Versione: 16 settembre 2021

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

prove scritte dell'esame di

Analisi Matematica 3 (547AA), a.a. 2020-21

Testi

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi 3 consistono di otto domande a cui dare una risposta articolata. Di queste, le prime sono solitamente più semplici, nel senso che possono essere facilmente ricondotte a fatti o calcoli noti. Il tempo a disposizione è di tre ore.
Questa raccolta contiene i testi degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2020-21, incluse le prove in itinere.

Programma del corso [versione: 19 dicembre 2020]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali e/o fuori programma.

1. RICHIAMO DI TEORIA DELL'INTEGRAZIONE (fuori programma)
   - *Misure σ-additive su σ-algebre. Esempi fondamentali: la misura di Lebesgue e la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^d$; la misura che conta i punti.*
   - *Funzioni misurabili (rispetto ad una data σ-algebra). Integrale delle funzioni misurabile positive partendo delle funzioni semplici. Integrale delle funzioni misurabili a valori reali e a valori vettoriali.*
   - *Teoremi fondamentali: di convergenza monotona (o di Beppo Levi), di Fatou, di convergenza dominata (o di Lebesgue), di Fubini, di cambio di variabile.*

2. SPAZI L^p
   - Disuguaglianze di Jensen, Hölder e Minkowski.
   - Norma L^p di una funzione; spazi L^p; completezza degli spazi L^p.
   - Confronto tra le varie nozioni di convergenza per una successione di funzioni.
   - Approssimazione con funzioni continue; teorema di Lusin.

3. CONVOLUZIONE
   - Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^d$ e disuguaglianze collegate alle norme L^p.
   - Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori.
   - Approssimazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^d)$; approssimazione con funzioni C^∞ a supporto compatto.

4. SPAZI DI HILBERT
   - Spazi di Hilbert reali; basi di Hilbert (sistemi ortonormali completi); rappresentazione di un elemento dello spazio di Hilbert H in termini di una base.
   - Proiezione ortogonale di un vettore di H su un sottospazio chiuso V e caratterizzazione in termini di distanza; rappresentazione di H come $H = V + V^\perp$.
   - Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo su H tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
   - *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*

5. SERIE DI FOURIER
   - Le funzioni esponenziali e^{inx} (opportunamente rinormalizzate) formano una base di Hilbert di $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$. Serie di Fourier di una funzioni in $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$; identità di Parseval.
   - Relazione tra la regolarità di una funzione e il comportamento asintotico dei coefficienti di Fourier; convergenza uniforme della serie di Fourier delle funzioni 2π-periodiche di classe C^1.
   - Rappresentazione delle somme parziali della serie di Fourier come convoluzione con il nucleo di Dirichlet; convergenza della serie di Fourier nei punti di continuità Hölderiana.

6. SERIE DI FOURIER: APPLICAZIONI E VARIANTI
   - *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde in una dimensione spaziale.*
   - Risoluzione di equazioni alle derivate parziali lineari con condizioni di periodicità al bordo tramite la serie di Fourier (in primis l'equazione del calore e delle onde).
   - Dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica nel piano.

- Varianti della serie di Fourier: serie di Fourier in d variabili, serie di Fourier reale, rappresentazione in serie di seni (per le funzioni in $L^2(0, \pi)$). Applicazione alla risoluzione di EDP con diverse condizioni al bordo.
- Operatori autoaggiunti; esempi di basi di Hilbert di autovettori di operatori autoaggiunti.

7. Trasformata di Fourier e applicazioni
   - *Derivazione euristica della trasformata di Fourier a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier delle funzioni in $L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.
   - Proprietà elementari della TdF; trasformata del prodotto di convoluzione di funzioni in L^1; trasformata della derivata e derivata della trasformata.
   - Formula di inversione per funzioni in L^1 con trasformata in L^1.
   - La TdF preserva il prodotto scalare e la norma L^2 a meno di un fattore costante (identità di Plancherel). Definizione della TdF di funzioni in $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$; trasformata del prodotto di funzioni in L^2.
   - Relazione tra la regolarità della funzione e il comportamento asintotico della trasformata, relazione tra la sommabilità della funzione e la regolarità della trasformata. La TdF di una funzione con supporto compatto è analitica (teorema di Paley-Wiener).
   - *Risoluzione dell'equazione del calore su $\mathbb{R}$ tramite trasformata di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore. Disuguaglianza di Heisenberg.*

8. Funzioni armoniche
   - Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di proprietà della media. Regolarità C^∞ delle funzioni armoniche.
   - Principio del massimo per la funzioni armoniche. Unicità e principio del confronto per le soluzioni dell'equazione e di Poisson con condizioni al bordo di Dirichlet.
   - Relazioni tra le funzioni armoniche in dimensione due e le funzioni olomorfe. Analiticità delle funzioni armoniche (solo in dimensione due).
   - Risoluzione dell'equazione di Poisson con termine noto polinomiale e dato al bordo polinomiale su una palla o su un ellissoide (in dimensione qualunque). Risoluzione dell'equazione di Laplace con condizione di Dirichlet sul disco unitario tramite (rappresentazione e della soluzione come Fourier e tramite il nucleo di Poisson).

9. Integrazione su superfici
   - *Superfici (senza bordo) di dimensione k e classe C^m in $\mathbb{R}^d$: definizione in termini di parametrizzazioni regolari e caratterizzazione come luogo di zeri, cioè in termini di equazioni. Spazio tangente ad una superficie. Mappe regolari tra superfici, differenziale di una mappa regolare. Superfici con bordo.*
   - Misura di Lebesgue su uno spazio vettoriale con prodotto scalare. Definizione di $|\det T|$ per un'applicazione lineare T tra spazi vettoriali con prodotto scalare; formule alternative per $|\det T|$ per un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$.
   - Determinante Jacobiano di una mappa di classe C^1 da un aperto di $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^d$; formule alternative per lo Jacobiano. Costruzione della misura di volume su una superficie tramite parametrizzazioni regolari; integrazione di funzioni su una superficie tramite parametrizzazioni anche non regolari (formula dell'area).
   - Applicazioni k-lineari alternanti (k-covettori) su uno spazio vettoriale V; prodotto esterno, pull-back tramite un'applicazione lineare. Base dello spazio dei k-covettori su V associata ad una base di V. Formula di Binet generalizzata.
   - *Orientazione di uno spazio vettoriale V, orientazione di una superficie e orientazione del bordo. Forme differenziali (su un aperto di $\mathbb{R}^d$), pull-back, derivata esterna (differenziale). Integrazione di una k-forma su una superficie k-dimensionale orientata. Teorema di Stokes (solo enunciato).*

T E S T I

1. Sia $E := \left\{(x,y) \in [1,+\infty) \times \mathbb{R}^d \colon |y| \leq \dfrac{1}{x}\right\}$ e sia $f(x,y) := \dfrac{1}{|y|}$. Calcolare $\|f\|_{L^p(E)}$.

2. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $f(x) := \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

3. Dimostrare che i polinomi trigonometrici sono densi in $L^p([-a,a];\mathbb{C})$ per $a \leq \pi$ e $p < +\infty$.

4. a) Sia $Q := [-\pi,\pi]^d$, f una funzione in $L^2(Q)$ estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}^d$ e M una matrice $d \times d$ con coefficienti interi e $\det M = 1$. Esprimere i coefficienti di Fourier di $f_M(x) := f(Mx)$ in funzione di quelli di f.

   b) Cosa succede se M è una matrice invertibile con coefficienti interi?

5. Indico con L^1_{per} l'insieme delle funzioni $f \in L^1([-\pi,\pi])$ estese per periodicità a tutto $\mathbb{R}$, e scrivo $\|f\|_1$ per $\|f\|_{L^1([-\pi,\pi])}$. Date $f,g \in L^1_{\text{per}}$ definisco il prodotto di convoluzione $f * g$ come
$$f * g(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, g(y)\, dy\,.$$
   a) Dimostrare che $f * g(x)$ è ben definito per q.o. $x \in \mathbb{R}$ e $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

   b) Calcolare i coefficienti di Fourier di $f * g$ in funzione di quelli di f e g.

6. Sia $\Omega := \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ e sia $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 e 2π-periodica. Cerco $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ funzione continua, 2π-periodica nella prima variabile, che risolve il problema (P) dato dall'equazione $\Delta u = 0$ su Ω e la condizione al bordo $u(\cdot,0) = u_0(\cdot)$. Discutere l'esistenza e l'unicità di u.
   [*Suggerimento: scrivere u in serie di Fourier nella prima variabile.*]

7. Siano dati $1 \leq p \leq \infty$, E insieme in $\mathbb{R}^d$ di misura positiva e finita, ed $u_n : E \to \mathbb{R}$ successione di funzioni con norme $\|u_n\|_p$ equilimitate che convergono a 0 per q.o. $x \in E$.

   a) Dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E u_n\, dx = 0$ se $p = +\infty$.

   b) Per ogni $m > 0$ sia $E_{n,m} := \{x \in E \colon |u_n(x)| \geq m\}$: allora $|E_{n,m}| \leq \|u_n\|_p^p / m^p$ per p finito.

   c) Dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E u_n\, dx = 0$ se $p > 1$.
   [*Suggerimento: scomporre l'integrale come somma di un integrale su $E_{n,m}$ e di uno su $E \setminus E_{n,m}$.*]

   d) Cosa succede per $p = 1$?

8. Data $f \in L^1([-\pi,\pi];\mathbb{C})$, estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$, e $\lambda \in (0,1)$, consideriamo la serie di Fourier "pesata"
$$T_\lambda f(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|n|} c_n(f)\, e^{inx}\,.$$
   a) Dimostrare che $T_\lambda f$ è una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ di classe C^∞.

   b) Scrivere $T_\lambda f$ come $f * g_\lambda$ con g_λ funzione positiva e 2π-periodica con integrale 1 sul periodo.
   [*Il prodotto $f * g_\lambda$ è inteso nel senso dell'esercizio* **??**, *e si richiede che g_λ non dipenda da f.*]

   c) Dimostrare che $T_\lambda f \to f$ in $L^1([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ per $\lambda \to 1$.

1. Sia ω la 2-forma su $\mathbb{R}^3$ data da $\omega = x_1x_2x_3\, dx_1 \wedge dx_3$, e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la mappa data $f(s_1, s_2) := (s_1^2, s_1s_2, s_2^2)$. Calcolare $d\omega$ e il pull-back $f^{\#}\omega$.

2. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} x_1^2\, d\sigma_2(x)$.

3. Sia Ω il disco di centro 0 e raggio 2 in $\mathbb{R}^2$. Trovare la soluzione dell'equazione $\Delta u = 1 + x + y$ su Ω che soddisfa $u = xy$ su $\partial\Omega$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione a supporto compatto e di classe C^k con $k \geq 1$. Dimostrare che $y^h \widehat{f} \in L^1$ per $h = 0, \dots, k-1$.

5. a) Scrivere $u_0(x) := \sin x \cos^2 x$ come combinazione lineare di $\sin(nx)$ con $n = 1, 2, \dots$

   b) Trovare la soluzione u problema (P) dato dall'equazione $u_t = -u_{xx} + \cos t \cdot u$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$ con condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$ e condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$. [*Non si chiede di discutere l'unicità.*]

6. Sia (x_n) una successione in $\mathbb{R}^d$ e sia (a_n) una successione in $\mathbb{C}$ tale che $\sum_1^\infty |a_n| < +\infty$. Data $u \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ pongo
$$Tu := \sum_{n=1}^\infty a_n\, \tau_{x_n} u\,.$$
   a) Dimostrare che la funzione Tu è ben definita ed appartiene a $L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$.

   b) Trovare $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ continua e limitata tale che $\widehat{Tu} = g\, \widehat{u}$ per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$.

7. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile tale che $e^{m|x|} g \in L^1$ per qualche $m > 0$.

   a) Dimostrare che $\widehat{g}$ è la restrizione ad $\mathbb{R}$ di una funzione olomorfa.

   b) Dimostrare che se $\int_{\mathbb{R}} x^n g(x)\, dx = 0$ per ogni $n = 0, 1, \dots$ allora $g = 0$ q.o.

   c) Dato $a > 0$, dimostrare che lo span di $X := \{x^n e^{-ax^2} : n = 0, 1, \dots\}$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$.

   d) Far vedere che la conclusione in b) non vale se si sostituisce l'ipotesi che $e^{m|x|} g \in L^1$ per qualche $m > 0$ con $x^n g \in L^1$ per ogni $n = 0, 1, \dots$.

   [*Suggerimento per b): dimostrare che $D^n \widehat{g}(0) = 0$ per ogni n.*]

8. Per $n = 0, 1, \dots$ pongo $u_n(x) := e^{x^2/2}\, D^n(e^{-x^2})$. Dimostrare che:

   a) $u_{n+1} = \dot{u}_n - x u_n$;

   b) $u_n = p_n\, e^{-x^2/2}$ con p_n polinomio di grado n;

   c) $\widehat{u_n} = \sqrt{2\pi}(-i)^n\, u_n$;

   d) le funzioni u_n formano un sistema ortogonale in $L^2(\mathbb{R})$;

   e) opportunamente rinormalizzate, le funzioni u_n formano una base di Hilbert di $L^2(\mathbb{R})$.

   [*Suggerimento per d): dato $m < n$ scrivere $\langle u_n\,;\, u_m \rangle$ come $\int_{\mathbb{R}} D^n(e^{-x^2})\, p_m\, dx$ e integrare per parti $m+1$ volte. Suggerimento per e): usare l'esercizio* **??**.]

1. Sia $d = 1, 2, \dots$ e sia E l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ tali che $|y| \leq \dfrac{1}{x^2 + x^4}$.
   Dire per quali $p \in [1, \infty)$ la funzione $x^5 y$ appartiene a $L^p(E)$.

2. Calcolare la TdF di $u(x) := e^{-|x|} \cos x$.

3. Sia $\alpha \in \wedge^2(\mathbb{R}^{2n})$ dato da $\alpha := dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$.
   Calcolare $\beta := \underbrace{\alpha \wedge \cdots \wedge \alpha}_{n \text{ volte}}$.

4. Sia $f \in L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ una funzione 2π-periodica e sia $g \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

   a) Dimostrare che $f * g$ è ben definita, appartiene a $L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, ed è 2π-periodica.

   b) Calcolare i coefficienti di Fourier di $f * g$ in funzione della Trasformata di Fourier di g e dei coefficienti di Fourier di f.

5. Consideriamo lo spazio di Hilbert $L^2 = L^2(\mathbb{R})$, il sottospazio X delle funzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e con supporto compatto, e l'operatore lineare $T : X \to L^2$ dato da $Tu := u - \ddot{u}$.

   a) Dimostrare che T è autoaggiunto.

   b) Discutere la segnatura di T.

   c) Cosa succede se nella definizione di X sostituisco l'ipotesi che u abbia supporto compatto con l'ipotesi $u, \dot{u}, \ddot{u} \in L^2$?

6. Posto $u_0(x) := x^2 - \pi x$, consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = u_{xx} + tu$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$ con le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$ e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$. Discutere l'esistenza della soluzione.

7. Sia data $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funzione di classe C^2. Si dice che u è *subarmonica* se $\Delta u \geq 0$ su $\mathbb{R}^d$.
   Dimostrare che:

   a) se u è subarmonica allora vale (P_1): $u(x) \leq \fint_{\partial B} u \, d\sigma_{d-1}$ per ogni palla $B = B(x, r)$;

   b) se u è subarmonica allora vale (P_2): $u(x) \leq \fint_B u \, d\mathscr{L}^d$ per ogni palla $B = B(x, r)$;

   c) se u soddisfa (P_1) oppure (P_2) allora è subarmonica;

   d) se u è subarmonica e Ω è un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ allora $\max\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max\limits_{x \in \partial\Omega} u(x)$.

8. Data Γ curva[1] compatta e di classe C^1 contenuta in $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$, e dati $h, k = 2, 3 \dots$, considero l'insieme Σ dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$ tali che $(|x|, |y|) \in \Gamma$.[2]

   a) Dimostrare che Σ è una superficie compatta di classe C^1 e dimensione $d = h + k - 1$.

   b) Esprimere il volume di Σ come integrale su Γ di un'opportuna funzione.

---

[1] Per curva intendo una superficie di dimensione 1 senza bordo.
[2] Dunque Σ è la superficie di rotazione generata da Γ.

1. Calcolare $d\omega$ dove ω la 1-forma su $\mathbb{R}^k$, $k \geq 3$, data da $\omega := \displaystyle\sum_{i=2}^{k-1} (x_{i-1} - x_i + x_{i+1})\, dx_i$.

2. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $g(x) := e^x + e^{-x}$.

3. Per ogni $\varepsilon > 0$ calcolare la Trasformata di Fourier della funzione $\varphi_\varepsilon(x) := \dfrac{x}{x^2 + \varepsilon^2}$.

4. Sia $D := B(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ e sia $f : D \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) := (3|x|^2, 6|x|^3)$. Calcolare l'area del grafico di f.

5. Posto $H := L^2([0,3])$ e $H' := L^2([0,1])$, sia $T : H \to H'$ l'applicazione lineare data da $[Tu](x) := u(x+2) - u(x)$ per q.o. $x \in [0,1]$, e sia $X := \ker(T)$.
   a) Dimostrare che T è continua e quindi X è chiuso;
   b) determinare l'aggiunta $T^* : H' \to H$;
   c) determinare $X^\perp$ e le proiezioni di H su X e $X^\perp$.

6. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ poniamo $\varphi(x) := 1/x$. Dati $x \in \mathbb{R}$ e u funzione su $\mathbb{R}$, definiamo il prodotto di convoluzione $\varphi * u$ come
$$\varphi * u(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{t:\, |t| \geq \varepsilon\}} \frac{u(x-t)}{t}\, dt\,,$$
quando questo limite esiste.[1] Dimostrare che $\varphi * u(x)$ è ben definito e finito se u appartiene a L^2 ed è α-Hölderiana in x per qualche $\alpha > 0$.
[*Suggerimento: cominciare dal caso in cui* $u(x) = 0$*; supporre (se serve) che* u *è continua con supporto compatto.*]

7. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = (2\cos t - 1)\, u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$ con le condizioni di periodicità al bordo $u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi)$ e $u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi)$ e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = g(\cdot)$, dove g è data nell'esercizio **??**.
   a) Dimostrare che non esiste alcuna soluzione nell'intervallo temporale $[0, +\infty)$.
   b) Dimostrare che esiste una soluzione nell'intervallo temporale $[0, T)$ per qualche $T > 0$.
   c) Caratterizzare l'estremo superiore T^* dei T al punto b), stimandolo dall'alto e dal basso.

8. Per ogni $y \in \mathbb{R}$ sia $g(y) := -\frac{i}{2}\, \mathrm{sgn}(y)$. Dimostrare quanto segue:
   a) esiste un'applicazione lineare e continua H da $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ in sé tale che $\widehat{Hu} = g\, \widehat{u}$ per ogni u;[2]
   b) per ogni $u \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, $Hu = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon * u$ dove φ_ε è definita nell'esercizio **??** e il limite è inteso nella norma L^2;
   c) se u appartiene a $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ ed è α-Holderiana per qualche $\alpha > 0$ allora $Hu = \varphi * u$ per q.o. x, dove $\varphi * u$ è definita nell'esercizio **??**.

[1] Questo limite è noto come *valore principale di Cauchy* dell'integrale improprio $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t}\, u(x-t)\, dt$.
[2] L'operatore H coincide a meno di un fattore costante con la *Trasformata di Hilbert*.

1. Data $g \in C^1(\mathbb{R})$, consideriamo la 1-forma su $\mathbb{R}^d$ data da $\omega := g(|x|^2) \sum_i x_i \, dx_i$. Calcolare $d\omega$, e dire se ω si può scrivere come differenziale di una funzione f su $\mathbb{R}^d$ (e in caso affermativo trovare tale f).

2. Sia Ω l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $0 < y(1 + x^8) < 1$. Dire per quali $p \in [1, \infty)$ la funzione $f(x, y) := x^2 + y^2$ appartiene a $L^p(\Omega)$.

3. Calcolare la Trasformata di Fourier di $u(x) := e^{-2|x|} \cos x$.

4. a) Scrivere la serie di Fourier complessa della funzione $f(t) := \cos t \, \sin^3 t$.

   b) Trovare la funzione armonica u sul disco unitario D tale che $u(x, y) = 4xy^3$ su ∂D.

5. Sia X is sottospazio di $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ formato delle funzioni u di classe C^1 tali che xu e $\dot{u}$ appartengono a L^2, e sia $T : X \to L^2$ l'operatore dato da
$$Tu := i\dot{u} + 2xu \; .$$
   Dimostrare che T è autoaggiunto e calcolare $\ker(T)$.

6. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = 2t \, u_{xx} + u$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$, con le condizioni di periodicità al bordo e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0$.
   Dire sotto quali ipotesi su u_0 il problema (P) ammette una soluzione, discutendone l'intervallo di definizione e la regolarità. [*L'unicità può essere data per scontata.*]

7. Presi $d \geq 2$ e $k \geq 1$ interi, sia B la palla aperta di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{R}^d$ e $B^* := B \setminus \{0\}$. Data $u : [0, 1) \to \mathbb{R}^k$ una mappa di classe C^1, indico con $v : B \to \mathbb{R}^k$ la mappa data da $v(x) := u(|x|)$, con Σ il grafico di v, e con Σ^* il grafico della restrizione di v a B^*.

   a) Dimostrare che Σ^* è una superficie di classe C^1.

   b) Far vedere che Σ non è necessariamente una superficie di classe C^1.

   c) Dare delle ipotesi su u che garantiscano che Σ è una superficie di classe C^1.

8. Dati $v \in \mathbb{R}^h$ e $w \in \mathbb{R}^k$ ricordo che $v \otimes w$ indica la matrice $h \times k$ di coordinate $v_i w_j$, vale a dire $v \otimes w = v \, w^t$ dove intendo v e w come matrici $h \times 1$ e $k \times 1$, cioè come vettori colonna.

   a) Detta I la matrice identità $h \times h$, dimostrare che $\det(I + v \otimes v) = 1 + |v|^2$.

   b) Trovare una formula per il volume della superficie Σ^* nell'esercizio **??**.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ considero la seguente 2-forma su $\mathbb{R}^3$: $\omega(x) := 2x_1x_2\, e^{ax_3}\, dx_1 \wedge dx_2$. Dire per quali a la forma ω è chiusa (cioè $d\omega = 0$) e per questi trovarne una primitiva (cioè una 1-forma α tale che $d\alpha = \omega$).

2. Sia $d = 1, 2, \dots$, e sia E l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ tali che $1 \le y \le |x|^{-4}$. Fare un disegno approssimativo di E per $d = 1, 2$ e dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) := y^a$ appartiene a $L^1(E)$.

3. Scrivere la serie di Fourier reale e quella complessa della funzione $v(x) := x(x^2 - \pi^2)$.

4. Posto $L^1 := L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $C_0 := C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, indico con X l'immagine della trasformata di Fourier $\mathscr{F} : L^1 \to C_0$. Dimostrare che X è un sottospazio denso di C_0, ed è chiuso rispetto al prodotto.

5. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Dire per quali $a > 0$ la condizione $u(x) = O(|x|^{-a})$ per $x \to \pm\infty$ implica che la Trasformata di Fourier $\widehat{u}$ è di classe C^3.

6. Data $v(x) := x(x^2 - \pi^2)$, considero il problema (P) dato dall'equazione delle onde $u_{tt} = u_{xx}$ sul dominio spaziale $[0, \pi]$, dalle condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$, e dalle condizioni iniziali $u(0, \cdot) = 0$ e $u_t(0, \cdot) = v(\cdot)$. Scrivere la soluzione di (P) specificando l'intervallo temporale di esistenza e la regolarità.
   [*L'unicità può essere data per scontata*]

7. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := \dfrac{1}{1 + x^2}$. Dimostrare che:
   a) la derivata k-esima di f appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ per ogni intero k,
   b) il prodotto di convoluzione $f * g$ è ben definito e di classe C^∞ se $g \in L^\infty(\mathbb{R})$,
   c) lo stesso vale se $g \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \le p < +\infty$.

8. Sia S l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ tali che $(y + y^3)(1 + |x|^2) = 1$.
   a) Dimostrare che S è una superficie senza bordo di classe C^∞, e per la precisione è il grafico di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ che tende a 0 all'infinito.
   b) Per quali $p \ge 1$ la funzione $u(x, y) := y$ appartiene a $L^p(S)$?

1. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $u(x) := x^2 e^{-|x|}$.

2. Data $\omega := dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + dx_5 \wedge dx_6$, calcolare $\alpha := \omega \wedge \omega \wedge \omega$.

3. a) Scrivere la funzione $g(x) := x(\pi^2 - x^2)$ in serie di Fourier sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. [*Suggerimento: partire dalla serie di Fourier di* $\ddot{g}$.]

   b) Scrivere la funzione $g(x)$ in serie di seni sull'intervallo $[0, \pi]$.

4. Dato $a \geq 0$ e $d = 1, 2, \dots$, sia E l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^d$ tali che $0 < |x| < 1$, e sia f la funzione su E data da
$$f(x) := \frac{1}{|x|(1 - |x|)^a} .$$
   Preso p con $1 \leq p < +\infty$, dire per quali a, d la funzione f appartiene a $L^p(E)$.

5. Sia X il sottospazio delle funzioni $f \in L^2(\mathbb{R})$ tali che $f(x) = 0$ per q.o. $x \in [0, 1]$.

   a) Dimostrare che X è chiuso in $L^2(\mathbb{R})$.

   b) Determinare $X^\perp$ e le proiezioni ortogonali di $L^2(\mathbb{R})$ su X e $X^\perp$.

6. Dato $k = 2, 3, \dots$, dire per quali $r, p_1, \dots, p_k \in [1, \infty]$ vale il seguente enunciato:

   (E) per ogni $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}), \dots, f_k \in L^{p_k}(\mathbb{R})$ il prodotto di convoluzione $f := f_1 * \cdots * f_k$ è ben definito (q.o.) e vale
$$\|f\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k} . \tag{1}$$
   [*Questa è nota come disuguaglianza di Young per la convoluzione, il caso* $k = 2$ *è stato visto a lezione.*]

7. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_{tt} + 2u_t = u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$ con le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$ e le condizioni iniziali $u(0, \cdot) = 0$ e $u_t(0, \cdot) = g$, dove g è la funzione nell'esercizio **??**.

   a) Discutere l'esistenza di una soluzione di (P), prestando particolare attenzione all'intervallo temporale di definizione.

   b) Discutere la regolarità di tale soluzione.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione *positiva* e di classe C^1 che si annulla solo in $x = \pm 1$, sia S l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ tali che $|x| < 1$ e $|y| = f(x)$, e infine sia $\overline{S}$ la chiusura di S.

   a) Dimostrare che S è una superficie di classe C^1 (senza bordo e di dimensione 2).

   b) Dimostrare che $\overline{S}$ non è una superficie di classe C^1, con o senza bordo.

   c) Esprimere l'area di S in termini della funzione f.