = 2\pi i \, \mathrm{Res}(g,i) = 2\pi i \, \dfrac{e^y}{2i} = \pi e^y.$

4 $\quad f(x) = \dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ (distrib. Gaussiana con valore atteso 0 e var. 1)

$\hat{f}(y) = e^{-y^2/2}$

Calcolo 1

Uso che $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$ e $f' = -xf$

Quindi $\hat{f}(0) = 1$ e $\widehat{f'} = (-i)\,\widehat{-ixf}$

$$\begin{array}{ccc} \widehat{f'} & = (-i) & \widehat{-ixf} \\ \| & & \| \\ iy\hat{f} & & -i\hat{f}' \end{array}$$

ovvero $\hat{f}$ risolve l'eq. differenziale $\dot{u} = -yu$ (la stessa che risolve f)

cioè $\hat{f} = \alpha e^{-y^2/2}$ e $\hat{f}(0) = 1 \Rightarrow \alpha = 1$,

cioè $\hat{f} = e^{-y^2/2}$.

Calcolo 2

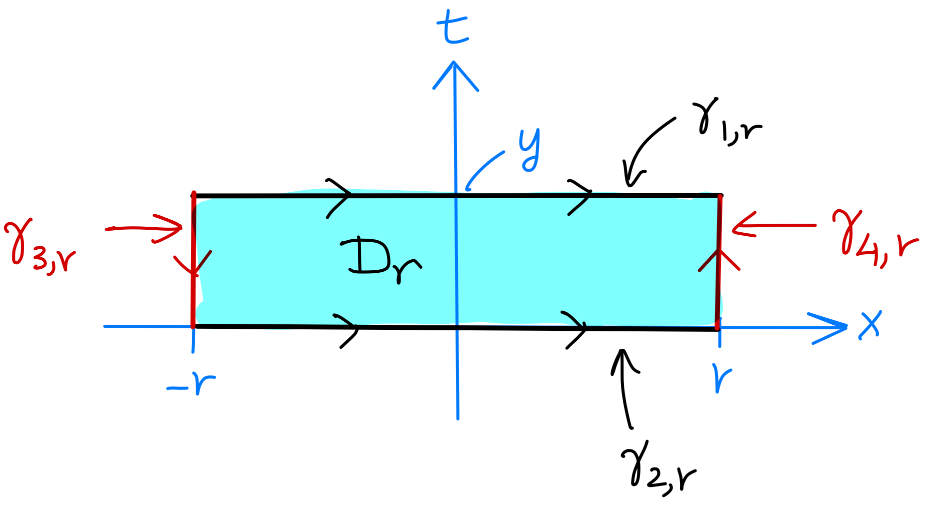
$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+2iyx}{2}}\, dx$$

$$= \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+iy)^2}{2}}\, dx$$

Cambio di var. $s = x+iy$, $ds = dx$ $\mapsto$ $= \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds = e^{-y^2/2}$

Va giustificato il cambio di variabile (perché la funzione $x \mapsto x+iy$ non è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$). Idea:



pongo $z = x+it$

$g(z) := e^{-z^2/2}$

Siccome $g(z)$ non singolarità in D_r, per il teorema dei residui ho che:

$$(*) \quad \underbrace{-\int_{\gamma_{1,r}} g(z)\,dz}_{A_{1,r}} + \underbrace{\int_{\gamma_{2,r}} g(z)\,dz}_{A_{2,r}} + \underbrace{\int_{\gamma_{3,r}} \cdots}_{A_{3,r}} + \underbrace{\int_{\gamma_{4,r}} \cdots}_{A_{4,r}} = 0$$

Osservo che:

(i) $A_{1,r} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+iy)^2}{2}}\,dx$ per $r \to +\infty$

(ii) $A_{2,r} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2}\,ds$ per $r \to +\infty$

(iii) $A_{3,r}\,;\ A_{4,r} \longrightarrow 0$ per $r \to +\infty$.

Passando al limite per $r \to +\infty$ in $(*)$ e usando (i)–(iii) ottengo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+iy)^2}{2}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2}\,ds.$$

Gli enunciati (i), (ii) sono ovvi.

L'enunciato (iii) segue dalla stima

$$\left| g(z) = e^{-z^2/2} \right| \leq e^{\frac{1-r^2}{2}} \qquad \text{per } z \in \gamma_{3,r}$$

$$\text{oppure } z \in \gamma_{4,r}$$

Formula di inversione

Definizione

Data $g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ pongo per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}^* g(x) = \check{g}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, e^{ixy}\, dy$$

Osserv.

- $\check{g}(x) = \hat{g}(-x)$
- $\mathcal{F}^*$ è l'aggiunta di $\mathcal{F}$ rispetto al prod. scalare di L^2, almeno formalmente:

$$\langle \mathcal{F} f; g \rangle = \int \hat{f}(y)\, \overline{g(y)}\, dy$$

$$= \iint f(x)\, e^{-ixy}\, \overline{g(y)}\, dx\, dy$$

$$= \iint f(x)\, \overline{g(y)\, e^{ixy}}\, dx\, dy$$

$$= \int f(x)\, \overline{\check{g}(x)}\, dx = \langle f, \mathcal{F}^* g \rangle .$$

- l'uso delle variabili x e y non è casuale.

Teorema 1

Se $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ allora

$$\mathcal{F}^*\mathcal{F} f(x) = \check{\hat{f}}(x) = 2\pi f(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R},$$

ovvero $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, e^{ixy}\, dy$ per q.o. x.

Inoltre $\mathcal{F}\mathcal{F}^* f(y) = 2\pi f(y)$ per q.o. $y \in \mathbb{R}$.

Corollario 2

Date $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ t.c. $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ allora $f_1 = f_2$ q.o.

Cioè $\mathcal{F}$ è iniettiva.

(Basta applicare il Teorema 1 a $f := f_1 - f_2$.)

Analogo per la serie di F.: date $f_1, f_2 \in L^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ t.c. $c_n(f_1) = c_n(f_2)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, allora $f_1 = f_2$ q.o.

Dimostrazione per esercizio.

Dimostrazione teor. 1 che non funziona

Calcolo diretto di $\mathcal{F}^*\mathcal{F} f$:

$$\mathcal{F}^*\mathcal{F} f(x) = \int \hat{f}(y)\, e^{ixy}\, dy$$

$$= \int \left(\int f(t)\, e^{-ity}\, dt \right) e^{ixy}\, dy$$

Fubini (ma non si può applicare...) $\longrightarrow$ $= \int f(t) \left(\int e^{i(x-t)y}\, dy \right) dt = ?$

Dimostrazione teor. 1 che funziona

Prendo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

(i) φ è continua in 0, limitata, $\varphi(0) = 1$;

(ii) $\varphi \in L^1$;

(iii) $\check{\varphi} \in L^1$.

Per ogni $\delta > 0$ pongo $g_\delta(x) := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, e^{ixy}\, \varphi(\delta y)\, dy$.

sottointeso nel resto della dim.

Allora

$$g_\delta(x) = \int \hat{f}(y)\, e^{ixy}\, \varphi(\delta y)\, dy \xrightarrow[\delta \to 0]{} \int \hat{f}(y) e^{ixy} dy = \check{\hat{f}}(x)$$

per conveng. dominata:
la conv. puntuale segue da (i)
la dom. è $|\hat{f}(y)|\ \|\varphi\|_\infty$.

$$= \int \left(\int f(t) e^{-ity}\, dt \right) e^{ixy}\, \varphi(\delta y)\, dy$$

Fubini: posso applicarlo perché

$$\iint |f(t)\, e^{-ity} e^{ixy} \varphi(\delta y)|\, dt\, dy = \iint |f(t)|\, |\varphi(\delta y)|\, dt\, dy = \|f\|_1\, \|\varphi(\delta\,\cdot)\|_1 < +\infty$$

(uso l'ipotesi (ii)).

$$= \int f(t) \Big(\underbrace{\int \varphi(\delta y)\, e^{i(x-t)y}\, dy}_{\substack{\text{antitr. di } \varphi(\delta y) \\ \text{calcolata in } x-t \\ \text{cioè } \sigma_\delta \check{\varphi}(x-t)}} \Big)\, dt$$

$$= \int f(t)\, \sigma_\delta \check{\varphi}(x-t)\, dt = f * \sigma_\delta \check{\varphi}(x)$$

Siccome $f \in L^1$ e $\check{\varphi} \in L^1$, per quanto già visto

$$f * \sigma_\delta \check{\varphi} \xrightarrow[\delta \to 0]{} m f \text{ in } L^1, \quad \text{dove } m := \int \check{\varphi}(y)\, dy$$

Riassumendo $g_\delta \longrightarrow \check{\hat{f}}$ per ogni x e $g_\delta \longrightarrow mf$ in L^1. Quindi $\check{\hat{f}} = mf$ q.o.

(Qui uso il fatto che a meno di sottosuccessioni $g_\delta \to \check{\hat{f}}$ quasi ovunque.)

Resta da dimostrare che $m = 2\pi$.

Basta prendere $\varphi(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$ (soddisfa (i)-(iii))

per cui $\check{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(x) = \pi e^{-|x|}$ e $m = 2\int_0^{+\infty} \pi e^{-x}\,dx = 2\pi$.

φ è pari!

$\square$

In realtà $m = 2\pi$ per ogni φ per via della formula di inversione:

$$2\pi = 2\pi\,\varphi(0) = \mathcal{F}\mathcal{F}^*\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} \check{\varphi}(x)\,dx =: m.$$

Trasformata di Fourier su L^2

Prop. 2

Data $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, allora $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$.

Teor. 3

La TdF può essere estesa per continuità da $L^1 \cap L^2$ a tutto L^2, ed è un'isometria a meno di un fattore $\sqrt{2\pi}$.

Indico l'estensione della TdF a L^2 con lo stesso simbolo $\hat{f} = \mathcal{F}f$.

Cor. 4 (Identità di Planchevel)

Per ogni $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $\langle \hat{f}_1 ; \hat{f}_2 \rangle = 2\pi \langle f_1 ; f_2 \rangle$.

Il corollario 4 segue dal teorema 3 e dall'id. di polarizzazione.

Il teorema 3 segue dalla proposiz. 2 e dal seguente lemma (noto?)

Lemma 5

Dato X spazio metrico, D denso in X, $f : D \to Y$ uniformemente continua, con Y spazio metrico completo, allora f ammette una ed una sola estensione continua $F : X \to Y$.

La dimostrazione del lemma 5 è un esercizio.

Dim. proposizione 2 (che non funziona)

Calcolo diretto di $\|\hat{f}\|_2$:

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\,\overline{\hat{f}(y)}\,dy$$

$\mathbb{R}$ ← sottointeso nel seguito

$$= \int \left(\left(\int f(x)\,e^{-ixy}\,dx\right)\left(\int \overline{f(t)}\,e^{ity}\,dt\right)\right) dy$$

Fubini → (ma non posso applicarlo)

$$= \iint f(x)\,\overline{f(t)}\,\Big(\underbrace{\int e^{i(t-x)y}\,dy}\Big)\,dt\,dx \ \ldots$$

vorrei che questo fosse $2\pi\,\delta(t-x)$ con δ la "funzione" delta di Dirac.

Dim. proposizione 2 (che funziona)

Prendo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

(i) φ continua in 0, $\varphi(0)=1$, φ pari, φ decr. per $x>0$;

(ii) $\varphi \in L^1$;

(iii) $\check{\varphi} \in L^1$.

Per ogni $\delta > 0$ pongo $I_\delta := \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^2\,\varphi(\delta y)\,dy$

$\mathbb{R}$ ← sottointeso in seguito

Allora

$$I_\delta := \int |\hat{f}(y)|^2\,\varphi(\delta y)\,dy \xrightarrow[\delta \to 0]{} \int |\hat{f}(y)|^2\,dy = \|\hat{f}\|_2^2$$

per il teorema di conv. monotona (qui uso (i))

$$I_\delta = \int \left(\int f(x) e^{-ixy} dx\right)\left(\int \overline{f(t)}\, e^{ity}\, dt\right) \varphi(\delta y)\, dy$$

$$\parallel \longleftarrow$$ Fubini : posso usarlo perché

$$\iint f(x)\, \overline{f(t)} \left(\int \varphi(\delta y)\, e^{i(t-x)y} dy\right) dt\, dx$$

$$\iiint |f(x) e^{-ixy} \dots| \, dt\, dx\, dy = \iiint |f(x)|\, |f(t)|\, |\varphi(\delta y)| \dots = \|f\|_1^2 \, \|\varphi(\delta \cdot)\|_1 < +\infty$$

$$\parallel$$

$$\iint f(x)\, \overline{f(t)}\;\; \sigma_\delta \check{\varphi}\,(t-x)\, dt\, dx$$

$$\parallel$$

$$\int f * \sigma_\delta \check{\varphi}\,(t) \cdot \overline{f(t)}\, dt = \langle f * \sigma_\delta \check{\varphi}\, ; f\rangle \xrightarrow[\delta \to 0]{} \langle 2\pi f ; f \rangle = 2\pi \|f\|_2^2$$

per la continuità del prod. scalare e il fatto che $f \in L^2$, $\check{\varphi} \in L^1 \Longrightarrow$ $f * \sigma_\delta \check{\varphi} \longrightarrow m f$ in L^2 con $m = \int \check{\varphi}(x)\, dx = 2\pi\, \varphi(0) = 2\pi$.

$\square$

Calcolo della TdF per $f \in L^2 \setminus L^1$

Non si può applicare la formula per $f \in L^1$.

Tuttavia osservo che $f_r := f \cdot \mathbb{1}_{[-r,r]} \xrightarrow[r \to +\infty]{} f$ in L^2 e $f_r \in L^1$.

Quindi $\hat{f}_r$ si calcola con la solita formula e converge a $\hat{f}$ in L^2.

Se esiste il limite puntuale q.o. di

$$\hat{f}_r(y) = \int_{-r}^{r} f(x)\, e^{-ixy}\, dx$$

allora deve coincidere con $\hat{f}$ cioè vale

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx \qquad \text{per q.o. } x$$

con l' integrale inteso come integrale improprio (nel senso di Analisi 1) e non nel senso di Lebesgue.

<u>Osservazione</u>

Abbiamo definito la TdF $\mathcal{F}$ sia su $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ che su $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e le due definizioni coincidono su $L^1 \cap L^2$.
Quindi $\mathcal{F}$ risulta definita anche su $L^1 + L^2$ e ha valori in $C_0 + L^2$.
Si può inoltre definire una norma "naturale" sia su $L^1 + L^2$ che su $C_0 + L^2$, ed $\mathcal{F}$ risulta continua rispetto a queste norme.

AM3 20/21

lezione 28

26/11/2020

Ulteriori risultati sulla TdF

Prop. 1

Le seguenti proprietà (già dimostrate per la TdF su L^1) valgono anche per L^2:

- $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy}\,\hat{f}$;
- $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \hat{f}$;
- $\widehat{\sigma_\delta f} = \hat{f}(\delta y)$.

Dim. Queste identità sono vere per $f \in L^1 \cap L^2$ e si estendono a L^2 per densità. Verificate voi i dettagli. $\square$

Prop. 2

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua e C^1 a tratti t.c. $f \in L^1 \cup L^2$ $(L^1 + L^2)$ e $f' \in L^1 \cup L^2$ $(L^1 + L^2)$. Allora $\widehat{f'} = iy\hat{f}$ q.o.

Dim.

Seguo la dim. fatta in precedenza.

Prendo $(a_n), (b_n)$ succ. in $\mathbb{R}$ t.c. $a_n \to -\infty$, $b_n \to +\infty$ e $f(a_n) \to 0$; $f(b_n) \to 0$.

Quindi

$$(1)\quad \int_{a_n}^{b_n} f'(x)\, e^{-ixy}\, dx \overset{\text{integraz. per parti}}{=} \Big| f(x) e^{-ixy} \Big|_{a_n}^{b_n} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x)\, e^{-ixy} dx;$$

(2) passando ad un' opportuna sottosucc. di n,

$$\underbrace{\int_{a_n}^{b_n} f'(x)\, e^{-ixy}\, dx}_{\mathcal{F}(f'\mathbb{1}_{[a_n,b_n]})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-ixy}\, dx = \widehat{f'}(y)$$

per q.o. $y \in \mathbb{R}$.

Infatti:

$$f' \in L^1 \Rightarrow f'\mathbb{1}_{[a_n,b_n]} \xrightarrow{L^1} f' \Rightarrow \mathcal{F}(f'\mathbb{1}_{[a_n,b_n]}) \xrightarrow{C_0} \widehat{f'};$$

$$f' \in L^2 \Rightarrow f'\mathbb{1}_{[a_n,b_n]} \xrightarrow{L^2} f' \Rightarrow \mathcal{F}(f'\mathbb{1}_{[a_n,b_n]}) \xrightarrow{L^2} \widehat{f'}.$$

$$(3)\quad \Big| f(x) e^{-ixy} \Big|_{a_n}^{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0;$$

$$(4)\quad \int_{a_n}^{b_n} f(x)\, e^{-ixy} dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx = \hat{f}(y)$$

per q.o. $y \in \mathbb{R}$ (come in (2)).

Mettendo insieme (1)–(4) ottengo $\widehat{f'}(y) = iy\, \hat{f}(y)$ q.o. $\square$

Cor. 3

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua + C^1 a tratti con $f \in L^1$, $f' \in L^2$ allora $\hat{f} \in L^1$. In particolare valgono le ipotesi del teorema di inversione.

Dim

Siccome $\widehat{f'} = iy\hat{f} \in L^2$ ho che $y\hat{f} \in L^2$.

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|\,dy = \int_{|y|\leqslant 1} |\hat{f}|\,dy + \int_{|y|\geqslant 1} |y\hat{f}| \frac{1}{|y|}\,dy$$

$$\leqslant 2\|\hat{f}\|_\infty + \|y\hat{f}\|_2 \left(\int_{|y|\geqslant 1} \frac{1}{|y|^2}\,dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 2\|f\|_1 + 2\sqrt{\pi}\,\|f'\|_2 . \qquad \square$$

Prop. 4

Date $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ allora $f_1 f_2 \in L^1$ e

$$(*) \qquad \widehat{f_1 f_2} = \frac{1}{2\pi} \hat{f_1} * \hat{f_2} .$$

Dim. (traccia)

$f_1, f_2 \in L^2 \Rightarrow f_1 f_2 \in L^1$ segue dalla disug. di Hölder.

Dimostro $(*)$.

$\boxed{\text{Caso 1: } f_1, f_2 \in C^1_c} \Rightarrow f_1, f_2, \hat{f_1}, \hat{f_2}, f_1 f_2, f_1 f_2 \in L^1$.

Ricordo che $g_1, g_2 \in L^1 \Rightarrow \widehat{g_1 * g_2} = \hat{g_1}\hat{g_2}$. Allora vale anche $\widecheck{g_1 * g_2} = \check{g_1}\,\check{g_2}$.

Quindi

$$\mathcal{F}^*\left(\frac{1}{2\pi} \hat{f_1} * \hat{f_2}\right) = \frac{1}{2\pi} \check{\hat{f_1}} \cdot \check{\hat{f_2}} = 2\pi f_1 f_2 = \mathcal{F}^*(\widehat{f_1 f_2})$$

e per l'iniettività di $\mathcal{F}^*$

$$\frac{1}{2\pi}\, \hat{f}_1 * \hat{f}_2 = \widehat{f_1 f_2} \quad \text{ovunque.}$$

$\boxed{\text{Caso 2: } f_1, f_2 \text{ qualunque.}}$

Prendo $(f_{1,n}), (f_{2,n}) \subset \mathcal{C}^1_c$ t.c. $f_{1,n} \xrightarrow{L^2} f_1$ e $f_{2,n} \xrightarrow{L^2} f_2$

Allora

- $\mathcal{F}(f_{1,n}\, f_{2,n}) = \frac{1}{2\pi}\, \widehat{f_{1,n}} * \widehat{f_{2,n}}$
- $f_{1,n} f_{2,n} \xrightarrow{L^1} f_1 f_2 \Rightarrow \mathcal{F}(f_{1,n} \cdot f_{2,n}) \xrightarrow{C_0} \widehat{f_1 f_2}$
- $\widehat{f_{1,n}} \xrightarrow{L^2} \hat{f}_1 \,;\ \widehat{f_{2,n}} \xrightarrow{L^2} \hat{f}_2 \Rightarrow \widehat{f_{1,n}} * \widehat{f_{2,n}} \xrightarrow{L^\infty} \hat{f}_1 * \hat{f}_2 .$

Sto usando $\cdot : L^2 \times L^2 \to L^1$ e $* : L^2 \times L^2 \to L^\infty$ sono continui. Questo va verificato.

$\square$

Esercizi

1| Sia k naturale, $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ t.c. $x^k f \in L^1$.
Allora $x^h f \in L^1$ per $h = 0, \dots, k$ e
$\hat{f} \in C^k$ e $D^h \hat{f} = \widehat{(-ix)^h f}$ per $h = 0, \dots, k$.

Questo risultato collega il decadimento di f all'infinito con la regolarità di $\hat{f}$.

Dim.
$|x|^h \leq 1 + |x|^k \Rightarrow |x^h f| \leq (1 + |x^k|)|f|$
$\Rightarrow \|x^h f\|_1 \leq \|f\|_1 + \|x^k f\|_1$.
Il resto si dimostra per induzione su k usando il fatto noto che $f, xf \in L^1$
$\Rightarrow \hat{f} \in C^1$ & $\hat{f}' = \widehat{-ixf}$.
Verificate voi i dettagli.

2| Se $f \in L^1$ e per ogni k vale $f(x) = O(|x|^{-k})$ per $x \to \pm\infty$, allora $\hat{f} \in C^\infty$.

3| Se $f \in L^1$ e f ha supporto compatto allora $\hat{f}$ è analitica, anzi $\hat{f}$ coincide su $\mathbb{R}$ con una funzione olomorfa $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

<u>Dim.</u> Per ogni $z = y + it$ pongo

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-izx}\, dx$$

Verifico che $g(z)$ è ben definita $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\, e^{-izx}|\, dx = \int_{-\infty} \underbrace{|f(x)|\, e^{tx}}_{\substack{\text{funzione in } L^1 \\ \text{perché } e^{tx} \text{ è limitata} \\ \text{sul supporto di } f}} dx < +\infty .$$

Espando $g(z)$ in serie di potenze centrata in 0:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sum_0^{\infty} \frac{(-izx)^n}{n!}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{(-ix)^n f(x)}{n!} \cdot z^n$$

scambio serie e integrale (alla Fubini): $\longrightarrow$ $$= \sum_0^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} f(x)\, dx \right)}_{a_n} z^n$$

$$= \sum_0^{\infty} a_n z^n .$$

posso farlo perché

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_0^{\infty} \left| \frac{(-ixz)^n}{n!} f(x) \right| dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_0^{\infty} \frac{|xz|^n}{n!} \right) |f(x)|\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{|xz|}\, |f(x)|\, dx < +\infty .$$

Siccome la serie converge per ogni z ha raggio di convergenza $+\infty$.

4) Se $f \in L^1$ ed esiste $\alpha > 0$ t.c. $\int |f(x)| e^{\alpha|x|} dx < +\infty$ allora $\hat{f}$ coincide su $\mathbb{R}$ con una funzione $g : \mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa.

(Caso particolare del teorema di Paley-Wiener.)

Osservazioni conclusive sulla TdF.

(Fuori programma)

TdF in più variabili

Data $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, la TdF di f è

prodotto scalare in $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{F}f(y) = \hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\, y \cdot x}\, dx \qquad \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

Valgono le proprietà che ci si aspetta:

(1) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ lineare e continua;

(2) $\widehat{\tau_h f} = e^{-ih \cdot y} \hat{f}$ e $\widehat{e^{ih \cdot x} f} = \tau_h \hat{f}$ $\forall h \in \mathbb{R}^d$;

(3) $\widehat{f(Ax)} = \dfrac{1}{|\det A|} \hat{f}((A^t)^{-1} y)$ $\forall A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertibile;

(4) $\widehat{f_1 * f_2} = \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2$;

(5) $\widehat{\nabla f} = iy \hat{f}$ $\left(\text{cioè } \widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}} = i\, y_j \hat{f} \text{ per } j = 1, \dots, d\right)$;

(6) $\nabla \hat{f} = \widehat{-ixf}$ $\left(\text{cioè } \dfrac{\partial \hat{f}}{\partial x_j} = \widehat{-i x_j f} \text{ per } j = 1, \dots, d\right)$;

(7) se $f, \hat{f} \in L^1$, $\mathcal{F}^* \mathcal{F} f = (2\pi)^d f$ q.o.

$\left(\mathcal{F}^* g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, e^{i y \cdot x}\, dy \right)$;

(8) $\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{d/2} \|f\|_2$ (Plancherel).

Da Plancherel segue la definizione di
$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.

Osservazione

Considero l'identità (nota): dato F campo di vettori in $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, F) = 0$, cioè

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0 .$$

Dimostrazione nei libri di Fisica: $\nabla \times F \perp \nabla$ e quindi $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$.

Questa dimostrazione può essere resa rigorosa usando la TdF:

$$\mathcal{F}(\nabla \cdot (\nabla \times F)) = iy \cdot \mathcal{F}(\nabla \times F)$$

basate su (3)

$$= iy \cdot (iy \times \hat{F})$$

$$= - y \cdot (y \times \hat{F}) = 0$$

perché $y \perp y \times F$.

Risoluzione dell' eq. di Poisson

$$\Delta u = f \quad \text{su } \mathbb{R}^d$$

Passando alla TdF.: $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \nabla \cdot (\nabla u)$
e quindi $\widehat{\Delta u} = iy \cdot (iy\, \hat{u}) = -|y|^2 \hat{u}$
quindi $\Delta u = f$ diventa

$$-|y|^2 \hat{u} = \hat{f}$$

cioè

$$\hat{u} = -\frac{1}{|y|^2} \cdot \hat{f}.$$

Cerco $g = g(x)$ t.c. $\hat{g} = -\frac{1}{|y|^2}$. Se la trovo
allora $\hat{u} = \hat{g} \cdot \hat{f} \underset{(4)}{=} \widehat{g * f}$ e quindi

$$u = g * f$$

Per trovare g osservo che $-\frac{1}{|y|^2}$ è radiale
e omogenea di grado -2.
Ma allora g deve essere radiale (segue da (2))
e omogenea di grado $2-d$ (segue da (2)),
quindi g dovrebbe essere della forma

$$g(x) = \frac{c_d}{|x|^{d-2}}$$

con c_d costante opportuna.
Questo calcolo è solo formale perché g
non sta in L^1 né in L^2.

Il risultato

$$u = g * f \quad \text{con} \quad g(x) = \frac{C_d}{|x|^{d-2}}$$

è corretto per $d \geq 3$.

soluzione fondamentale del laplaciano in $\mathbb{R}^d$

Osserv.

Non tutte le eq. diff. lineari si trattano bene con la TdF.

L'equazione $\dot{u} = u$ (in $\mathbb{R}$) per TdF diventa $iy\hat{u} = \hat{u}$ cioè $(iy-1)\hat{u} = 0$ cioè $\hat{u} = 0$ ovunque, cioè $u = 0$.

La TdF "vede" solo le soluzioni u per cui $\hat{u}$ è definita in qualche senso...

Questo non è il caso di αe^x con $\alpha \neq 0$.

Volendo si ritrovano tutte le soluzioni dell'equazione $\dot{u} = u$ estendendo (formalmente) $\hat{u}$ a $\mathbb{C}$ e in tal caso $(1-iy)\hat{u} = 0$ diventa $\hat{u}(y) = 0$ $\forall y \neq -i$, cioè $\hat{u} = \alpha \cdot \tau_{-i}\delta$ con δ = delta di Dirac = trasformata di 1: quindi $u = \alpha\, e^{i(-i)x} \cdot 1 = \alpha e^x$.

La formalizzazione porta alla def. di Trasformata di Laplace.

Risoluzione dell'eq. del calore su $\mathbb{R}$

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{sul dominio spaziale } \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

Considero $\hat{u}$ TdF di u rispetto alla variabile x, cioè $\hat{u}(t,y) := \widehat{u(t,\cdot)}(y)$.

Allora

$$\widehat{u_t} = (\hat{u})_t$$

derivazione sotto il segno di integrale

$$\widehat{u_t} = \widehat{u_{xx}} = (-iy)^2 \hat{u} = -y^2 \hat{u}$$

Quindi $\hat{u}(\cdot, y)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = -y^2 z \\ z(0) = \widehat{u_0}(y) \end{cases}$$

ovvero

$$\hat{u}(t,y) = \widehat{u_0}(y)\, e^{-y^2 t} = \widehat{u_0}(y)\, \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}}\rho} = \widehat{u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}}\rho}$$

$$\boxed{\text{Se } \rho(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \text{ allora } \hat{\rho}(y) = e^{-y^2/2} \text{ e } \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}}\rho} = e^{-(\sqrt{2t}\,y)^2/2} = e^{-y^2 t}}$$

Per l'iniettività della TdF: $u = u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}}\rho$.

Questo calcolo (formale) suggerisce la seguente formula risolutiva per (P):

$$(*) \qquad u(t,x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{se } t=0 \\ (u_0 * G_{\sqrt{2t}}\,\rho)(x) & \text{se } t>0 \end{cases}$$

$$G_{\sqrt{2t}}\,\rho(x) = \frac{e^{-x^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}}$$ è nota come "nucleo del calore su $\mathbb{R}$.

Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema (di esistenza)

Se $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e limitata, allora $(*)$ definisce una funzione $u : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

- u è continua;
- u è C^∞ su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$;
- $u_t = u_{xx}$ per $t>0$ e u risolve (P).

L'unicità di u vale nello spazio delle funzioni per cui si possono fare i calcoli sopra, per esempio le $u : [0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. esistono $g_1, g_2 \in L^1$ t.c.

$$|u(t,x)| \leq g_1(x) \; ; \quad |u_t(t,x)| \leq g_2(x).$$

Queste condizioni sono un sostituto delle condizioni al bordo....

Senza ulteriori condizioni su u non c'è unicità per (P): esiste $u : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, non identicamente nulla, t.c. $u_t = u_{xx}$ e $u(0,x) = 0$.

Disuguaglianza di Heisenberg

Data $u \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ t.c. $\|u\|_2 = 1$, pongo
$\rho := |u|^2$ e $\tilde{\rho} := \frac{1}{2\pi}|\hat{u}|^2$.
Allora ρ e $\tilde{\rho}$ sono distribuzioni di probabilità su $\mathbb{R}$.

$$E(\rho) = \int_{\mathbb{R}} x\,\rho(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x\,|u(x)|^2\,dx,$$
$$E(\tilde{\rho}) = \int_{\mathbb{R}} y\,\tilde{\rho}(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} y\,|\hat{u}(y)|^2\,dy,$$
$$\mathrm{var}(\rho) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(\rho))^2 |u(x)|^2\,dx,$$
$$\mathrm{var}(\tilde{\rho}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (y - E(\tilde{\rho}))^2 |\hat{u}(y)|^2\,dy.$$

Domanda: posso trovare u t.c. sia ρ che $\tilde{\rho}$ sono "ε-concentrate", cioè $\mathrm{var}(\rho)$ e $\mathrm{var}(\tilde{\rho}) \leq \varepsilon^2$?

Osservo che se prendo $u_\delta = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,u\left(\frac{x}{\delta}\right)$ allora
$\rho_\delta = \sigma_\delta\,\rho$ e $\mathrm{var}(\rho_\delta) = \delta^2\,\mathrm{var}(\rho)$.
Ma facendo i conti si ottiene $\mathrm{var}(\tilde{\rho}_\delta) = \frac{1}{\delta^2}\,\mathrm{var}(\tilde{\rho})$.

La risposta alla domanda sopra è negativa per ε qualunque:

Teorema 1

Date u, ρ, $\tilde{\rho}$ come sopra vale che

(1) $$\operatorname{Var}(\rho) \cdot \operatorname{Var}(\tilde{\rho}) \geq \frac{1}{4}.$$

Questo è un corollario del seguente:

Teorema 2 (Disuguaglianza di Heisenberg)

Data $u \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ vale che

(2) $$\|xu\|_2 \, \|y\hat{u}\|_2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, \|u\|_2^2$$

Interpretazione fisica di (1): se ρ è la distrib. di probabilità della posizione (di una particella), $\tilde{\rho}$ è la distrib. di probabilità della velocità ....

Dim. Teorema 2 per $u \in C^1_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$

La dimostrazione per $u \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ si fa per approssimazione, ma è delicata — prorsteei.

$iy\hat{u} = \hat{u'}$

$$\|xu\|_2 \, \|y\hat{u}\|_2 = \|xu\|_2 \, \|\hat{u'}\|_2$$

Plancherel $\longrightarrow$ $$= \sqrt{2\pi} \, \|xu\|_2 \, \|u'\|_2$$

Cauchy-Schwartz $\longrightarrow$ $$\geq \sqrt{2\pi} \, |\langle -xu; u' \rangle|$$

$$\geq \sqrt{2\pi}\ \mathrm{Re}\langle -xu; \dot{u}\rangle$$

$|u|^2 = u\cdot\bar{u} \Rightarrow$

$(|u|^2)' = u\cdot\bar{\dot{u}} + \bar{u}\cdot\dot{u}$

$= 2\,\mathrm{Re}(u\cdot\bar{\dot{u}})$

$$= -\sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x\ \mathrm{Re}(u\cdot\bar{\dot{u}})\,dx$$

$$\longrightarrow = -\sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x\left(\frac{|u|^2}{2}\right)' dx$$

integraz. per parti $\longrightarrow$ $$= -\sqrt{2\pi}\ \cancel{\left| x\frac{|u|^2}{2}\right|_{-\infty}^{+\infty}} + \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{|u|^2}{2}dx$$

u ha supp. comp. $\longrightarrow$ $$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \|u\|_2^2 .$$

$\square$

Dim. Teorema 1

Sostituendo u con $e^{ixa}\,u(x-b)$ con a e b opportuni ci si riconduce al caso in cui ρ e $\tilde{\rho}$ hanno valore atteso nullo.

In tal caso

$$\mathrm{var}(\rho) = \int_{\mathbb{R}} x^2|u|^2dx = \|xu\|_2^2$$

e

$$\mathrm{var}(\tilde{\rho}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} y^2|\hat{u}|^2dy = \frac{1}{2\pi}\|y\hat{u}\|_2^2$$

e (2) da

$$\mathrm{Var}(\rho)\cdot\mathrm{Var}(\tilde{\rho}) = \frac{1}{2\pi}\ \frac{\pi}{2}\ \|u\|_2^4 = \frac{1}{4}$$

$\square$

Teorema 3

L'uguaglianza in (2) vale se e solo se $u =$ distribuzione Gaussiana con v.a. 0.

Idea della dimostrazione

Nella dimostrazione di (2) ci sono solo due disuguaglianze:

$$\|-xu\|_2 \, \|\dot{u}\|_2 \underset{\text{C.-S.}}{\geq} |\langle -xu; \dot{u}\rangle| \geq \mathrm{Re}\langle -xu; \dot{u}\rangle$$

Per avere $=$ in C.-S. serve che esista $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $\dot{u} = -\alpha x u$, per avere $=$ nella seconda disug. serve che $0 = \mathrm{Im}\langle -xu, \dot{u}\rangle = \mathrm{Im}(\alpha \|xu\|^2)$ cioè $\mathrm{Im}\,\alpha = 0$, e $\mathrm{Re}\langle -xu, \dot{u}\rangle \geq 0$, cioè $\alpha \geq 0$.
Cioè vale $=$ in (2) sse $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ t.c.

$$\dot{u} = -\alpha x u$$

e le soluzioni u di questa eq. sono le distrubuzioni Gaussiane con v.a. 0. $\square$