Versione: 25 febbraio 2024

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

prove scritte dell'esame di

Analisi Matematica 1 (561AA), a.a. 2022-23

Testi e soluzioni

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per il corso di laurea in Matematica si compongono di due parti: una prima parte con nove domande relativamente semplici di cui dare solo la risposta, ed una seconda con 4 o 5 problemi di cui dare invece una soluzione articolata. Il tempo a disposizione è di 70 minuti per la prima parte e di due ore per la seconda. Per ottenere la sufficienza sono solitamente richieste almeno sei risposte corrette nella prima parte, ed due problemi completamente risolti nella seconda.
Questa raccolta contiene i testi e le soluzioni degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2022-23, incluse le prove in itinere. Per facilitare chi vuole esercitarsi, la raccolta è divisa in due sezioni: la prima contiene solo i testi, mentre la seconda contiene i testi e le soluzioni. Degli scritti di cui sono state preparate più varianti qui viene riportata solo la prima.

Programma del corso [versione: 1 giugno 2023].
Gli argomenti non fondamentali sono riportati in corsivo.

Prima parte: Calcolo.

1. Richiamo di alcune nozioni di base
   - Trigonometria, coordinate polari di un punto nel piano.
   - Grafici delle funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche, funzioni trigonometriche inverse.
   - Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
   - Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione "grafica" di equazioni e disequazioni.

2. Limiti di funzioni e continuità
   - Limiti di funzioni: definizione e significato; proprietà di base.
   - Funzioni continue. Continuità delle funzioni elementari (senza dimostrazione).

3. Derivate
   - Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Alcuni significati fisici della derivata: velocità (scalare e vettoriale) e accelerazione di un punto in movimento.
   - Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato); trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra; notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teorema di de l'Hôpital (senza dimostrazione). Confronto tra i comportamenti delle funzioni elementari all'infinito e in zero.
   - Sviluppo di Taylor di una funzione e Teorema di Taylor (rappresentazione del resto come "o piccolo" e "o grande", con dimostrazione). Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo di limiti e di parti principali.
   - Valore massimo e minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali). Estremo superiore ed inferiore di un insieme (semplice) di numeri reali, Estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione. Individuazione del valore massimo e minimo (oppure degli estremi superiore ed inferiore dei valori) di una funzione definita su un'unione finita di intervalli (aperti o chiusi, limitati e non).
   - Funzioni crescenti e decrescenti: definizione e caratterizzazione in termini di segno della derivata. Funzioni convesse e concave: definizione e caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda. Disegno del grafico di una funzione.

4. Integrali
   - Definizione (provvisoria) di integrale di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione parziale).
   - Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.

- ◦ Approssimazione dell'integrale tramite somme finite.
- ◦ La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza. Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

5. Equazioni differenziali
   - ◦ Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali.
   - ◦ Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
   - ◦ Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Struttura dell'insieme delle soluzioni delle equazioni lineari.
   - ◦ Risoluzione delle equazioni lineari del secondo ordine: soluzioni delle equazioni omogenee a coefficienti costanti; ricerca della soluzione particolare di delle equazioni a coefficienti costanti e non omogenee per alcune classi di termini noti.
   - ◦ *Esempi di equazioni differenziali tratti dalla fisica: equazione di decadimento, equazione dell'oscillatore armonico e dell'oscillatore armonico smorzato.*

Seconda parte: Analisi.

6. Basi di teoria degli insiemi.
   - ◦ Prodotto di due insiemi. Le funzioni $f : A \to B$ intese come grafici; caratterizzazione dei sottoinsiemi di $A \times B$ che sono grafici. L'insieme A^B delle funzioni da B ad A; l'insieme delle parti (sottoinsiemi) di un dato insieme.
   - ◦ Numeri naturali, interi e razionali. Numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite. *I numeri razionali corrispondono ai numeri reali con espansione decimale finita o periodica.*
   - ◦ Insiemi finiti e insiemi infiniti; insiemi numerabili e più che numerabili; insiemi con uguale cardinalità.
   - ◦ L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è un insieme numerabile; il prodotto di una famiglia finita di insiemi numerabili è un insieme numerabile. I numeri interi, razionali e algebrici sono numerabili. I numeri reali sono più che numerabili. *Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein (senza dimostrazione).*

7. Completezza dei numeri reali
   - ◦ I numeri reali estesi.
   - ◦ Definizione di estremo superiore e inferiore per un insieme qualunque di numeri reali (o di numeri reali estesi). Completezza dei numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite.
   - ◦ *Insiemi (totalmente) ordinati, definizione di massimo e minimo di un insieme, definizione di estremo superiore ed inferiore, definizione di completezza. Caratterizzazione dei numeri reali come campo ordinato e completo (senza dimostrazione).*

8. Successioni di numeri reali
   - ◦ Definizione di successione di numeri reali e di sottosuccessione. Definizione di limite di una successione; possibili comportamenti di una successione.
   - ◦ Le successioni monotone hanno limite.
   - ◦ Una successione converge ad un limite finito se e solo se è una successione di Cauchy.
   - ◦ Teorema di Bolzano-Weierstrass (ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente).
   - ◦ Successioni definite per ricorrenza. Risoluzione esplicita nel caso di ricorrenze lineari.

9. Funzioni continue
   - ◦ Rivisitazione della definizione continuità e di limite in termini di intorni.
   - ◦ Caratterizzazione della continuità e del limite in termini di successioni.

- Teorema di esistenza degli zeri (teorema dei valori intermedi). Calcolo approssimato degli zeri.
- Teorema di Weierstrass (esistenza dei punti di massimo e minimo). Giustificazione dell'algoritmo per la ricerca di massimi e minimi visto nella prima parte del corso.

10. Derivate
    - Rivisitazione della definizione di derivata. Caratterizzazione della derivabilità in termini di sviluppo di Taylor al primo ordine. Dimostrazione dei teoremi chiave sul calcolo delle derivate: derivata della somma, del prodotto, della funzione composta e della funzione inversa.
    - La derivata si annulla nei punti di massimo/minimo locale interni al dominio. Teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange.
    - Uso dei teoremi di Cauchy e Lagrange per dimostrare alcuni risultati enunciati in precedenza: caratterizzazione delle funzioni monotone in termini segno della derivata; caratterizzazione delle funzioni convesse/concave in termini di monotonia della derivata (e di segno della derivata seconda); teorema di de L'Hôpital.
    - Teorema dello sviluppo di Taylor: rappresentazione del resto in forma di Lagrange e in forma integrale.

11. Integrale secondo Riemann
    - Funzioni uniformemente continue. Le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono uniformemente continue.
    - Definizione di integrale secondo Riemann. Le funzioni continue sono integrabili secondo Riemann; stima dell'errore nell'approssimazione dell'integrale con somme di Riemann.
    - *Altre classi di funzioni integrabili secondo Riemann (senza dimostrazioni). Esempi di funzioni non integrabili secondo Riemann.*
    - Definizione di primitiva di una funzione continua; esistenza di una primitiva e teorema fondamentale del calcolo integrale.

12. Integrali impropri
    - Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
    - Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
    - Integrali impropri non semplici.

13. Serie numeriche
    - Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Esempio: la serie geometrica.
    - Criterio del confronto serie-integrale; serie armonica generalizzata; stima integrale della coda di una serie.
    - Criteri per determinare il comportamento di una serie: confronto e confronto asintotico (per serie a termini positivi), convergenza assoluta (per serie a segno variabile), radice, rapporto.
    - Teorema di Leibniz per serie a segni alterni.
    - *Formula di Stirling (con dimostrazione parziale).*

14. Serie di potenze
    - Serie di potenze: raggio di convergenza e comportamento. Formula alternativa per il calcolo del raggio di convergenza. *Derivata di una serie di potenze (senza dimostrazione).*
    - Convergenza della serie di Taylor di alcune funzioni elementari: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$, $\log(1+x)$. Rappresentazione del numero e come serie. Definizione di e^z con z numero complesso e dimostrazione della formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. *Rappresentazione di $\pi/4$ come serie.*

15. Equazioni differenziali lineari

- Equazioni differenziali lineari di ordine qualunque. Teorema di esistenza e unicità (senza dimostrazione) e struttura dell'insieme delle soluzioni.
- Risoluzione delle equazioni omogenee a coefficienti costanti. Calcolo della soluzione particolare di un'equazione a coefficienti costanti non omogenea con il metodo degli annichilatori.

T E S T I

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $\log(x^2/2^x)$ nel punto di ascissa $x = 1$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $(\sin x - x)(1 + \log x) = O(x^a)$ quando $x \to 0^+$.

3. Calcolare a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x + x^2) - 1}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log^2 x}{\log(\log x)}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(\exp(x^2 + x^3))$.

4. Trovare il valore massimo/minimo di $\exp(x^3 - 3x + 1)$ relativamente alla semiretta $x \geq 0$ (se non esistono specificarlo e calcolare invece l'estremo superiore/inferiore dei valori).

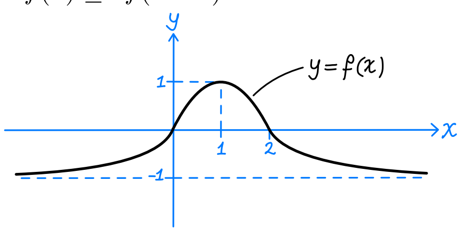
5. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in $x = 0$ della funzione $\dfrac{1}{1 - x^3 + x^6}$.

6. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 2x \exp(2x^2)\, dx$.

7. Calcolare la distanza percorsa tra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$ da un punto P che si muove con legge oraria $P(t) := \big(e^t \cos(2t), e^t \sin(2t)\big)$.

8. Determinare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^t x^3$ tale che $x(0) = -1$.

9. Detta $f(x)$ la funzione il cui grafico è disegnato sotto, disegnare il grafico di $2f(1-x)$ e risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \leq 2f(1 - x)$.



Seconda parte (prima variante)

1. a) Dato $a > 0$, risolvere l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8 - 4e^{2t} \,. \qquad (*)$$
b) Per quali $a > 0$ vale che *ogni* soluzione $x(t)$ di (*) soddisfa $x(t) = o(e^{3t})$ per $t \to +\infty$?

2. a) Per ogni $a \geq 0$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$x^6 = a(x-1)^2 \qquad (*)$$
b) Per ogni $a \geq 0$ indico con $x(a)$ la più grande soluzione di (*). Disegnare il grafico della funzione $x(a)$, specificando l'insieme di definizione, i punti di discontinuità e i limiti significativi.
c) Trovare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

3. Dato $a > 1$, indichiamo con E_a l'insieme dei punti (x, y) nel piano tali che
$$|x|^a + |y|^a \leq 1 \,.$$
a) Fare un disegno approssimativo di E_4, discutendone anche la convessità.
b) Trovare la più piccola circonferenza centrata nell'origine che contiene E_4, e la più grande che è contenuta in E_4.
c) Dimostrare che E_a "cresce" al crescere di a.
d) Disegnare il "limite" di E_a per $a \to +\infty$.

4. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con parte principale ax^b per $x \to +\infty$ (con $b > 0$ e $a \neq 0$), consideriamo la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$g(x) := \int_{x^2}^{x^2+x} f(t)\, dt \,.$$
Trovare la parte principale di $g(x)$ per $x \to +\infty$. [*Suggerimento: iniziare dal caso* $f(x) := x^b$.]

5. Consideriamo due cilindri infiniti C_1 e C_2 di raggio 1 con assi che si intersecano ortogonalmente. Calcolare il volume dell'intersezione $V := C_1 \cap C_2$.
[*Può essere utile scegliere degli assi concreti e descrivere* V *in termini di disequazioni.*]

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare le soluzioni x con $0 \le x \le \pi$ della disequazione $2\cos(2x) \ge \sqrt{3}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^{\log x}$; b) $\log\left(\dfrac{x^2\, 2^x}{(x+1)^3}\right)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{2^x} + \frac{1}{x^2}}_{a}\,, \quad \underbrace{x^4 + \log x}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{2x^4}{1-\log x}}_{c}\,, \quad \underbrace{\frac{x+1}{x^4+1}}_{d}\,.$$

4. Scrivere il polinomio di Taylor all'ordine 6 di $f(x) := \log(1 + 2x^3 + x^6)$.

5. Dire per quali $a > 0$ la funzione $f(x) := \exp(1 - ax^2)$ è concava nell'intervallo $-1 \le x \le 2$.

6. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int (9x^2 - 1)\log x\, dx$.

7. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) = \exp(at^2)$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} - (1 + t^2)x = 0$?

8. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 4t^3 x = 2t^3 \exp(2t^4)$ tale che $x(0) = 0$.

9. a) Disegnare i grafici delle funzioni $f_1(x) := (x+1)^{-2}$ e $f_2(x) := \sqrt{2-x}$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f_1(x) \le y \le f_2(x)$.

Seconda parte (prima variante)

1. Consideriamo i triangoli delimitati dagli assi cartesiani e dalla retta tangente al grafico della funzione e^{-x} in un punto di ascissa positiva. Dire se tra questi triangoli ne esistono uno di area massima ed uno di area minima, e in caso affermativo determinarli.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{\cos(-2x^2 + ax^4)} - 1$$
a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$, indicata con $g(x)$.
b) Determinare la parte principale di $f(x) - g(x)$ per $x \to 0$.

3. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $y^2 \leq x^2 - x^4$, e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.
a) Tracciare un disegno approssimativo di A e calcolarne l'area.
b) Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

Prima parte (prima variante)

1. Calcolare a) $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^2)}$; b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2^x}{x^2 - x^6}$; c) $\lim_{x\to 1^+} \exp(-1/\log x)$.

2. Calcolare il polinomio di Taylor all'ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := \cos(2x - x^2)$.

3. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 8t$.

4. Trovare la successione (x_n) tale che $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ per $n = 0, 1, 2, \dots$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-ax} dx$ è finito.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^a + n^{2a}}$ è finita.

7. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n \log n} + 1}$.

8. Consideriamo un punto P che si muove con legge oraria $P(t) = \frac{1}{t}(\cos t, \sin t)$. Scrivere il modulo della velocità e dire se la distanza L percorsa dall'istante $t = 1$ all'istante $t = +\infty$ è finita o infinita.

9. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) del piano tali che $\dfrac{1}{(|x| - 1)^2} \leq y \leq x^2 + 2$.

SECONDA PARTE

1. Dato $a > 0$, consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|x|^{4a} \leq y \leq (x^4 + 1)^a$, ed indichiamo con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.

   a) Dire per quali a l'area di A è finita.

   b) Dire per quali a il volume di V è finito.

2. Consideriamo una successione (x_n) che soddisfa l'equazione ricorsiva $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n}$. Discutere il comportamento di (x_n) al variare di $x_0 \in [0, 1]$.

3. Consideriamo la serie di potenze
$$f(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{4^n(n^2 - n)} \,. \tag{*}$$

   a) Determinare il raggio di convergenza R e discutere il comportamento per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   b) Calcolare il valore $f(x)$ per $-R < x < R$. [*Suggerimento: calcolare* $f''(x)$.]

4. Consideriamo una funzione iniettiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e una successione di numeri reali (x_m).

   a) Dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(n) = \infty$.

   b) Dimostrare che se $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = L$ per qualche $L \in \mathbb{R}$, allora $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\sigma(n)} = L$.

   c) Caratterizzare le funzioni σ per cui vale anche l'implicazione opposta in b).

5. Consideriamo un insieme X ed una successione di funzioni $f_n : X \to [0, 1]$ con $n = 1, 2, \dots$.

   a) Dimostrare che se X è finito esiste una sottosuccessione (n_k) tale che la successione di numeri reali $\big(f_{n_k}(x)\big)$ converge per ogni $x \in X$.

   b) Dimostrare che questo risultato vale anche se X è numerabile.

   c) Far vedere che questo risultato non vale per X qualunque.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 in 0 della funzione $f(x) := \sqrt{4 + x^2 - x^4}$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(x^2) + ax^2$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\log\left(2^x x^{-2}\right)}_{a}\ , \quad \underbrace{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{1+2^x}}_{b}\ , \quad \underbrace{\frac{4x}{(\log x)^2 + 1}}_{c}\ , \quad \underbrace{\frac{1}{\log x - x^3}}_{d}\ .$$

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x^2 + x^a}{(\cos x)^{2a}}\, dx$ è finito.

6. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 - n^2}{2^n - 1} x^{2n}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1 + 4x^2)\sin t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. In quale classe di funzioni conviene cercare una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare $D^4 x - x = te^{-t}$?

9. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{|x| + 2} \le (1 - x)^3$.

SECONDA PARTE

1. Siano dati $X \subset \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Come visto a lezione, f è continua in $\bar{x}$ se
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - \bar{x}| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon. \tag{C1}$$
Consideriamo adesso la seguente variante dell'affermazione (C1):
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - \bar{x}| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon. \tag{C2}$$
Dimostrare che (C1) e (C2) sono equivalenti.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, consideriamo l'equazione differenziale
$$D^3x - D^2x + aDx - ax = e^t + 1\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale dell'equazione (*).
b) determinare gli a tali che tutte le soluzioni di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := (\cos x)^{2x} - 1$.
b) Dato $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^3$.

4. Indichiamo con S_N le somme parziali della serie
$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n}\,.$$
a) Trovare N affinché S_N approssimi S con errore inferiore a 10^{-3}.
b) Calcolare il valore esatto di S.
[*Suggerimento per b): considerare la serie di potenze* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.]

5. Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che
$$\int_1^{+\infty} |f'(x)|\, dx < +\infty\,. \tag{1}$$
Dimostrare che:
a) l'integrale improprio $I := \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ esiste se e solo se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\, dx$.[1]
b) Dimostrare che la serie $S := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ si comporta come l'integrale improprio I.[2]
[*Suggerimento per b): porre* $a_n := \int_n^{n+1} f(x)\, dx - f(n)$ *e dimostrare che* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$.]

[1] Si intende che in questo limite la variabile n è *intero*.
[2] Questa è una variante del teorema di confronto serie–integrale che si applica anche a funzioni f non decrescenti.

Prima parte (prima variante)

1. Trovare $r > 0$ ed $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $\sin x + \cos x = r \sin(x + \alpha)$.

2. Determinare l'inversa della funzione $f(x) := x^2 - x$ ristretta alla semiretta $x \leq \frac{1}{2}$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 della funzione $f(x) := \sqrt{1 - 2x^2 - x^4}$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $\dfrac{x^3 + 1}{\log(x^4 + 1)} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$

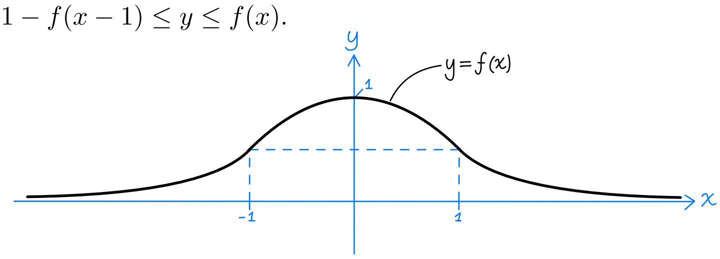
5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_2^{3^x} \frac{dt}{1 + t^8}$.

6. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $1 \leq x \leq 2$ e $(x + 1)^{-1/2} \leq y \leq x^{-1/2}$. Calcolare l'area di A.

7. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2x = 2t$.

8. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n^2 + 1)^a - n^{2a}\right]$ converge ad un numero finito.

9. Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è riportato nella figura sotto. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $1 - f(x - 1) \leq y \leq f(x)$.



SECONDA PARTE

1. Dato $a > 0$, consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $|x|^{4a} \leq y \leq (x^4 + 1)^a$, e indichiamo con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse y.

   a) Dire per quali a l'area di A è finita.

   b) Dire per quali a il volume di V è finito.

2. Dire se esistono il massimo e il minimo di $\dfrac{n^2 - 6n + 8}{e^n}$ al variare di $n = 1, 2, \ldots$ e in caso affermativo calcolarli.

3. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$2 \arctan x + \frac{1}{x} = a\,, \tag{1}$$
   e indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni (se ne esiste almeno una).

   a) Discutere il numero di soluzioni dell'equazione (1) al variare di $a \in \mathbb{R}$.

   b) Specificare il dominio, i punti di discontinuità e i limiti significativi della funzione $a \mapsto x(a)$, e disegnarne il grafico.

   c) Determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to +\infty$.

4. a) Dimostrare che l'integrale superiore è subadditivo, cioè che date due funzioni limitate f, g sull'intervallo $[a, b]$, allora
$$\int_a^{*b} f(x)\, dx + \int_a^{*b} g(x)\, dx \geq \int_a^{*b} f(x) + g(x)\, dx\,. \tag{2}$$

   b) Far vedere con un esempio che la disuguaglianza in (5) può essere stretta.

   c) Dimostrare che la disuguaglianza in (5) è un'uguaglianza se f è continua.

5. Dato $\bar{x} \in \mathbb{R}$, caratterizzare le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni successione $(x_n) \subset \mathbb{R}$ con $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$ vale $\limsup\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$.

Prima parte (prima variante)

1. Aggiungere l'ipotesi mancante nel seguente enunciato: *Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua; allora f ammette un valore minimo.*

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\log(1+x)}{\log x}$, b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{4\log(1+x^2) - \log(1+4x^2)}{x^4}$, c) $\lim_{x \to +\infty} e^{-x+\sin x}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x^3 + ax^2 + x$ è crescente su $\mathbb{R}$.

4. Determinare l'immagine della funzione $f(x) := x^4 e^{-x^2}$.

5. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{2x^3+4}{x^2-1}\,dx$.

6. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $|y| \le \dfrac{4}{1+4x^2}$. Calcolare l'area di A.

7. Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n\, x^{n^2+1}$.

8. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \tan x$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = -\frac{\pi}{6}$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $|x^3 + 1| \le \sqrt{2 - x}$.

Seconda parte

1. a) Consideriamo un cono C con altezza h, base B e raggio di base r. Tra tutti i cilindri contenuti in C, e con base contenuta in B, trovare quello di volume massimo. (Sia il cono C che i cilindri sono circolari e retti.)

   b) Rispondere alla stessa domanda quando C è cono circolare ma non necessariamente retto. [*Detto P il piano che contiene la base B e detta p la proiezione ortogonale del vertice del cono su P , conviene distinguere il caso in cui p appartiene a B e il caso in cui non.*]

2. Dati $a < b < c$ ed una funzione $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ limitata, dimostrare che
$$ {}^{*}\!\!\int_a^c f(x)\,dx = {}^{*}\!\!\int_a^b f(x)\,dx + {}^{*}\!\!\int_b^c f(x)\,dx $$
   dove ${}^{*}\!\!\int$ indica come al solito l'integrale di Riemann superiore.[1]

3. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale:
$$ t^2\ddot{x} + at\dot{x} + bx = 0\,. \qquad (*) $$
   Trovare la soluzione generale di (*) nei seguenti casi: a) $a = 2$, $b = -6$; b) $a = b = 5$.
   [*Suggerimento: cercare soluzioni della forma t^λ.*]

4. Consideriamo la funzione
$$ f(x) := \int_x^{2x^2} \exp(t^2)\,dt\,. $$
   a) Trovare l'insieme di definizione di f, il segno , ed i limiti significativi.

   b) Scrivere f' e lo sviluppo di Taylor all'ordine 5 di f in 0.

   c) Scrivere f'' e dimostrare che f è una funzione convessa.

   d) Trovare una funzione g della forma $g(x) = ax^b \exp(cx^d)$ tale che $g(x) \sim f(x)$ per $x \to +\infty$.

5. Data una successione (a_n) di numeri strettamente positivi, consideriamo la serie a segni alterni
$$ S := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n\,. $$
   a) Dimostrare che se la successione (a_n) è crescente allora la serie S non esiste.

   b) Far vedere che la conclusione al punto a) non vale se si sostituisce l'ipotesi che (a_n) è crescente con l'ipotesi che (a_n) converge ad un numero strettamente positivo.

[1] Ovviamente vale anche l'analoga uguaglianza per gli integrali inferiori.

Prima parte (prima variante)

1. Sia $f(x) := xe^{-x/2}$. Determinare l'immagine secondo f della semiretta $[1, +\infty)$.

2. Dire per quali $a > 0$ la funzione $f(x) := (x-1)\, e^{ax}$ risulta crescente sulla semiretta $x \geq 0$.

3. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 in 0 di $f(x) := (1+x^2)\log(1-2x^2+x^4)$.

4. Determinare la successione (x_n) tale che $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_{n+2} = 8\,x_{n+1} - 15\,x_n$ per $n = 0, 1, \dots$

5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2tx = 4t^3$ tale che $x(0) = 0$.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

7. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^a)^{2a}}$ è finito.

8. Trovare un'equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti (reali) ed omogenea che abbia come soluzione la funzione $x(t) = t(\cos t + e^{2t})$.

9. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\displaystyle\frac{1}{1+|x|} \leq y \leq \log(1-x)$.

SECONDA PARTE (prima variante)

1. Sia (a_n) una successione di numeri reali e $L \in \mathbb{R}$. Dimostrare che sono fatti equivalenti:
   (i) (a_n) converge a L per $n \to +\infty$;
   (ii) esiste una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che a) $g(x) \to 0$ per $x \to 0$ e b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $|a_n - L| \leq g(\varepsilon)$ per $n \geq n_\varepsilon$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, poniamo $x_n := \exp(n^a) - \exp(\sin(n^a))$ per $n = 1, 2, \dots$
   a) Discutere il limite della successione (x_n) per $n \to +\infty$;
   b) Discutere il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

3. Sia T la traiettoria di un punto nel piano che si muove con legge oraria $P(t) = (\cos t, 2 \sin t \cos t)$ per $t \in \mathbb{R}$, sia A la parte di piano delimitata dalla curva T e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.
   a) Disegnare la curva T e l'insieme A.
   b) Determinare la circonferenza circoscritta ad A.
   c) Calcolare l'area di A e il volume di V.

4. Per ogni $a > 0$, sia T_a il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, e^{-a})$, e sia A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a > 0$.
   a) A è delimitato dagli assi e dal grafico di un'opportuna funzione f; determinare tale f.
   b) Dire se l'area di A è finita oppure no.

5. Siano X, Y sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, e sia $f : X \to Y$ una funzione continua e strettamente crescente con inversa $g : Y \to X$.
   a) Dimostrare che se X è un intervallo allora g è continua.
   b) Dare un esempio di X (non intervallo), Y e f tali che g non è continua.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Convertire le coordinate cartesiane (x, y) in coordinate polari (ρ, α) e viceversa, scegliendo l'angolo α nell'intervallo $[0, 2\pi)$: a) $x = -1$, $y = 1$; b) $x = 0$, $y = -3$; c) $\rho = 4$, $\alpha = \frac{11}{6}\pi$.

2. Dire per quali $a > 0$ vale che $(1 + 2x)^a + x^{2a} \log\log x = O(x^2)$ per $x \to +\infty$.

3. Dare un esempio di successione (x_n) tale che $x_n \to +\infty$ e $x_{n+1} - x_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp\big(ax^2 + (a^2 - 3)x\big)$ ha un punto di minimo assoluto in $x = -1$.

5. Il punto P si muovo con legge oraria $P = \big((9t^2 - 1)\cos(3t);\, (9t^2 - 1)\sin(3t)\big)$. Calcolare il modulo della velocità di P e le distanza d percorsa tra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$.

6. Dire per quale $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + x^2)^a - x^{2a}\, dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = \sin t$.

8. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n + 1}$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $(x - 1)^{-2} \le |e^{-x} - 1|$

Seconda parte

1. Sono dati X sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $\bar{x}$ punto di accumulazione di X, e $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ funzioni tali che (i) $f_1(x) \to 0$ per $x \to \bar{x}$; (ii) f_2 è limitata in un intorno di $\bar{x}$.
   a) Dimostrare che $f_1(x) \cdot f_2(x) \to 0$ per $x \to \bar{x}$.
   b) Far vedere che l'enunciato a) non vale se si rimuove l'ipotesi (ii).
   c) Cosa succede se invece di (ii) si assume solo che (ii') $|f_2(x)|$ non tende a $+\infty$ per $x \to \bar{x}$?

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = e^{-t} + e^t \,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*).
   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni di (*) soddisfano $x(t) = o(e^{4t})$ per $t \to +\infty$.

3. Dato $a > 0$, sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $f(x) \leq y \leq 1$, dove
$$f(x) := \big(\cos(x^{-a})\big)^x \,.$$
   a) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Dire per quali $a > 0$ l'insieme A ha area finita.
   c) Dire per quali $a > 0$ il solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse delle x ha volume finito.

4. a) Trovare la più grande costante m tale che $\dfrac{mx}{1+x^2} \leq \arctan x$ per ogni $x \geq 0$.[1]
   b) Stimare la più piccola costante r tale che $\arctan x \leq \dfrac{rx}{1+x}$ per ogni $x \geq 0$.[2]

5. Discutere il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^a)}{n}$ al variare di $a \in (-\infty, 1)$.

[1] L'esistenza di questa costante ottimale può essere data per buona; lo stesso vale per la costante nel punto b).
[2] "Stimare" significa dare una maggiorazione ed una minorazione della costante ottimale (possibilmente vicine). Credo che determinare il valore esatto della costante non sia possibile.

TESTI E SOLUZIONI

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $\log(x^2/2^x)$ nel punto di ascissa $x = 1$.
   SOLUZIONE. $y = (2 - \log 2)x - 2$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $(\sin x - x)(1 + \log x) = O(x^a)$ quando $x \to 0^+$.
   SOLUZIONE. $a < 3$.

3. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x + x^2) - 1}{x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log^2 x}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \cos(\exp(x^2 + x^3))$.
   SOLUZIONE. a) non esiste; b) $+\infty$; c) non esiste.

4. Trovare il valore massimo/minimo di $\exp(x^3 - 3x + 1)$ relativamente alla semiretta $x \geq 0$ (se non esistono specificarlo e calcolare invece l'estremo superiore/inferiore dei valori).
   SOLUZIONE. Il valore minimo è e^{-1}. Il valore massimo non esiste e l'estremo superiore è $+\infty$.

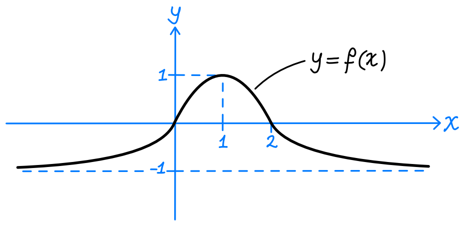
5. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in $x = 0$ della funzione $\dfrac{1}{1 - x^3 + x^6}$.
   SOLUZIONE. $P(x) = 1 + x^3$.

6. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 2x \exp(2x^2)\, dx$.
   SOLUZIONE. Usando il cambio di variabili $y = 2x^2$ ottengo
   $$\int 2x \exp(2x^2)\, dx = \int \tfrac{1}{2} e^y\, dy = \tfrac{1}{2} e^y + c = \tfrac{1}{2} \exp(2x^2) + c\,.$$

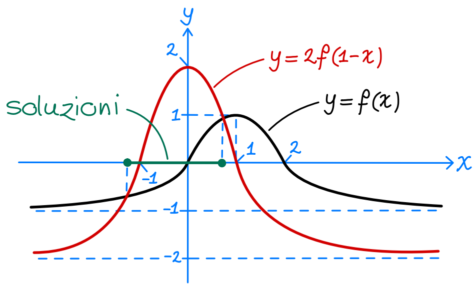
7. Calcolare la distanza percorsa tra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$ da un punto P che si muove con legge oraria $P(t) := \big(e^t \cos(2t), e^t \sin(2t)\big)$.
   SOLUZIONE. La velocità scalare è $v(t) = \sqrt{5}\, e^t$; la distanza percorsa è $d = \sqrt{5}(e - 1)$.

8. Determinare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^t x^3$ tale che $x(0) = -1$.
   SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili $x(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{3 - 2e^t}}$.

9. Detta $f(x)$ la funzione il cui grafico è disegnato sotto, disegnare il grafico di $2f(1-x)$ e risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \leq 2f(1 - x)$.



SOLUZIONE.



Seconda parte (prima variante)

1 a) Dato $a > 0$, risolvere l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8 - 4e^{2t}\,. \qquad (*)$$

b) Per quali $a > 0$ vale che *ogni* soluzione $x(t)$ di (*) soddisfa $x(t) = o(e^{3t})$ per $t \to +\infty$?

Soluzione. a) Per quanto visto a lezione, la soluzione generale dell'equazione (*) si scrive come

$$x = x_{\rm om} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

dove

- $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 0$;
- $\tilde{x}_1$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8$;
- $\tilde{x}_2$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = -4e^{2t}$.

Calcolo di $x_{\rm om}$. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 2a\lambda + 4 = 0$, ed ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4}\,.$$

Pertanto, distinguendo diversi casi a seconda che tali soluzioni siano reali o complesse, cioè a seconda del segno di $a^2 - 4$:

$$x_{\rm om}(t) = \begin{cases} (c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t))e^{at} & \text{se } 0 < a < 2, \\ (c_1 + c_2 t)e^{2t} & \text{se } a = 2, \\ c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{se } a > 2, \end{cases} \qquad (1)$$

dove $\omega := \sqrt{4 - a^2}$ e c_1, c_2 sono costanti reali arbitrarie.

Calcolo di $\tilde{x}_1$. Poiché il termine noto dell'equazione $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8$ è una costante, la soluzione $\tilde{x}_1$ va cercata tra le costanti. Si vede facilmente (anche a occhio) che la soluzione cercata è

$$\tilde{x}_1(t) = 2\,. \qquad (2)$$

Calcolo di $\tilde{x}_2$*, prima parte.* Per cominciare cerco una soluzione della forma $\tilde{x}_2 = ce^{2t}$. Sostituendo questa espressione al posto di x nell'equazione $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = -4e^{2t}$ arrivo all'identità $c(8-4a)e^{2t} = -4e^{2t}$, che è soddisfatta per ogni t se $c = \frac{1}{a-2}$ (e necessariamente $a \neq 2$). Dunque

$$\tilde{x}_2(t) = \tfrac{1}{a-2} e^{2t} \quad \text{per } a \neq 2. \qquad (3)$$

Calcolo di $\tilde{x}_2$*, seconda parte.* La formula precedente non ha senso per $a = 2$, e in effetti in questo caso il coefficiente 2 che appare nel termine noto $-4e^{2t}$ coincide con λ_1 e λ_2, e quindi la soluzione particolare va cercata tra le funzioni della forma $\tilde{x}_2 = ct^2 e^{2t}$. Sostituendo questa espressione al posto di x nell'equazione $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = -4e^{2t}$ arrivo all'identità $2ce^{2t} = -4e^{2t}$, che è soddisfatta per ogni t se $c = -2$. Dunque

$$\tilde{x}_2(t) = -2t^2 e^{2t} \quad \text{per } a = 2. \qquad (4)$$

b) Tenendo conto che la soluzione dell'equazione (*) si scrive come $x = x_{\rm om} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$, e che $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ sono trascurabili rispetto a e^{3t} per $t \to +\infty$ (vedere le formule (2), (3) e (4)), posso riformulare la domanda come segue: dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che

$$x_{\rm om} = o(e^{3t}) \text{ per } t \to +\infty \text{ e per ogni } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \qquad (5)$$

dove c_1, c_2 sono le costanti che appaiono nella formula (1) per $x_{\rm om}$.
Usando questa formula si vede subito che l'affermazione (5) è sempre vera per $0 < a \leq 2$, mentre nel caso $a > 2$ è vera se (e solo se) $\lambda_1, \lambda_2 < 3$, vale a dire se

$$a + \sqrt{a^2 - 4} < 3 \quad \text{cioè} \quad a < \tfrac{13}{6}\,.$$

Riassumendo, i valori di a cercati sono $0 < a < \frac{13}{6}$.

2 a) Per ogni $a \geq 0$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^6 = a(x-1)^2 \qquad (*)$$

b) Per ogni $a \geq 0$ indico con $x(a)$ la più grande soluzione di (*). Disegnare il grafico della funzione $x(a)$, specificando l'insieme di definizione, i punti di discontinuità e i limiti significativi.

c) Trovare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

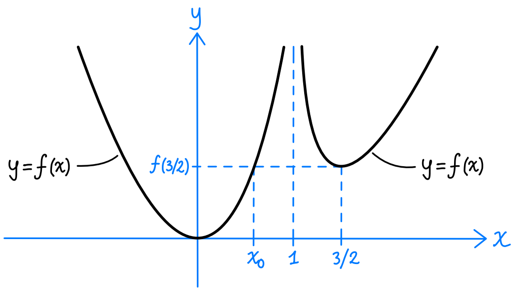
<u>Soluzione</u>. a) Osservo che $x = 1$ non è mai una soluzione dell'equazione (*), e quindi posso moltiplicare l'equazione per $(x-1)^{-2}$ ottenendo

$$\underbrace{x^6(x-1)^{-2}}_{f(x)} = a\,.$$

Per determinare il numero di soluzioni (di questa equazione o di quella originale) disegno il grafico di f.
Osservo per cominciare che $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 1$, è strettamente positiva per $x \neq 0$ e si annulla per $x = 0$, e tende a $+\infty$ sia per $x \to 1$ che per $x \to \pm\infty$.
Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = x^5(x-1)^{-3}(4x-6)$$

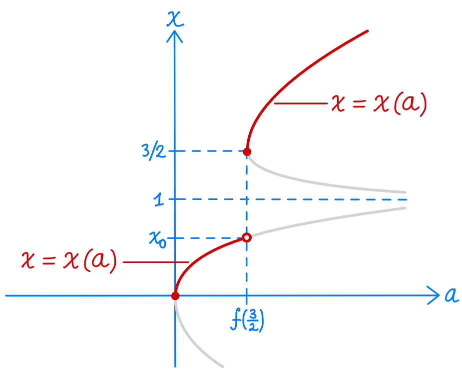
ottengo che la funzione è strettamente decrescente negli intervalli $x \leq 0$ e $1 < x < \frac{3}{2}$, ed è strettamente crescente negli intervalli $0 \leq x < 1$ e $x \geq \frac{3}{2}$.
Usando queste informazioni ottengo il grafico riportato sotto (le proporzioni non sono rispettate):



da cui si vede che l'equazione (*) ha

- 1 soluzione per $a = 0$,
- 2 soluzioni per $0 < a < a_0 := f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3^6}{2^4} \simeq 45{,}56$;
- 3 soluzioni per $a = a_0$ (indico con x_0 quella in $(0,1)$);
- 4 soluzioni per $a > a_0$.

b) Per quanto visto al punto precedente l'equazione (*) ha almeno una soluzione per ogni $a \geq 0$, e quindi la soluzione $x(a)$ è ben definita per ogni $a \geq 0$. Partendo dal grafico di $f(x)$ disegnato sopra ottengo il grafico di $x(a)$ riportato qui sotto:



Da questo grafico si vede chiaramente che

- $x(a)$ è discontinua a sinistra in $a_0 := f\left(\frac{3}{2}\right)$ (ma è continua a destra);
- $x(a)$ tende a x_0 per $a \to a_0^-$, dove x_0 è definita nello schema alla fine del punto b);
- $x(a)$ tende a $+\infty$ per $a \to +\infty$.

c) Il fatto che $x(a)$ risolve l'equazione (*) significa che $f(x(a)) = a$, e usando il fatto che $f(x) \sim x^6$ per $x \to 0$ e che $x(a) \to 0$ per $a \to 0$ ottengo

$$a = f(x(a)) \sim (x(a))^6 \quad \text{per } a \to 0^+,$$

ed elevando alla potenza 1/6 ottengo infine

$$a^{1/6} \sim x(a) \quad \text{per } a \to 0^+.$$

(In quest'ultimo passaggio ho usato che $(x^6)^{1/6} = x$ se $x \geq 0$, e che $x(a) \geq 0$ per ogni $a \geq 0$.)

3 Dato $a > 1$, indichiamo con E_a l'insieme dei punti (x, y) nel piano tali che

$$|x|^a + |y|^a \leq 1\,.$$

a) Fare un disegno approssimativo di E_4, discutendone anche la convessità.

b) Trovare la più piccola circonferenza centrata nell'origine che contiene E_4, e la più grande che è contenuta in E_4.

c) Dimostrare che E_a "cresce" al crescere di a.

d) Disegnare il "limite" di E_a per $a \to +\infty$.

SOLUZIONE. Scrivo E_a come l'insieme dei punti (x, y) tali che $-1 \leq x \leq 1$ e $-g_a(x) \leq y \leq g_a(x)$ dove ho posto

$$g_a(x) := (1 - |x|^a)^{1/a} \quad \text{per ogni } x \in [-1, 1].$$

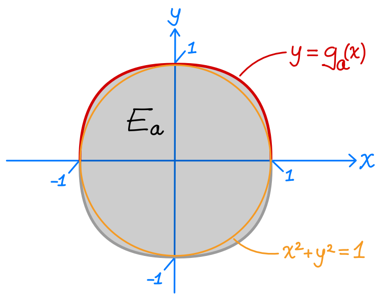
a) Per disegnare l'insieme E_a devo disegnare il grafico della funzione g_a. Osservo che questa funzione è continua, sempre positiva, e si annulla solo per $x = \pm 1$; inoltre è pari, e quindi mi limito a studiarla per $0 \leq x \leq 1$. In questo intervallo la derivata è

$$g_a'(x) = -x^{a-1}(1 - x^a)^{1/a-1}\,,$$

in particolare vale 0 in 0, vale $-\infty$ in 1, ed infine è sempre negativa, e quindi g_a è decrescente. Inoltre la derivata seconda

$$g_a''(x) = -(a - 1)\, x^{a-2}(1 - x^a)^{1/a-2}$$

è sempre negativa, e quindi g_a è concava. Usando queste informazioni ottengo il disegno qui riportato:



In particolare E_a è convesso.

b) Devo trovare il raggio R della più piccola circonferenza centrata nell'origine che contiene E_a (la circonferenza circoscritta) e il raggio r della più grande circonferenza centrata nell'origine e contenuta in E_a (la circonferenza inscritta).

Dato $x \in [0, 1]$ indico con $d(x)$ la distanza del punto del grafico di g_a di ascissa x dall'origine, vale a dire

$$d(x) := \sqrt{x^2 + g_a^2(x)} = \sqrt{x^2 + (1 - x^a)^{2/a}}\,,$$

ed osservo che r e R sono rispettivamente il valore minimo e il valore massimo di $d(x)$ relativamente all'intervallo $0 \leq x \leq 1$, e li posso trovare applicando la solita procedura per la ricerca dei valori massimi e minimi di una funzione.

Per semplificare i calcoli conviene tuttavia calcolare il valore minimo e il valore massimo del *quadrato* di $d(x)$ relativamente all'intervallo $0 \leq x \leq 1$. La derivata

$$\big(d^2(x)\big)' = \big(x^2 + (1 - x^a)^{2/a}\big)' = 2x - 2(1 - x^a)^{2/a-1}x^{a-1}$$

si annulla se e solo se $x = (1-x^a)^{2/a-1}x^{a-1}$; moltiplicando entrambi i termini di questa equazione per x^{1-a} ed elevandoli poi alla potenza $a/(2-a)$ ottengo $x^a = 1-x^a$, vale a dire $x = 2^{-1/a}$.
Confrontando infine i valori di $d^2(x)$ nei punti 0, 1 e $2^{-1/a}$ ottengo che per $a > 2$ (ed in particolare per $a = 4$) il punto di massimo è $2^{-1/a}$, mentre 0 e 1 sono i punti di minimo, e quindi

$$r = d(0) = 1\,, \quad R = d\big(2^{-1/a}\big) = 2^{1/2-1/a}\,.$$

In particolare per $a = 4$ si ha $r = 1$ e $R = \sqrt[4]{2}$.

c) Osservo per iniziare che i punti (x,y) appartenenti ad E_a per qualche a soddisfano $|x| \le 1$ e $|y| \le 1$. Tenendo conto di questa osservazione e del fatto che b^a è decrescente nella variabile a se $0 \le b \le 1$, ottengo che la quantità $|x|^a + |y|^a$ è decrescente in a.
In particolare, se $|x|^a + |y|^a \le 1$ per un certo a, allora $|x|^{\tilde a} + |y|^{\tilde a} \le 1$ per ogni $\tilde a \ge a$.
Questo significa che E_a è contenuto in $E_{\tilde a}$ per $\tilde a \ge a$, e cioè che E_a è crescente in a.

d) Poiché non è stato precisato cosa si debba intendere come limite di insiemi, questa domanda non ammette una risposta univoca (ma le differenze tra le risposte plausibili sono minimali).
Una possibilità consiste nel dire che il limite E_∞ è dato dai punti (x,y) tali che $-1 \le x \le 1$ e $-g_\infty(x) \le y \le g_\infty(x)$, dove $g_\infty(x)$ è il limite per $a \to +\infty$ di $g_a(x)$. Si vede che

$$g_\infty(x) := \lim_{a\to+\infty} g_a(x) = \lim_{a\to+\infty} \exp\big(\tfrac{1}{a}\log(1-x^a)\big) = \exp(0) = 1 \quad \text{per } -1 < x < 1,$$

mentre $g_\infty(\pm 1) = 0$, e quindi E_∞ è il quadrato formato dai punti (x,y) tali che $-1 < x < 1$ e $-1 \le y \le 1$, più i punti $(\pm 1, 0)$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. (i) Nella soluzione del punto a) scritta sopra ho dato per scontato che la concavità della funzione g_a implica la convessità dell'insieme E_a. Volendolo argomentare, osservo che la concavità di g_a implica (per definizione) la convessità del sottografico di g_a (che indico con S_a) e la convessità di $-g_a$, che a sua volta implica la convessità del sopragrafico di $-g_a$ (che indico con S'_a). Siccome E_a coincide con l'intersezione degli insiemi convessi S_a ed S'_a, è anch'esso convesso (si vede facilmente che l'intersezione di due insiemi convessi è convessa).

(ii) Riguardo al punto a), si può dimostrare che E_a è convesso direttamente: dati dunque $p_0 = (x_0, y_0)$ e $p_1 = (x_1, y_1)$ punti di E_a e $\lambda \in [0,1]$, devo far vedere che il punto

$$p_\lambda := (1-\lambda)p_0 + \lambda p_1 = \big(\underbrace{(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1}_{x_\lambda}, \underbrace{(1-\lambda)y_0 + \lambda y_1}_{y_\lambda}\big)$$

appartiene a E_a, e cioè che $|x_\lambda|^a + |y_\lambda|^a \le 1$. In effetti

$$\begin{aligned} |x_\lambda|^a + |y_\lambda|^a &= |(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1|^a + |(1-\lambda)y_0 + \lambda y_1|^a \\ &\le (1-\lambda)|x_0|^a + \lambda|x_1|^a + (1-\lambda)|y_0|^a + \lambda|y_1|^a \\ &= (1-\lambda)\big(|x_0|^a + |y_0|^a\big) + \lambda\big(|x_1|^a + |y_1|^a\big) \le (1-\lambda) + \lambda = 1 \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato per due volte che la funzione $|t|^a$ è convessa in t; nel penultimo ho usato il fatto che $p_0, p_1 \in E_a$ e quindi $|x_0|^a + |y_0|^a \le 1$ e $|x_1|^a + |y_1|^a \le 1$).

(iii) Per dimostrare il punto c) si può anche far vedere che $g_a(x)$ è crescente in a per ogni $x \in [0,1]$, cosa che segue dal fatto che la derivata di $g_a(x)$ rispetto alla variabile a è positiva. Infatti, indicando con D_a la derivazione rispetto ad a, si ha che

$$\begin{aligned} D_a\big[g_a(x)\big] = D_a\big[(1-x^a)^{1/a}\big] &= D_a\big[\exp\big(\tfrac{1}{a}\log(1-x^a)\big)\big] \\ &= \exp(\dots)\, D_a\big[\tfrac{1}{a}\log(1-x^a)\big] \\ &= \exp(\dots)\,\big[-\tfrac{1}{a^2}\log(1-x^a) + \tfrac{1}{a}\tfrac{-x^a\log x}{1-x^a}\big] \end{aligned}$$

ed è facile vedere che entrambi gli addendi tra le parentesi quadre nell'ultima riga sono positivi.

(iv) Come già detto, la domanda d) ammette risposte diverse a seconda di cosa si intende per limite di E_a per $a \to +\infty$.
Una possibilità è prendere la disequazione $|x|^a + |y|^a \le 1$ che definisce E_a, e passare al limite

per $a \to +\infty$ nel termine di sinistra. Siccome

$$h(x,y) := \lim_{a\to+\infty} |x|^a + |y|^a = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \text{ e } |y| < 1, \\ 1 & \text{se } |x| < 1 \text{ e } |y| = 1 \text{ oppure } |x| = 1 \text{ e } |y| < 1, \\ 2 & \text{se } |x| = |y| = 1, \\ +\infty & \text{se } |x| > 1 \text{ oppure } |y| > 1, \end{cases}$$

l'insieme dei punti che soddisfano $h(x,y) \le 1$ è dato dal quadrato dei punti (x,y) tali che $-1 \le x, y \le 1$ meno i vertici.

(v) Un'altra possibile risposta a il punto d) è questa: siccome gli insiemi E_a crescono con a, si prende come limite l'unione di tutti gli insiemi E_a con $a \ge 1$, e si mostra che quest'unione consiste dei punti (x,y) tali che $-1 < x, y < 1$ più i punti $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$.

$\boxed{4}$ Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con parte principale ax^b per $x \to +\infty$ (con $b > 0$ e $a \ne 0$), consideriamo la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) := \int_{x^2}^{x^2+x} f(t)\, dt\,.$$

Trovare la parte principale di $g(x)$ per $x \to +\infty$. [*Suggerimento: iniziare dal caso* $f(x) := x^b$.]

<u>SOLUZIONE</u>. Considero per cominciare la funzione

$$\bar g(x) := \int_{x^2}^{x^2+x} at^b\, dt = \frac{a}{b+1}\big[(x^2+x)^{b+1} - x^{2b+2}\big]\,,$$

ed osservo che, per $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \bar g(x) &= \frac{ax^{2b+2}}{b+1}\left[\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{b+1} - 1\right] \\ &= \frac{ax^{2b+2}}{b+1}\left[\frac{b+1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\right] = ax^{2b+1} + O(x^{2b}) \sim ax^{2b+1}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

(Nel terzo passaggio ho usato lo sviluppo $(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + O(y^2)$ con $\alpha := b+1$ e $y := \frac{1}{x}$.)

Dimostro ora che per una qualunque funzione f tale che $f(x) \sim ax^b$ per $x \to +\infty$ vale che

$$g(x) \sim \bar g(x) \quad \text{per } x \to +\infty. \tag{7}$$

quindi, grazie a (6), posso concludere che $g(x) \sim ax^{2b+1}$.

Osservo che l'ipotesi $f(t) \sim at^b$ significa che $f(t)/(at^b) \to 1$ per $t \to +\infty$, ovvero che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $m_\varepsilon \ge 0$ tale che $t \ge m_\varepsilon$ implica $|f(t)/(at^b) - 1| \le \varepsilon$.
Riscrivo quest'ultima disuguaglianza come

$$(1-\varepsilon)at^b \le f(t) \le (1+\varepsilon)at^b\,, \tag{8}$$

ed osservo che, preso $x \ge \sqrt{m_\varepsilon}$, le disuguaglianze in (8) valgono per ogni $t \ge x^2$, e integrandole da x^2 a $x^2 + x$ ottengo le disuguaglianze

$$(1-\varepsilon)\int_{x^2}^{x^2+x} at^b\, dt \le \int_{x^2}^{x^2+x} f(t)\, dt \le (1+\varepsilon)\int_{x^2}^{x^2+x} at^b\, dt\,,$$

che posso riscrivere come $(1-\varepsilon)\,\bar g(x) \le g(x) \le (1+\varepsilon)\,\bar g(x)$, ovvero come

$$\left|\frac{g(x)}{\bar g(x)} - 1\right| \le \varepsilon$$

Ho dunque dimostrato che il rapporto $g(x)/\bar g(x)$ tende ad 1 per $x \to +\infty$, vale a dire la (7).

<u>OSSERVAZIONI</u>. Un altro modo di dimostrare che $g(x) \sim ax^{2b+1}$ è questo: dall'ipotesi $f(t) \sim at^b$ per $t \to +\infty$ si ottiene la scomposizione $f(t) = at^b + o(t^b)$, da cui segue la scomposizione

$$g(x) = \bar g(x) + \int_{x^2}^{x^2+x} o(t^b)\, dt\,;$$

quindi si usa che $\bar{g}(x) \sim ax^{2b+1}$ (formula (6)) e che l'integrale è $o(x^{2b+1})$. Per dimostrare quest'ultima affermazione si parte dal fatto che, per la definizione di "o piccolo", per ogni $\varepsilon > 0$ vale $-\varepsilon t^b \leq o(t^b) \leq \varepsilon t^b$ per t sufficientemente grande.

5 Consideriamo due cilindri infiniti C_1 e C_2 di raggio 1 con assi che si intersecano ortogonalmente. Calcolare il volume dell'intersezione $V := C_1 \cap C_2$.
[*Può essere utile scegliere degli assi concreti e descrivere V in termini di disequazioni.*]

SOLUZIONE. Posso supporre che l'asse del cilindro C_1 coincida con l'asse delle x e quello di C_2 con l'asse delle y, e dunque

$$C_1 = \{(x,y,z) \colon y^2 + z^2 \leq 1\} = \left\{(x,y,z) \colon |z| \leq 1\,,\ |y| \leq \sqrt{1-z^2}\right\},$$
$$C_2 = \{(x,y,z) \colon x^2 + z^2 \leq 1\} = \left\{(x,y,z) \colon |z| \leq 1\,,\ |x| \leq \sqrt{1-z^2}\right\}.$$

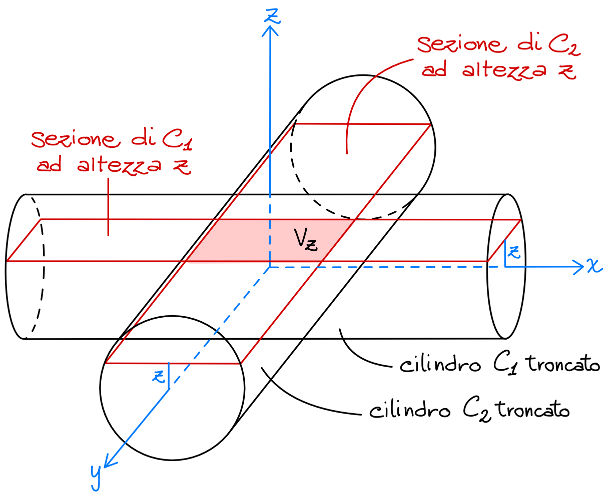
Quindi

$$V := C_1 \cap C_2 = \left\{(x,y,z) \colon |z| \leq 1\,,\ |x|, |y| \leq \sqrt{1-z^2}\right\},$$

e dunque la sezione di V ad altezza z è vuota se $|z| > 1$, mentre per $|z| \leq 1$ è data da

$$V_z = \left\{(x,y) \colon |x|, |y| \leq \sqrt{1-z^2}\right\}.$$

Da questa formula risulta chiaramente che V_z è un quadrato con centro nell'origine e lato uguale a $2\sqrt{1-z^2}$.



Pertanto l'area di V_z è $4(1-z^2)$ e di conseguenza il volume di V è

$$\text{volume}(V) = \int_{-1}^{1} \text{area}(V_z)\, dz = \int_{-1}^{1} 4(1-z^2)\, dz = \left| 4z - \frac{4}{3}z^3 \right|_{-1}^{1} = \frac{16}{3}\,.$$

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare le soluzioni x con $0 \leq x \leq \pi$ della disequazione $2\cos(2x) \geq \sqrt{3}$.
   SOLUZIONE. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{12}$ e $\frac{11\,\pi}{12} \leq x \leq \pi$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^{\log x}$; b) $\log\left(\dfrac{x^2\,2^x}{(x+1)^3}\right)$.
   SOLUZIONE. a) $\dfrac{2}{x}\log x \cdot x^{\log x}$; b) $\log 2 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x+1}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{2^x} + \frac{1}{x^2}}_{a}\,, \quad \underbrace{x^4 + \log x}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{2x^4}{1-\log x}}_{c}\,, \quad \underbrace{\frac{x+1}{x^4+1}}_{d}\,.$$
   SOLUZIONE. $d \ll a \ll c \ll b$.

4. Scrivere il polinomio di Taylor all'ordine 6 di $f(x) := \log(1 + 2x^3 + x^6)$.
   SOLUZIONE. $P_6(x) = 2x^3 - x^6$.

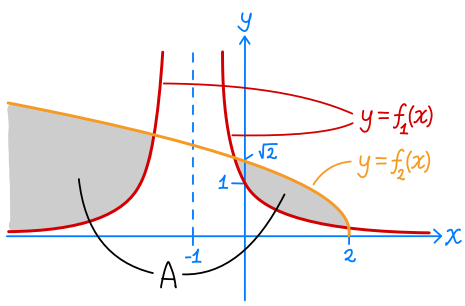
5. Dire per quali $a > 0$ la funzione $f(x) := \exp(1 - ax^2)$ è concava nell'intervallo $-1 \leq x \leq 2$.
   SOLUZIONE. Nell'intervallo in questione deve essere $f''(x) \leq 0$, vale a dire $4a^2x^2 \leq 2a$; tenendo conto che il valore massimo di x^2 nell'intervallo è 4 si ottiene $a \leq \frac{1}{8}$.

6. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int (9x^2 - 1)\log x\,dx$.
   SOLUZIONE. Integro per parti:
$$\int (9x^2-1)\log x\,dx = (3x^3 - x)\log x - \int 3x^2 - 1\,dx = (3x^3 - x)\log x - x^3 + x + c\,.$$

7. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) = \exp(at^2)$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} - (1+t^2)x = 0$?
   SOLUZIONE. Sostituendo questa $x(t)$ nell'equazione si ottiene l'identità $(4a^2-1)t^2 + 2a - 1 = 0$, che è soddisfatta per $a = \frac{1}{2}$.

8. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 4t^3x = 2t^3\exp(2t^4)$ tale che $x(0) = 0$.
   SOLUZIONE. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = \frac{1}{6}\exp(2t^4) - \frac{1}{6}\exp(-t^4)$.

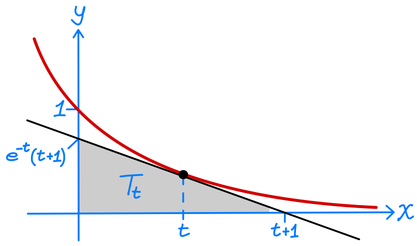
9. a) Disegnare i grafici delle funzioni $f_1(x) := (x+1)^{-2}$ e $f_2(x) := \sqrt{2-x}$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$.
   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

$\boxed{1}$ Consideriamo i triangoli delimitati dagli assi cartesiani e dalla retta tangente al grafico della funzione e^{-x} in un punto di ascissa positiva. Dire se tra questi triangoli ne esistono uno di area massima ed uno di area minima, e in caso affermativo determinarli.

SOLUZIONE. Per ogni $t \geq 0$, indico con T_t il triangolo delimitato dagli assi e dalla retta tangente al grafico della funzione e^{-x} nel punti di ascissa t.
Poiché questa retta ha equazione $y = e^{-t}(t + 1 - x)$, l'intersezione con l'asse delle x ha ascissa $t + 1$, mentre quella con l'asse delle y ha ordinata $e^{-t}(t + 1)$.



Di conseguenza l'area di T_t, che indico con $a(t)$, è data da

$$a(t) = \tfrac{1}{2}e^{-t}(t + 1)^2 .$$

Devo quindi trovare i valori (e i punti) di massimo e minimo di questa funzione per $t \geq 0$.
Per farlo uso la procedura vista nel primo semestre. Siccome nella semiretta $t \geq 0$ la derivata

$$a'(t) = \tfrac{1}{2}e^{-t}(1 - t^2)$$

si annulla solo per $t = 1$, devo confrontare i valori di $a(t)$ in $t = 1$ e negli estremi $t = 0$ e $t = +\infty$:

$$a(0) = \frac{1}{2}, \quad a(1) = \frac{2}{e}, \quad a(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} a(t) = 0 .$$

Ne deduco che il valore massimo di $a(t)$ è $\frac{2}{e}$, raggiunto in $t = 1$, mentre il valore minimo non esiste e l'estremo inferiore dei valori è 0, raggiunto per $t \to +\infty$.
In altre parole il triangolo di area massima è T_1, ed ha vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, \frac{2}{e})$, mentre non esiste il triangolo di area minima (per la precisione l'estremo inferiore delle aree dei triangoli T_t è 0, raggiunto per $t \to +\infty$).

$\boxed{2}$ Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{1}{\cos(-2x^2 + ax^4)} - 1$$

a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$, indicata con $g(x)$.
b) Determinare la parte principale di $f(x) - g(x)$ per $x \to 0$.

SOLUZIONE. a) Scrivo la funzione come

$$f(x) = \frac{1 - \cos(-2x^2 + ax^4)}{\cos(-2x^2 + ax^4)} .$$

Siccome la parte principale del denominatore è 1, la parte principale di $f(x)$ coincide con quella del numeratore.

Sostituendo $t = -2x^2 + ax^4$ nello sviluppo $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$ e usando che $t = O(x^2)$ ottengo

$$\cos(-2x^2 + ax^4) = 1 - \frac{1}{2}(-2x^2 + ax^4)^2 + O(x^8) = 1 - 2x^4 + 2ax^6 + O(x^8) , \tag{1}$$

da cui segue che $1 - \cos(-2x^2 + ax^4) \sim 2x^4$ e quindi $f(x) \sim 2x^4$, ovvero

$$g(x) := \text{p.p.}(f(x)) = 2x^4 .$$

b) Scrivo $f(x) - g(x)$ come segue:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\cos(-2x^2 + ax^4)} - (1 + 2x^4) = \frac{1 - (1 + 2x^4)\cos(-2x^2 + ax^4)}{\cos(-2x^2 + ax^4)},$$

ed osservo che di nuovo la parte principale di $f(x) - g(x)$ coincide con quella del numeratore della seconda frazione. Usando lo sviluppo in (1) ottengo

$$\begin{aligned} 1 - (1 + 2x^4)\cos(-2x^2 + ax^4) &= 1 - (1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 2ax^6 + O(x^8)) \\ &= -2ax^6 + O(x^8); \end{aligned}$$

se $a \neq 0$ ottengo $1 - (1 + 2x^4)\cos(-2x^2 + ax^4) \sim -2ax^6$ e quindi

$$\text{p.p.}(f(x) - g(x)) = -2ax^6.$$

Resta da fare il caso $a = 0$, per cui basta usare lo sviluppo del coseno all'ordine 4:

$$\begin{aligned} 1 - (1 + 2x^4)\cos(-2x^2) &= 1 - (1 + 2x^4)\big(1 - 2x^4 + \tfrac{2}{3}x^8 + O(x^{12})\big) \\ &= \tfrac{10}{3}x^8 + O(x^{12})) \sim \tfrac{10}{3}x^8, \end{aligned}$$

e quindi $\text{p.p.}(f(x) - g(x)) = \frac{10}{3}x^8$. Riassumendo

$$\text{p.p.}(f(x) - g(x)) = \begin{cases} -2ax^6 & \text{if } a \neq 0, \\ \frac{10}{3}x^8 & \text{if } a = 0. \end{cases}$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. Approccio alternativo: si parte dallo sviluppo di $\cos(-2x^2 + ax^4)$ in (1) e si ottiene

$$f(x) = \frac{1}{\cos(-2x^2 + ax^4)} - 1 = \frac{1}{1 - 2x^4 + 2ax^6 + O(x^8)} - 1;$$

usando quindi lo sviluppo $\frac{1}{1+y} = 1 - y + O(y^2)$ con $y = -2x^4 + 2ax^6 + O(x^8)$ si ottiene

$$f(x) = -2x^4 + 2ax^6 + O(x^8).$$

Da questa formula segue immediatamente la risposta alla domanda a) e la risposta alla domanda b) per $a \neq 0$. La domanda b) nel caso $a = 0$ si risolve in modo analogo: si parte dallo sviluppo $\cos(-2x^2) = 1 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^8 + O(x^{12})$ e poi is usa lo sviluppo $\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + O(y^3)$ con $y = -2x^4 + \frac{2}{3}x^8 + O(x^{12})$.

3 Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $y^2 \leq x^2 - x^4$, e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.

a) Tracciare un disegno approssimativo di A e calcolarne l'area.

b) Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Esplicitando la disequazione $y^2 \leq x^2 - x^4$ rispetto alla variabile y ottengo

$$A := \big\{(x, y) \colon -1 \leq x \leq 1,\ -g(x) \leq y \leq g(x)\big\}$$

dove $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è la funzione continua data da

$$g(x) := \sqrt{x^2 - x^4} = |x|\sqrt{1 - x^2}.$$

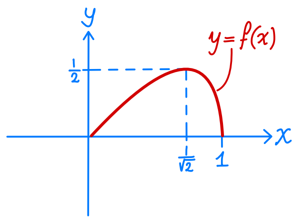
Per disegnare l'insieme A devo quindi disegnare il grafico della funzione g, e siccome g è pari, mi basta disegnarlo per $0 \leq x \leq 1$.
Osservo che g è sempre positiva e si annulla solo per $x = 0$ e $x = 1$.
Usando la formula $g(x) = x(1 - x^2)^{1/2}$ ottengo che la derivata è

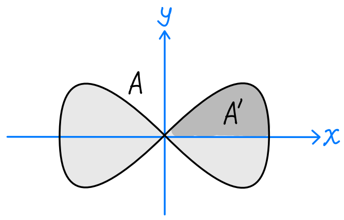
$$g'(x) = (1 - 2x^2)(1 - x^2)^{-1/2}$$

(e in particolare $g'(0) = 1$ e $g'(1) = +\infty$). Ne segue che $g(x)$ cresce per $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, e decresce per $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$. Infine la derivata seconda

$$g''(x) = x(2x^2 - 3)(1 - x^2)^{-3/2}$$

è sempre negativa, e quindi g è concava.
Sulla base di queste informazioni ottengo il grafico di g riportato sotto, da cui ricavo il disegno di A.



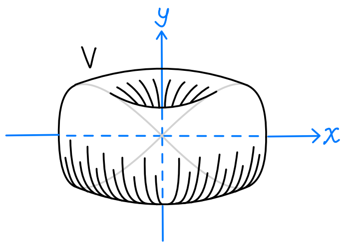


Preso infine A' come in figura, vale che

$$\operatorname{area}(A) = 4 \operatorname{area}(A') = 4 \int_0^1 x\,(1-x^2)^{1/2} dx = -2 \int_1^0 y^{1/2} dy = -2 \Big| \tfrac{2}{3}\, y^{3/2} \Big|_1^0 = \frac{4}{3}\,.$$

(Nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $y = 1 - x^2$.)

b) Partendo dal disegno di A nella figura sopra ottengo il seguente disegno di V:



Sia V' il solido ottenuto ruotando l'insieme A' attorno all'asse delle y. Allora V' è metà di V e quindi

$$\begin{aligned}
\operatorname{volume}(V) = 2 \operatorname{volume}(V') &= 4\pi \int_0^1 x^2\,(1-x^2)^{1/2} dx \\
&= 4\pi \int_0^{\pi/2} (\sin y\, \cos y)^2\, dy \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} 1 - \cos(4y)\, dy = \frac{\pi}{2} \Big| y - \frac{1}{4} \sin(4y) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}\,.
\end{aligned}$$

(Nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $x = \sin y$; nel quarto ho usato l'identità $(\sin y \cos y)^2 = \frac{1}{8}(1 - \cos(4y))$, ottenuta combinando le identità note $\sin y \cos y = \frac{1}{2}\sin(2y)$, e $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)$.)

Osservazioni. Versione alternativa del calcolo del volume di V. Posso descrivere la *metà destra* dell'insieme A in modo differente, esplicitando la variabile x in funzione della variabile y:

$$A := \Big\{ (x, y) \colon -\tfrac{1}{2} \le y \le \tfrac{1}{2}\,, \quad f^-(y) \le x \le f^+(y) \Big\}\,,$$

dove le funzioni $f^\pm : \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \big] \to \mathbb{R}$ sono date da

$$f^\pm(y) := \sqrt{\tfrac{1}{2}\big(1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}\big)}\,.$$

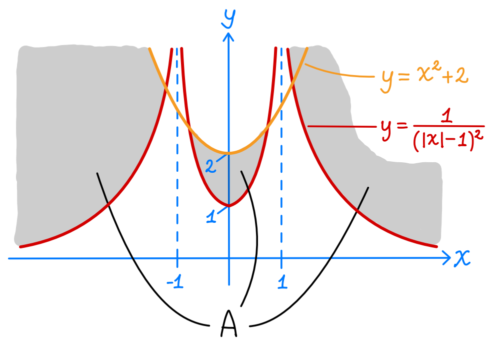
Questa rappresentazione non è utile in pratica per il calcolo dell'area di A ma lo è per il calcolo del volume di V, usando la prima formula per il volume dei solidi di rotazione vista a lezione:

$$\begin{aligned}
\operatorname{volume}(V) &= \int_{-1/2}^{1/2} \pi \left(f^+(y)\right)^2 - \pi \left(f^-(y)\right)^2 dy \\
&= \pi \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1 - 4y^2}\, dy = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt = \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $t = 2y$; nel quarto ho usato che l'integrale tra -1 e 1 di $\sqrt{1 - t^2}$ rappresenta l'area di un semicerchio di raggio 1 e vale quindi $\frac{\pi}{2}$).

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare a) $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^2)}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{x^2 - x^6}$; c) $\lim_{x\to 1^+} \exp(-1/\log x)$.
   SOLUZIONE. a) 1; b) $-\infty$; c) 0.
2. Calcolare il polinomio di Taylor all'ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := \cos(2x - x^2)$.
   SOLUZIONE. $P(x) = 1 - 2x^2 + 2x^3 + \frac{1}{6}x^4$.
3. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 8t$.
   SOLUZIONE. $x(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + 2t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
4. Trovare la successione (x_n) tale che $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ per $n = 0, 1, 2, \dots$.
   SOLUZIONE. Le successioni che soddisfano la formula ricorsiva sono della forma $x_n = c_1 3^n + c_2 2^n$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; aggiungendo le condizioni $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ si ottiene $x_n = 3^n - 2^n$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-ax} dx$ è finito.
   SOLUZIONE. $a > 0$ (per confronto asintotico con $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$).
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^a + n^{2a}}$ è finita.
   SOLUZIONE. $a > \frac{1}{2}$ (per confronto asintotico con $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2a}}$).
7. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n\log n} + 1}$.
   SOLUZIONE. $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^{n\log n} + 1} = \lim_{n\to+\infty} 2^{\log n} = +\infty$.
8. Consideriamo un punto P che si muove con legge oraria $P(t) = \frac{1}{t}(\cos t, \sin t)$. Scrivere il modulo della velocità e dire se la distanza L percorsa dall'istante $t = 1$ all'istante $t = +\infty$ è finita o infinita.
   SOLUZIONE. $|\dot{v}| = \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4}} \sim \frac{1}{t}$ e quindi $L = \displaystyle\int_1^\infty |\dot{v}(t)|\, dt \approx \int_1^\infty \frac{dt}{t}\, dt = +\infty$.
9. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) del piano tali che $\dfrac{1}{(|x| - 1)^2} \leq y \leq x^2 + 2$.
   SOLUZIONE.



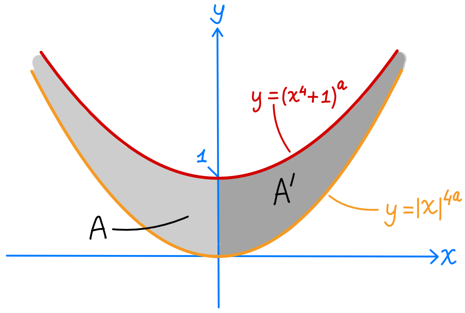
Seconda parte

1 Dato $a > 0$, consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|x|^{4a} \leq y \leq (x^4 + 1)^a$, ed indichiamo con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.

a) Dire per quali a l'area di A è finita.

b) Dire per quali a il volume di V è finito.

Soluzione. a) Anche se non è strettamente necessario, è utile disegnare l'insieme A per qualche valore del parametro a. Per esempio, per $a = \frac{1}{2}$ si ottiene facilmente il seguente disegno:



Osservo per cominciare che le funzioni $|x|^{4a}$ e $(x^4 + 1)^a$ sono pari, e quindi l'insieme A è simmetrico rispetto all'asse delle y. Detta dunque A' l'intersezione di A con il semipiano a destra dell'asse delle y, vale

$$\text{area}(A) = 2\,\text{area}(A')\,,$$

e mi basta calcolare area(A').
Osservo poi che $x^{4a} < (x^4 + 1)^a$ per ogni $x \geq 0$, e quindi per tali x la sezione verticale A_x dell'insieme A' non è vuota. Pertanto l'area di A' è data da

$$\text{area}(A') = \int_0^{+\infty} \underbrace{(x^4 + 1)^a - x^{4a}}_{f(x)}\, dx \tag{1}$$

Questo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e la funzione integranda $f(x)$ è sempre positiva; per studiare il comportamento dell'integrale determino il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$:

$$f(x) = (x^4 + 1)^a - x^{4a} = x^{4a}\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^a - 1\right] \sim a x^{4a-4} \tag{2}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato la formula $(1 + t)^a - 1 \sim at$ per $t \to 0$, che segue dallo sviluppo di Taylor $(1 + t)^a = 1 + at + O(t^2)$).
Usando infine il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri semplici, ottengo

$$\text{area}(A) = 2\,\text{area}(A') = 2\int_0^{+\infty} f(x)\, dx \approx \int_1^{+\infty} x^{4a-4} dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } 4a - 4 \geq -1, \\ \text{finito} & \text{se } 4a - 4 < -1. \end{cases}$$

In particolare l'area di A è finita se e solo se $a < \frac{3}{4}$.

b) Il solido V può essere ottenuto ruotando solo A' attorno all'asse delle y, e siccome A' sta a destra di questo asse, vale la seguente formula:

$$\text{volume}(V) = \int_0^{+\infty} 2\pi x\, f(x)\, dx\,. \tag{3}$$

Come prima, l'integrale è improprio semplice in $+\infty$ e la funzione integranda è positiva; usando quindi lo sviluppo (2) ottengo

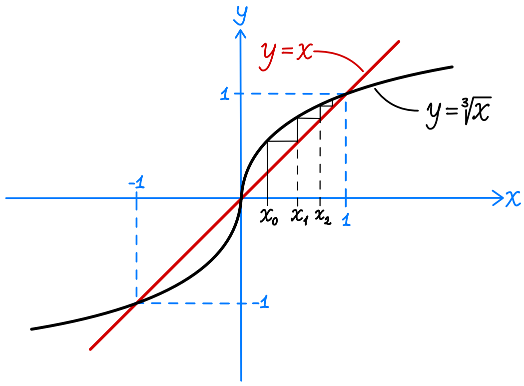
$$\text{volume}(V) = \int_0^{+\infty} 2\pi x\, f(x)\, dx \approx \int_1^{+\infty} x^{4a-3} dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } 4a - 3 \geq -1, \\ \text{finito} & \text{se } 4a - 3 < -1. \end{cases}$$

In particolare il volume di V è finito se e solo se $a < \frac{1}{2}$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Le formule (1) e (3) sono varianti delle formule base viste a lezione, che si riferiscono al caso in cui l'insieme A è delimitato superiormente dal grafico di una funzione ed inferiormente dall'asse delle x. Queste varianti sono state viste in più occasioni durante il corso, e si ottengono facilmente a partire dalle formule più generali da cui sono state ottenute le formule base.

2 Consideriamo una successione (x_n) che soddisfa l'equazione ricorsiva $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n}$. Discutere il comportamento di (x_n) al variare di $x_0 \in [0,1]$.

<u>SOLUZIONE</u>. Si vede subito che se $x_0 = 0$ allora $x_n = 0$ per ogni n, e se $x_0 = 1$ allora $x_n = 1$ per ogni n.
Resta da considerare il caso $0 < x_0 < 1$. Visualizzando graficamente la successione (x_n) (vedere la figura sotto) ci si convince subito che è (strettamente) crescente e tende a 1 per $n \to +\infty$.



La dimostrazione di questa affermazione è divisa in tre passi.

Passo 1: $0 \le x_n \le 1$ per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$ Dimostro questa affermazione per induzione su n: il caso $n = 0$ è vero per ipotesi, e supponendo vero il caso n ottengo il caso $n+1$ usando la formula ricorsiva $x_{n+1} = f(x_n)$ e il fatto che

$$0 \le x \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le f(x) \le 1$$

(questa implicazione segue da calcoli algebrici elementari che non riporto).

Passo 2: la successione (x_n) è crescente. Devo dimostrare che $x_n \le x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni n: questa affermazione segue dal fatto che $0 \le x_n \le 1$ (passo 1) e che

$$0 \le x \le 1 \;\Rightarrow\; x \le f(x)$$

(anche questa implicazione segue da calcoli algebrici elementari).

Passo 3: la successione (x_n) converge a 1. Siccome (x_n) è crescente (passo 2), ha limite L con $-\infty < L \le +\infty$. Siccome $0 < x_0 \le x_n \le 1$ per ogni n (passo 1 e passo 2), allora $0 < x_0 \le L \le 1$.
Inoltre, passando al limite nell'equazione $x_{n+1} = f(x_n)$, grazie alla continuità di f ottengo $L = f(L)$. Quest'ultima equazione ha soluzioni $L = 0, \pm 1$ (ometto la verifica), e tenendo conto che $0 < L \le 1$ ottengo infine $L = 1$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Una soluzione alternativa, e nettamente più semplice della precedente, consiste nell'osservare che

$$x_n = x_0^{1/3^n} \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

Questa formula si dimostra per induzione su n: è infatti ovviamente valida per $n = 0$, e se vale per un certo n, vale anche per $n+1$:

$$x_n = x_0^{1/3^n} \;\Rightarrow\; x_{n+1} = f(x_n) = \sqrt[3]{x_0^{1/3^n}} = x_0^{1/3^{n+1}}.$$

Dalla formula (4) segue immediatamente che per $0 < x_0 < 1$ la successione (x_n) è strettamente crescente e tende a 1.

3 Consideriamo la serie di potenze

$$f(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{4^n(n^2-n)} \,. \tag{*}$$

a) Determinare il raggio di convergenza R e discutere il comportamento per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) Calcolare il valore $f(x)$ per $-R < x < R$. [*Suggerimento: calcolare* $f''(x)$.]

SOLUZIONE. a) Il raggio di convergenza della serie di potenze (*) è dato da

$$\begin{aligned} R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4^n(n^2-n)} &= \lim_{n\to+\infty} 4\,(n^2-n)^{1/n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} 4\,\exp\big(\tfrac{1}{n}\log(n^2-n)\big) = 4 \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato che $\frac{1}{n}\log(n^2-n) \sim \frac{2\log n}{n}$ tende a 0 per $n \to +\infty$).
Dal fatto che $R = 4$ segue che

- la serie (*) converge per $|x| < 4$;
- la serie (*) non converge per $|x| > 4$.

Un'ulteriore analisi mi permette di fare affermazioni più precise:

- per $x > 4$ vale che $f(x) = +\infty$; questo segue dal fatto che la serie (*) è a termini positivi e quindi ammette solo due comportamenti: converge a un numero finito oppure diverge a $+\infty$: escluso il primo grazie al fatto che $R = 4$, resta solo il secondo;
- per $x = 4$ la serie (*) è a termini positivi e converge per confronto asintotico con $\sum \frac{1}{n^2}$; si può inoltre osservare che questa serie è di tipo telescopico e converge a 1:

$$\begin{aligned} f(4) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} &= \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) \\ &= \Big(1-\frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\Big) + \cdots = 1\,; \end{aligned}$$

- per $x = -4$ la serie (*) ha termini di segno variabile e converge assolutamente (ed in particolare converge); infatti, usando il criterio del confronto asintotico,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{x^n}{4^n(n^2-n)}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty\,.$$

b) Come spiegato (ma non dimostrato) a lezione, data una serie di potenze con raggio di convergenza R, per x nell'intervallo $(-R, R)$ la funzione $f(x)$ corrispondente al valore della serie in x è ben definita e derivabile infinite volte, e la derivata k-esima coincide con la serie delle derivate k-esime.
Nel nostro caso questo significa che per $-4 < x < 4$ si ha

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^n)''}{4^n(n^2-n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{4^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{4^{m+2}} = \frac{1}{16}\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{4}\Big)^m = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}}$$

(nel terzo passaggio ho usato il cambio di "variabile" $n = m+2$, nel quinto ho usato la formula per il valore della serie geometrica).
Tenendo conto che f' è la primitiva di f'' ottengo

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \tfrac{1}{16}\int \frac{dx}{1-\frac{x}{4}} = -\tfrac{1}{4}\int\frac{dy}{y} = -\tfrac{1}{4}\log y + c = -\tfrac{1}{4}\log\big(1-\tfrac{x}{4}\big) + c\,, \tag{5}$$

con $c \in \mathbb{R}$ (nel terzo e quinto passaggio ho usato il cambio di variabile $y = 1 - \frac{x}{4}$).
Per trovare il valore della costante c in (5) mi basta calcolare esplicitamente il valore di $f'(x)$ in un qualche punto x, e questo calcolo risulta particolarmente semplice per $x = 0$:

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^n)'}{4^n(n^2-n)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{4^n(n^2-n)} \;\Rightarrow\; f'(0) = 0\,.$$

Dal fatto che $f'(0) = 0$ segue che la costante c in (5) vale 0.

Ora, tenendo conto che f è la primitiva di f', ottengo

$$\begin{aligned} f(x) = \int f'(x)\,dx = -\tfrac{1}{4}\int \log\left(1-\tfrac{x}{4}\right)dx = \int \log y\,dy \\ = y\log y - y + c \\ = \left(1-\tfrac{x}{4}\right)\log\left(1-\tfrac{x}{4}\right) + \tfrac{x}{4} - 1 + c\,, \end{aligned} \tag{6}$$

con $c \in \mathbb{R}$ (nel terzo e quinto passaggio ho usato il cambio di variabile $y = 1 - \frac{x}{4}$).
Usando infine che $f(0) = 0$ ottengo che la costante c in (6) vale 1, e quindi

$$f(x) = \left(1-\tfrac{x}{4}\right)\log\left(1-\tfrac{x}{4}\right) + \tfrac{x}{4} \quad \text{per } -4 < x < 4. \tag{7}$$

OSSERVAZIONI. (i) Per $x < -4$ si può dimostrare che la serie non solo non converge, ma non esiste. Per farlo si può usare questa "variante" del criterio di Leibniz: *data una successione* crescente (a_n) *di numeri strettamente positivi, allora la serie a segni alterni* $\sum(-1)^n a_n$ *non esiste.*

(ii) Abbiamo visto sopra che la funzione $f(x)$ è ben definita e finita per $-4 \le x \le 4$. Usando uno strumento teorico elementare che verrà sviluppato nel corso di Analisi 2 si può facilmente dimostrare che $f(x)$ è anche continua per $-4 \le x \le 4$.
Dalla continuità di f in $x = -4$ e dalla formula (7) segue che

$$f(-4) = \lim_{x\to(-4)^+}\left[\left(1-\tfrac{x}{4}\right)\log\left(1-\tfrac{x}{4}\right) + \tfrac{x}{4}\right] = 2\log 2 + 1\,,$$

mentre dalla continuità in $x = 4$ e dalla formula (7) segue che

$$f(4) = \lim_{x\to 4^-}\left[\left(1-\tfrac{x}{4}\right)\log\left(1-\tfrac{x}{4}\right) + \tfrac{x}{4}\right] = \lim_{y\to 0^+}(y\log y + 1 - y) = 1\,.$$

(L'uguaglianza $f(4) = 1$ è già stata dimostrata sopra per altra via.)

4 Consideriamo una funzione iniettiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e una successione di numeri reali (x_m).

a) Dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(n) = \infty$.

b) Dimostrare che se $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = L$ per qualche $L \in \mathbb{R}$, allora $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\sigma(n)} = L$.

c) Caratterizzare le funzioni σ per cui vale anche l'implicazione opposta in b).

SOLUZIONE. a) Devo far vedere che per ogni $M \in \mathbb{R}$ vale che $\sigma(n) \ge M$ definitivamente in n, ovvero che l'insieme $E := \{n \in \mathbb{N} \colon \sigma(n) < M\}$ è finito. Tenendo conto che σ è iniettiva e porta E in $F := \{0, 1, \dots, \lfloor M \rfloor\}$, il numero di elementi di E è minore o uguale al numero di elementi di F, che è finito.

b) Siccome $x_m \to L$ per $m \to \infty$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m_ε tale che $|x_m - L| \le \varepsilon$ per $m \ge m_\varepsilon$. Inoltre, siccome $\sigma(n) \to \infty$ per $n \to \infty$ (punto a)) esiste n_ε tale che $\sigma(n) \ge m_\varepsilon$ per $n \ge n_\varepsilon$. Mettendo insieme queste due affermazioni ottengo che $|x_{\sigma(n)} - L| \le \varepsilon$ per $n \ge n_\varepsilon$.
Riassumendo, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $|x_{\sigma(n)} - L| \le \varepsilon$ per $n \ge n_\varepsilon$, e questo significa che $x_{\sigma(n)} \to L$ per $n \to \infty$.

c) Voglio caratterizzare le funzioni σ tali che, per ogni successione (x_m), vale la seguente implicazione:

$$\lim_{n\to\infty} x_{\sigma(n)} = L \text{ con } L \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \lim_{m\to\infty} x_m = L\,. \tag{8}$$

Affermo che tali σ sono tutte e sole quelle per cui vale la seguente proprietà:

$$\mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N}) \text{ è finito,} \tag{P}$$

ovvero l'immagine di σ contiene tutti i numeri interi tranne al più un numero finito.

L'enunciato è diviso in due parti.

Parte 1. Se non vale (P) allora esiste (x_m) per cui non vale l'implicazione (8).
Considero per la precisione la seguente successione:

$$x_m := \begin{cases} 1 & \text{se } m \in \sigma(\mathbb{N}), \\ 0 & \text{se } m \in \mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N}). \end{cases}$$

Chiaramente $x_{\sigma(n)} = 1$ per ogni n e quindi la successione $(x_{\sigma(n)})$ tende a 1. D'altra parte la successione (x_m) non tende a 1, perché esistono infiniti indici m tali che $x_m = 0$, e dunque non è vero che $|x_m - 1| \leq \frac{1}{2}$ definitivamente in m.

Parte 2. Se vale (P) allora per ogni (x_m) vale l'implicazione (8).
Dimostro che la negazione della tesi in (8) implica la negazione dell'ipotesi, vale a dire, che data una successione (x_m) ed un numero L tali che (x_m) non tende a L, allora anche $(x_{\sigma(n)})$ non tende a L.
Siccome (x_m) non tende a L, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|x_m - L| > \varepsilon$ per infiniti indici m. Detto E tale insieme di indici, ho che

$$E \subset (E \cap \sigma(\mathbb{N})) \cup (\mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N}))$$

e quindi, siccome E è infinito e $\mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N})$ è finito, $E \cap \sigma(\mathbb{N})$ deve necessariamente essere infinito. Questo implica che ci sono infiniti indici n tali che $\sigma(n) \in E$, vale a dire $|x_{\sigma(n)} - L| > \varepsilon$. Dunque $(x_{\sigma(n)})$ non tende a L.

Osservazioni. Il punto b) può anche essere ottenuto dal teorema di cambio di variabile per i limiti di funzioni visto a lezione, che ricordo:

- *Dati X, Y sottoinsiemi di $\overline{\mathbb{R}}$;*
- *data $\sigma : X \to Y$ e $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di X tale che $\sigma(x)$ tende ad un certo $\bar{y} \in \overline{\mathbb{R}} \setminus Y$ per $x \to \bar{x}$;*
- *data $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\sigma(y)$ tende ad un certo $L \in \overline{\mathbb{R}}$ per $y \to \bar{y}$;*

allora $f(\sigma(x))$ tende a L per $x \to \bar{x}$.[1]

Applico ora questo risultato con $X = Y = \mathbb{N}$, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come nel testo, e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da $f(m) := x_m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$: per il punto a) so che $\sigma(n)$ tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$, e per ipotesi so che $f(m) = x_m$ tende a L per $m \to +\infty$; ne deduco che $f(\sigma(n)) = x_{\sigma(m)}$ tende a L per $n \to +\infty$.

$\boxed{5}$ Consideriamo un insieme X ed una successione di funzioni $f_n : X \to [0, 1]$ con $n = 1, 2, \ldots$.

a) Dimostrare che se X è finito esiste una sottosuccessione (n_k) tale che la successione di numeri reali $\big(f_{n_k}(x)\big)$ converge per ogni $x \in X$.

b) Dimostrare che questo risultato vale anche se X è numerabile.

c) Far vedere che questo risultato non vale per X qualunque.

Soluzione. Comincio con un'osservazione che serve a semplificare il resto della spiegazione: conviene identificare le sottosuccessioni (n_k) dei numeri naturali con i sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$. Dato infatti $E \subset \mathbb{N}$ infinito, esiste uno ed un solo modo di scrivere gli elementi di E come $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$
In particolare, date due sottosuccessioni (n'_k) ed (n_k), dire che la prima è una sottosuccessione della seconda significa semplicemente che la prima è contenuta nella seconda (intendendole entrambe come sottoinsiemi di $\mathbb{N}$). E quindi scrivo $(n'_k) \subset (n_k)$.

a) Indico gli elementi di X con $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Osservo che $(f_n(x_1))$ è una successione di numeri in $[0, 1]$ e quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione (n_k^1) di (n) tale che $(f_{n_k^1}(x_1))$ converge per $k \to \infty$.
Osservo poi che anche $(f_{n_k^1}(x_2))$ è una successione di numeri in $[0, 1]$, e quindi, sempre per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione (n_k^2) di (n_k^1) tale che $(f_{n_k^2}(x_2))$ converge per $k \to \infty$. Allo stesso modo esiste una sottosuccessione (n_k^3) di (n_k^2) tale che $(f_{n_k^3}(x_3))$ converge per $k \to \infty$, etc. etc.
Riassumendo, ho trovato delle sottosuccessioni $(n_k^1) \supset (n_k^2) \supset \cdots \supset (n_k^N)$ tali che $(f_{n_k^i}(x_i))$ converge per ogni $i = 1, 2, \ldots, N$. In particolare la sottosuccessione (n_k^N) è una sottosuccessione di tutte le altre e quindi $(f_{n_k^N}(x_i))$ converge per ogni $i = 1, \ldots, N$.

b) Posso supporre X numerabile e infinito, e indico gli elementi di X con $x_1, x_2, x_3, \ldots$
Come prima, costruisco (per induzione) una successione di sottosuccessioni $(n_k^1) \supset (n_k^2) \supset \ldots$

[1] Ho messo come ipotesi che $\bar{y} \notin Y$; se invece $\bar{y} \in Y$ bisogna anche assumere che f sia continua in $\bar{y}$.

tali che $(f_{n_k^i}(x_i))$ converge per ogni $i = 1, 2, \dots$
Attenzione: se esistesse una sottosuccessione (n_k) contenuta in (n_k^i) per $i = 1, 2, \dots$ avrei finito. Il problema è che non è detto che tale sottosuccessione esista, e anzi può succedere che l'intersezione delle sottosuccessioni (x_n^i) è vuota. Procedo quindi diversamente, ponendo

$$n_k := n_k^k \quad \text{per } k = 1, 2, \dots$$

Si verifica facilmente che (n_k) è effettivamente una sottosuccessione di (n). Inoltre, preso $i = 1, 2, \dots$, la sottosuccessione (n_k) privata dei primi $i-1$ termini è contenuta in (n_k^i). Questa inclusione "parziale" e il fatto che $(f_{n_k^i}(x_i))$ converge implicano che anche $(f_{n_k}(x_i))$ converge.

c) Prendo $X = [0, 1]$ e considero le funzioni $f_n : [0, 1] \to \{0, 1\}$ definite come segue:

$$f_n(x) := n\text{-esima cifra dopo la virgola nell'espansione di } x \text{ in base 2.}$$

Presa ora una qualunque sottosuccessione (n_k), voglio trovare $x \in [0, 1]$ tale che la successione $(f_n(x))$ non converge. Prendo il numero x scritto in base 2 come $0, x_1 x_2 x_3 \dots$ dove le cifre x_n sono date da

$$x_n := \begin{cases} 1 & \text{se } n = n_k \text{ per qualche } k \text{ pari,} \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi.} \end{cases}$$

Dalla scelta di x e dalla definizione delle funzioni f_n segue che

$$f_{n_k}(x) = x_{n_k} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } k \text{ è dispari,} \end{cases}$$

e quindi la successione $(f_n(x))$ non converge.

<u>OSSERVAZIONI</u>. (i) L'enunciato contenuto nel punto b) è un caso particolare di un enunciato di notevole importanza in Analisi e non solo, che verrà spiegato al secondo anno ("un prodotto numerabile di spazi metrici compatti è compatto").

(ii) La procedura utilizzata per costruire la sottosuccessione (n_k) a partire dalle sottosuccessioni $(n_k^1) \supset (n_k^2) \supset (n_k^3) \supset \dots$ ha pure un ruolo importante in matematica, ed è nota come "procedura diagonale" o anche "argomento diagonale".

(iii) Le funzioni f_n nel punto c) possono essere scritte come $f_n(x) := f(2^n x)$ dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione definita come segue:

$$f(x) := \text{prima cifra prima della virgola nell'espansione di } x \text{ in base 2.}$$

L'esempio funziona anche se si sostituisce questa specifica f con una qualunque funzione da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con periodo 1, continua, e non costante, per esempio $f(x) = \sin(\pi x)$. La dimostrazione del fatto che anche in questo caso per ogni sottosuccessione (n_k) esiste $x \in [0, 1]$ tale che la successione $(f_{n_k}(x))$ non converge è leggermente più complicata.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 in 0 della funzione $f(x) := \sqrt{4 + x^2 - x^4}$.
   SOLUZIONE. Scrivo $f(x) = 2\left(1+\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)^{1/2}$ e uso lo sviluppo $(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$, ottenendo $f(x) = 2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{17}{64}x^4 + O(x^6)$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(x^2) + ax^2$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
   SOLUZIONE. Deve essere $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f''(x) \geq 0$, vale a dire $2 + 2a \geq 0$, cioè $a \geq -1$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\log\left(2^x x^{-2}\right)}_{a}, \quad \underbrace{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{1+2^x}}_{b}, \quad \underbrace{\frac{4x}{(\log x)^2 + 1}}_{c}, \quad \underbrace{\frac{1}{\log x - x^3}}_{d}.$$
   SOLUZIONE. $b \ll d \ll c \ll a$.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\, dx$.
   SOLUZIONE. $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\, dx = \int \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}\, dx = 2\log|x-2| - \log|x-1| + c$.

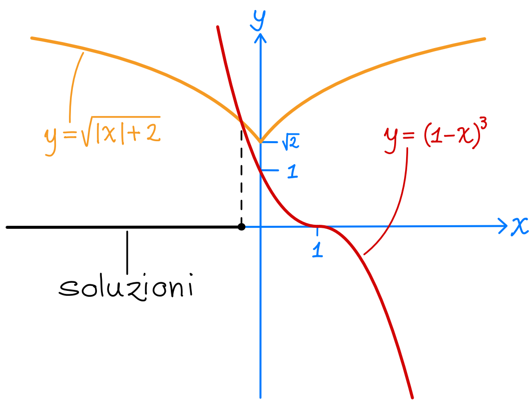
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x^2 + x^a}{(\cos x)^{2a}}\, dx$ è finito.
   SOLUZIONE. Integrale improprio in $\frac{\pi}{2}$ che converge per $a < \frac{1}{2}$, infatti:
$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^2 + x^a}{(\cos x)^{2a}}\, dx \approx \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos x)^{2a}}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\sin y)^{2a}}\, dy \approx \int_0^1 \frac{1}{y^{2a}}\, dy\,.$$

6. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2-n^2}{2^n - 1} x^{2n}$.
   SOLUZIONE. $R = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{\left|\frac{2^n - 1}{2 - n^2}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt{2}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1 + 4x^2)\sin t$ che soddisfa $x(0) = 0$.
   SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \frac{1}{2}\tan(2 - 2\cos t)$.

8. In quale classe di funzioni conviene cercare una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare $D^4 x - x = te^{-t}$?
   SOLUZIONE. Tra le funzioni della forma $\tilde{x}(t) = (a_1 t + a_2 t^2)\, e^{-t}$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{|x| + 2} \leq (1 - x)^3$.
   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE

1 Siano dati $X \subset \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Come visto a lezione, f è continua in $\bar{x}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - \bar{x}| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon. \tag{C1}$$

Consideriamo adesso la seguente variante dell'affermazione (C1):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - \bar{x}| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon. \tag{C2}$$

Dimostrare che (C1) e (C2) sono equivalenti.

SOLUZIONE. Per la dimostrazione conviene distinguere il valore di δ_ε nei due enunciati. Chiamo pertanto δ^1_ε quello nell'enunciato (C1) e δ^2_ε quello nell'enunciato (C2).

Per dimostrare l'implicazione (C1) $\Rightarrow$ (C2) devo trovare (per ogni $\varepsilon > 0$) un numero positivo δ^2_ε per cui vale l'affermazione (C2), sapendo che esiste δ^1_ε per cui vale (C1). Per farlo mi basta porre

$$\delta^2_\varepsilon := \delta^1_{\varepsilon/2} \, .$$

Infatti

$$|x - \bar{x}| < \delta^2_\varepsilon = \delta^1_{\varepsilon/2} \Rightarrow |x - \bar{x}| \leq \delta^1_{\varepsilon/2} \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \, .$$

Invece per dimostrare l'implicazione (C2) $\Rightarrow$ (C1) devo trovare δ^1_ε per cui vale (C1), sapendo che esiste δ^2_ε per cui vale (C2). Per farlo mi basta porre

$$\delta^1_\varepsilon := \tfrac{1}{2}\delta^2_\varepsilon \, .$$

Infatti

$$|x - \bar{x}| \leq \delta^1_\varepsilon = \tfrac{1}{2}\delta^2_\varepsilon \Rightarrow |x - \bar{x}| < \delta^2_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon \, .$$

2 Dato $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, consideriamo l'equazione differenziale

$$D^3x - D^2x + aDx - ax = e^t + 1 \, . \tag{*}$$

a) Trovare la soluzione generale dell'equazione (*).

b) determinare gli a tali che tutte le soluzioni di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

SOLUZIONE. a) Ricordo che la soluzione generale dell'equazione si scrive come

$$x = x_{\text{om}} + x_1 + x_2 \, ,$$

dove

- x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea $D^3x - D^2x + aDx - ax = 0$,
- x_1 è una soluzione particolare dell'equazione $D^3x - D^2x + aDx - ax = 1$,
- x_2 è una soluzione particolare dell'equazione $D^3x - D^2x + aDx - ax = e^t$.

Calcolo di x_{om}. Il polinomio caratteristico $P(\lambda)$ associato all'equazione omogenea è

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + a\lambda - a = (\lambda^2 + a)(\lambda - 1) = 0$$

e quindi le tre radici (complesse) di $P(\lambda)$ sono

$$\lambda = 1 \, , \quad \lambda = \pm\sqrt{-a} \, .$$

Devo quindi distinguere tre casi:

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^t + c_2 \sin(\sqrt{a}t) + c_3 \cos(\sqrt{a}t) & \text{se } a > 0, \\ c_1 e^t + c_2 e^{\sqrt{-a}t} + c_3 e^{-\sqrt{-a}t} & \text{se } a < 0 \text{ e } a \neq -1, \\ (c_1 + c_2 t)\, e^t + c_3 e^{-t} & \text{se } a = -1, \end{cases}$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Calcolo di x_1. Essendo il termine noto 1 una costante, cerco la soluzione particolare x_1 tra le costanti, e trovo subito

$$x_1(t) = -\tfrac{1}{a} \, .$$

Calcolo di x_2 *per* $a \neq -1$. Il termine noto e^t risolve l'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti $\dot{x} - x = 0$, il cui polinomio caratteristico ha come radice $\lambda = 1$. Siccome $a \neq -1$,

$\lambda = 1$ è anche una radice con *molteplicità uno* del polinomio $P(\lambda)$ e quindi cerco x_2 della forma $x_2(t) = bte^t$. Sostituendo questa espressione nell'equazione

$$D^3x - D^2x + aDx - ax = e^t$$

ottengo $b(a+1)e^t = e^t$, identità che è soddisfatta per $b = \frac{1}{a+1}$. Pertanto

$$x_2(t) = \tfrac{1}{a+1} te^t \quad \text{per } a \neq -1.$$

Calcolo di x_2 per $a = -1$. In questo caso $\lambda = 1$ è una radice con *molteplicità due* del polinomio $P(\lambda)$ e quindi cerco x_2 della forma $x_2(t) = bt^2e^t$. Sostituendo questa espressione nell'equazione

$$D^3x - D^2x + aDx - ax = e^t$$

ottengo $4be^t = e^t$, identità che è soddisfatta per $b = \frac{1}{4}$. Pertanto

$$x_2(t) = \tfrac{1}{4}t^2e^t \quad \text{per } a = -1.$$

b) Dalle formule date sopra si vede che per ogni a vale

$$x_1(t) = O(e^{2t}), \quad x_2(t) = O(e^{2t}) \quad \text{per } t \to +\infty.$$

Quindi il problema si riduce a trovare i valori di a per cui

$$x_{\mathrm{om}}(t) = O(e^{2t}) \quad \text{per } t \to +\infty. \tag{1}$$

Dalla formula per x_{om} data sopra si vede subito che la condizione (1) è verificata per $a > 0$ e per $a = -1$. Inoltre è verificata per $a < 0$ e $a \neq -1$ se e solo se $\sqrt{-a} \leq 2$, vale a dire $a \geq -4$. Pertanto gli a cercati sono $a \geq -4$.

3 a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := (\cos x)^{2x} - 1$.
b) Dato $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^3$.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Scrivo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = \exp\big(2x\log(\cos x)\big) - 1\,.$$

Osservo ora che $2x\log(\cos x) \to 0$ per $x \to 0$ e quindi posso usare lo sviluppo $e^t - 1 \sim t$ (per $t \to 0$) con $t := 2x\log(\cos x)$:

$$f(x) = \exp(2x\log(\cos x)) - 1 \sim 2x\log(\cos x)\,.$$

Poiché $\cos x - 1 \to 0$ per $x \to 0$, posso usare lo sviluppo $\log(1+t) \sim t$ con $t := \cos x - 1$:

$$f(x) \sim 2x\log(\cos x) = 2x\log(1 + (\cos x - 1)) \sim 2x(\cos x - 1)\,.$$

Usando infine lo sviluppo $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ ottengo

$$f(x) \sim 2x(\cos x - 1) \sim -x^3\,,$$

cioè $\text{p.p.}(f(x)) = -x^3$.
b) Usando quanto fatto al punto a) ottengo che per $a \neq 1$

$$f(x) + ax^3 \sim (a-1)\,x^3\,,$$

cioè $\text{p.p.}(f(x) + ax^3) = (a-1)x^3$.
Il caso $a = 1$ richiede invece uno sviluppo più preciso di $f(x)$, e per ottenerlo procedo diversamente da come fatto sopra.
Parto dallo sviluppo di $\log(\cos x)$: usando lo sviluppo $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$ ottengo

$$\log(\cos x) = \log\big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6)\big)\,,$$

e usando lo sviluppo $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con

$$t := -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6) = -\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4) = O(x^2)$$

ottengo

$$\begin{aligned}\log(\cos x) &= \log(1+t)\\ &= t - \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^3)\\ &= \big[-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6)\big] - \tfrac{1}{2}\big[-\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big]^2 + O\big([O(x^2)]^3\big)\\ &= -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{12}x^4 + O(x^6)\,,\end{aligned}$$

e quindi

$$2x\log(\cos x) = -x^3 - \tfrac{1}{6}x^5 + O(x^7)\,.$$

Usando ora lo sviluppo $e^t = 1 + t + O(t^2)$ con $t := -x^3 - \frac{1}{6}x^5 + O(x^7) = O(x^3)$ ottengo

$$\begin{aligned}\exp\big(2x\log(\cos x)\big) = e^t &= 1 + t + O(t^2)\\ &= 1 + \big[-x^3 - \tfrac{1}{6}x^5 + O(x^7)\big] + O\big([O(x^3)]^2\big)\\ &= 1 - x^3 - \tfrac{1}{6}x^5 + O(x^6)\,,\end{aligned}$$

da cui segue che $f(x) + x^3 = -\frac{1}{6}x^5 + O(x^6)$ e quindi

$$\text{p.p.}(f(x) + x^3) = -\tfrac{1}{6}x^5\,.$$

4 Indichiamo con S_N le somme parziali della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n}\,.$$

a) Trovare N affinché S_N approssimi S con errore inferiore a 10^{-3}.
b) Calcolare il valore esatto di S.
[*Suggerimento per b): considerare la serie di potenze* $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.]

SOLUZIONE. a) Si chiede di trovare N tale che

$$|S - S_N| = \sum_{n=N+1}^{+\infty} n\,4^{-n} \leq 10^{-3}\,.$$

Osservo ora che la funzione $g(x) := x\,4^{-x}$ è decrescente per $x \geq \frac{1}{\log 4} \simeq 0{,}72$, e quindi vale la stima

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} n\,4^{-n} \leq \int_N^{+\infty} x\,4^{-x}\,dx\,. \tag{2}$$

Integrando per parti ottengo

$$\int_N^{+\infty} x\,4^{-x}\,dx = \Big(\frac{N}{\log 4} + \frac{1}{(\log 4)^2}\Big)\frac{1}{4^N}\,,$$

che messo insieme alla disuguaglianze precedenti dà

$$|S - S_N| \leq \Big(\frac{N}{\log 4} + \frac{1}{(\log 4)^2}\Big)\frac{1}{4^N}\,.$$

Infine calcolo il termine di destra di questa disuguaglianza per i primi valori di N, e per $N = 7$ ottengo circa $3{,}4 \cdot 10^{-4}$, che è minore di 10^{-3}. Quindi $N = 7$ soddisfa quanto richiesto, e per la precisione

$$|S - S_7| \leq 3{,}4 \cdot 10^{-4}\,.$$

b) La serie di potenze

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$$

ha raggio di convergenza 1, e raccogliendo x ottengo la derivata della serie geometrica di base x, di cui conosco il valore esatto; per la precisione, per $x \in (-1,1)$ vale che

$$f(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\Big)' = x\Big(\frac{1}{1-x} - 1\Big)' = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

In particolare $S = f\big(\frac{1}{4}\big) = \frac{4}{9}$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Una soluzione alternativa del punto a) è la seguente: si dimostra per induzione su n che

$$\frac{n}{4^n} \leq \frac{1}{3^n} \quad \text{per } n \geq 3,$$

e si usa questa disuguaglianza per stimare la coda della serie originale con quella della serie geometrica di base $\frac{1}{3}$, che può essere calcolata esplicitamente: per $N \geq 2$ vale infatti che

$$|S - S_N| = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n}{4^n} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{N+1}}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{3^m} = \frac{2}{3^N}$$

(nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $n = N + 1 + m$).
Calcolo $\frac{2}{3^N}$ per i primi valori di N, e per $N = 6$ ottengo circa $6{,}9 \cdot 10^{-4}$, che è minore di 10^{-3}; quindi anche $N = 6$ soddisfa la richiesta, e per la precisione

$$|S - S_6| \leq 6{,}9 \cdot 10^{-4}\,.$$

5 Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che

$$\int_1^{+\infty} |f'(x)|\,dx < +\infty\,. \tag{3}$$

Dimostrare che:

a) l'integrale improprio $I := \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ esiste se e solo se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,dx$.[1]

b) Dimostrare che la serie $S := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ si comporta come l'integrale improprio I.[2]

[*Suggerimento per b): porre* $a_n := \int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n)$ *e dimostrare che* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$.]

<u>SOLUZIONE</u>. In questa soluzione la lettera n indica sempre una variabile *intera*.
Dall'ipotesi (3) segue che l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} f'(x)\,dx = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} f(x)}_{L} - f(1)$$

esiste ed è finito, ed in particolare il limite L esiste ed è finito. Ci sono quindi tre possibili casi:
Se $L > 0$ allora $I = S = +\infty$ e gli enunciati a) e b) sono ovviamente veri.
Se $L < 0$ allora $I = S = -\infty$ e di nuovo gli enunciati a) e b) sono veri.
L'unico caso che resta da considerare è $L = 0$.

a) Indico con $F : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la primitiva di f data da

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt\,.$$

Siccome l'integrale improprio I è dato dal limite di $F9x)$ per $x \to +\infty$, l'enunciato da dimostrare diventa quindi il seguente:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \text{ esiste} \iff \lim_{n\to+\infty} F(n) \text{ esiste.}$$

---

[1] Si intende che in questo limite la variabile n è *intero*.
[2] Questa è una variante del teorema di confronto serie–integrale che si applica anche a funzioni f non decrescenti.

L'implicazione "⇒" è ovviamente vera mentre l'implicazione "⇐" segue dal fatto che

$$\lim_{x\to+\infty} \big(F(x) - F(\lfloor x \rfloor)\big) = 0\,.$$ [3]

Infatti per il teorema di Lagrange esiste $\tilde{x} \in [x, \lfloor x \rfloor]$ tale che

$$F(x) - F(\lfloor x \rfloor) = F'(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$$

e ora basta osservare che $\tilde{x}$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e quindi $f(\tilde{x})$ tende a $L = 0$.

b) Ho già osservato che il comportamento dell'integrale improprio I coincide con quello del limite di $F(x)$ per $x \to +\infty$, che per il punto a) coincide con quello del limite di $F(n)$ per $n \to +\infty$, che infine coincide con il comportamento della serie la cui somma parziale n-esima vale $F(n)$, cioè

$$S' := \sum_{n=1}^{+\infty} F(n+1) - F(n)\,.$$

Mi basta dunque dimostrare che le serie S ed S' hanno lo stesso comportamento.

Per farlo chiamo a_n la differenza tra gli addendi di S' e quelli di S, vale a dire

$$a_n := \big(F(n+1) - F(n)\big) - f(n)\,,$$ [4]

e dimostro che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \tag{4}$$

Da questa affermazione segue che la serie

$$S'' := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge ad un numero finito e quindi

$$\lim_{N\to+\infty} S'_N = \lim_{N\to+\infty} (S_N + a_n) = \lim_{N\to+\infty} S_N + S''\,.$$ [5]

Pertanto il limite di S'_N ha lo stesso comportamento di quello di S_N, ovvero la serie S' ha lo stesso comportamento di S.

Non mi resta che dimostrare (4). Esprimo $F(n+1)$ usando lo sviluppo di Taylor di F nel punto n con resto integrale:

$$\begin{aligned} F(n+1) &= F(n) + F'(n) + \int_0^1 (1-t)\, F''(n+t)\, dt \\ &= F(n) + f(n) + \int_0^1 (1-t)\, f'(n+t)\, dt\,, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$a_n = F(n+1) - F(n) - f(n) = \int_0^1 (1-t)\, f'(n+t)\, dt\,,$$

quindi

$$|a_n| \le \int_0^1 (1-t)\big|f'(n+t)\big|\, dt \le \int_0^1 \big|f'(n+t)\big|\, dt = \int_n^{n+1} \big|f'(x)\big|\, dx\,,$$

e infine

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \big|f'(x)\big|\, dx = \int_1^{+\infty} \big|f'(x)\big|\, dx < +\infty\,.$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. Si può far vedere che sotto l'ipotesi (3) l'integrale improprio I e la serie S possono avere tutti i possibili comportamenti.

[3] $\lfloor x \rfloor$ indica come al solito la parte intera di x, cioè il più grande intero minore o uguale a x.
[4] Questa scelta di a_n coincide con il suggerimento dato nel testo.
[5] S_N ed S'_N indicano le somme parziali delle serie S ed S' rispettivcamente.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare $r > 0$ ed $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $\sin x + \cos x = r \sin(x + \alpha)$.
   SOLUZIONE. Deve valere $r \cos\alpha = 1$ e $r \sin\alpha = 1$, cioè r e α sono le coordinate polari del punto $(1, 1)$, e quindi $r = \sqrt{2}$ e $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2. Determinare l'inversa della funzione $f(x) := x^2 - x$ ristretta alla semiretta $x \leq \frac{1}{2}$.
   SOLUZIONE. $f^{-1}(y) = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4y}}{2}$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 della funzione $f(x) := \sqrt{1 - 2x^2 - x^4}$.
   SOLUZIONE. $P_4(x) = 1 - x^2 - x^4$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $\dfrac{x^3 + 1}{\log(x^4 + 1)} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$
   SOLUZIONE. $a \geq 3$.

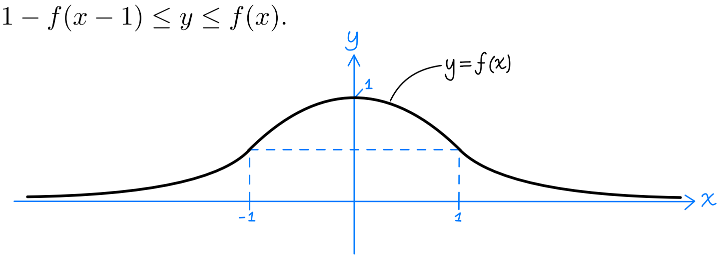
5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_2^{3^x} \frac{dt}{1 + t^8}$.
   SOLUZIONE. $f'(x) := \dfrac{\log 3 \cdot 3^x}{1 + 3^{8x}}$.

6. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $1 \leq x \leq 2$ e $(x + 1)^{-1/2} \leq y \leq x^{-1/2}$. Calcolare l'area di A.
   SOLUZIONE. $\text{area}(A) = \displaystyle\int_1^2 x^{-1/2} - (x+1)^{-1/2}\, dx = \Big| 2x^{1/2} - 2(x+1)^{1/2} \Big|_1^2 = 2\big(2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1\big)$.

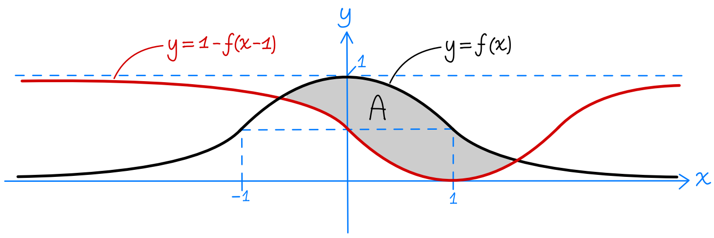
7. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2x = 2t$.
   SOLUZIONE. $x(t) = ce^{-2t} + t - \frac{1}{2}$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big[(n^2 + 1)^a - n^{2a}\big]$ converge ad un numero finito.
   SOLUZIONE. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2a-2}$ e quindi converge per $a < \frac{1}{2}$.

9. Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è riportato nella figura sotto. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $1 - f(x - 1) \leq y \leq f(x)$.



   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE

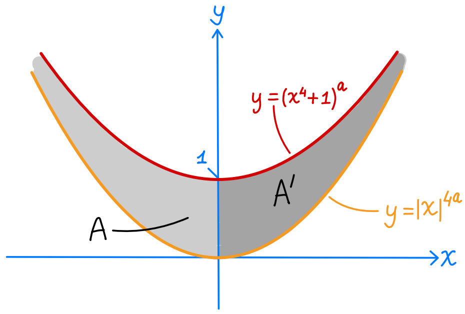
1 Dato $a > 0$, consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $|x|^{4a} \le y \le (x^4 + 1)^a$, e indichiamo con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse y.

a) Dire per quali a l'area di A è finita.

b) Dire per quali a il volume di V è finito.

SOLUZIONE. a) Osservo per cominciare che le funzioni $|x|^{4a}$ e $(x^4 + 1)^a$ sono pari, e quindi l'insieme A è simmetrico rispetto all'asse delle y. Detta dunque A' la parte di A a destra dell'asse delle y, l'area di A è il doppio di quella di A' ed in particolare è finita se e solo se lo è quella di A'.
Infine $|x|^{4a} < (x^4 + 1)^a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi la proiezione ortogonale di A sull'asse delle x coincide con l'asse stesso, mentre la proiezione di A' coincide con la semiretta $[0, +\infty)$.

A titolo illustrativo riporto il grafico delle due funzioni per un generico $a > \frac{1}{4}$; notare che questo disegno non ha alcun ruolo nella risoluzione dell'esercizio:



Per una variante della formula viosta a lezione, l'area di A' è data da

$$\text{area}(A') = \int_0^{+\infty} \underbrace{(x^4 + 1)^a - x^{4a}}_{f(x)} \, dx \,. \tag{1}$$

Questo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e la funzione integranda $f(x)$ è sempre positiva; per studiare il comportamento dell'integrale trovo la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e poi uso il criterio del confronto asintotico:

$$f(x) = (x^4 + 1)^a - x^{4a} = x^{4a}\big[\big(1 + x^{-4}\big)^a - 1\big] \sim x^{4a-4} \tag{2}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato la formula $(1 + t)^a - 1 \sim at$ per $t \to 0$, che segue dallo sviluppo di Taylor $(1 + t)^a = 1 + at + O(t^2)$).
Dalla (2) segue che l'integrale improprio in (1) si comporta come $\int_1^{\infty} x^{4a-4} dx$, ed in particolare è finito se e solo se $4a - 4 < -1$, vale a dire $a < \frac{3}{4}$.

In conclusione, l'area di A è finita se e solo se $a < \frac{3}{4}$.

b) Il solido V può essere ottenuto ruotando A' attorno all'asse delle y, e siccome A' sta a destra di questo asse, vale che

$$\text{volume}(V) = \int_0^{+\infty} 2\pi x \, f(x) \, dx \,. \tag{3}$$

Come prima, l'integrale è improprio semplice in $+\infty$, e usando lo sviluppo (2) ottengo che si comporta come $\int_1^{\infty} x^{4a-3} dx$, che è finito se e solo se $4a - 3 < -1$, vale a dire $a < \frac{1}{2}$.

In conclusione, il volume di V è finito se e solo se $a < \frac{1}{2}$.

2 Dire se esistono il massimo e il minimo di $\dfrac{n^2 - 6n + 8}{e^n}$ al variare di $n = 1, 2, \dots$ e in caso affermativo calcolarli.

SOLUZIONE. Nella soluzione di questo esercizio uso la lettera n per indicare una variabile intera, e la lettera x per indicare una variabile reale.

Osservo che $\frac{n^2-6n+8}{e^n} = f(n)$ dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è data da

$$f(x) := (x^2 - 6x + 8)\, e^{-x} .$$

Questa funzione tende a 0 per $x \to +\infty$ e tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$. Inoltre, studiando il segno della derivata

$$f'(x) = (-x^2 + 8x - 14)\, e^{-x} ,$$

ottengo che $f(x)$ è decrescente per $x \leq 4 - \sqrt{2} \simeq 2{,}58$ e per $x \geq 4 + \sqrt{2} \simeq 5{,}41$ (ed è crescente per $4 - \sqrt{2} \leq x \leq 4 + \sqrt{2}$).

Da quanto detto segue che la successione $f(n)$ è decrescente per $n \geq 6$, e di conseguenza

- il valore massimo di $f(n)$ per $n = 6, 7, \dots$ è $f(6) = 8e^{-6} \simeq 0{,}019$;
- il valore minimo di $f(n)$ per $n = 6, 7, \dots$ non esiste e l'estremo inferiore dei valori è 0, ottenuto per $n \to +\infty$.

Calcolando esplicitamente i valori di $f(n)$ per gli n rimanenti, cioè $n = 1, \dots, 5$, ottengo che

- il valore massimo di $f(n)$ per $n = 1, \dots, 5$ è $f(1) = 3e^{-1} \simeq 1{,}104$;
- il valore minimo di $f(n)$ per $n = 1, \dots, 5$ è $f(3) = -e^{-3} \simeq -0{,}050$.

Mettendo insieme quanto detto sopra ottengo infine che

- il valore massimo di $f(n)$ per $n = 1, 2, \dots$ è $f(1) = 3e^{-1} \simeq 1{,}104$;
- il valore minimo di $f(n)$ per $n = 1, 2, \dots$ è $f(3) = -e^{-3} \simeq -0{,}050$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Il problema consiste nel trovare il valore massimo e minimo di f relativamente all'insieme $\mathbb{Z} \cap [1, +\infty)$, e per farlo si può applicare una variante dell'algoritmo visto a lezione per la ricerca del valori massimo e minimo di f relativamente alla semiretta $[1, +\infty)$: si osserva per cominciare che la funzione f è derivabile in ogni $x \in [1, +\infty)$, e che la derivata si annulla per $x = 4 \pm \sqrt{2}$; quindi si confrontano i valori di f agli estremi della semiretta, cioè in 1 e $+\infty$, e *negli interi subito prima e subito dopo i punti* $x = 4 \pm \sqrt{2}$, vale a dire $n = 2, 3$ per $x = 4 - \sqrt{2} \simeq 2{,}58$ e $n = 5, 6$ per $x = 4 + \sqrt{2} \simeq 5{,}41$. Così facendo si ottiene di nuovo che il valore minimo di $f(n)$ è $f(3)$ mentre il valore massimo è $f(1)$.

Osservo tuttavia che questa variante dell'algoritmo per la ricerca del valore massimo e minimo non è stata giustificata a lezione.

3 Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione

$$2 \arctan x + \frac{1}{x} = a , \tag{4}$$

e indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni (se ne esiste almeno una).

a) Discutere il numero di soluzioni dell'equazione (1) al variare di $a \in \mathbb{R}$.

b) Specificare il dominio, i punti di discontinuità e i limiti significativi della funzione $a \mapsto x(a)$, e disegnarne il grafico.

c) Determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to +\infty$.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Posso riscrivere l'equazione (4) come $f(x) = a$ dove

$$f(x) := 2 \arctan x + \frac{1}{x} .$$

Si vede facilmente che la funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$, ed è dispari, strettamente positiva per $x > 0$, strettamente negativa per $x < 0$; inoltre

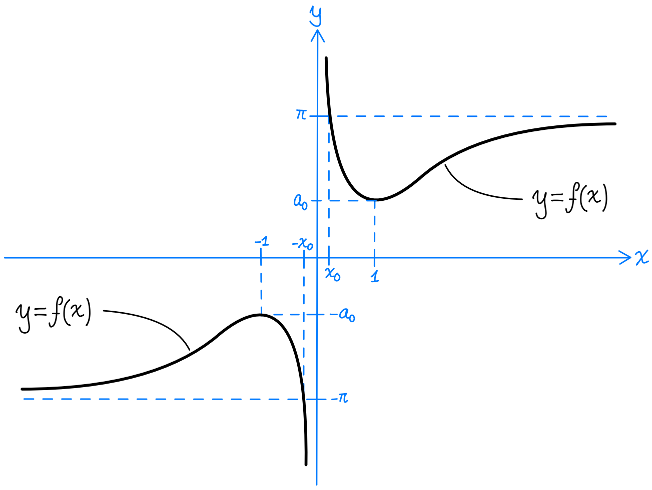
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi .$$

Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{2}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2(1 + x^2)}$$

ottengo che f è strettamente crescente nelle semirette $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$, ed è strettamente decrescente negli intervalli $[-1, 0)$ e per $(0, 1]$.

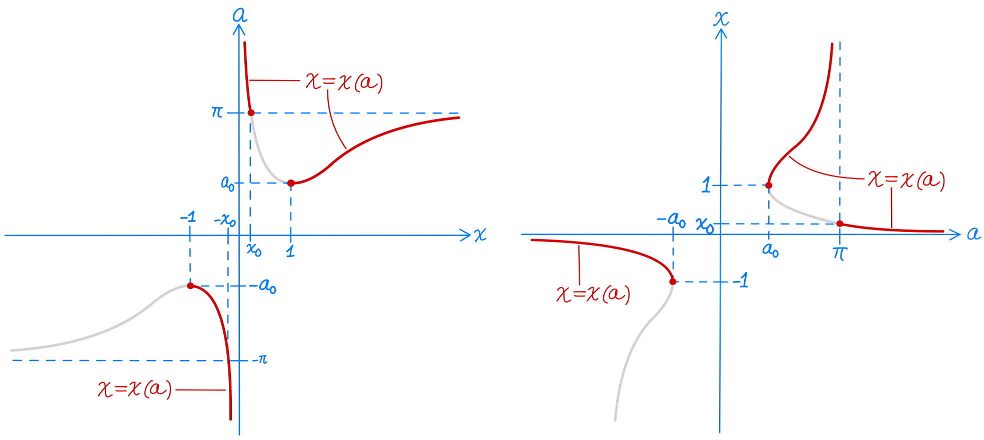
Sulla base di queste informazioni[1] traccio il grafico riportato sotto, dove $a_0 := f(1) = \frac{\pi}{4} + 1$ (le proporzioni non sono rispettate).



Da questo grafico risulta chiaro che l'equazione (4), vale a dire $f(x) = a$ ha

- 1 soluzione per $a \leq -\pi$;
- 2 soluzioni per $-\pi < a < -a_0$;
- 1 soluzione uguale a -1 per $a = -a_0$;
- 0 soluzioni per $-a_0 < a < a_0$;
- 1 soluzione uguale a 1 per $a = a_0$;
- 2 soluzioni per $a_0 < a < \pi$;
- 1 soluzione per $a \geq \pi$.

b) La figura sotto a sinistra contiene il grafico della funzione $a \mapsto x(a)$, visto come sottoinsieme del grafico di f; la figura a destra contiene lo stesso grafico con gli assi scambiati.



Dal grafico risulta chiaro che la funzione $x(a)$ è definita per $a \leq -a_0$ e per $a \geq a_0$, ed è sempre continua tranne che per $a = \pi$, dove è discontinua da sinistra e continua da destra; inoltre i limiti significativi (cioè quelli che non seguono dalla continuità) sono

$$\lim_{a \to -\infty} x(a) = 0^- , \quad \lim_{a \to \pi^-} x(a) = +\infty , \quad \lim_{a \to +\infty} x(a) = 0^+ .$$

[1] Volendo potrei anche studiare il segno della derivata seconda $f''(x) = \frac{-2x^4+4x^2+2}{(1+x^2)^2 x^3}$, ottenendo che fè strettamente convessa in $(-\infty, -x_0]$ e in $(0, x_0]$ dove $x_0 := \sqrt{1+\sqrt{2}}$, ed è strettamente concava in $[-x_0, 0)$ e in $[x_0, +\infty)$. Questa informazione è utile a disegnare un grafico più preciso, ma non ha alcun ruolo nella discussione del numero di soluzioni dell'equazione (4).

c) Utilizzando il fatto che $x(a)$ tende a 0 per $a \to +\infty$ ed il fatto che $f(x) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to 0$ ottengo che, per $a \to +\infty$,

$$a = f(x(a)) \sim \frac{1}{x(a)} \quad \text{cioè} \quad \text{p.p.}(x(a)) = \frac{1}{a}\,.$$

<u>Osservazioni</u>. Una dimostrazione rigorosa delle conclusioni riportate in fondo al punto a) può essere ottenuta usando il seguente enunciato ed alcune ovvie varianti (tutti corollari immediati del teorema dei valori intermedi): *sia* $f; [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e strettamente crescente, allora l'equazione* $f(x) = a$ *non ha soluzioni per* $a < f(x_0)$ *e per* $a > f(x_1)$*, ed ha una ed una sola soluzione per* $f(x_0) < a < f(x_1)$*.*

Una dimostrazione rigorosa delle conclusioni riportate in fondo al punto b) richiede il seguente enunciato, che però non è stato dimostrato durante il corso: *sia* I *un intervallo, sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione continua strettamente crescente (oppure strettamente decrescente), e sia* $J := f(I)$ *l'immagine di* f*; allora la funzione inversa* $f^{-1} : J \to I$ *è continua.*

$\boxed{4}$ a) Dimostrare che l'integrale superiore è subadditivo, cioè che date due funzioni limitate f, g sull'intervallo $[a, b]$, allora

$$\int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_a^{*b} g(x)\,dx \geq \int_a^{*b} f(x) + g(x)\,dx\,. \tag{5}$$

b) Far vedere con un esempio che la disuguaglianza in (5) può essere stretta.

c) Dimostrare che la disuguaglianza in (5) è un'uguaglianza se f è continua.

<u>Soluzione</u>. a) Sia $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ una partizione di $[a, b]$; per le somme di Riemann superiori corrispondenti a σ delle funzioni f, g ed $f + g$ vale che

$$S''(f, \sigma) + S''(g, \sigma) \geq S''(f + g, \sigma)\,. \tag{6}$$

Infatti

$$\begin{aligned} S''(f,\sigma) + S''(g,\sigma) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \Big[\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \Big] \\ &\geq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \big(f(x) + g(x)\big) = S''(f + g, \sigma)\,. \end{aligned}$$

(Nel primo passaggio ho usato definizione di somma superiore; nel terzo ho usato il seguente fatto elementare (che non dimostro): *dato un insieme* X *e due funzioni* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *allora*

$$\sup_{x \in X} f(x) + \sup_{x \in X} g(x) \geq \sup_{x \in X} \big(f(x) + g(x)\big)\,; \tag{7}$$

nel quarto ho usato di nuovo la definizione di somma superiore.)

Posso ora concludere la dimostrazione: dato $\varepsilon > 0$ uso la definizione di integrale superiore per scegliere due partizioni σ'_ε e σ''_ε tali che

$$\int^* f(x)\,dx + \varepsilon \geq S''(f, \sigma'_\varepsilon)\,, \quad \int^* g(x)\,dx + \varepsilon \geq S''(g, \sigma''_\varepsilon)\,,$$

e prendo una partizione σ più fine di entrambe; quindi, grazie alla disuguaglianza (6), ottengo

$$\begin{aligned} \int^* f(x)\,dx + \int^* g(x)\,dx + 2\varepsilon &\geq S''(f, \sigma'_\varepsilon) + S''(g, \sigma''_\varepsilon) \\ &\geq S''(f, \sigma) + S''(g, \sigma) \\ &\geq S''(f + g, \sigma) \geq \int_a^{*b} f(x) + g(x)\,dx\,, \end{aligned}$$

e cioè
$$\int^{*} f(x)\,dx + \int^{*} g(x)\,dx + 2\varepsilon \geq \int_a^{*b} f(x) + g(x)\,dx\,;$$
siccome ε è un numero positivo arbitrario, ho dimostrato la (5).

b) Sia f la funzione di Dirichlet, vale a dire la funzione indicatrice dei numeri razionali, e sia $g := -f$. Abbiamo visto a lezione che
$$\int_a^{*b} f(x)\,dx = b - a\,,$$
e ragionando allo stesso modo si ottiene che
$$\int_a^{*b} g(x)\,dx = 0\,;$$
quindi
$$\int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_a^{*b} g(x)\,dx = b - a > 0\,.$$
D'altra parte $f + g = 0$ e quindi
$$\int_a^{*b} f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b 0\,dx = 0\,.$$
c) Noto che f è uniformemente continua, e per ogni $\varepsilon > 0$ prendo $\delta_\varepsilon > 0$ come nella definizione di uniforme continuità. Preso allora un intervallo $X \subset [a,b]$ con lunghezza inferiore a δ_ε, per ogni $x, x' \in X$ vale $f(x') \leq f(x) + \varepsilon$, e quindi anche
$$f(x') + g(x) \leq f(x) + g(x) + \varepsilon \leq \sup_{x\in X}(f(x) + g(x)) + \varepsilon\,,$$
da cui segue che (ometto i dettagli)
$$\sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x) \leq \sup_{x\in X}(f(x) + g(x)) + \varepsilon\,, \tag{8}$$
che è in un certo senso l'opposto della disuguaglianza in (7).

Usando la disuguaglianza (8) ottengo che per ogni partizione $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ di $[a,b]$ con parametro di finezza $\delta(\sigma) \leq \delta_\varepsilon$ vale
$$S''(f,\sigma) + S''(g,\sigma) \leq S''(f+g,\sigma) + (b-a)\varepsilon\,,$$
che a sua volta è l'opposto (in un certo senso) della disuguaglianza (6).
Ricordando la definizione di integrale superiore ottengo quindi che
$$\int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_a^{*b} g(x)\,dx \leq S''(f+g,\sigma) + (b-a)\varepsilon$$
e poi
$$\int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_a^{*b} g(x)\,dx \leq \int_a^{*b} f(x) + g(x)\,dx + (b-a)\varepsilon\,;$$
siccome ε è un numero positivo arbitrario ottengo infine
$$\int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_a^{*b} g(x)\,dx \leq \int_a^{*b} f(x) + g(x)\,dx\,.$$
Da questa disuguaglianza segue l'uguaglianza in (5).

5 Dato $\bar{x} \in \mathbb{R}$, caratterizzare le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni successione $(x_n) \subset \mathbb{R}$ con $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$ vale $\limsup\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$.

<u>Soluzione</u>. Dati $\bar{x} \in \mathbb{R}$ ed $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dimostro che i seguenti enunciati sono equivalenti:

(i) per ogni successione $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tale che $\limsup x_n = \bar{x}$ vale $\limsup f(x_n) = f(\bar{x})$;
(ii) f è continua in $\bar{x}$ e $f(x) \leq f(\bar{x})$ per ogni $x < \bar{x}$.

Per la dimostrazione userò le seguenti proprietà del limsup: *data una successione* $(y_n) \subset \mathbb{R}$ *e* $L \in \mathbb{R}$, *allora*

- $\limsup y_n \leq L \Leftrightarrow$ *per ogni* $\varepsilon > 0$ *vale che* $y_n \leq L + \varepsilon$ *definitivamente;*

- $\limsup y_n \geq L \Leftrightarrow$ *per ogni* $\varepsilon > 0$ *vale che* $y_n \geq L - \varepsilon$ *frequentemente;*

Dimostro prima l'implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii).
Suppongo per assurdo che esista $x < \bar{x}$ tale che $f(x) > f(\bar{x})$, e prendo la seguente successione:

$$x_n := \begin{cases} \bar{x} & \text{per } n \text{ pari,} \\ x & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Tenendo conto che $x < \bar{x}$ e $f(\bar{x}) < f(x)$ ottengo

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \bar{x} \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$$

e dunque $\limsup f(x_n) \neq f(\bar{x})$, in contraddizione con (i).

Adesso suppongo per assurdo che f non sia continua in $\bar{x}$. Abbiamo visto a lezione che in tal caso posso trovare $\varepsilon > 0$ ed una successione (x_n) che tende a $\bar{x}$ tale che $|f(x_n) - f(\bar{x})| > \varepsilon$ per ogni n. Abbiamo allora due possibilità:

- $f(x_n) > f(\bar{x}) + \varepsilon$ frequentemente, e quindi $\limsup f(x_n) \geq f(\bar{x}) + \varepsilon$,
- $f(x_n) < f(\bar{x}) - \varepsilon$ definitivamente e quindi $\limsup f(x_n) \leq f(\bar{x}) - \varepsilon$;

in entrambi i casi $\limsup f(x_n) \neq f(\bar{x})$, in contraddizione con (i).

Dimostro ora l'implicazione (ii) $\Rightarrow$ (i). Dati $\varepsilon > 0$ e (x_n) tale che $\limsup x_n = \bar{x}$, devo far vedere che

$$f(x_n) \geq f(\bar{x}) - \varepsilon \text{ frequentemente e } f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \varepsilon \text{ definitivamente.}$$

Prendo $\delta_\varepsilon > 0$ come nella definizione di continuità di f in $\bar{x}$.
Siccome $\limsup x_n = \bar{x}$ allora $x_n \leq \bar{x} + \delta_\varepsilon$ definitivamente e $x_n \geq \bar{x} - \delta_\varepsilon$ frequentemente, da cui segue che $|x_n - \bar{x}| \leq \delta_\varepsilon$ frequentemente, e quindi $|f(x_n) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$ frequentemente per la continuità di f in $\bar{x}$; in particolare $f(x_n) \geq f(\bar{x}) - \varepsilon$ frequentemente.

Definitivamente vale che $x_n \leq \bar{x} + \delta_\varepsilon$, e questo disuguaglianza implica una delle seguenti possibilià:

- $x_n \leq \bar{x}$, e quindi $f(x_n) \leq f(\bar{x}_n)$;
- $\bar{x} < x_n \leq \bar{x} + \delta_\varepsilon$, quindi $|f(x_n) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$;

In entrambi i casi vale che $f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \varepsilon$; ho quindi dimostrato che quest'ultima disuguaglianza vale definitivamente.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Aggiungere l'ipotesi mancante nel seguente enunciato: *Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua; allora f ammette un valore minimo.*
   SOLUZIONE. Serve che l'intervallo I sia chiuso (e limitato).

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(1+x)}{\log x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4\log(1+x^2)-\log(1+4x^2)}{x^4}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x+\sin x}$.
   SOLUZIONE. a) non esiste, b) 6, c) 0.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x^3 + ax^2 + x$ è crescente su $\mathbb{R}$.
   SOLUZIONE. La derivata $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$ deve essere positiva o nulla; il valore minimo della derivata è $-\frac{1}{3}a^2 + 1$ ed imponendo che sia positivo o nullo si ottiene $-\sqrt{3} \le a \le \sqrt{3}$.

4. Determinare l'immagine della funzione $f(x) := x^4 e^{-x^2}$.
   SOLUZIONE. La funzione è definita su $\mathbb{R}$ e l'immagine $f(\mathbb{R})$ è l'intervallo delimitato dal valore massimo e minimo di f;[1] quindi $f(\mathbb{R}) = \big[0, 4e^{-2}\big]$.

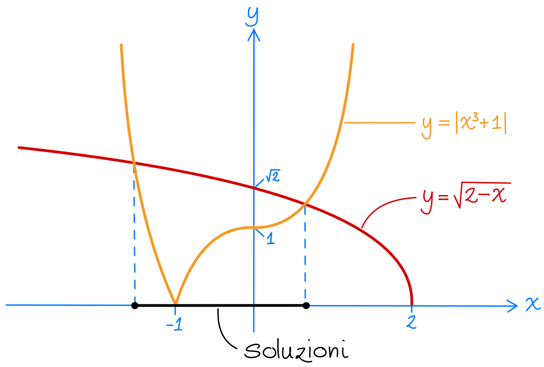
5. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{2x^3+4}{x^2-1}dx$.
   SOLUZIONE. $\displaystyle\int \frac{2x^3+4}{x^2-1}dx = \int 2x + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+1}dx = x^2 + 3\log|x-1| - \log|x+1| + c$.

6. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $|y| \le \dfrac{4}{1+4x^2}$. Calcolare l'area di A.
   SOLUZIONE. $\displaystyle \text{area}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{1+4x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+y^2}\,dy = \Big|2\arctan y\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi$.[2]

7. Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n\, x^{n^2+1}$.
   SOLUZIONE. $\displaystyle R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2+1]{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{n}{n^2+1}} = \exp\Big(\lim_{n\to+\infty} -\tfrac{n}{n^2+1}\log n\Big) = \exp(0) = 1$.

8. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \tan x$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = -\frac{\pi}{6}$.
   SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili che si riduce a $\log(|\sin x|) = t + c$; dalla condizione iniziale si ricava $c = -\log 2$, e quindi $x(t) = -\arcsin\big(\frac{1}{2}e^t\big)$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $|x^3 + 1| \le \sqrt{2-x}$.
   SOLUZIONE.



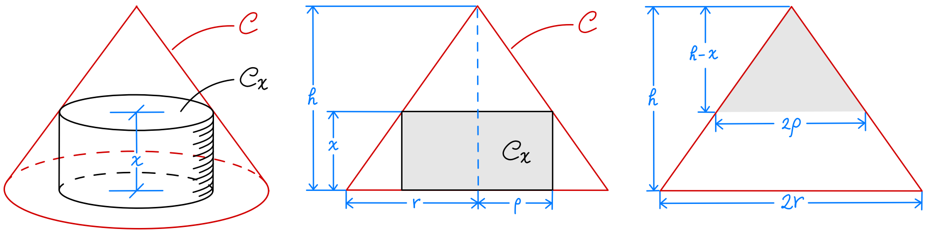
[1] Se il valore massimo/minimo non esiste, va sostituito dall'estremo superiore/inferiore dei valori.
[2] Nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $y = 2x$.

SECONDA PARTE

1 a) Consideriamo un cono C con altezza h, base B e raggio di base r. Tra tutti i cilindri contenuti in C, e con base contenuta in B, trovare quello di volume massimo. (Sia il cono C che i cilindri sono circolari e retti.)

b) Rispondere alla stessa domanda quando C è cono circolare ma non necessariamente retto. [*Detto P il piano che contiene la base B e detta p la proiezione ortogonale del vertice del cono su P , conviene distinguere il caso in cui p appartiene a B e il caso in cui non.*]

<u>SOLUZIONE</u>. Dato $x \in [0, h]$, tra tutti i cilindri ammissibili di altezza x, quello di volume massimo è quello con area di base massima, ovvero quello la cui faccia superiore coincide con la sezione del cono ad altezza x.[3] Indico con C_x questo cilindro, e con ρ il suo raggio di base.



Guardando il triangolo a destra nella figura sopra si vede che vale la seguente proporzione:

$$\frac{2\rho}{2r} = \frac{h-x}{h} \,,$$

da cui riceva che $\rho = r\big(1 - \frac{x}{h}\big)$; da questo segue che

$$v(x) := \text{volume}(C_x) = \pi\rho^2 x = \pi r^2 \Big(1 - \frac{x}{h}\Big)^2 x \,.$$

Devo quindi trovare il valore massimo della funzione $v(x)$ relativamente all'insieme delle altezza x ammissibili, vale a dire per $x \in [0, h]$. Per farlo applico il solito algoritmo: la derivata

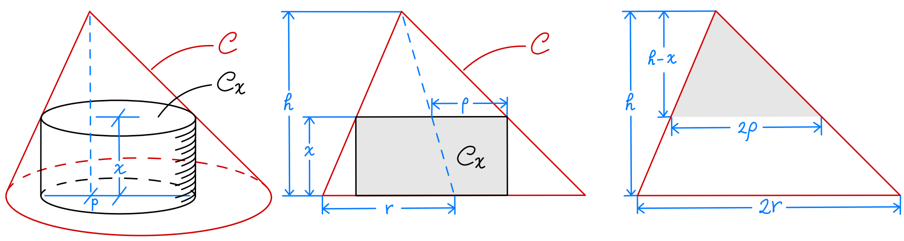
$$v'(x) = \pi r^2 \Big(1 - \frac{x}{h}\Big)\Big(1 - \frac{3x}{h}\Big)$$

si annulla all'interno dell'intervallo $[0, h]$ solo in $\bar{x} := \frac{1}{3}h$, e confrontando i valori di v in questo punto e agli estremi dell'intervallo, vale a dire

$$v(0) = v(h) = 0 \,, \quad v(\bar{x}) = \frac{4\pi}{27} r^2 h \,,$$

ottengo che il cilindro ammissibile di volume massimo è il cilindro $C_{\bar{x}}$.

b) Comincio dal caso in cui p appartiene alla base B del cono.
Dato $x \in [0, h]$, anche in questo caso tra tutti i cilindri ammissibili di altezza x quello di volume massimo è il cilindro C_x la cui base superiore coincide con la sezione del cono ad altezza x.



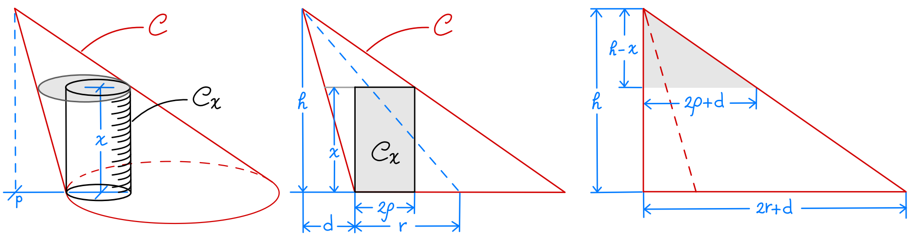
Guardando il triangolo a destra nella figura sopra si vede che vale la stessa proporzione che nel caso del cono retto, vale a dire

$$\frac{2\rho}{2r} = \frac{h-x}{h} \,,$$

[3] Tra i cilindri ammissibili ammetto anche quelli degeneri; in particolare il cilindro C_x è degenere per $x = 0$ (coincide con la base B del cono) e per $x = h$ (è un segmento verticale). Tuttavia i cilindri di volume massimo che trovo non sono degeneri.

Dunque il raggio di base ρ del cilindro C_x è lo stesso che nel caso del cono retto, da cui segue che il volume di C_x è lo stesso che nel caso del cono retto, e in particolare il cilindro di volume massimo è $C_{\bar{x}}$ con $\bar{x} = \frac{1}{3}h$.

Passo ora al caso in cui p non appartiene a B, ed indico con d la distanza di p da B.
In questo caso il cilindro di altezza x la cui base superiore coincide con la sezione del cono ad altezza x non è contenuto nel cono, e quindi non è un cilindro ammissibile.



Dalla figura sopra si ricava che non ci sono cilindri ammissibili se $x > h_0$ dove

$$h_0 := \frac{d}{2r+d} \,.$$

Per $x \in [0, h_0]$, si vede che tra tutti i cilindri ammissibili di altezza x quello di volume massimo è quello la cui faccia superiore è il più grande cerchio contenuto nella sezione del cono ad altezza x la cui proiezione sul piano P è contenuta nella base B; come prima chiamo C_x tale cilindro. Dal triangolo a destra nella figura sopra si ottiene la seguente proporzione,

$$\frac{2\rho + d}{2r + d} = \frac{h - x}{h} \,,$$

da cui si ricava che $\rho = r - \big(r + \frac{d}{2}\big)\frac{x}{h}$, e da questo segue che

$$v(x) := \text{volume}(C_x) = \pi \rho^2 x = \pi \left[r - \left(r + \frac{d}{2} \right) \frac{x}{h} \right]^2 x \,.$$

La derivata

$$v'(x) = \pi \left[r - \left(r + \frac{d}{2} \right) \frac{x}{h} \right] \cdot \left[r - \left(r + \frac{d}{2} \right) \frac{3x}{h} \right]$$

si annulla all'interno dell'intervallo $[0, h_0]$ solo in

$$\bar{x} := \frac{2rh}{6r + d} \,,$$

e confrontando i valori di v in questo punto e agli estremi dell'intervallo, vale a dire

$$v(0) = v(h_0) = 0 \,, \quad v(\bar{x}) = \frac{8\pi}{27} \cdot \frac{r^3 h}{2r + d} \,.$$

Pertanto il cilindro di volume massimo tra quelli ammissibili è $C_{\bar{x}}$.

$\boxed{2}$ Dati $a < b < c$ ed una funzione $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ limitata, dimostrare che

$$\int^{*c}_{a} f(x)\,dx = \int^{*b}_{a} f(x)\,dx + \int^{*c}_{b} f(x)\,dx$$

dove ${}^*\!\!\int$ indica come al solito l'integrale di Riemann superiore.[4]

<u>SOLUZIONE</u>. L'osservazione chiave è la seguente: sia σ' una qualunque partizione di $[a, b]$ e sia σ'' una qualunque partizione di $[b, c]$; allora $\sigma := \sigma' \cup \sigma''$ è una partizione di $[a, c]$ e le somme di Riemann superiori relative a questa partizioni soddisfano

$$S''(f, \sigma) = S''(f, \sigma') + S''(f, \sigma'') \tag{1}$$

[4] Ovviamente vale anche l'analoga uguaglianza per gli integrali inferiori.

(la dimostrazione è immediata a partire dalla definizione di somma superiore).
Da questa uguaglianza e dalla definizione dell'integrale superiore come estremo inferiore delle somme superiori ottengo

$$\int_a^{*c} f(x)\,dx \le S''(f,\sigma') + S''(f,\sigma'')\,;$$

prendendo quindi l'estremo inferiore del termine di destra tra tutte le possibili partizioni σ' di $[a,b]$ ottengo

$$\int_a^{*c} f(x)\,dx \le \int_a^{*b} f(x)\,dx + S''(f,\sigma'')\,;$$

prendendo ora l'estremo inferiore del termine di destra tra tutte le possibili partizioni σ'' di $[b,c]$ ottengo infine

$$\int_a^{*c} f(x)\,dx \le \int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_b^{*c} f(x)\,dx\,.$$

Mi resta da dimostrare la disuguaglianza opposta.
Data una qualunque partizione σ di $[a,b]$, considero la partizione $\widehat{\sigma}$ ottenuta aggiungendo b a σ ed osservo che posso scrivere $\widehat{\sigma} = \sigma' \cup \sigma''$ con σ' partizione di $[a,b]$ e σ'' partizione di $[b,c]$.
Siccome $\widehat{\sigma}$ è più fine di σ, vale che $S''(f,\sigma) \ge S''(f,\widehat{\sigma})$, ed usando la formula (1) e la definizione di integrale superiore ottengo

$$S''(f,\sigma) \ge S''(f,\widehat{\sigma}) = S''(f,\sigma') + S''(f,\sigma'') \ge \int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_b^{*c} f(x)\,dx\,,$$

e quindi

$$S''(f,\sigma) \ge \int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_b^{*c} f(x)\,dx\,;$$

prendendo ora l'estremo inferiore del termine di sinistra su tutte le partizioni σ di $[a,b]$ ottengo

$$\int_a^{*c} f(x)\,dx \ge \int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_b^{*c} f(x)\,dx\,,$$

e questo conclude la dimostrazione.

3 Dati $a,b \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale:

$$t^2\ddot{x} + at\dot{x} + bx = 0\,. \tag{*}$$

Trovare la soluzione generale di (*) nei seguenti casi: a) $a=2$, $b=-6$; b) $a=b=5$.
[*Suggerimento: cercare soluzioni della forma* t^λ.]

<u>Soluzione</u>. Per una funzione x della forma $x = t^\lambda$ vale $\dot{x} = \lambda t^{\lambda-1}$ e $\ddot{x} = \lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}$, e quindi l'equazione (*) diventa

$$(\lambda^2 + (a-1)\lambda + b)\,t^\lambda = 0\,,$$

che è verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0\,. \tag{2}$$

a) Per $a=2$ e $b=-6$ l'equazione (2) diventa

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

e le soluzioni sono $\lambda = 2, -3$. Pertanto t^2 e t^{-3} sono soluzioni dell'equazione (*) e sono linearmente indipendenti nel senso che non sono una il multiplo dell'altra (infatti il rapporto non è costante in t).

Siccome l'equazione differenziale (*) è lineare, del secondo ordine, ed omogenea, so dalla teoria che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di dimensione 2, e quindi le soluzioni t^2 e t^{-3} ne formano una base. In altre parole la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 t^2 + c_2 t^{-3} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

b) Per $a=b=5$ l'equazione (2) diventa

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

e non ha soluzioni reali, mentre le soluzioni complesse sono $\lambda = -2 \pm i$. Il problema è che non è chiaro che senso abbia alle espressioni t^{-2+i} e t^{-2-i}. Procedendo in modo puramente formale ottengo

$$t^{-2+i} = t^{-2}\, t^i = t^{-2}\left(e^{\log t}\right)^i = t^{-2}\, e^{i\log t} = t^{-2}(\cos(\log t) + i\sin(\log t))\,.$$

Questo calcolo *suggerisce* che

$$z_1 := t^{-2}(\cos(\log t) + i\sin(\log t))$$

sia una soluzione di (*) a *valori complessi*; partendo invece da t^{-2-i} ottengo come possibile soluzione

$$z_2 := t^{-2}(\cos(\log t) - i\sin(\log t))\,.$$

Delle possibili soluzioni a *valori reali* sono date dalle seguenti combinazioni lineari di z_1 e z_2:

$$x_1 := \tfrac{1}{2}z_1 + \tfrac{1}{2}z_2 = t^{-2}\cos(\log t)\,, \quad x_2 := \tfrac{1}{2i}z_1 - \tfrac{1}{2i}z_2 = t^{-2}\sin(\log t)\,. \tag{4}$$

Sostituendo queste espressioni in (*) verifico che x_1 e x_2 sono effettivamente soluzioni. Pertanto la soluzione generale di (*) è

$$x(t) = t^{-2}\big(c_1\sin(\log t) + c_2\cos(\log t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. L'equazione (*) è del secondo ordine e lineare, e scritta in forma standard (cioè con coefficiente 1 davanti a $\ddot{x}$) diventa

$$\ddot{x} + \frac{a}{t}\dot{x} + \frac{b}{t^2}x = 0\,.$$

In particolare i coefficienti sono definiti e continui per $t \neq 0$, e dunque le soluzioni sono definite (almeno) sulla semiretta $t > 0$ e sulla semiretta $t < 0$.
Faccio ora notare che le soluzioni in (3) sono definite su entrambe le semirette, mentre le soluzioni in (5) sono definite solo per $t > 0$, e quindi sono in un certo senso "incomplete". Tuttavia si può verificare che le funzioni

$$t^{-2}\cos(\log|t|)\,, \quad t^{-2}\sin(\log|t|) \tag{6}$$

sono soluzioni di (*) per $a = b = 5$ e quindi la soluzione generale "completa" di (*) è

$$x(t) = t^{-2}\big(c_1\sin(\log|t|) + c_2\cos(\log|t|)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per $t > 0$ le soluzioni in (6) coincidono con quelle ottenute in precedenza in (4), e quindi ci si può chiedere se la stessa procedura formale che ha permesso di ottenere le soluzioni in (4) permette anche di ottenere quelle in (6) per $t < 0$. La risposta è affermativa: basta scrivere $t < 0$ nella forma $t = e^{\log|t| + \pi i}$.

$\boxed{4}$ Consideriamo la funzione

$$f(x) := \int_x^{2x^2} \exp(t^2)\, dt\,.$$

a) Trovare l'insieme di definizione di f, il segno , ed i limiti significativi.

b) Scrivere f' e lo sviluppo di Taylor all'ordine 5 di f in 0.

c) Scrivere f'' e dimostrare che f è una funzione convessa.

d) Trovare una funzione g della forma $g(x) = ax^b\exp(cx^d)$ tale che $g(x) \sim f(x)$ per $x \to +\infty$.

<u>SOLUZIONE</u>. a) L'integrale che definisce $f(x)$ è ben definito (come integrale proprio) per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi l'insieme di definizione di f è tutto $\mathbb{R}$.
Poiché inoltre la funzione integranda $\exp(t^2)$ è sempre strettamente positiva si ha che

- $f(x) = 0$ se e solo se gli estremi di integrazione x e $2x^2$ coincidono, cioè $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$;
- $f(x) > 0$ se e solo se $x < 2x^2$, cioè $x < 0$ e $x > \frac{1}{2}$;
- $f(x) < 0$ nei casi rimanenti, cioè $0 < x < \frac{1}{2}$.

Infine $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Un modo veloce per dimostrarlo è usare la stima $\exp(t^2) \geq 1$, che quando $x \leq 2x^2$, cioè quando $x \leq 0$ oppure $x \geq \frac{1}{2}$, dà

$$f(x) := \int_x^{2x^2} \exp(t^2)\,dt \geq \int_x^{2x^2} dt = 2x^2 - x \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

b) Una ben nota formula dà

$$f'(x) = 4x\,\exp(4x^4) - \exp(x^2)\,.$$

Sappiamo che la derivata del polinomio di Taylor di grado 5 di f coincide con il polinomio di Taylor di grado 4 della derivata f', vale a dire

$$P_5 f(x))' = P_4 f'(x)\,, \tag{7}$$

e il secondo polinomio può essere facilmente ottenuto dallo sviluppo di Taylor dell'esponenziale. Infatti

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x\,\exp(4x^4) - \exp(x^2) \\ &= 4x(1 + O(x^4)) - \big(1 + x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + O(x^6)\big) \\ &= -1 + 4x - x^2 - \tfrac{1}{2}x^4 + O(x^5) \end{aligned}$$

e questo implica che

$$P_4 f'(x) = -1 + 4x - x^2 - \tfrac{1}{2}x^4\,.$$

Tenendo conto della formula (7) e del fatto che $f(0) = 0$ ottengo infine

$$P_5 f(x) = -x + 2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{10}x^5\,.$$

c) La derivata seconda di f è

$$f''(x) = (4 + 64\,x^4)\,\exp(4x^4) - 2x\,\exp(x^2)\,, \tag{8}$$

e devo dimostrare che è strettamente positiva per ogni x.
Divido questa dimostrazione in tre casi:

- se $x \leq 0$ allora $f''(x)$ è strettamente positivo in quanto somma di due addenti entrambi positivi (di cui il primo strettamente positivo);
- se $x \geq \frac{1}{2}$, vale che $4x^4 \geq x^2$ e $64\,x^4 \geq 8x$, quindi il primo addendo nella formula (8) soddisfa $(4+64\,x^4)\,\exp(4x^4) \geq (4+8x)\,\exp(x^2)$, e dunque $f''(x) \geq (4+6x)\exp(x^2) > 0$;
- se $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ allora valgono le stime $\exp(4x^4) \geq 1$ e $\exp(x^2) \leq \exp(1/4) \leq e$, e quindi $f''(x) \geq (4 + 64\,x^4) - 2xe \geq 4 - e > 0$.

d) Devo trovare g della forma $g(x) = ax^b \exp(cx^d)$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

Osservo che per $x \to +\infty$ la funzione f tende ad infinito, e la funzione g tende a $+\infty$ se $a, c, d > 0$. In questo caso posso applicare il teorema di de L'Hôpital, ottenendo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x\,\exp(4x^4) - \exp(x^2)}{(acd\,x^{b+d-1} + ab\,x^{b-1})\exp(cx^d)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x\,\exp(4x^4)}{acd\,x^{b+d-1}\exp(cx^d)} \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato il principio di sostituzione degli infiniti). Osservo infine che l'ultimo limite vale 1 se il numeratore e il denominatore coincidono, cioè se $acd = 4$, $b+d-1 = 1$, $c = 4$ e $d = 4$, ovvero se $a = \frac{1}{4}$, $b = -2$ e $c = d = 4$.[5]
In conclusione

$$f(x) \sim \tfrac{1}{4}x^{-2}\exp(4x^4) \quad \text{per } x \to +\infty.$$

[5] Noto che la condizione $a, c, d > 0$, che ci ha permesso di usare il teorema di de L'Hôpital, è soddisfatta.

5 Data una successione (a_n) di numeri strettamente positivi, consideriamo la serie a segni alterni

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \,.$$

a) Dimostrare che se la successione (a_n) è crescente allora la serie S non esiste.

b) Far vedere che la conclusione al punto a) non vale se si sostituisce l'ipotesi che (a_n) è crescente con l'ipotesi che (a_n) converge ad un numero strettamente positivo.

Soluzione. a) La dimostrazione è simile a quella del criterio di convergenza di Leibniz. Per ogni $N = 0, 1, 2, \dots$ indico con S_N la somma parziale N-esima di S, vale a dire

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n \,.$$

Osservo quindi che per N pari vale

$$S_{N+2} = S_N - a_{N+1} + a_{N+2} \geq S_N$$

(nel secondo passaggio ho usato l'ipotesi che (a_n) sia crescente); questo significa che la sottosuccessione (S_{2m}) è crescente, e allo stesso modo si dimostra che la sottosuccessione di (S_{2m+1}) è decrescente. Inoltre $S_1 = a_0 - a_1 < a_0 = S_0$.
Riassumendo

$$\dots S_7 \leq S_5 \leq S_3 \leq S_1 < S_0 \leq S_2 \leq S_4 \leq S_6 \dots$$

Quindi

$$\lim_{m\to+\infty} S_{2m+1} \leq S_1 < S_0 \leq \lim_{m\to+\infty} S_{2m} \,,$$ [6]

in particolare i due limiti sono diversi e questo significa che $S := \lim_{N\to+\infty} S_N$ non esiste.

b) Do un esempio di successione (a_n) a termini positivi e con limite strettamente positivo tale che la serie a segni alterni S diverge a $+\infty$ (ed in particolare esiste).
Pongo

$$a_n := 2 + (-1)^n \frac{1}{n+1} \,.$$

È chiaro che $a_n > 0$ per ogni n e che $a_n \to 2$ per $n \to +\infty$. Inoltre, tenendo conto che

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{per } N \text{ pari,} \\ 0 & \text{per } N \text{ dispari,} \end{cases}$$

ottengo che le somme parziali della serie S soddisfano

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} \,.$$

Osservo ora che l'ultimo termine in questa catena di disuguaglianze è la somma parziale della serie armonica e quindi tende a $+\infty$ per $N \to +\infty$; per confronto lo stesso vale per S_N, e questo significa che la serie S esiste e vale $+\infty$.

[6] I due limiti esistono per le proprietà di monotonia appena enunciate.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Sia $f(x) := xe^{-x/2}$. Determinare l'immagine secondo f della semiretta $[1, +\infty)$.
   SOLUZIONE. Il valore massimo di $f(x)$ per $x \geq 1$ è $f(2) = \frac{2}{e}$, il valore minimo non esiste e l'estremo inferiore è 0. Pertanto $f\big([1, +\infty)\big) = \big(0, \frac{2}{e}\big]$.

2. Dire per quali $a > 0$ la funzione $f(x) := (x - 1)\, e^{ax}$ risulta crescente sulla semiretta $x \geq 0$.
   SOLUZIONE. La derivata $f'(x) = (ax - a + 1)\, e^{ax}$ soddisfa $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 1 - \frac{1}{a}$; quindi f è crescente su $[0, +\infty)$ se e solo se $1 - \frac{1}{a} \leq 0$, vale a dire $a \leq 1$.

3. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 in 0 di $f(x) := (1 + x^2) \log(1 - 2x^2 + x^4)$.
   SOLUZIONE. $P_4(x) = -2x^2 - 3x^4$.

4. Determinare la successione (x_n) tale che $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_{n+2} = 8\, x_{n+1} - 15\, x_n$ per $n = 0, 1, \dots$

   SOLUZIONE. La soluzione generale dell'equazione ricorsiva è $x_n = c_1 3^n + c_2 5^n$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R},]$; quella che soddisfa $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ è $x_n = 2(5^n - 3^n)$.

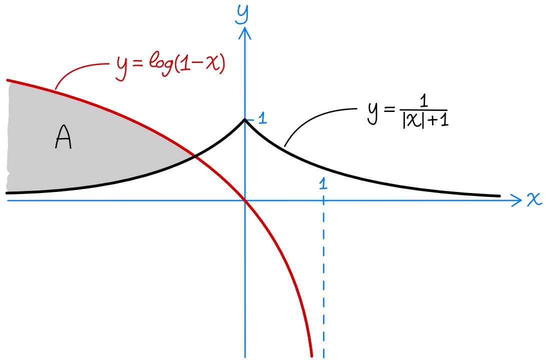
5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2tx = 4t^3$ tale che $x(0) = 0$.
   SOLUZIONE. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x(t) = e^{-t^2} \int 4t^3\, e^{t^2} dt = 2t^2 - 2 + ce^{-t^2}$; la condizione $x(0) = 0$ è soddisfatta per $c = 2$; quindi $x(t) = 2t^2 - 2 + 2e^{-t^2}$.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.
   SOLUZIONE. La serie coincide con l'opposto della serie di Taylor di $\log(1 + x)$ calcolata per $x = -\frac{1}{2}$, e quindi vale $-\log\big(1 - \frac{1}{2}\big) = \log 2$.

7. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^a)^{2a}}$ è finito.
   SOLUZIONE. L'integrale è improprio in 1; usando il cambio di variabile $x = 1 - y$ l'integrale diventa improprio in 0, e usando lo sviluppo $(1 - y)^a = 1 - ay + o(y)$ ottengo:
   $$\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^a)^{2a}} = \int_0^1 \frac{dy}{(1 - (1 - y)^a)^{2a}} = \int_0^1 \frac{dy}{(ay + o(y^2))^{2a}} \approx \int_0^1 \frac{dy}{y^{2a}} \quad \text{finito per } a < \tfrac{1}{2}.$$

8. Trovare un'equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti (reali) ed omogenea che abbia come soluzione la funzione $x(t) = t(\cos t + e^{2t})$.
   SOLUZIONE. Il polinomio caratteristico $P(\lambda)$ dell'equazione deve avere soluzioni i e 2 con molteplicità 2. Il più semplice polinomio con questa proprietà è $P(\lambda) := (\lambda^2 + 1)^2(\lambda - 2)^2$. L'equazione è $D^6x - 4D^5x + 6D^4x - 8D^3x + 9D^2x - 4Dx + 4x = 0$.

9. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\dfrac{1}{1 + |x|} \leq y \leq \log(1 - x)$.
   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

1 Sia (a_n) una successione di numeri reali e $L \in \mathbb{R}$. Dimostrare che sono fatti equivalenti:
(i) (a_n) converge a L per $n \to +\infty$;
(ii) esiste una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che a) $g(x) \to 0$ per $x \to 0$ e b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $|a_n - L| \le g(\varepsilon)$ per $n \ge n_\varepsilon$.

SOLUZIONE. Per dimostrare che (i) implica (ii), basta prendere $g(x) = x$.

Dimostro ora che (ii) implica (i). Sia $\varepsilon > 0$: per l'ipotesi a) esiste $\varepsilon' > 0$ tale che $g(\varepsilon') \le \varepsilon$, e per l'ipotesi b) esiste $n_{\varepsilon'}$ tale che $|a_n - L| \le g(\varepsilon')$ per $n \ge n_{\varepsilon'}$. Mettendo insieme le due disuguaglianze ottengo che $|a_n - L| \le \varepsilon$ per $n \ge n_{\varepsilon'}$; ho quindi dimostrato che $a_n \to L$.

2 Dato $a \in \mathbb{R}$, poniamo $x_n := \exp(n^a) - \exp(\sin(n^a))$ per $n = 1, 2, \dots$

a) Discutere il limite della successione (x_n) per $n \to +\infty$;

b) Discutere il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

SOLUZIONE. a) Scrivo $x_n = f(n^a)$ dove ho posto

$$f(x) := e^x - e^{\sin x}\,.$$

Distinguo ora tre casi:

Caso $a > 0$. Siccome $n^a \to +\infty$ per $n \to +\infty$, ho che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f(n^a) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

(l'ultimo limite segue dal fatto che e^x tende a $+\infty$ mentre la funzione $e^{\sin x}$ è limitata.)

Caso $a = 0$. In questo caso $x_n = f(1)$ per ogni n e quindi il limite è $f(1)$.

Caso $a < 0$. Siccome $n^a \to 0$ per $n \to +\infty$, ho che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f(n^a) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

(la penultima uguaglianza segue dal fatto che f è continua in 0).

b) Per $a \ge 0$ il limite di x_n per $n \to +\infty$ è strettamente positivo (infatti $f(1) > 0$) e quindi la serie diverge a $+\infty$.

Per $a < 0$ vale che $x_n \to 0$ e quindi servono informazioni più precise per determinare il comportamento della serie. Cerco la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$:

$$f(x) = e^x - e^{\sin x} = e^x(1 - e^{-x+\sin x}) \sim 1 - e^{-x+\sin x} \sim x - \sin x \sim \tfrac{1}{6}x^3$$

(nel terzo passaggio ho usato che $e^x \sim 1$ per $x \to 0$, e che $1 - e^y \sim -y$ per $y \to 0$; nel quarto passaggio ho usato che $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$).

Pertanto $x_n = f(n^a) \sim \frac{1}{6}n^{3a}$, da cui segue che la successione x_n è definitivamente positiva, e per il criterio del confronto asintotico

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \approx \sum_{n=1}^{+\infty} n^{3a} = \begin{cases} +\infty & \text{per } a \ge -\frac{1}{3}; \\ \text{numero finito} & \text{per } a < -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Riassumendo: la serie converge ad un numero finito per $a < -\frac{1}{3}$ e diverge a $+\infty$ altrimenti.

3 Sia T la traiettoria di un punto nel piano che si muove con legge oraria $P(t) = (\cos t, 2\sin t\cos t)$ per $t \in \mathbb{R}$, sia A la parte di piano delimitata dalla curva T e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.

a) Disegnare la curva T e l'insieme A.

b) Determinare la circonferenza circoscritta ad A.

c) Calcolare l'area di A e il volume di V.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Per ogni punto $P(t)$ della traiettoria esplicito la coordinata $y = 2\sin t\cos t$ in funzione della coordinata $x = \cos t$: siccome $\sin t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t}$ ho che

$$y = \pm 2x\sqrt{1-x^2}\,.$$

In particolare, posto

$$f(x) := 2x\sqrt{1-x^2} \quad \text{per } -1 \leq x \leq 1,$$

ho che la traiettoria T è contenuta nell'unione del grafico della funzione f e del grafico della funzione $-f$.

Dimostro ora che T coincide con l'unione di questi due grafici: dato $x \in [-1,1]$ devo far vedere che entrambi i punti $(x, \pm f(x))$ appartengono a T. Prendo per cominciare $t \in [0,\pi]$ tale che $x = \cos t$: per tale t si ha $\sin t \geq 0$, quindi $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-x^2}$, e dunque $2\sin t\cos t = f(x)$, ovvero $P(t) = (x, f(x))$.
Analogamente esiste $t \in [-\pi, 0]$ tale che $x = \cos t$; in questo caso $\sin t \leq 0$, da cui segue che $\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} = -\sqrt{1-x^2}$, quindi $2\sin t\cos t = -f(x)$, ovvero $P(t) = (x, -f(x))$.

Per disegnare il grafico della funzione $f(x)$ osservo innanzitutto che si tratta di una funzione dispari, e quindi mi basta disegnarne il grafico per $0 \leq x \leq 1$.
Nell'intervallo $0 < x < 1$ la funzione è strettamente positiva, e si annulla per $x = 0$ e $x = 1$.
Inoltre la derivata vale

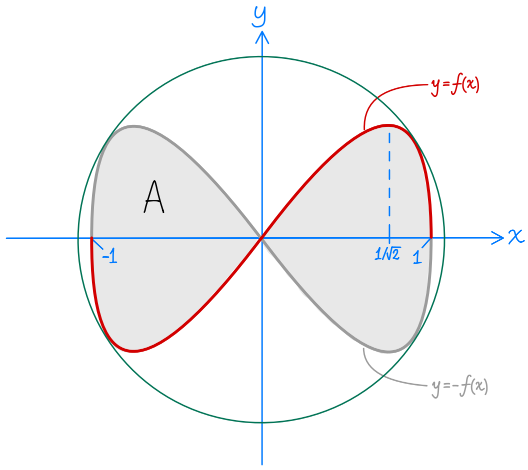
$$f'(x) = 2(1-2x^2)(1-x^2)^{-1/2}$$

(per $x < 1$, calcolandone il limite per $x \to 1$ ottengo $f'(1) = -\infty$) e studiandone il segno si ottiene che la funzione è strettamente crescente per $0 \leq x \leq 1/\sqrt{2}$ e strettamente decrescente per $1/\sqrt{2} \leq x \leq 1$. Infine la derivata seconda

$$f''(x) = -2x(3+2x^2)(1-x^2)^{-3/2}$$

è strettamente negativa per $0 \leq x < 1$ e quindi la funzione è strettamente concava.

Utilizzando queste informazioni traccio il disegno riportato sotto:



b) Siccome l'insieme A è simmetrico rispetto all'origine, la circonferenza circoscritta ad A (in verde nel disegno sopra) è centrata nell'origine (questa affermazione richiede una dimostrazione, che però ometto). Il raggio R è dato quindi dalla massima distanza dall'origine di un punto di T. Per via della simmetria di T rispetto a entrambi gli assi, R è uguale alla massima distanza dall'origine di un punto $(x, f(x))$ al variare di $0 \leq x \leq 1$.
Invece del massimo di tale distanza, calcolo il massimo del *quadrato* della distanza, vale a dire il massimo per $0 \leq x \leq 1$ della funzione

$$d(x) = x^2 + f(x)^2 = 5x^2 - 4x^4\,.$$

Osservo che per $0 < x < 1$ la derivata $d(x)' = 10\,x - 16\,x^3$ si annulla solo in $x_0 := \sqrt{5/8}$; inoltre i valori di d in x_0 e in 0 e 1 (gli estremi dell'intervallo) sono

$$d(x_0) = \frac{25}{16}\,, \quad d(0) = 0\,, \quad d(1) = 1\,,$$

ottengo che il valore massimo è $d(x_0) = \frac{25}{16}$. Pertanto il raggio cercato è $R = \frac{5}{4}$.

c) Usando le simmetrie dell'insieme A e le formule viste a lezione ottengo

$$\operatorname{area}(A) = 4\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 8x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 4\sqrt{t}\,dt = \Big|\tfrac{8}{3}t^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$

(nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $t = 1 - x^2$);

$$\begin{aligned}\operatorname{volume}(V) &= 2\int_0^1 2\pi x\, f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 8\pi x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 8\pi(\sin t\cos t)^2 dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 2\pi(\sin(2t))^2 dt = \int_0^{\pi/2} \pi - \pi\cos(4t) dt = \Big|\pi t - \tfrac{\pi}{4}\sin(4t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $x = \sin t$, nel quarto e quinto ho usato rispettivamente le identità $\sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin(2t)$ e $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$ con $\alpha = 2t$).

4 Per ogni $a > 0$, sia T_a il triangolo di vertici $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,e^{-a})$, e sia A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a > 0$.

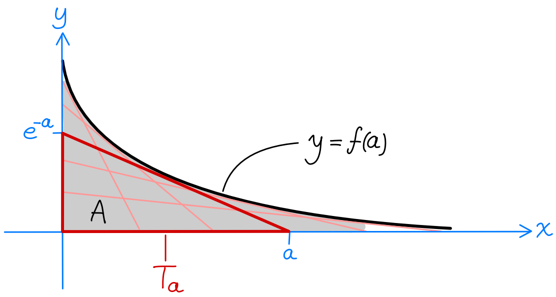
a) A è delimitato dagli assi e dal grafico di un'opportuna funzione f; determinare tale f.

b) Dire se l'area di A è finita oppure no.

<u>SOLUZIONE</u>. a) L'ipotenusa del triangolo T_a è data dai punti della retta di equazione

$$y = \underbrace{e^{-a}\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)}_{g_x(a)}$$

con $0 \le x \le a$.



Fissato $x > 0$, l'insieme degli y tali che (x,y) appartiene a T_a è dato dall'intervallo $[0, g_x(a)]$ se $a \ge x$ (ed è vuoto se $a < x$); quindi l'insieme degli y tali che (x,y) appartiene ad A è dato dall'unione degli intervalli $[0, g_x(a)]$ al variare di $a \ge x$, ovvero è l'intervallo $[0, f(x)]$ dove

$$f(x) := \max_{a \ge x} g_x(a)\,.$$

Studiando il segno della derivata

$$g_x'(a) = \frac{e^{-a}}{a^2}(x + xa - a^2)$$

ottengo che la funzione $g_x(a)$ è crescente per $x \le a \le a(x)$ dove

$$a(x) := \frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{2}\,,$$

ed è decrescente per $a \ge a(x)$; pertanto $a(x)$ è il punto di massimo e quindi

$$f(x) = g_x(a(x)) = e^{-a(x)}\Big(1 - \frac{x}{a(x)}\Big)\,.$$

b) Dimostro che A ha area finita. Osservo per cominciare che $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$ e quindi

$$\text{area}(A) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx\,;$$

osservo inoltre che

$$0 \le f(x) \le e^{-a(x)} \le e^{-x}$$

(nel secondo passaggio ho usato che $a_x \ge x$) e quindi, per il criterio del confronto,

$$\text{area}(A) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1\,.$$

5 Siano X, Y sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, e sia $f : X \to Y$ una funzione continua e strettamente crescente con inversa $g : Y \to X$.

a) Dimostrare che se X è un intervallo allora g è continua.

b) Dare un esempio di X (non intervallo), Y e f tali che g non è continua.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Dato $\bar{y} \in Y$, dimostro che g è continua in $\bar{y}$. Osservo innanzitutto che Y è un intervallo (perché X è un intervallo ed f è continua) e suppongo $\bar{y}$ non sia un estremo di Y; nel caso che Y sia un estremo di Y la dimostrazione va leggermente modificata.
Usando il fatto che f è strettamente crescente, si vede che anche g è strettamente crescente; quindi esistono il limite destro e sinistro di $g(y)$ per $y \to \bar{y}$, e vale che

$$\lim_{y \to \bar{y}^-} g(y) \le g(\bar{y}) \le \lim_{y \to \bar{y}^+} g(y)\,.$$

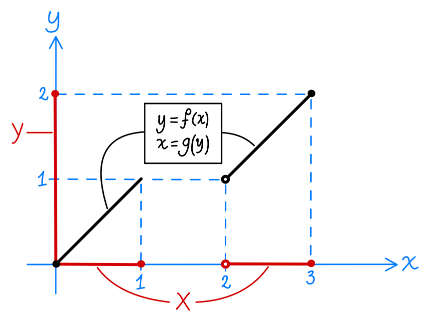
Per dimostrare che g è continua in $\bar{y}$ mi basta quindi far vedere i due limiti sono uguali.
Se per assurdo non lo fossero, potrei trovare x_0 compreso strettamente tra i due limiti e diverso da $g(\bar{y})$. Essendo x_0 compreso tra valori di g, ed essendo l'immagine g un intervallo (cioè X) ho che x_0 appartiene all'immagine di g; d'altra parte, usando che

$$\lim_{y \to \bar{y}^-} g(y) = \sup_{y < \bar{y}} g(y) \quad \text{e} \quad \lim_{y \to \bar{y}^+} g(y) = \inf_{y > \bar{y}} g(y)\,,$$

risulta chiaramente che x_0 non appartiene all'immagine di g; ho quindi ottenuto un assurdo.

b) Considero $X := [0,1] \cup (2,3]$, $Y := [0,2]$, e $f : X \to Y$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ x - 1 & \text{se } 2 < x \le 3. \end{cases}$$



Si verifica facilmente che f è bigettiva e strettamente crescente, e che

$$g(y) := \begin{cases} y & \text{se } 0 \le y \le 1, \\ y + 1 & \text{se } 1 < y \le 2. \end{cases}$$

In particolare g è discontinua (a destra) in $y = 1$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Una dimostrazione alternativa del punto a) è la seguente. Sia $\bar{y} \in Y$ e sia $\varepsilon > 0$. Preso $\bar{x}$ tale che $\bar{y} = f(\bar{x})$, suppongo per cominciare che $\bar{x}$ non sia un estremo di X (in caso contrario la dimostrazione va leggermente modificata) e quindi posso trovare ε' con $0 < \varepsilon' \le \varepsilon$ tale che $\bar{x} \pm \varepsilon' \in X$. Siccome f è strettamente crescente ho che

$$f(\bar{x} - \varepsilon') < \bar{y} = f(\bar{x}) < f(\bar{x} + \varepsilon')$$

e quindi posso trovare $\delta > 0$ tale che
$$f(\bar{x}-\varepsilon') \leq \bar{y}-\delta < \bar{y}+\delta \leq f(\bar{x}+\varepsilon')\,.$$
Usando il fatto che g è crescente, per ogni y tale che $\bar{y}-\delta \leq y \leq \bar{y}+\delta$ vale
$$g(f(\bar{x}-\varepsilon')) \leq g(\bar{y}-\delta) \leq g(y) \leq g(\bar{y}+\delta) \leq g(f(\bar{x}+\varepsilon'))\,,$$
e tenendo conto che $\bar{x}-\varepsilon \leq \bar{x}-\varepsilon' = g(f(\bar{x}-\varepsilon'))$ e che $g(f(\bar{x}+\varepsilon')) = \bar{x}+\varepsilon' \leq \bar{x}+\varepsilon$, vale anche
$$\bar{x}-\varepsilon \leq g(y) \leq \bar{x}+\varepsilon\,.$$
In altre parole ho trovato $\delta > 0$ tale che $|y-\bar{y}| \leq \delta$ implica $|g(y)-g(\bar{y})| \leq \varepsilon$, e quindi g è continua in $\bar{y}$.

Prima parte (prima variante)

1. Convertire le coordinate cartesiane (x, y) in coordinate polari (ρ, α) e viceversa, scegliendo l'angolo α nell'intervallo $[0, 2\pi)$: a) $x = -1$, $y = 1$; b) $x = 0$, $y = -3$; c) $\rho = 4$, $\alpha = \frac{11}{6}\pi$.

   Soluzione. a) $\rho = \sqrt{2}$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; b) $\rho = 3$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$; c) $x = 2\sqrt{3}$, $y = -2$.

2. Dire per quali $a > 0$ vale che $(1 + 2x)^a + x^{2a} \log\log x = O(x^2)$ per $x \to +\infty$.

   Soluzione. $a < 1$.

3. Dare un esempio di successione (x_n) tale che $x_n \to +\infty$ e $x_{n+1} - x_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

   Soluzione. $x_n := \log n$ oppure $x_n = n^a$ con $0 < a < 1$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp\bigl(ax^2 + (a^2 - 3)x\bigr)$ ha un punto di minimo assoluto in $x = -1$.

   Soluzione. Imponendo $f'(-1) = 0$ ottengo $a = -1$ e $a = 3$; studiando il segno di $f'(x)$ nei due casi si vede che -1 è un punto di minimo assoluto se $a = 3$.

5. Il punto P si muovo con legge oraria $P = \bigl((9t^2 - 1)\cos(3t);\, (9t^2 - 1)\sin(3t)\bigr)$. Calcolare il modulo della velocità di P e le distanza d percorsa tra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$.

   Soluzione. $|\vec{v}(t)| = 27\,t^2 + 3$; $d = \displaystyle\int_0^1 |\vec{v}(t)|\, dt = \int_0^1 27\,t^2 + 3\, dt = 12$.

6. Dire per quale $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + x^2)^a - x^{2a}\, dx$ è finito.

   Soluzione. L'integrale è improprio semplice a $+\infty$ e la parte principale della funzione integranda per $x \to +\infty$ è ax^{2a-2}; pertanto l'integrale si comporta come l'integrale di x^{2a-2} e dunque converge per $0 < a < \frac{1}{2}$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = \sin t$.

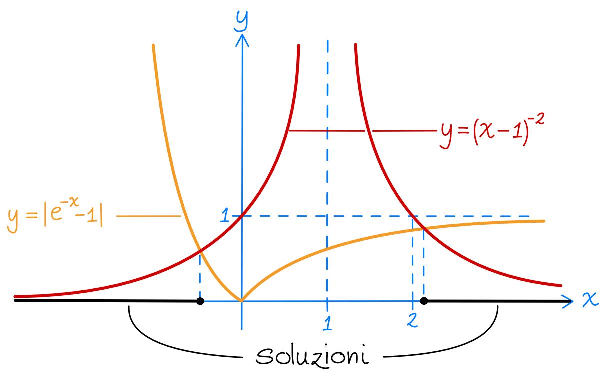
   Soluzione. $x(t) = e^t(a_1 \sin(2t) + a_2 \cos(2t)) + \frac{1}{5}\sin t + \frac{1}{10}\cos t$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

8. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n + 1}$.

   Soluzione. $R = 2$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $(x - 1)^{-2} \leq |e^{-x} - 1|$

   Soluzione.



SECONDA PARTE

1 Sono dati X sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $\bar{x}$ punto di accumulazione di X, e $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ funzioni tali che (i) $f_1(x) \to 0$ per $x \to \bar{x}$; (ii) f_2 è limitata in un intorno di $\bar{x}$.

a) Dimostrare che $f_1(x) \cdot f_2(x) \to 0$ per $x \to \bar{x}$.

b) Far vedere che l'enunciato a) non vale se si rimuove l'ipotesi (ii).

c) Cosa succede se invece di (ii) si assume solo che (ii') $|f_2(x)|$ non tende a $+\infty$ per $x \to \bar{x}$?

SOLUZIONE. a) L'ipotesi (ii) significa che esiste I intorno di $\bar{x}$ ed $m \geq 0$ tale che

$$|f_2(x)| \leq m \quad \text{per ogni } x \in I \cap X.$$

Invece l'ipotesi (i) significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste I_ε intorno di $\bar{x}$ tale che

$$|f_1(x)| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in I_\varepsilon \cap X \text{ con } x \neq \bar{x}.$$

Mettendo insieme queste due stime ottengo che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$|f_1(x) \cdot f_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{m} \cdot m = \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in (I_{\varepsilon/m} \cap I) \cap X \text{ con } x \neq \bar{x}.$$

Siccome $I_{\varepsilon/m} \cap I$ è un intorno di $\bar{x}$, ho dimostrato la tesi.

b) e c) Faccio vedere che per ogni insieme X ed ogni $\bar{x}$ punto di accumulazione di X, esistono $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ tali che, per $x \to \bar{x}$,

(i) $f_1(x)$ tende a 0;
(ii') $|f_2(x)|$ non tende a $+\infty$;
(iii) $f_1(x) \cdot f_2(x)$ non tende a 0.

Questo esempio dimostra il punto b) e risponde alla domanda c), facendo vedere che non è detto che $f_1 f_2$ tenda a 0.

Per costruire f_1 ed f_2 osservo che, poiché $\bar{x}$ è un punto di accumulazione di X, esiste una successione $(x_n) \subset X \setminus \{\bar{x}\}$ che converge a $\bar{x}$; definisco quindi $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ come segue:

$$f_1(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x = x_n \text{ con } n \text{ pari,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_2(x) := \begin{cases} n & \text{se } x = x_n \text{ con } n \text{ pari,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È facile vedere che vale (i). Per dimostrare la (ii') mi basta osservare che $|f_2(x_n)| = 0$ per ogni n dispari, quindi il limite di questa successione è 0, e di conseguenza il limite di $|f_2(x)|$ non può essere $+\infty$. Per dimostrare la (iii) mi basta osservare che $f_1(x_n) \cdot f_2(x_n) = 1$ per ogni n pari, quindi il limite di questa successione è 1, e di conseguenza il limite di $f_1(x) \cdot f_2(x)$ non può essere 0.

OSSERVAZIONI. Per rispondere ai punti b) e c) ho costruito un esempio per ogni insieme X ed ogni punto di accumulazione $\bar{x}$. Può andar bene anche costruire un esempio per una specifica scelta di X e di $\bar{x}$, anche se l'enunciato così ottenuto è meno forte di quello dimostrato sopra.

2 Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = e^{-t} + e^t\,. \qquad (*)$$

a) Trovare la soluzione generale di (*).

b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni di (*) soddisfano $x(t) = o(e^{4t})$ per $t \to +\infty$.

SOLUZIONE. a) Dalla teoria so che la soluzione generale di (*) è data da

$$x = x_{\text{om}} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

dove x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = 0\,, \qquad (1)$$

$\tilde{x}_1$ è una particolare soluzione dell'equazione non omogenea

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = e^{-t}\,, \tag{2}$$

e $\tilde{x}_2$ è una particolare soluzione dell'equazione non omogenea

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = e^{t}\,. \tag{3}$$

Calcolo di x_{om}. Gli zeri del polinomio caratteristico

$$P_a(\lambda) := \lambda^2 - 2a\lambda + (a-2)^2$$

associato all'equazione (1) sono

$$\lambda_{1,2} = a \pm 2\sqrt{a-1}\,.$$

La soluzione x_{om} è quindi data da tra formule diverse, a seconda del segno dell'argomento della radice:

$$x_{\mathrm{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_1 e^{\lambda_1 t} & \text{se } a > 1; \\ (c_1 + c_2 t)e^t & \text{se } a = 1; \\ e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) & \text{se } a < 1; \end{cases} \tag{4}$$

dove $\omega := \sqrt{|a-1|}$ e c_1, c_2 sono costanti arbitrarie.

Calcolo di $\tilde{x}_1$. Il termine noto e^{-t} nell'equazione (2) risolve l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti $\dot{x}+x=0$, con polinomio caratteristico $Q_1(\lambda) := \lambda+1$. Osservo che lo zero $\lambda=-1$ di $Q_1(\lambda)$ non è mai uno zero di $P_a(\lambda)$, infatti $P_a(-1) = a^2-2a+5 \neq 0$ per ogni a reale; pertanto

$$\mathscr{B}_{P_a Q_1} \setminus \mathscr{B}_{P_a} = \mathscr{B}_{Q_1} = \{e^{-t}\}\,,$$

e dunque esiste una soluzione particolare di (2) nello span di $\{e^{-t}\}$, cioè della forma

$$\tilde{x}_1(t) = \alpha e^{-t} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo questa espressione in (2) ottengo l'identità

$$\alpha(a^2-2a+5)e^{-t} = e^{-t}$$

che è soddisfatta per ogni t se (e solo se) $\alpha = \frac{1}{a^2-2a+5}$. Pertanto

$$\tilde{x}_1(t) = \tfrac{1}{a^2-2a+5} e^{-t}\,. \tag{5}$$

Calcolo di $\tilde{x}_2$. Il termine noto e^t nell'equazione (3) risolve l'equazione omogenea $\dot{x}-x=0$, con polinomio caratteristico $Q_2(\lambda) := \lambda-1$. Osservo che lo zero $\lambda=1$ di questo polinomio è anche uno zero di $P_a(\lambda)$ se $a=1,5$ (infatti $P_a(1) = a^2-6a+5$ si annulla per $a=1,5$). In particolare $\lambda=1$ è uno zero di molteplicità 2 di $P_1(\lambda) = \lambda^2-2\lambda+1 = (\lambda-1)^2$, ed è uno zero di molteplicità 1 di $P_5(\lambda) = \lambda^2 - 10\,\lambda + 9$. Per calcolare $\tilde{x}_2$ devo quindi distinguere tre casi.

Calcolo di $\tilde{x}_2$ per $a \neq 1,5$. In questo caso

$$\mathscr{B}_{P_a Q_2} \setminus \mathscr{B}_{P_a} = \mathscr{B}_{Q_2} = \{e^t\}$$

e dunque esiste una soluzione particolare di (3) della forma

$$\tilde{x}_2(t) = \alpha e^t \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo questa espressione in (3) ottengo l'identità

$$\alpha(a^2-6a+5)e^t = e^t$$

che è soddisfatta per ogni t se (e solo se) $\alpha = \frac{1}{a^2-6a+5}$.[1]

Calcolo di $\tilde{x}_2$ per $a=5$. Siccome $\lambda=1$ è uno zero con molteplicità uno di $P_5(\lambda)$,

$$\mathscr{B}_{P_5 Q_2} \setminus \mathscr{B}_{P_5} = \{te^t\}\,,$$

e quindi esiste una soluzione particolare di (3) della forma

$$\tilde{x}_2(t) = \alpha t e^t \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo questa espressione in (3) ottengo l'identità

$$-8\alpha e^t = e^t$$

che è soddisfatta per ogni t se (e solo se) $\alpha = -\frac{1}{8}$.

[1] Noto che la formula per α ha senso se $a^2-6a+5 \neq 0$, vale a dire per $a \neq 1,5$ (come previsto dalla teoria).

Calcolo di $\tilde{x}_2$ per $a=1$. Siccome $\lambda = 1$ è uno zero con molteplicità due di $P_1(\lambda)$,

$$\mathscr{B}_{P_1 Q_2} \setminus \mathscr{B}_{P_1} = \{t^2 e^t\}\,,$$

e quindi esiste una soluzione particolare di (3) della forma

$$\tilde{x}_2(t) = \alpha t^2 e^t \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo questa espressione in (3) ottengo l'identità

$$2\alpha e^t = e^t$$

che è soddisfatta per ogni t se (e solo se) $\alpha = \frac{1}{2}$.
Riassumendo

$$\tilde{x}_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{a^2-6a+5} e^t & \text{per } a \neq 1,\, 5; \\ -\frac{1}{8} t e^t & \text{per } a = 5; \\ \frac{1}{2} t^2 e^t & \text{per } a = 1. \end{cases} \tag{6}$$

b) Dalle formule (5) e (6) si vede subito che $\tilde{x}_1(t) = o(e^{4t})$ e $\tilde{x}_2(t) = o(e^{4t})$ per ogni valore di a.[2]
Ricordando che $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$, ne deduco che

$$x(t) = o(e^{4t}) \text{ se e solo se } x_{\text{om}}(t) = o(e^{4t}).$$

Dalla formula (4) si vede anche che $x_{\text{om}}(t) = o(e^{4t})$ per $a \leq 1$, e resta quindi da capire cosa succede nel caso $a > 1$. Sempre dalla formula (4) si vede che in questo caso vale $x_{\text{om}}(t) = o(e^{4t})$ se e solo se $\lambda_{1,2} < 4$, ovvero se e solo se

$$a + 2\sqrt{a-1} < 4\,, \tag{7}$$

e risolvendo questa disequazione ottengo $a < 2$.
In conclusione, $x(t) = o(e^{4t})$ se e solo se $a < 2$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Dato $a > 0$, sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $f(x) \leq y \leq 1$, dove

$$f(x) := \big(\cos(x^{-a})\big)^x\,.$$

a) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

b) Dire per quali $a > 0$ l'insieme A ha area finita.

c) Dire per quali $a > 0$ il solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse delle x ha volume finito.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Scrivo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = \exp\big(\underbrace{x \log\big(\cos(x^{-a})\big)}_{g(x)}\big)$$

e noto che per $x \to +\infty$ il limite dell'argomento dell'esponenziale è della forma $\infty \cdot 0$. Per calcolarlo determino la parte principale del logaritmo, che a sua volta ottengo a partire dalla parte principale di $\log(\cos t)$ per $t \to 0$:

$$\log(\cos t) = \log\big(1 - \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^4)\big) \sim -\tfrac{1}{2}t^2 + O(t^4) \sim -\tfrac{1}{2}t^2$$

(nel primo passaggio ho usato lo sviluppo $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$ per $t \to 0$; nel secondo ho usato che $\log(1+y) \sim y$ per $y \to 0$, con $y = -\frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$). Sostituendo $t = x^{-a}$ in questa formula ottengo che, per $x \to +\infty$,

$$g(x) = x \log\big(\cos(x^{-a})\big) \sim -\tfrac{1}{2} x^{1-2a}\,, \tag{8}$$

quindi

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } a > \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} & \text{se } a = \frac{1}{2}, \\ -\infty & \text{se } 0 < a < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

[2] Nel resto della soluzione do per scontato che t tende a $+\infty$, e non lo scrivo esplicitamente.

e infine

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp(g(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } a > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{e}} & \text{se } a = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{se } 0 < a < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{9}$$

b) Osservo che per $x \geq 1$ vale $0 < x^{-a} \leq 1$ e quindi $\cos(1) \leq \cos(x^{-a}) < 1$, da cui segue che $f(x)$ è ben definita per ogni $x \geq 1$ e soddisfa $f(x) < 1$. Di conseguenza l'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_1^{+\infty} 1 - f(x)\, dx\,.$$

Se $a \leq \frac{1}{2}$, dalla formula (9) segue che la funzione integranda $1 - f(x)$ ha limite strettamente positivo per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale vale $+\infty$.
Se invece $a > \frac{1}{2}$ vale che, per $x \to +\infty$,

$$1 - f(x) = 1 - \exp(g(x)) \sim -g(x) \sim \tfrac{1}{2} x^{1-2a} \tag{10}$$

(nel secondo passaggio ho usato lo sviluppo $1 - e^y \sim -y$ per $y \to 0$ con $y := g(x)$, nel terzo ho usato la formula (8)), e quindi

$$\text{area}(A) = \int_1^{+\infty} 1 - f(x)\, dx \approx \int_1^{+\infty} x^{1-2a}\, dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1, \\ \text{finito} & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

In conclusione l'area di A è finita se e solo se $a > 1$.

c) Per ogni $x \geq 1$ indico con V_x la sezione di V per il piano ortogonale all'asse delle x e passante per x. Chiaramente V_x è una corona circolare di raggio esterno 1 e raggio interno $f(x)$, e quindi

$$\text{volume}(V) = \int_1^{+\infty} \pi\big(1 - (f(x))^2\big)\, dx\,.$$

Come prima, dalla formula (9) segue che per $a \leq \frac{1}{2}$ la funzione integranda ha limite strettamente positivo e quindi l'integrale vale $+\infty$. Invece per $a \leq \frac{1}{2}$ vale che, per $x \to +\infty$,

$$1 - (f(x))^2 = \big(1 + f(x)\big)\big(1 - f(x)\big) \sim 1 - f(x) \sim \tfrac{1}{2} x^{1-2a}$$

(nel secondo passaggio ho usato il fatto che $1 + f(x) \sim 1$ perché $f(x) \to 0$, nel terzo ho usato la formula (10)), e quindi

$$\text{volume}(V) = \int_1^{+\infty} \pi\big(1 - (f(x))^2\big)\, dx \approx \int_1^{+\infty} x^{1-2a}\, dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1, \\ \text{finito} & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

In conclusione il volume di V è finito se e solo se $a > 1$.

4 a) Trovare la più grande costante m tale che $\dfrac{mx}{1+x^2} \leq \arctan x$ per ogni $x \geq 0$.[3]

b) Stimare la più piccola costante r tale che $\arctan x \leq \dfrac{rx}{1+x}$ per ogni $x \geq 0$.[4]

<u>SOLUZIONE</u>. a) Riscrivo la disequazione in oggetto nella forma

$$0 \leq \underbrace{\arctan x - \frac{mx}{1+x^2}}_{f_m(x)} \quad \text{per ogni } x \geq 0. \tag{11}$$

Osservo adesso che $f_m(0) = 0$, e quindi condizione *necessaria* affinché valga la (11) è che $f'_m(0) \geq 0$ (se infatti fosse $f'_m(0) < 0$, la funzione f_m sarebbe strettamente negativa in un intorno destro di 0). Siccome

$$f'_m(x) = \frac{(3-m)x^2 + (1-m)}{(1+x^2)^2}\,,$$

la condizione $f'_m(0) \geq 0$ diventa $1 - m \geq 0$ ovvero $m \leq 1$.

---

[3] L'esistenza di questa costante ottimale può essere data per buona; lo stesso vale per la costante nel punto b).
[4] "Stimare" significa dare una maggiorazione ed una minorazione della costante ottimale (possibilmente vicine). Credo che determinare il valore esatto della costante non sia possibile.

Faccio ora vedere che questa condizione, oltre che necessaria, è anche *sufficiente*, cioè implica la (11). Infatti per $m \le 1$ si vede subito che la derivata f'_m è sempre positiva (e si annulla la più in 0) e quindi la funzione f_m è crescente su $[0, +\infty)$; siccome $f_m(0) = 0$ ne segue che $f_m(x) \ge 0$ per ogni $x \ge 0$.
Concludendo, la disuguaglianza (11) vale se e solo se $m \le 1$, e in particolare la più grande costante m per cui vale è $m = 1$.

b) Indico con I l'insieme delle costanti r per cui la disuguaglianza in oggetto è soddisfatta e indico con r_0 la più piccola di tali costanti, cioè il minimo di I. Osservo per cominciare che I è una semiretta della forma $[r_0, +\infty)$ (si vede subito che ogni $r \ge r_0$ appartiene a I) e che I non contiene 0, cioè $r_0 > 0$.
Per caratterizzare ulteriormente gli $r > 0$ che appartengono a I riscrivo la disequazione in oggetto nella forma

$$\underbrace{\arctan x - \frac{rx}{1+x}}_{g_r(x)} \le 0 \quad \text{per ogni } x \ge 0. \tag{12}$$

Siccome $g_r(0) = 0$, condizione *necessaria* affinché valga la (12) è che $g'_r(0) \le 0$ (se infatti fosse $g'_r(0) > 0$ allora g_r sarebbe strettamente positiva in intorno destro di 0). La derivata di g_r è

$$g'_r(x) = \frac{(1-r)x^2 + 2x + (1-r)}{(1+x^2)(1+x)^2}\,, \tag{13}$$

quindi $g'_r(0) = 1 - r$ e la condizione $g'_r(0) \le 0$ diventa $r \ge 1$; in particolare $r_0 \ge 1$.

Considero ora $r \ge 1$. Tenendo conto che $g_r(0) = 0$, condizione *sufficiente* affinché valga la (12) è che g_r sia crescente, ovvero che $g'_r(x) \ge 0$ per ogni $x \ge 0$, ovvero che il discriminante del numeratore della frazione in (13) sia negativo o nullo, ovvero che $r \ge 2$. Quindi I contiene ogni $r \ge 2$, ovvero $r_0 \le 2$.

Riassumendo, ho dimostrato che $1 \le r_0 \le 2$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. È possibile stimare r_0 in modo più preciso: studiando il segno della derivata di $g_r(x)$ per $1 \le r \le 2$ si vede che si vede che il punto di massimo è $x = 0$ oppure

$$x(r) := \frac{1 + \sqrt{2r - r^2}}{r - 1}\,.$$

Si hanno allora due possibilità:

(i) se $g_r(x(r)) \le 0$ allora il valore massimo di g_r è $g_r(0) = 0$, quindi (12) vale e r appartiene a I, ovvero $r_0 \le r$;

(ii) se invece $g_r(x(r)) > 0$ allora (12) non vale e r non appartiene a I, ovvero $r \le r_0$.

Dato quindi $r \in [1, 2]$, calcolando il valore

$$h(r) := g_r(x(r)) = \arctan\left(\frac{1 + \sqrt{2r - r^2}}{r - 1}\right) - r + \frac{r^2 - r}{r + \sqrt{2r - r^2}}$$

posso decidere se r stima r_0 dall'alto o dal basso. In particolare:

- $h(1{,}5) \simeq 0{,}126 > 0$ e quindi $1{,}5 < r_0$;
- $h(1{,}7) \simeq -0{,}024 < 0$ e quindi $r_0 \le 1{,}7$;
- $h(1{,}6) \simeq 0{,}049 > 0$ e quindi $1{,}6 < r_0$.

Concludo quindi che $1{,}6 < r_0 \le 1{,}7$ (ma procedendo allo stesso modo potrei ottenere anche stime più precise).

$\boxed{5}$ Discutere il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^a)}{n}$ al variare di $a \in (-\infty, 1)$.

<u>SOLUZIONE</u>. Indico con a_n l'addendo n-esimo della serie, vale a dire

$$a_n = (-1)^n \frac{\sin(n^a)}{n}\,.$$

Caso $a < 0$. In questo caso n^a tende a 0 per $n \to +\infty$, quindi $\sin(n^a) \sim n^a$ e $|a_n| \sim n^{a-1}$. Siccome $a - 1 < -1$ la serie converge assolutamente (per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata), e in particolare converge ad un numero finito.

Caso $a = 0$. In questo caso $\sin(n^a) = \sin(1)$ per ogni n, e la serie coincide a meno del fattore $\sin(1)$ con la nota serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \,,$$

che converge per il criterio di Leibniz (ma non converge assolutamente).

Caso $0 < a < 1$. Dimostro che la serie converge.[5] L'osservazione su cui si basa la dimostrazione è questa: poiché $a < 1$, la differenza tra $(n-1)^a$ e n^a tende a 0 quando $n \to +\infty$, quindi $\sin((n-1)^a)$ è sempre più vicino a $\sin(n^a)$, e analogamente a_{n-1} e a_n sono sempre più vicini in valore assoluto *ma di segno opposto*, per cui la somma $a_{n-1} + a_n$ è trascurabile rispetto ad entrambi. L'idea è quindi di sommare i termini della serie di partenza a due a due, per ottenere una nuova serie con termini significativamente più piccoli della precedente, sperando che sia più facile dimostrarne la convergenza.

Per ogni $n = 2, 3, \dots$ pongo

$$b_n := -\frac{\sin((n-1)^a)}{n-1} + \frac{\sin(n^a)}{n} \,; \tag{14}$$

in particolare $b_n = a_{n-1} + a_n$ per n pari. Pertanto, detta S_N la somma parziale N-esima della serie di partenza, vale che

$$S_{2N} = \sum_{m=1}^{2N} a_m = \sum_{n=1}^{N} \big(a_{2n-1} + a_{2n}\big) = \sum_{n=1}^{N} b_{2n} \,,$$

e quindi la convergenza di S_{2N} per $N \to +\infty$ equivale alla convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n} \,. \tag{15}$$

Osservo inoltre che la convergenza delle somme parziali con indice pari S_{2N} implica la convergenza allo stesso limite delle somme parziali con indice dispari S_{2N+1}, perché $S_{2N+1} = S_{2N} + a_{2N+1}$ e il termine a_{2N+1} tende a zero quando $N \to +\infty$.

In altre parole, la convergenza della serie di partenza equivale a quella della serie in (15).

Per dimostrare la convergenza della serie in (15) studio il comportamento asintotico di b_n per $n \to +\infty$. Osservo per cominciare che

$$\begin{aligned} \sin((n-1)^a) &= \sin\big(n^a \big(1 - \tfrac{1}{n}\big)^a\big) \\ &= \sin\big(n^a + O(n^{a-1})\big) = \sin(n^a) + O(n^{a-1}) \,, \end{aligned} \tag{16}$$

dove nel secondo passaggio ho usato lo sviluppo $(1+y)^a = 1 + O(y)$ per $y \to 0$ con $y = \frac{1}{n}$, e nel terzo ho usato lo sviluppo di Taylor $\sin(\alpha + y) = \sin(\alpha) + O(y)$ con $y = O(n^{a-1})$.[6]

Usando la definizione di b_n in (14) e la formula (16) ottengo infine

$$\begin{aligned} b_n &= -\tfrac{1}{n-1}\big(\sin(n^a) + O(n^{a-1})\big) + \tfrac{1}{n}\sin(n^a) \\ &= -\tfrac{1}{n(n-1)}\sin(n^a) + \tfrac{1}{n-1} \cdot O(n^{a-1}) \\ &= O(n^{-2}) \cdot O(1) + O(n^{-1}) \cdot O(n^{a-1}) \\ &= O(n^{-2}) + O(n^{a-2}) = O(n^{a-2}) \,. \end{aligned}$$

[5] Notare che in questo caso la serie non converge assolutamente (volendo lo si può anche dimostrare) e non si può applicare il criterio di Leibniz perché gli addendi non sono decrescenti in valore assoluto.

[6] Per la precisione, ho usato lo sviluppo di Taylor di ordine 0 della funzione seno nel punto α. Attenzione: per la dimostrazione è importante che il resto in questo sviluppo sia stimato in modo indipendente da α, cosa che risulta chiara se si usa la formula del resto di Lagrange (ma non se si usa la formula di Peano). In alternativa si può ottenere questo sviluppo a partire dalla disuguaglianza $|\sin\beta - \sin\alpha| \le |\beta - \alpha|$, che a sua volta si dimostra usando il teorema di Lagrange.

Da questo segue che $|b_{2n}| = O(n^{a-2})$; quindi la serie a termini positivi $\sum |b_{2n}|$ converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata $\sum n^{a-2}$ (che converge perché $a < 1$) e ho dunque dimostrato che la serie (15) converge assolutamente.

OSSERVAZIONI. È possibile dimostrare che la serie converge anche per $a = 1$. Un modo è vedere la serie di partenza come la parte immaginaria della serie a termini complessi $\sum \frac{1}{n} e^{i(1+\pi)n}$, di cui si può dimostrare la convergenza usando il lemma di sommazione per parti (che però non fa parte degli argomenti del corso).
Non so cosa succeda per $a > 1$.