AM3 20/21

Lezione 30

2/12/2020

Disuguaglianza di Heisenberg

Data $u \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ t.c. $\|u\|_2 = 1$, pongo $\rho := |u|^2$ e $\tilde{\rho} := \frac{1}{2\pi}|\hat{u}|^2$.

Allora ρ e $\tilde{\rho}$ sono distribuzioni di probabilità su $\mathbb{R}$.

$$E(\rho) = \int_{\mathbb{R}} x\, \rho(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} x\, |u(x)|^2\, dx,$$

$$E(\tilde{\rho}) = \int_{\mathbb{R}} y\, \tilde{\rho}(y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} y\, |\hat{u}(y)|^2\, dy,$$

$$\operatorname{var}(\rho) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(\rho))^2 |u(x)|^2\, dx,$$

$$\operatorname{var}(\tilde{\rho}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (y - E(\tilde{\rho}))^2\, |\hat{u}(y)|^2\, dy.$$

Domanda: posso trovare u t.c. sia ρ che $\tilde{\rho}$ sono "ε-concentrate", cioè $\operatorname{var}(\rho)$ e $\operatorname{var}(\tilde{\rho}) \leq \varepsilon^2$?

Osservo che se prendo $u_\delta = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, u\left(\frac{x}{\delta}\right)$ allora $\rho_\delta = \sigma_\delta \rho$ e $\operatorname{var}(\rho_\delta) = \delta^2 \operatorname{var}(\rho)$.

Ma facendo i conti si ottiene $\operatorname{var}(\tilde{\rho}_\delta) = \frac{1}{\delta^2}\operatorname{var}(\tilde{\rho})$.

La risposta alla domanda sopra è negativa per ε qualunque:

Teorema 1

Date u, ρ, $\tilde{\rho}$ come sopra vale che

$$(1) \qquad \operatorname{Var}(\rho) \cdot \operatorname{Var}(\tilde{\rho}) \geq \frac{1}{4}.$$

Questo è un corollario del seguente:

Teorema 2 (Disuguaglianza di Heisenberg)

Data $u \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ vale che

$$(2) \qquad \| xu \|_2 \, \| y \hat{u} \|_2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, \| u \|_2^2$$

Interpretazione fisica di (1): se ρ è la distrib. di probabilità della posizione (di una particella), $\tilde{\rho}$ è la distrib. di probabilità della velocità ....

Dim. Teorema 2 per $u \in C^1_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$

La dimostrazione per $u \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ si fa per approssimazione, ma è delicata — prousteei.

$$\| xu \|_2 \, \| y\hat{u} \|_2 \overset{iy\hat{u} = \hat{u'}}{=} \| xu \|_2 \, \| \hat{u'} \|_2$$

Planchere l $\longrightarrow$ $= \sqrt{2\pi} \, \| xu \|_2 \, \| u' \|_2$

Cauchy-Schwartz $\longrightarrow$ $\geq \sqrt{2\pi} \, |\langle -xu ; u' \rangle|$

$$\geq \sqrt{2\pi}\ \mathrm{Re}\langle -xu ; \dot u\rangle$$

$|u|^2 = u\cdot\bar{u} \Rightarrow$

$(|u|^2)' = u\cdot\dot{\bar{u}} + \bar{u}\cdot\dot u$

$= 2\,\mathrm{Re}(u\cdot\dot{\bar u})$

$$= -\sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x\ \mathrm{Re}(u\cdot\dot{\bar u})\,dx$$

$$= -\sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x\left(\frac{|u|^2}{2}\right)' dx$$

integraz. per parti $\longrightarrow$ $= -\sqrt{2\pi}\,\cancel{\left| x\frac{|u|^2}{2}\right|_{-\infty}^{+\infty}} + \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{|u|^2}{2}dx$

u ha supp. comp. $\longrightarrow$ $= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\|u\|_2^2\,.$ $\square$

Dim. Teorema 1

Sostituendo u con $e^{ixa}u(x-b)$ con a e b opportuni ci si riconduce al caso in cui ρ e $\tilde\rho$ hanno valore atteso nullo.

In tal caso

$$\mathrm{var}(\rho) = \int_{\mathbb{R}} x^2|u|^2dx = \|xu\|_2^2$$

e

$$\mathrm{var}(\tilde\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} y^2|\hat u|^2dy = \frac{1}{2\pi}\|y\hat u\|_2^2$$

e (2) da

$$\mathrm{Var}(\rho)\cdot\mathrm{Var}(\tilde\rho) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi}{2}\,\|u\|_2^4 = \frac{1}{4}$$ $\square$

Teorema 3

L'uguaglianza in (2) vale se e solo se $u =$ distribuzione Gaussiana con v.a. 0.

Idea della dimostrazione

Nella dimostrazione di (2) ci sono solo due disuguaglianze:

$$\|-xu\|_2 \|\dot{u}\|_2 \underset{\text{C.-S.}}{\geq} |\langle -xu; \dot{u}\rangle| \geq \mathrm{Re}\langle -xu; \dot{u}\rangle$$

Per avere $=$ in C.-S. serve che esista $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $\dot{u} = -\alpha x u$, per avere $=$ nella seconda disug. serve che $0 = \mathrm{Im}\langle -xu, \dot{u}\rangle = \mathrm{Im}(\alpha \|xu\|^2)$ cioè $\mathrm{Im}\,\alpha = 0$, e $\mathrm{Re}\langle -xu, \dot{u}\rangle \geq 0$, cioè $\alpha \geq 0$.
Cioè vale $=$ in (2) sse $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ t.c.

$$\dot{u} = -\alpha x u$$

e le soluzioni u di questa eq. sono le distribuzioni Gaussiane con v.a. 0. $\square$

Funzioni armoniche

Dato Ω aperto di $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^2 il laplaciano di u è

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \mathrm{tr}(\nabla^2 u) = \mathrm{div}(\nabla u)$$

Nota: data $e_1, \dots, e_d$ base ortonormale di $\mathbb{R}^d$ vale che $\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial e_i^2}$. Verificatelo!

Equazione di Laplace: $\Delta u = 0$.

Equazione di Poisson: $\Delta u = f$ con f data.

Def.

$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 si dice armonica se $\Delta u = 0$.

$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^2 si dice armonica se ogni componente di u è armonica.

Notazione

$$\alpha_d := \mathrm{vol}_d(\underbrace{\mathbb{D}^d}_{\substack{\parallel \\ B(0,1) \text{ in } \mathbb{R}^d}}).$$

$$c_d := \mathrm{vol}_{d-1}(\underbrace{\mathbb{S}^{d-1}}_{\substack{\parallel \\ \partial \mathbb{D}^d}}) = d\,\alpha_d.$$

σ_{d-1} = misura di volume $d-1$ dimensionale su ogni superficie regolare di dimensione $d-1$ in $\mathbb{R}^N$ — la usiamo solo per le sfere in $\mathbb{R}^d$.

Definizione

Data $u : \Omega \to \mathbb{R}$ continua e $x \in \Omega$, dico che u ha la proprietà della media sulle palle centrate in x se

$$(MP_x) \qquad u(x) = \fint_{B(x,r)} u \, d\mathcal{L}^d = \frac{1}{\alpha_d r^d} \int_{B(x,r)} u \, d\mathcal{L}^d$$

$$\forall r > 0 \text{ t.c. } \overline{B(x,r)} \subset \Omega .$$

u ha la proprietà della media sulle sfere centrate in x se

$$(MP_x) \qquad u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u \, d\sigma_{d-1} = \frac{1}{C_d r^{d-1}} \int_{\partial B(x,r)} u \, d\sigma_{d-1}$$

$$\forall r > 0 \text{ t.c. } \overline{B(x,r)} \subset \Omega .$$

Infine u ha la propr. della media sulle palle/sfere se MP_x vale $\forall x \in \Omega$ / MS_x vale $\forall x \in \Omega$.

Prop. 1

Data $u : \Omega \to \mathbb{R}$ continua, $x \in \Omega$, $(MP_x) \Longleftrightarrow (MS_x)$.

Nel seguito parlerò semplicemente di propr. della media senza ulteriori specificazioni.

Teor. 2

Data $u : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e armonica, allora u ha la proprietà della media.

Teor. 3

Data $u : \Omega \to \mathbb{R}$ continua e con la propr. della media, allora $u \in C^\infty$ ed è armonica.

Corollario 4

Se u è armonica allora è C^∞.

Per la dimostrazione servono alcune formule più o meno note.

- data $u : \overline{B(x,r)} \to \mathbb{R}$ ($\overline{B(x,r)} \subset \mathbb{R}^d$) continua (opp. L^1) vale che

$$\int_{B(x,r)} u \, d\mathcal{L}^d = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,\rho)} u \, d\sigma_{d-1} \right) d\rho$$

Dimostrazione per $d=2$ via coordinate polari.

Per d qualunque si usano le coordinate sferiche: ogni $x \in \mathbb{R}^d$ si rappresenta come

$$x = \left(r\cos\alpha_1 , r \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 , r\operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 \cos\alpha_3 , \dots , r \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 \cdots \operatorname{sen}\alpha_{d-1} \right)$$

con $r \geq 0$, $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_{d-1} \leq \pi$, $0 \leq \alpha_d \leq 2\pi$.

Se applico questa formula con $x=0$, $r=1$, $u=1$ ottengo $\alpha_d = \frac{C_d}{d}$.

- Data $u : \partial B(x,r) \to \mathbb{R}$ continua (opp. L^1) vale che

$$\int_{\partial B(x,r)} u \, d\sigma_{d-1} = r^{d-1} \int_{S^{d-1}} u(x+rz) \, d\sigma_{d-1}(z)$$

Dimostrazione via coordinate sferiche.

Dim. Proposizione 1

$(MS_x) \Rightarrow (MP_x)$

$$\int_{B(x,r)} u \, d\mathcal{L}^d = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,\rho)} u \, d\sigma_{d-1} \right) d\rho$$

$$(MS_x) \longrightarrow \quad = \int_0^r C_d \rho^{d-1} u(x) \, d\rho$$

$$= C_d \frac{r^d}{d} u(x) = \alpha_d r^d u(x).$$

$(MP_x) \Longrightarrow (MS_x)$

$$(*) \quad \alpha_d r^d u(x) \overset{(MP_x)}{=} \int_{B(x,r)} u \, d\mathcal{L}^d = \int_0^r \underbrace{\left(\int_{\partial B(x,\rho)} u \, d\sigma_{d-1} \right)}_{h(\rho)} d\rho$$

Osservo che $h(\rho) = \rho^{d-1} \int_{S^{d-1}} u(x+\rho z) \, dz$ è continua.

Basta far vedere che $\rho \longmapsto \int_{S^{d-1}} u(x+\rho z) \, dz$ è continuo per conv. domin.

Quindi posso derivare $(*)$ rispetto a r e ottengo

$$\underbrace{d\alpha_d}_{c_d} r^{d-1} u(x) = h(r) = \int_{\partial B(x,r)} u \, d\sigma_{d-1} .$$

cioè (MS_x). $\square$

AM3 20/21

Lezione 31

3/12/2020

Dimostriamo i teoremi 2 e 3 enunciati nella lezione precedente.

Come al solito $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è aperto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Lemma 5

Se $u \in C^2(\Omega)$, $x \in \Omega$, $R := \mathrm{dist}(x, \Omega^c)$, allora

$$h : r \longmapsto \fint_{\partial B(x,r)} u \, d\sigma_{d-1}$$

è ben definita e derivabile su $[0,R)$ e

$$h'(r) = \frac{1}{c_d r^{d-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u \, d\mathcal{L}^d$$

Questa è la formula chiave!

Dim.

Scrivo $h(r)$ come

$$h(r) = \frac{1}{c_d} \int_{S^{d-1}} u(x + rz) \, d\sigma_{d-1}(z).$$

Siccome il dominio di integr. S^{d-1} non dipende da r, posso applicare il teorema di derivaz. dell' integr.

$$h'(r) = \frac{1}{C_d} \int_{S^{d-1}} \frac{d}{dr}\big(u(x+rz)\big)\, d\sigma_{d-1}(z)$$

prodotto scalare in $\mathbb{R}^d$

$$= \frac{1}{C_d} \int_{S^{d-1}} \nabla u(x+rz) \cdot z \, d\sigma_{d-1}(z)$$

dato $z \in S^{d-1}$ la normale esterna $\nu(z)$ coincide con z

$$= \frac{1}{C_d} \int_{S^{d-1}} \nabla u(x+rz) \cdot \nu(z)\, d\sigma_{d-1}(z)$$

teorema della divergenza

div_z = divergenza rispetto alla var. z

$$= \frac{1}{C_d} \int_{\mathbb{D}^d} \mathrm{div}_z\big(\nabla u(x+rz)\big)\, dz$$

$$= \frac{1}{C_d} \int_{\mathbb{D}^d} r \cdot \Delta u(x+rz)\, dz$$

$$= \frac{1}{C_d r^{d-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u \, d\mathcal{L}^d . \qquad \square$$

Lemma 6

Data $u : \Omega \to \mathbb{R}$ continua in un certo $x \in \Omega$, allora

$$u(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} u \, d\mathcal{L}^d = \lim_{r \to 0} \fint_{\partial B(x,r)} u \, d\sigma_{d-1} .$$

La dimostrazione fatela per esercizio.

Dim. teorema 2

Dimostro che u ha la propr. della media sulle sfere.
Dato $x \in \Omega$, pongo (come nel lemma 5).

$$h(r) := \fint_{\partial B(x,r)} u \, d\sigma_{d-1}$$

Allora

- $h(r) \xrightarrow[r \to 0]{} u(x)$ per il lemma 6,
- $h'(r) = 0$ per il lemma 5 $\Rightarrow$ $h(r)$ è costante,

e quindi $h(r) = u(x)$ $\forall r$ t.c. $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$,
cioè vale (MS_x). $\square$

Dim. teorema 3

Dimostro prima che $u \in C^\infty(\Omega)$.

Caso 1: $\Omega = \mathbb{R}^d$ e u è limitata
Prendo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.c.

- φ è radiale, cioè $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(|x|)$ con $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,
- $1 = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dx = \int_0^{+\infty} c_d r^{d-1} \tilde{\varphi}(r)\, dr$.

Allora $u * \varphi$ è ben definita e C^∞.
Per concludere dimostro che $u = u * \varphi$.

In effetti

$$u * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)\, \varphi(y)\, dy$$

$z=-y$, $\varphi(-z)=\tilde{\varphi}(|z|)$ $\longmapsto$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} u(x+z)\, \tilde{\varphi}(|z|)\, dz$$

formula richiamata nella lez. prec. $\longmapsto$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B(0,r)} u(x+z)\, d\sigma_{d-1}(z) \right) \tilde{\varphi}(r)\, dr$$

propr. della media sulle sfere $\longmapsto$

$$= \int_0^{+\infty} c_d r^{d-1} u(x)\, \tilde{\varphi}(r)\, dr = u(x).$$

$$\int_0^{+\infty} c_d r^{d-1} \tilde{\varphi}(r)\, dr = 1$$

Caso 2: Ω e u qualunqui

(Traccia)

Prendo A aperto t.c. $\bar{A} \subset \Omega$ e $\bar{A}$ è compatto, e dimostro che u è C^∞ su A ....

Prendo δ t.c. $A + B(0, 2\delta) \subset \Omega$.

Prendo φ come sopra con $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset B(0,\delta)$.

Pongo

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \overline{A+B(0,\delta)} \\ 0 & \text{se } x \notin \overline{A+B(0,\delta)} \end{cases}$$

$\tilde{u}$ è definita su $\mathbb{R}^d$ e limitata (perchè u è continua e $\overline{A+B(0,\delta)}$ è compatto $\subset \Omega$).

Allora $\tilde{u} * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $u = \tilde{u} * \varphi$ su A (stessa dimostraz. del caso 1).

Dimostro ora che u è armonica.

Dato $x \in \Omega$ sia $R := \operatorname{dist}(x, \Omega^c)$.

Siccome u ha la propr. della media (sulle sfere)

$h(r) := \fint_{\partial B(x,r)} u \, d\sigma_{d-1}$ è costante su $[0,R)$

Quindi $0 = h'(r) \underset{\uparrow}{=} \dfrac{1}{c_d r^{d-1}} \displaystyle\int_{B(x,r)} \Delta u \, d\mathscr{L}^d$,

lemma 5

Quindi $0 = \fint_{B(x,r)} \Delta u \, d\mathscr{L}^d \xrightarrow[r \to 0]{} \Delta u(x)$,

lemma 6

e quindi $\Delta u(x) = 0$. $\square$

Conseguenze della propr. della media

Proposizione 7 (Principio del massimo, 1ª versione)
Sia Ω aperto connesso in $\mathbb{R}^d$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ armonica.
Se u ammette un punto di max. (o min.) in Ω
allora u è costante.

Dim.
Sia M il val. max. di u e x_M un punto di max.
Sia

$$E := \{x \in \Omega : \ u(x) = M\}$$

Dimostro che E è aperto e chiuso (in Ω) e
siccome $E \neq \emptyset$ e Ω è connesso, $E = \Omega$
e u è costante.

$E = u^{-1}(M)$ e quindi E è chiuso (in Ω).

Faccio vedere che E è aperto.
Dato $x \in E$ ed r t.c. $B(x,r) \subset \Omega$ mostro
che $B(x,r) \subset E$.
Infatti

$$M \underset{x \in E}{=} u(x) \underset{\text{propr. media}}{=} \fint_{B(x,r)} u \, d\mathcal{L}^d \leq M$$

$\leq$: perché $u \leq M$ su $B(x,r)$
e vale $=$ sse $u = M$ q.o.
in $B(x,r)$

quindi $u = M$ q.o. in $B(x,r)$ $\Rightarrow$ $u = M$ in $B(x,r)$
(perché u è continua). $\square$

Proposizione 8 (Principio del massimo, 2ª versione)
Sia Ω aperto limitato, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua e armonica in Ω. Allora
(i) esistono punti di max. e min. di u contenuti in $\partial\Omega$;
(ii) se $\overline{x} \in \Omega$ è un punto di max. o min. di u allora u è costante sulla comp. conn. A di Ω che contiene $\overline{x}$.

Dim.
(ii) segue dalla prop. 7.

(i) Siccome $\overline{\Omega}$ è compatto, esistono M valore max. di u su $\overline{\Omega}$ e x_M punto di max.
Se $x_M \in \partial\Omega$ ho finito.
Se $x_M \in \Omega$, allora $u = M$ su A c.c. di Ω che contiene x_M (enunciato (ii)).
Quindi $u = M$ su ∂A.
Per concludere osservo che $\partial A \subset \partial\Omega$ e che $\partial A \neq \emptyset$. (Dimostrate voi i dettagli).
Stessa argomentazione per il minimo. $\square$

Osservo.

Nella prop. 8 è importante che Ω sia limitato.

Sia $\Omega := \{ x \in \mathbb{R}^d : x_1 > 0 \}$ e sia $u(x) = x_1$:

u è definita su $\overline{\Omega}$, armonica, ma non ha punti di max.

Corollario 9 (Unicità per l'eq. di Poisson)

Sia Ω aperto limitato, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua, $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continua, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua e C^2 su Ω che risolve

$$(P) \qquad \begin{cases} \Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Allora u è unica.

Dim.

Date due soluzioni u_1, u_2 di (P) prendo $u := u_1 - u_2$. Allora u è continua su $\overline{\Omega}$, armonica, $u = 0$ su $\partial\Omega \underset{\text{prop. 8 (i)}}{\Longrightarrow} u = 0$ su Ω. $\square$

Corollario 10 (Principio del confronto per l'eq. di P.)

Siano Ω e f come nel cor. 9.

Siano $u_1, u_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue, C^2 su Ω, che risolvono $\Delta u = f$.

(i) se $u_1 \geq u_2$ su $\partial\Omega$ allora $u_1 \geq u_2$ su Ω.

(ii) se inoltre $u_1(\overline{x}) = u_2(\overline{x})$ per qualche $\overline{x} \in \Omega$, allora $u_1 = u_2$ su A c.c. di Ω che contiene $\overline{x}$.

Dim.

Sia $u = u_1 - u_2$. Allora u è continua su $\overline{\Omega}$, armonica su Ω, e $u \geq 0$ su $\partial\Omega$.

Quindi $\min\limits_{\Omega} u \underset{\uparrow}{=} \min\limits_{\partial\Omega} u \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$ su Ω

prop. 8(i)

$\Rightarrow u_1 \geq u_2$ su Ω.

Se inoltre $u_1(\overline{x}) = u_2(\overline{x})$, ho che $u(\overline{x}) = 0 \Rightarrow$ $\overline{x}$ è un punto di min. di u in Ω e concludo usando la prop. 8(ii). $\square$

Relazioni tra funzioni armoniche e funzioni olomorfe

Qui consideriamo Ω aperto in $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ $\left((x,y) \simeq z = x+iy\right)$.

Prop. 11

Data $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa o antiolomorfa (cioè $\bar{f}$ è olomorfa) allora f è armonica.

Dim.

f è olomorfa $\iff$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = i \underbrace{\dfrac{\partial f}{\partial x}}_{= f'}$ (Cauchy-Riemann).

Ma allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \overset{C.R.}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(i\frac{\partial f}{\partial x}\right) = i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\overset{C.R.}{=} i\frac{\partial}{\partial x}\left(i\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

quindi $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

f è antiolomorfa $\iff$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -i\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Il resto della dimostrazione è uguale. $\square$

Teor. 12

Se Ω è semplicemente connesso e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è armonica, allora esiste $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa t.c. $u = \operatorname{Re} f$.

Dim.

Prendo $g : \Omega \to \mathbb{C}$ data da

$$g = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

derivata in senso compl.

(Se f esiste allora $g = f'$, infatti $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \operatorname{Re} f'$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \operatorname{Re}(i f') = -\operatorname{Im}(f')$.)

Verifico che g è olomorfa, cioè soddisfa C.-R.:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \overset{\Delta u = 0}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$= i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}\right) = i \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Siccome Ω è semplicemente connesso, esiste $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa t.c. $f' = g$.

Fissato $z_0 \in \Omega$, posso chiedere che $f(z_0) = u(z_0)$.

Per dimostrare che $\operatorname{Re} f = u$ mi basta dimostrare che $\nabla(\operatorname{Re} f) = \nabla u$. In effetti:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Re} f) = \operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \operatorname{Re}(f') = \operatorname{Re}(g) = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Re} f) = \operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \operatorname{Re}(if') = -\operatorname{Im}(g) = \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad \square$$

Osserv.

L'ipotesi che Ω sia semplicemente connesso è necessaria:

$$u := \log|z| = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$

è armonica su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (che non è semplic. conn.)
ma non esiste alcuna f t.c. $u = \operatorname{Re} f$.
Se infatti esistesse, allora

$$f' = g = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

e sappiamo che $\frac{1}{z}$ non ammette primitiva su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Cor. 13

Dato Ω aperto in $\mathbb{R}^2$, $u: \Omega \to \mathbb{R}$ armonica, allora u è analitica, cioè si scrive localmente come serie di potenze nelle variabili x e y.

Dim.

Basta usare il fatto u è <u>localmente</u> la parte reale di una funzione olomorfa, che si scrive (localm.) in serie di potenze di z (e $\operatorname{Re}(z^n)$ è un polinomio in x e y ...). $\square$

Lo stesso risultato vale in dimensione qualunque (ma non lo dimostro).

Concludo discutendo l'esistenza per il problema

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta u = g & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$ ← eq. di Poisson

Sottointeso: $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua data, $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua data, e $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ è continua, e almeno C^2 in Ω.

Se Ω è limitato la soluzione è unica.

L'esistenza (anche se $g=0$) richiede una qualche regolarità di $\partial\Omega$.
Per esempio, se $\Omega := B(0,1) \setminus \{0\}$, in generale (P) non ha soluzione, neanche per $g=0$.

La teoria generale dell'esistenza non è oggetto di questo corso. Mi limito a qualche caso particolare.

Sia Ω aperto in $\mathbb{R}^d$ della forma

$$\Omega := \{ x \in \mathbb{R}^d : \ Q(x) \leq 1 \}$$

con Q forma quadratica <u>definita positiva</u> su $\mathbb{R}^d$ (quindi Ω è limitato).

Pongo $P_n := \{$ polinomi su $\mathbb{R}^d$ di grado $\leq n\}$.

Prop. 14

Dato $u_0 \in P_{n+2}$, $g \in P_n$ allora il problema

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta u = g & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ammette una soluzione $u \in P_{n+2}$.

Dim.

Prendo $T: P_n \to P_n$ applicazione lineare data da

$$Tv = \underbrace{\Delta(\overbrace{v \cdot (Q-1)}^{\in P_{n+2}})}_{\in P_n}.$$

Se $Tv = g - \Delta u_0$, allora $u := v(Q-1) + u_0$ risolve (P).

Siccome $g - \Delta u_0 \in P_n$ (per le ipotesi su g e u_0) v esiste se T è surgettiva $\Leftarrow$ T è iniettiva.

Verifico che T è iniettiva.

Data v t.c. $Tv = 0$, allora $w = v(Q-1)$ risolve $\Delta w = 0$ e $w = 0$ su $\partial\Omega = \{x : Q(x) = 1\}$.

Quindi $w = 0$ (per l'unicità della sol. dell'eq. di Laplace) e quindi $v = 0$. $\square$

Formula risolutiva per l'eq. di Laplace.

$D = B(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ e voglio risolvere

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } D \\ u = u_0 & \text{su } \partial D \end{cases}$$

Risoluzione formale

Scrivo $g(t) := u_0(e^{it})$ in serie di Fourier, cioè

$$u_0(e^{it}) = g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}.$$

Allora per $z = e^{it} \in S^1$

$$u_0(z) = -c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} e^{-int}$$

$$= -c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} \bar{z}^n$$

Estendo u_0 a D ponendo

$$(F1) \qquad u(z) := -c_0 + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n}_{f_1(z)} + \overline{\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_{-n} z^n\right)}_{f_2(z)}}$$

Prop. 15

Se u_0 è tale $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < +\infty$ ($\Leftarrow$ u_0 è C^1 su S^1 ovvero g è C^1 su $\mathbb{R}$) allora u definita da (F1) risolve (P).

Dim.

Siccome $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < +\infty$ e

$$\sup_{z \in \overline{D}} |c_n z^n| = |c_n|$$

allora le serie di potenze che danno f_1 e f_2 convergono totalmente su $\overline{D}$ ($\Rightarrow f_1$ e f_2 sono ben definite su $\overline{D}$ e continue) e hanno raggio di convergenza ≥ 1 ($\Rightarrow f_1$ e f_2 sono olomorfe su D).

Quindi u è armonica su D. $\square$

Riscrivo adesso (F1) in un altro modo:

$$u(z) = -c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} \bar{z}^n$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{-int} z^n\,dt$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{int} \bar{z}^n\,dt$$

scambio serie e integrali

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty}(e^{-it}z)^n + \overline{\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-it}z)^n}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\; \underbrace{\mathrm{Re}\left(-1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-it}z)^n\right)}_{= h(t,z)}\; dt .$$

Definisco quindi il nucleo di Poisson $h : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}$:

$$h(t,z) := \operatorname{Re}\left(-1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-it} z)^n\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(-1 + \frac{2}{1 - e^{it} z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it} - z|},$$

e ottengo la seconda formula risolutiva per (P) :

$$\text{(F2)} \qquad u(z) = \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{u_0(e^{it})\, h(t,z)}_{= g(t)}\, dt & \text{se } z \in D \\ u_0(z) & \text{se } z \in \partial D \end{cases}$$

Prop. 16

Data $u_0 : \partial D \to \mathbb{C}$ continua, (F2) definisce una funzione $u : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continua che risolve (P) cioè $\Delta u = 0$ su D, $u = u_0$ su ∂D.

La dimostrazione è un esercizio (lungo ma in parte già visto).