

Versione: 18 febbraio 2025

UNIVERSITÀ DI PISA
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

PROVE SCRITTE DELL'ESAME DI

Analisi Matematica 1 (561AA), a.a. 2023-24

Testi e soluzioni

GIOVANNI ALBERTI
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa

<http://pagine.dm.unipi.it/alberti>

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I (per la laurea triennale in Matematica) si compongono di due parti: una prima parte con nove domande relativamente semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con quattro o cinque problemi di cui dare invece una soluzione dettagliata. Il tempo a disposizione è di 70 minuti per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno sei risposte corrette nella prima parte, e due problemi completamente risolti nella seconda.

Questa raccolta contiene i testi e le soluzioni degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2023-24, incluse le prove in itinere. La soluzione di ogni esercizio è riportata immediatamente sotto il testo. A chi vuole esercitarsi si raccomanda di partire dal file che contiene solo i testi degli esercizi e non le soluzioni. Degli scritti di cui sono state preparate più varianti viene riportata qui solo la prima.

Programma del corso [versione: 8 luglio 2024].

Gli argomenti non fondamentali sono riportati in corsivo.

Prima parte: Calcolo.

1. RICHIAMO DI ALCUNE NOZIONI DI BASE

- Trigonometria, coordinate polari di un punto nel piano.
- Grafici delle funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche, funzioni trigonometriche inverse.
- Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
- Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione "grafica" di equazioni e disequazioni.

2. LIMITI DI FUNZIONI E CONTINUITÀ

- Funzioni continue; definizione, proprietà di base e continuità delle funzioni elementari (le dimostrazioni sono rimandate alla seconda parte del corso).
- Limiti di funzioni: definizione e significato; proprietà di base.

3. DERIVATE

- Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Alcuni significati fisici della derivata: velocità e accelerazione di un punto in movimento.
- Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate (dimostrazioni parziali, cf. seconda parte del corso).
- Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato); trascurabilità di una funzione rispetto ad un'altra; notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
- Teorema di de l'Hôpital (dimostrato nella seconda parte del corso). Confronto tra i comportamenti delle funzioni elementari all'infinito e in zero.
- Sviluppo di Taylor di una funzione; rappresentazione del resto di Taylor come "o piccolo" e "o grande" (formule del resto di Peano). Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo di limiti e di parti principali.
- Massimo e minimo di un insieme di numeri reali; valore massimo e valore minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali). Estremo superiore ed inferiore di un insieme (nel caso che si scriva come unione finita di intervalli); estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione.
- Nei punti di massimo e minimo locali interni al dominio la derivata (se esiste) vale zero. Procedura per la determinazione del valore massimo e minimo (oppure dell'estremo superiore ed inferiore dei valori) di una funzione continua definita su un'unione finita di intervalli (la giustificazione completa della procedura è rimandata al secondo semestre).
- Funzioni crescenti e decrescenti: definizione e caratterizzazione in termini di segno della derivata; funzioni convesse e concave: definizione e caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda (dimostrazioni parziali, quelle complete sono rimandate alla seconda parte del corso). Disegno del grafico di una funzione.

4. INTEGRALI

- Definizione (provvisoria) di integrale di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale (dimostrazione parziale, cf. seconda parte del corso).
- Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.
- Approssimazione dell'integrale tramite somme finite.
- La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza.
- Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide e in particolare dei solidi di rotazione.

5. EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- Equazioni differenziali del primo ordine: esempi e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari del primo ordine e delle equazioni a variabili separabili.
- Equazioni differenziali lineari di ordine qualunque: teorema di esistenza e unicità (senza dimostrazione); struttura dell'insieme delle soluzioni; risoluzione delle equazioni omogenee a coefficienti costanti; calcolo della soluzione particolare di un'equazione a coefficienti costanti non omogenea con il metodo degli annihilatori; variazione delle costanti.

Seconda parte: Analisi.

6. BASI DI TEORIA DEGLI INSIEMI.

- Prodotto di due insiemi. Le funzioni $f : A \rightarrow B$ intese come grafici. L'insieme B^A delle funzioni da A ad B ; l'insieme delle parti (sottoinsiemi) di un insieme A .
- Numeri naturali, interi e razionali. Numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite. *I numeri razionali corrispondono ai numeri reali con espansione decimale finita o periodica.*
- Insiemi finiti e infiniti, numerabili e più che numerabili.
- L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile; il prodotto di una famiglia finita di insiemi numerabili è numerabile. I numeri interi, razionali e algebrici sono numerabili; i numeri reali sono più che numerabili. Insiemi con uguale cardinalità.

7. COMPLETEZZA DEI NUMERI REALI

- I numeri reali estesi. Definizione di estremo superiore e inferiore per un insieme qualunque di numeri reali (o di numeri reali estesi). Completezza dei numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite.
- *Insiemi ordinati (parzialmente o totalmente); definizione di massimo e minimo di un sottoinsieme di un insieme ordinato; definizione di estremo superiore ed inferiore; assioma di completezza ed equivalenza con l'esistenza dell'estremo superiore/inferiore; definizione di insieme ordinato completo. Definizione di campo ordinato; caratterizzazione dei numeri reali come campo ordinato e completo (senza dimostrazione).*

8. SUCCESSIONI DI NUMERI REALI

- Limite di una successione di numeri reali; possibili comportamenti di una successione.
- Le successioni monotone hanno limite.
- Caratterizzazione delle successioni convergenti (con limite finito) come successioni di Cauchy.
- Teorema di Bolzano-Weierstrass: ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.
- Limite inferiore (liminf) e limite superiore (limsup) di una successione.
- Successioni definite per ricorrenza; formula esplicita per successioni definite da ricorrenze lineari. *Successione di Fibonacci.*

9. FUNZIONI CONTINUE

- Rivisitazione della definizione di continuità e di limite di una funzione in termini di intorno.

- Caratterizzazione della continuità di una funzione in termini di limiti.
- Caratterizzazione della continuità e del limite in termini di successioni.
- Teorema di esistenza degli zeri (e dei valori intermedi). Calcolo approssimato degli zeri.
- Teorema di Weierstrass: esistenza dei punti di massimo e minimo di una funzione continua su un intervallo chiuso. Giustificazione della procedura per la ricerca dei massimi e dei minimi vista nella prima parte del corso.
- Le funzioni continue e strettamente monotone su un intervallo hanno inversa continua.

10. DERIVATE

- Caratterizzazione della derivabilità in termini di sviluppo di Taylor al primo ordine. Dimostrazione dei teoremi chiave sul calcolo delle derivate: derivata della somma, del prodotto, della funzione composta, della funzione inversa.
- Teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange.
- Uso dei teoremi di Cauchy e di Lagrange per dimostrare alcuni risultati enunciati nella prima parte del corso: caratterizzazione delle funzioni monotone in termini segno della derivata; caratterizzazione delle funzioni convesse/concave in termini di monotonia della derivata; teorema di de L'Hôpital.
- Teorema dello sviluppo di Taylor: rappresentazione del resto in forma di Lagrange e in forma integrale.

11. INTEGRALE SECONDO RIEMANN

- Funzioni uniformemente continue. Teorema di Heine-Cantor: una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua.
- Definizione di integrale secondo Riemann. Le funzioni continue sono integrabili secondo Riemann; stima dell'errore nell'approssimazione dell'integrale con somme di Riemann.
- *Altre classi di funzioni integrabili secondo Riemann (senza dimostrazioni dettagliate). Esempi di funzioni non integrabili secondo Riemann.*
- Definizione di primitiva di una funzione continua; esistenza di una primitiva e teorema fondamentale del calcolo integrale.

12. INTEGRALI IMPROPRI

- Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
- Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
- Integrali impropri non semplici.
- *Rappresentazione del fattoriale come integrale improprio e formula di Stirling (con cenno di dimostrazione).*

13. SERIE NUMERICHE

- Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Esempio: la serie geometrica.
- Criterio del confronto serie-integrale; serie armonica generalizzata; stima integrale della coda di una serie.
- Criteri per determinare il comportamento di una serie: confronto e confronto asintotico (per serie a termini positivi), convergenza assoluta (per serie a segno variabile), radice, rapporto.
- Teorema di Leibniz per serie a segni alterni.

14. SERIE DI POTENZE

- Serie di potenze: definizione, raggio di convergenza, comportamento. Formula alternativa per il calcolo del raggio di convergenza. Derivata di una serie di potenze (senza dimostrazione).
- Convergenza della serie di Taylor di alcune funzioni elementari: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$, $\log(1+x)$. Rappresentazione del numero e come serie. Definizione di e^z con z numero complesso e dimostrazione della formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. *Rappresentazione di $\pi/4$ come serie.*

TESTI E SOLUZIONI

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione D della funzione $\log(\sqrt{2} \sin(\pi x) - 1)$.

SOLUZIONE. $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{4} + 2k, \frac{3}{4} + 2k \right)$.

2. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione \ll per $x \rightarrow +\infty$:

$$\underbrace{\frac{1-5^x}{x+2^x}}_a, \quad \underbrace{\frac{x \log x}{x^2+2 \log x}}_b, \quad \underbrace{\frac{x+2x^2}{x^{-3}+x^3}}_c, \quad \underbrace{2^x + \log x}_d.$$

SOLUZIONE. L'ordine corretto è $c \ll b \ll d \ll a$.

3. Trovare la parte principale per $x \rightarrow +\infty$ di $f(x) := \sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x+2}$.

SOLUZIONE. $f(x) \sim -\frac{1}{4}x^{-3/4}$ per $x \rightarrow +\infty$.

4. Trovare $a \in \mathbb{R}$ tale che la retta $y = 3x$ è tangente al grafico $y = a2^x$ in un qualche punto.

SOLUZIONE. Cerco a e x per cui le due funzioni e le rispettive derivate coincidono in x , vale a dire $3x = a2^x$ e $3 = a2^x \log 2$. Risolvendo questo sistema ottengo $x = \frac{1}{\log 2}$ e $a = \frac{3}{e \log 2}$.

5. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $(|x| - 4)^2 \leq y \leq 16 + x^2 - x^4$; calcolare l'area di A .

SOLUZIONE. A è simmetrico rispetto all'asse y ; $\text{area}(A) = 2 \int_0^2 (8x - x^4) dx = \frac{96}{5}$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4(1+x^2)t e^t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili: $x(t) = \tan((4t-4)e^t + 4)$.

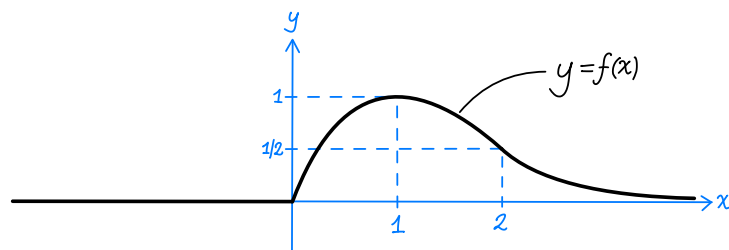
7. Dire in quale classe di funzioni è possibile trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = e^{-t} \cos(2t)$

SOLUZIONE. Si può trovare una soluzione della forma $x(t) = te^{-t}(a_1 \cos(2t) + a_2 \sin(2t))$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

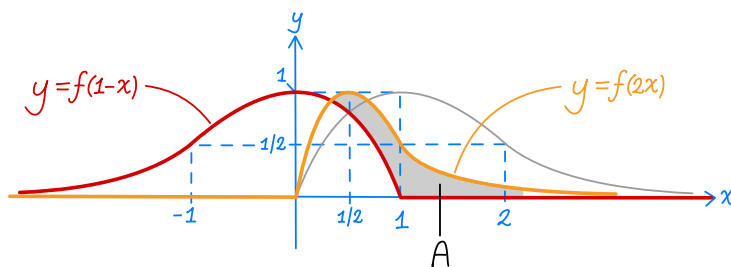
8. Trovare il valore massimo/minimo di $f(x) := |xe^{-x/2}|$ relativamente alla semiretta $x \geq -\frac{1}{4}$. (Se non esistono specificarlo e calcolare invece l'estremo superiore/inferiore dei valori.)

SOLUZIONE. Il valore minimo è $f(0) = 0$. Il valore massimo è $f(2) = \frac{2}{e}$.

9. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura sotto. Disegnare i grafici $y = f(1-x)$ e $y = f(2x)$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(1-x) \leq y \leq f(2x)$.



SOLUZIONE.



SECONDA PARTE

1 Calcolare la primitiva $\int \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x} dx$.

SOLUZIONE. La fattorizzazione $x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$ implica che la funzione integranda si scompone come

$$\frac{1}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} \quad (1)$$

per opportuni valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$. Per trovare questi valori, scrivo il termine di destra come un'unica frazione con denominatore $x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$ ed ottengo

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x^3 + 2x^2 + x};$$

quindi la scomposizione (1) vale (per ogni x) se $1 = (a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a$ ovvero se i coefficienti a, b, c soddisfano il sistema $a = 1, a + b = 0, 2a + b + c = 0$; cioè per $a = 1, b = c = -1$. Pertanto

$$\int \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} dx = \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + c.$$

2 a) Completare la formula $O(x^a) \cdot o(x^b) = \dots$, tradurla in un enunciato preciso, e dimostrarla.
 b) Date due funzioni f, g che, per $x \rightarrow x_0$, tendono a $+\infty$ e soddisfano $f(x) \sim g(x)$, dimostrare che $\log(f(x)) \sim \log(g(x))$, sempre per $x \rightarrow x_0$.

SOLUZIONE. a) La formula completa è " $O(x^a) \cdot o(x^b) = o(x^{a+b})$ ", e vale sia per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow 0$; l'enunciato senza virgolette è questo: *date f, g tali che $f(x) = O(x^a)$ e $g(x) = o(x^b)$ per $x \rightarrow +\infty$, allora $f(x) \cdot g(x) = o(x^{a+b})$ per $x \rightarrow +\infty$ (l'enunciato per $x \rightarrow 0$ è analogo). Per dimostrarlo devo far vedere che il rapporto $f(x) \cdot g(x)$ diviso x^{a+b} tende a zero; osservo che*

$$\frac{f(x) \cdot g(x)}{x^{a+b}} = \frac{f(x)}{x^a} \cdot \frac{g(x)}{x^b}$$

ed osservo che il valore assoluto della prima frazione a destra dell'uguale è limitato da una qualche costante finita per x sufficientemente grande (per via dell'ipotesi $f(x) = O(x^a)$) mentre la seconda frazione tende a zero (per via dell'ipotesi $g(x) = o(x^b)$); per una regola sui limiti vista a lezione anche il prodotto di queste due frazioni tende a zero.

b) Devo dimostrare che il rapporto $\log(f(x))$ diviso $\log(g(x))$ tende a 1 per $x \rightarrow x_0$. Scrivo tale rapporto come

$$\frac{\log(f(x))}{\log(g(x))} = \frac{\log\left(g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\log(g(x))} = 1 + \frac{\log\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\log(g(x))} \quad (2)$$

ed osservo che le ipotesi su f e g implicano quanto segue:

$$\begin{aligned} f(x) \sim g(x) &\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \Rightarrow \log\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \rightarrow 0, \\ g(x) \rightarrow +\infty &\Rightarrow \log(g(x)) \rightarrow +\infty; \end{aligned}$$

pertanto l'ultima frazione in (2) tende a zero (è un limite della forma $0/\infty$) e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log(f(x))}{\log(g(x))} = 1 + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\log(g(x))} = 1.$$

3 Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x} = \frac{4}{\pi(4+t^2)\cos x}. \quad (3)$$

a) Trovare la soluzione di (3) che soddisfa $x(0) = \frac{\pi}{6}$ e disegnarne sommariamente il grafico.

b) Trovare la soluzione di (3) che soddisfa $x(0) = \frac{5\pi}{6}$.

SOLUZIONE. a) Si tratta di un'equazione a variabili separabili. Procedendo al solito modo ottengo l'identità

$$\int \cos x \, dx = \int \frac{4}{\pi(4+t^2)} \, dt,$$

che svolgendo i calcoli diventa

$$\sin x = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{2}t\right) + c.$$

Imponendo poi che valga la condizione iniziale $x(0) = \frac{\pi}{6}$ ottengo $c = \frac{1}{2}$, e quindi

$$\sin(x(t)) = \underbrace{\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2}}_{f(t)}. \quad (4)$$

Devo ora esplicitare $x(t)$. Per farlo uso il fatto che le soluzioni dell'equazione $\sin x = y$ sono

$$x = \arcsin y + 2k\pi, \quad -\arcsin y + (2k+1)\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$, e dunque

$$x(t) = \arcsin(f(t)) + 2k\pi, \quad -\arcsin(f(t)) + (2k+1)\pi$$

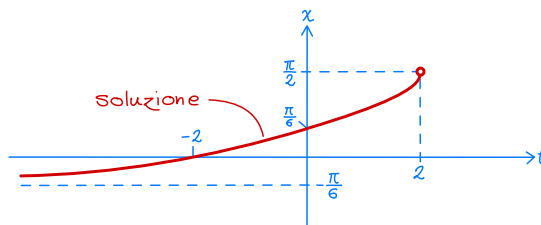
con $k \in \mathbb{Z}$. Per concludere osservo che, dovendo essere $x(0) = \frac{\pi}{6}$, la scelta corretta tra le tante soluzioni indicate sopra è

$$x(t) = \arcsin(f(t)) = \arcsin\left(\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2}\right). \quad (5)$$

Per disegnare il grafico di x osservo che l'equazione ha senso se $\cos x \neq 0$, vale a dire se $\sin x \neq \pm 1$. Dunque l'insieme di definizione della soluzione $x(t)$ è il più grande intervallo di t per cui $-1 < f(t) < 1$ (e che contiene $t = 0$); risolvendo queste disequazione ottengo che l'insieme di definizione è $t < 2$. Inoltre dalla formula (5) si vede immediatamente che

- $x(t)$ è negativa per $t < -2$, nulla per $t = -2$, positiva per $t > -2$;
- $x(t)$ tende a $-\frac{\pi}{6}$ per $t \rightarrow -\infty$;
- $x(t)$ tende a $\frac{\pi}{2}$ per $x \rightarrow 2^-$;
- $x'(t)$ tende a $+\infty$ per $x \rightarrow 2^-$ (segue dal punto precedente e dall'equazione);
- $x(t)$ è strettamente crescente in quanto composizione di funzioni strettamente crescenti;

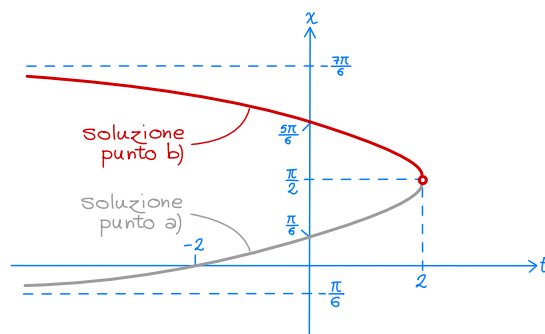
Usando queste informazioni ottengo il grafico riportato sotto.



b) Procedendo come al punto a) ottengo che anche in questo caso vale la formula (4), tuttavia esplicitando $x(t)$ ottengo

$$x(t) = \pi - \arcsin(f(t)) = \pi - \arcsin\left(\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2}\right).$$

Il grafico di questa soluzione si ricava facilmente da quello della soluzione trovata al punto a).



- 4 a) Trovare la parte principale per $x \rightarrow 0$ di $f(x) := (1 + x^2)^{\sin x} - 1$.
 b) Trovare lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 in 0 di $f(x)$.

SOLUZIONE. Risolvo direttamente il punto b). Per cominciare riscivo $f(x)$ come

$$f(x) = (1 + x^2)^{\sin x} - 1 = \exp(\sin x \log(1 + x^2)) - 1.$$

Usando ora gli sviluppi $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ e $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t = x^2$ ottengo

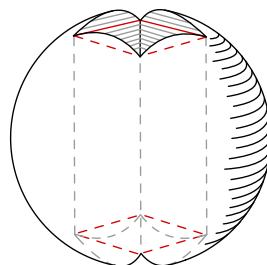
$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(\sin x \log(1 + x^2)) - 1 \\ &= \exp\left(\left(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + O(x^6)\right)\right) - 1 \\ &= \exp\left(x^3 - \frac{2}{3}x^5 + O(x^7)\right) - 1. \end{aligned}$$

Usando infine lo sviluppo $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t = x^3 - \frac{2}{3}x^5 + O(x^7)$ (da cui segue anche che $t = x^3 + O(x^5) = O(x^3)$) ottengo

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(x^3 - \frac{2}{3}x^5 + O(x^7)\right) - 1 \\ &= t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3) \\ &= x^3 - \frac{2}{3}x^5 + O(x^7) + \frac{1}{2}\left(x^3 + O(x^5)\right)^2 + O\left(\left(O(x^3)\right)^3\right) \\ &= x^3 - \frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{2}x^6 + O(x^7). \end{aligned}$$

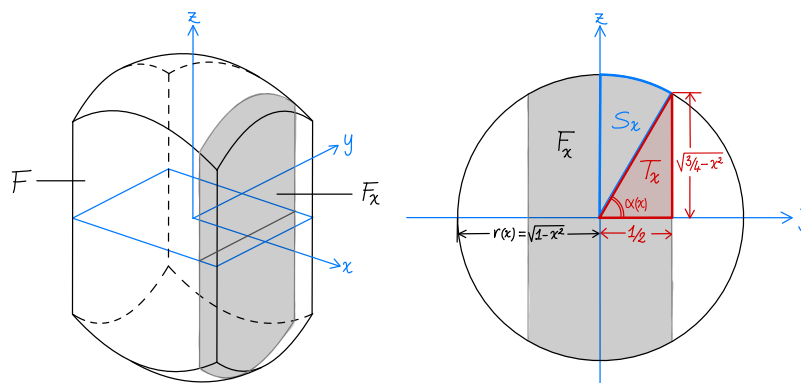
In particolare il polinomio di Taylor di ordine 6 di $f(x)$ è $P_6(x) := x^3 - \frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{2}x^6$, e quindi la parte principale di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$ è x^3 .

- 5 Sia V una sfera di raggio 1 in cui è stato fatto un foro che la attraversa da parte a parte, con sezione quadrata di lato 1 e passante per il centro (vedere la figura). Calcolare il volume di V .



[Avvertenza: per un errore di formulazione questo esercizio non ha soluzioni concise. Per la precisione è possibile impostarlo in più modi, ma tutti quelli tentati da noi portano ad integrali piuttosto complicati. Riporto sotto uno di questi approcci.]

SOLUZIONE. Indico con F il solido da “sottrarre” alla sfera S di raggio 1 per ottenere V (vedere la figura sotto, a sinistra).



Pertanto

$$\text{volume}(V) = \text{volume}(S) - \text{volume}(F).$$

Per ogni x sull'asse delle x in figura, indico con F_x la sezione di F corrispondente a x , vale a dire l'intersezione di F con il piano P_x ortogonale all'asse delle x e che lo interseca in x , e noto che la sezione F_x non è vuota solo se $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Come visto a lezione, il volume di F è uguale all'integrale dell'area di F_x tra $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$.

Per calcolarne area(F_x), noto che F_x è la parte di una circonferenza di raggio $r(x) := \sqrt{1-x^2}$ compresa tra due rette parallele a distanza $\frac{1}{2}$ dal centro (vedere la figura sopra, a destra). L'angolo $\alpha(x)$ in figura è dato da

$$\alpha(x) = \arctan\left(\frac{\text{altezza}(T_x)}{\text{base}(T_x)}\right) = \arctan\left(\sqrt{3-4x^2}\right),$$

quindi

$$\begin{aligned} \text{area}(F_x) &= 4 \cdot \text{area}(T_x) + 4 \cdot \text{area}(S_x) \\ &= \sqrt{\frac{3}{4} - x^2} + 2(r(x))^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3-4x^2} + \pi(1-x^2) + 2(1-x^2) \arctan\left(\sqrt{3-4x^2}\right), \end{aligned}$$

e infine, tenendo con che area(F_x) è una funzione pari di x ,

$$\begin{aligned} \text{volume}(F) &= \int_{-1/2}^{1/2} \text{area}(F_x) dx = 2 \int_0^{1/2} \text{area}(F_x) dx \\ &= \underbrace{\int_0^{1/2} \sqrt{3-4x^2} dx}_{I_1} + 2\pi \underbrace{\int_0^{1/2} (1-x^2) dx}_{I_2} + 4 \underbrace{\int_0^{1/2} (1-x^2) \arctan\left(\sqrt{3-4x^2}\right) dx}_{I_3}. \end{aligned}$$

Mi limito adesso a impostare il calcolo di I_1 , I_2 e I_3 , senza arrivare in fondo.

Il calcolo di I_2 è immediato.

Per calcolare I_1 uso il cambio di variabile $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$ per ridurmi al calcolo dell'integrale di $\sqrt{1-y^2}$, che risolvo tramite il cambio di variabile $y = \sin t$ (come visto a lezione).

Il calcolo di I_3 è più complicato: per prima cosa integro per parti, integrando il fattore $1-x^2$ e derivando il fattore $\arctan(\dots)$; così facendo mi riduco a calcolare

$$\int_0^{1/2} \left(x - \frac{1}{3}x^3\right) \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{3-4x^2}} dx;$$

quindi uso il cambio di variabile $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$ per ridurmi al calcolo di un integrale del tipo

$$\int R(y) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \tag{6}$$

dove $R(y)$ è un'opportuna funzione razionale (cioè un rapporto di polinomi), e per integrare funzioni di questo tipo¹ si usa il cambio di variabile

$$y = \frac{2t}{1+t^2};$$

infatti, tenendo conto che

$$\sqrt{1-y^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dy = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} dt,$$

l'integrale (6) diventa

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt,$$

cioè l'integrale di una funzione razionale di t (che non svolgo).

6 Per ogni $\varepsilon > 0$, sia $m(\varepsilon)$ il valore minimo di $f_\varepsilon(x) := \cos x + \varepsilon x^2$ al variare di x in \mathbb{R} . Ci interessa il comportamento di $m(\varepsilon)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$:

a) dimostrare che $m(\varepsilon)$ tende a -1 per $\varepsilon \rightarrow 0$, e anzi $m(\varepsilon) = -1 + O(\varepsilon)$;

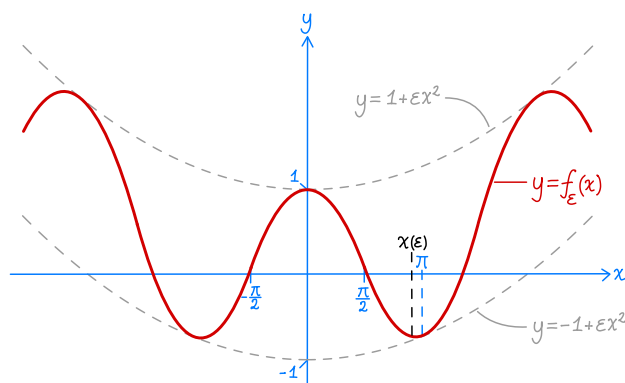
b) calcolare lo sviluppo di Taylor di $m(\varepsilon)$ in ε all'ordine 1;

c) calcolare lo sviluppo di Taylor di $m(\varepsilon)$ all'ordine 3.

[Avvertenza: il testo dà per scontato che f_ε ammette un valore minimo $m(\varepsilon)$. Questa affermazione potrebbe essere dimostrata ma non è il punto dell'esercizio.]

SOLUZIONE. Do per scontato che la funzione f_ε ammette un valore minimo, e siccome è pari, esiste almeno un punto di minimo in $[0, +\infty)$, che indico con $x(\varepsilon)$.

a) Chiaramente $f_\varepsilon(x) \geq \cos x \geq -1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, inoltre $f_\varepsilon(\pi) = -1 + \pi^2\varepsilon$. Ne deduco che $-1 \leq m(\varepsilon) \leq -1 + \pi^2\varepsilon$, e in particolare $m(\varepsilon) = -1 + O(\varepsilon)$.



b) Dal disegno sopra si intuisce che $x(\varepsilon)$ tende a π da sinistra quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (per adesso do per buona questa affermazione, e la dimostro alla fine). Scrivo quindi $x(\varepsilon)$ come $x(\varepsilon) = \pi - h(\varepsilon)$ con $h(\varepsilon)$ che tende a 0 per $\varepsilon \rightarrow 0$.

Attenzione: nel resto della soluzione tutte le formule asintotiche valgono per $\varepsilon \rightarrow 0$, e per semplificare la notazione ho scritto h al posto di $h(\varepsilon)$. Nel leggere si deve tener presente che h è una funzione di ε e non una variabile indipendente.

Essendo $x(\varepsilon)$ un punto di minimo di f_ε deve valere

$$0 = f'_\varepsilon(x(\varepsilon)) = -\sin(x(\varepsilon)) - 2\varepsilon x(\varepsilon);$$

scrivendo $x(\varepsilon) = \pi - h$ ed usando l'identità $\sin(\pi - h) = \sin h$ ottengo

$$\sin h = 2\varepsilon(\pi - h). \tag{7}$$

Siccome $h \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, ho anche che $h \sim \sin h$ e $2\varepsilon(\pi - h) \sim 2\varepsilon\pi$, e quindi dalla formula precedente deduco che

$$h \sim 2\varepsilon\pi.$$

¹ Cioè funzioni razionali di y moltiplicate per una potenza intera di $\sqrt{1-y^2}$.

Usando questa formula e l'identità $\cos(\pi - h) = -\cos h$ (più lo sviluppo $\cos h = 1 + O(h^2)$ e il fatto che $h = O(\varepsilon)$) ottengo infine

$$\begin{aligned} m(\varepsilon) &= f_\varepsilon(x(\varepsilon)) = \cos(\pi - h) + \varepsilon(\pi - h)^2 \\ &= -\cos h + \varepsilon(\pi - h)^2 \\ &= -1 + O(h^2) + \pi^2\varepsilon + O(\varepsilon h) = -1 + \pi^2\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (8)$$

In conclusione, lo sviluppo di $m(\varepsilon)$ all'ordine 1 è $m(\varepsilon) = -1 + \pi^2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

c) Procedo come al punto precedente, usando uno sviluppo più preciso di h . Per ottenere quest'ultimo parto dall'equazione (7), che grazie allo sviluppo $\sin h = h + O(h^3)$ (e al fatto che $O(h^3) = O(\varepsilon^3)$ perché $h = O(\varepsilon)$) diventa

$$h + O(\varepsilon^3) = 2\pi\varepsilon - 2\varepsilon h,$$

da cui ottengo

$$h = \frac{2\pi\varepsilon + O(\varepsilon^3)}{1 + 2\varepsilon} = (2\pi\varepsilon + O(\varepsilon^3))(1 - 2\varepsilon + O(\varepsilon^2)) = 2\pi\varepsilon - 4\pi\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

(nel secondo passaggio ho usato lo sviluppo $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + O(x^2)$ con $x = 2\varepsilon$).

Dunque

$$h = 2\pi\varepsilon - 4\pi\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (9)$$

Riparto ora dalla formula (8): usando lo sviluppo $\cos h = 1 - \frac{1}{2}h^2 + O(h^4)$ e lo sviluppo di h in (9) ottengo

$$\begin{aligned} m(\varepsilon) &= -\cos h + \varepsilon(\pi - h)^2 \\ &= -1 + \frac{1}{2}h^2 + O(h^4) + \pi^2\varepsilon - 2\pi\varepsilon h + \varepsilon h^2 \\ &= -1 + \pi^2\varepsilon + h\left[\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)h - 2\pi\varepsilon\right] + O(\varepsilon^4) \\ &= -1 + \pi^2\varepsilon + (2\pi\varepsilon - 4\pi\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3))\left[\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)(2\pi\varepsilon - 4\pi\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)) - 2\pi\varepsilon\right] + O(\varepsilon^4) \\ &= -1 + \pi^2\varepsilon + (2\pi\varepsilon - 4\pi\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3))(-\pi\varepsilon + O(\varepsilon^3)) + O(\varepsilon^4) \\ &= -1 + \pi^2\varepsilon - 2\pi^2\varepsilon^2 + 4\pi^2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Riassumendo, lo sviluppo di $m(\varepsilon)$ all'ordine 3 è $m(\varepsilon) = -1 + \pi^2\varepsilon - 2\pi^2\varepsilon^2 + 4\pi^2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$.

Concludo l'esercizio con la dimostrazione quanto affermato all'inizio, cioè che $x(\varepsilon)$ tende a π da sinistra per $\varepsilon \rightarrow 0$.² Osservo per cominciare che per ogni $x > \pi$ vale

$$f_\varepsilon(x) = \cos x + \varepsilon x^2 > -1 + \varepsilon\pi^2 = f_\varepsilon(\pi);$$

questo implica che x non può essere un punto di minimo di f_ε , e quindi

$$0 \leq x(\varepsilon) \leq \pi. \quad (10)$$

Fisso ora δ tale che $0 < \delta < \pi$. Siccome la funzione $\cos x$ è decrescente per $0 \leq x \leq \pi - \delta$, per tali x vale

$$f_\varepsilon(x) = \cos x + \varepsilon x^2 \geq \cos(\pi - \delta) = -\cos \delta.$$

Inoltre $-1 < -\cos \delta$ e siccome $m(\varepsilon)$ converge a -1 per $\varepsilon \rightarrow 0$, esiste ε_δ tale che $m(\varepsilon) < -\cos \delta$ per ogni $\varepsilon \leq \varepsilon_\delta$. Ne segue che per ogni $\varepsilon \leq \varepsilon_\delta$ ed ogni $x \leq \pi - \delta$ vale

$$m(\varepsilon) < -\cos \delta \leq f_\varepsilon(x);$$

questo implica x non può essere un punto di minimo di f_ε , e dunque

$$\pi - \delta < x(\varepsilon) \quad \text{per } \varepsilon \leq \varepsilon_\delta. \quad (11)$$

Dalle formule (10) e (11) segue che, presi $\delta > 0$ ed $\varepsilon_\delta > 0$ come sopra,

$$\pi - \delta \leq x(\varepsilon) \leq \pi \quad \text{per } \varepsilon \leq \varepsilon_\delta.$$

Essendo δ un numero positivo arbitrario, ho dimostrato che $x(\varepsilon) \rightarrow \pi^-$ per $\varepsilon \rightarrow 0$.

OSSERVAZIONI. Si può anche dimostrare che il punto di minimo positivo $x(\varepsilon)$ è unico, ma questo fatto non è stato usato nella soluzione sopra.

² Ricordo che $x(\varepsilon)$ è un punto di minimo di $f_\varepsilon(x)$ relativamente alla semiretta $x \geq 0$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \frac{\log(1-x^2)}{\sqrt{1-2\sin(\pi x)}}$.

SOLUZIONE. L'insieme di definizione è $(-1, \frac{1}{6}) \cup (\frac{5}{6}, 1)$.

2. Determinare la retta tangente al grafico $y = xe^{-x}$ nel punto di ascissa $x = 2$.

SOLUZIONE. $y = e^{-2}(4-x)$.

3. Calcolare a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(2^x)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\log(\log x)}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 2x^4}{\cos(x^2 + x^4) - 1}$.

SOLUZIONE. a) non esiste; b) $+\infty$; c) 4.

4. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in $x = 0$ della funzione $\log(1 - 2x^2 + x^4)$.

SOLUZIONE. $P_4(x) = -2x^2 - x^4$.

5. Dire se esistono *punti* di massimo e di minimo (assoluti) della funzione $f(x) := x(\log x)^{-2}$ relativamente alla semiretta $x \geq 3$, e in caso affermativo calcolarli.

SOLUZIONE. L'unico punto di minimo è $x = e^2$; non esistono punti di massimo.

6. Calcolare $\int_0^2 x^3 \log(1+x^2) dx$.

SOLUZIONE. Uso prima il cambio di variabile $y = 1 + x^2$ e poi integro per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^3 \log(1+x^2) dx &= \int_1^5 \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right) \log y dy \\ &= \left| \left(\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y\right) \log y \right|_1^5 - \int_1^5 \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} dy = \frac{15}{4} \log 5 - 1. \end{aligned}$$

7. Un punto si muove con legge oraria $p(t) = (t^3 - 3t, 3t^2)$. Calcolare la velocità v (come vettore) e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = 1$.

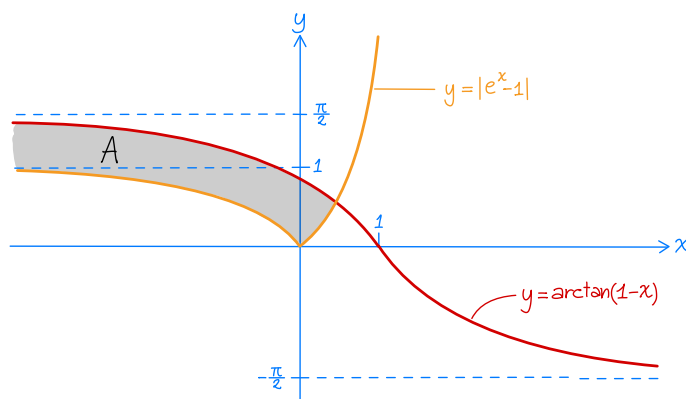
SOLUZIONE. $v = (3t^2 - 3, 6t)$; $|v| = 3t^2 + 3$; $d = 4$.

8. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 5e^t$.

SOLUZIONE. $x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + e^t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

9. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) del piano tali che $|e^x - 1| \leq y \leq \arctan(1-x)$.

SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

1 Dato $a > 0$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8t + 4e^{2t}. \quad (1)$$

a) Trovare la soluzione generale di (1).

b) Per ogni $a > 2$, trovare le soluzioni di (1) che tendono a $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$.

SOLUZIONE. a) Dalla teoria so che la soluzione generale di (1) è data da

$$x = x_{\text{om}} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

dove x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 0, \quad (2)$$

\tilde{x}_1 è una particolare soluzione dell'equazione non omogenea

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8t, \quad (3)$$

\tilde{x}_2 è una particolare soluzione dell'equazione non omogenea

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 4e^{2t}. \quad (4)$$

Calcolo di x_{om} . Gli zeri del polinomio caratteristico

$$P_a(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + 4$$

sono

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4}$$

e quindi la formula per x_{om} varia a seconda del segno dell'argomento della radice:

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{se } a > 2; \\ (c_1 + c_2 t)e^{2t} & \text{se } a = 2; \\ e^{at}(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)) & \text{se } 0 < a < 2; \end{cases}$$

dove $\omega := \sqrt{4 - a^2}$ e c_1, c_2 sono numeri reali arbitrari.

Calcolo di \tilde{x}_1 . Il termine noto $8t$ nell'equazione (3) è un polinomio di grado 1 e quindi esiste una soluzione particolare dell'equazione tra i polinomi di grado al più 1, cioè della forma $\tilde{x}_1(t) = \alpha t + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sostituendo questa espressione in (3) ottengo l'identità $4\alpha t + 4\beta - 2a\alpha = 8t$ che è soddisfatta per ogni t se $\alpha = 2$ e $\beta = a$. Pertanto la soluzione particolare cercata è

$$\tilde{x}_1(t) = 2t + a.$$

Calcolo di \tilde{x}_2 . Il termine noto e^{2t} nell'equazione (4) risolve l'equazione omogenea $\dot{x} - 2x = 0$, con polinomio caratteristico $\lambda - 2$. Osservo che lo zero $\lambda = 2$ di questo polinomio è anche uno zero di del polinomio caratteristico $P_a(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + 4$ dell'equazione omogenea se $a = 2$ (infatti $P_a(2) = 8 - 4a$ si annulla per $a = 2$); in particolare $\lambda = 2$ è uno zero di molteplicità 2 di $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Per calcolare \tilde{x}_2 devo quindi distinguere due casi.

- *Caso $a \neq 2$.* In questo caso esiste una soluzione particolare di (4) della forma $\tilde{x}_2(t) = \alpha e^{2t}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, e sostituendo questa espressione in (4) ottengo l'identità $\alpha(8 - 4a)e^{2t} = 4e^{2t}$ che è soddisfatta per $\alpha = \frac{1}{2-a}$.
- *Caso $a = 2$.* Siccome $\lambda = 2$ è uno zero con molteplicità due di $P_2(\lambda)$, esiste una soluzione particolare di (4) della forma $\tilde{x}_2(t) = \alpha t^2 e^{2t}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, e sostituendo questa espressione in (4) ottengo l'identità $2\alpha e^{2t} = 4e^{2t}$, che è soddisfatta per $\alpha = 2$.

Riassumendo

$$\tilde{x}_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2-a} e^{2t} & \text{per } a \neq 2; \\ 2t^2 e^{2t} & \text{per } a = 2. \end{cases}$$

b) Per quanto visto al punto a), per $a > 2$ la soluzione generale di (1) è

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + 2t + a + \frac{1}{2-a} e^{2t}.$$

Posto $\lambda_1 := a + \sqrt{a^2 - 4}$ e $\lambda_2 := a - \sqrt{a^2 - 4}$, osservo ora che

$$\lambda_1 > 2 > \lambda_2 \quad \text{per ogni } a > 2.^1$$

Considero quindi due casi:

- se $c_1 \neq 0$ allora $x(t) \sim c_1 e^{\lambda_1 t}$ per $t \rightarrow +\infty$, e in particolare $x(t) \rightarrow +\infty$ per $c_1 > 0$;
- se $c_1 = 0$, allora $x(t) \sim \frac{1}{2-a} e^{2t}$ e in particolare $x(t) \rightarrow -\infty$.

Riassumendo, $x(t)$ tende a $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ per $c_1 > 0$, a prescindere dal valore di a .

2 Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione

$$\exp(x^2) = a(3 - x^2), \tag{5}$$

e indichiamo con $x(a)$ la più piccola soluzione di questa equazione tra quelle *strettamente positive* (se ne esiste almeno una).

- a) Dire quante sono le soluzioni *strettamente positive* dell'equazione (5) al variare di $a \in \mathbb{R}$.
- b) Disegnare il grafico della funzione $x(a)$ e determinarne il limite di $x(a)$ per $a \rightarrow -\infty$.
- c) Trovare una funzione elementare $g(a)$ che approssima $x(a)$ con errore $o(\frac{1}{a})$ per $a \rightarrow -\infty$.²

SOLUZIONE. Riscrivo l'equazione (5) come $f(x) = a$ dove $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è data da

$$f(x) := \frac{\exp(x^2)}{3 - x^2};$$

per trovare il numero di soluzioni strettamente positive traccio il grafico $y = f(x)$ prestando particolare attenzione agli intervalli di monotonia.

Osservo per cominciare che $f(x)$ è definita per ogni $x \geq 0$ tranne $x = \sqrt{3}$, è positiva per $0 \leq x < \sqrt{3}$ e negativa per $x > \sqrt{3}$; inoltre i limiti significativi sono

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{3})^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3})^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{2x(4 - x^2) \exp(x^2)}{(3 - x^2)^2}$$

ottengo infine che

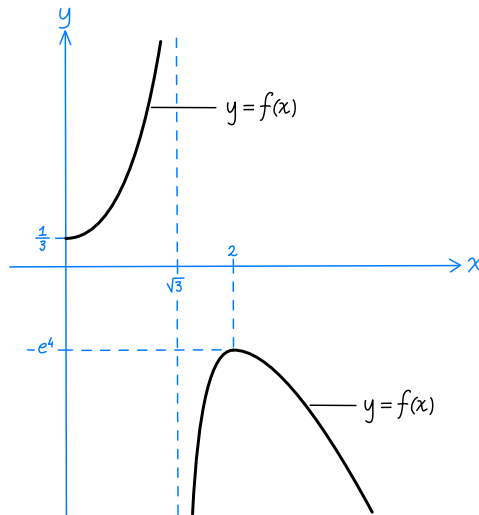
- nell'intervallo $0 \leq x < \sqrt{3}$ la funzione cresce strettamente da $f(0) = \frac{1}{3}$ a $+\infty$,
- nell'intervallo $\sqrt{3} < x \leq 2$ la funzione cresce strettamente da $-\infty$ a $f(2) = -e^4$,
- nella semiretta $x \geq 2$ la funzione decresce strettamente da $f(2) = -e^4$ a $-\infty$.

Usando quanto appena scritto (e il fatto che $f'(0) = 0$) traccio il grafico qui sotto.³

¹ La prima disuguaglianza è quasi immediata, la seconda richiede invece un calcolo.

² Per "funzione elementare" si intende in questo caso una funzione data da una formula esplicita.

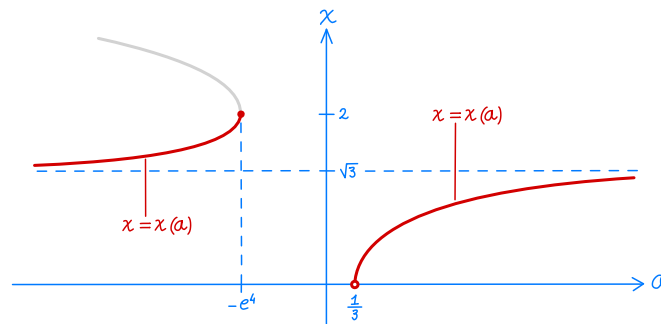
³ Le proporzioni non sono rispettate



Sempre da quanto scritto sopra risulta chiaro che il numero di soluzioni dell'equazione (5), ovvero dell'equazione $f(x) = a$, varia come segue:

- per $a > \frac{1}{3}$ c'è un'unica soluzione $x(a)$, ed è compresa tra 0 e $\sqrt{3}$;
- per $-e^4 < a \leq \frac{1}{3}$ non ci sono soluzioni;
- per $a = -e^4$ l'unica soluzione è $x(-e^4) = 2$;
- per $a < -e^4$ ci sono due soluzioni, una, quella detta $x(a)$, compresa tra $\sqrt{3}$ e 2, ed una maggiore di 2.

b) Dal grafico tracciato nel punto precedente ottengo il grafico della funzione $x(a)$ riportato nella figura sotto; in particolare risulta chiaro che $x(a)$ tende a $\sqrt{3}$ per $a \rightarrow -\infty$.



c) Siccome $x(a)$ tende a $\sqrt{3}$ per $a \rightarrow -\infty$, posso scrivere $x(a)$ nella forma $x(a) = \sqrt{3} + h(a)$ con h funzione tale che $h(a) \rightarrow 0$ per $a \rightarrow -\infty$. Inoltre $x(a)$ risolve l'equazione $f(x) = a$, ovvero

$$a = f(x(a)) = \frac{\exp(x^2(a))}{3 - x^2(a)}. \tag{6}$$

Studio adesso il comportamento asintotico della frazione a destra per $a \rightarrow -\infty$: siccome $x(a)$ converge a $\sqrt{3}$, ho che $\exp(x^2(a))$ converge a e^3 , cosa che posso riscrivere come $\exp(x^2(a)) \sim e^3$; inoltre

$$\begin{aligned} 3 - x^2(a) &= 3 - (\sqrt{3} + h(a))^2 = -h(a)^2 - 2\sqrt{3}h(a) \\ &= -2\sqrt{3}h(a) + O(h^2(a)) \sim -2\sqrt{3}h(a). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\frac{\exp(x^2(a))}{3 - x^2(a)} \sim -\frac{e^3}{2\sqrt{3}h(a)},$$

e quindi l'equazione (6) implica

$$a \sim -\frac{e^3}{2\sqrt{3}h(a)}$$

da cui segue che

$$h(a) \sim -\frac{e^3}{2\sqrt{3}a}.$$

Riscrivendo questa formula come $h(a) = -\frac{e^3}{2\sqrt{3}a} + o(\frac{1}{a})$ ottengo infine

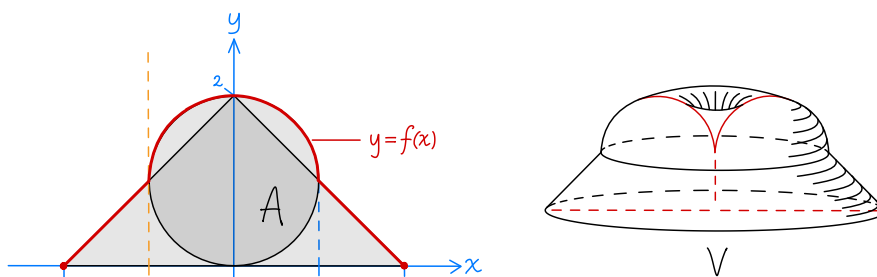
$$x(a) = \sqrt{3} + h(a) = \sqrt{3} - \frac{e^3}{2\sqrt{3}a} + o(\frac{1}{a}).$$

Per concludere prendo dunque $g(a) := \sqrt{3} - \frac{e^3}{2\sqrt{3}a}$.

OSSERVAZIONI. Si può leggermente semplificare la soluzione del punto a) usando fin dall'inizio il cambio di variabile $t = x^2$. Nel punto c) si può facilmente dimostrare che la funzione $g(a)$ trovata approssima $x(a)$ con errore $O(\frac{1}{a^2})$.

- 3** Consideriamo la figura piana A data dall'unione del cerchio con centro $(0, 1)$ e raggio 1, e del triangolo con vertici $(\pm 2, 0)$ e $(0, 2)$, e indichiamo con V il solido ottenuto ruotando A attorno alla retta di equazione $x = -1$. Fare un disegno approssimativo di A e V e calcolare il volume di V .

SOLUZIONE. La figura piana A ed il solido V sono tratteggiati nella figura sotto:



Osservo per cominciare che V è dato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $x = 1$ della parte di A che si trova a destra di tale retta (ruotando la parte a sinistra, che è un triangolo, non si aggiunge). Pertanto, indicando con $f(x)$ la funzione il cui grafico descrive il bordo superiore di A , il volume di V è dato da

$$\text{volume}(V) = \int_{-1}^2 2\pi(x+1)f(x) dx.^4$$

Osservo ora che la metà superiore della circonferenza di raggio 1 centrata in $(0, 1)$ ha equazione $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$ con $-1 \leq x \leq 1$, mentre il segmento di estremi $(0, 2)$ e $(2, 0)$ ha equazione $y = 2 - x$ con $0 \leq x \leq 2$. Quindi

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{1-x^2} & \text{per } -1 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{per } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

⁴ Questa è una variante della formula vista a lezione per il volume dei solidi ottenuti ruotando il grafico di una funzione attorno all'asse delle y . La si ottiene dalla formula originale in questo modo: detta A' la traslazione di A verso destra di 1, il profilo superiore di A' è dato dal grafico della funzione $f(x-1)$ e il solido V' ottenuto ruotando A' attorno all'asse delle y è una traslazione di V ; pertanto V e V' hanno lo stesso volume e quello di V' può essere calcolato con la formula vista a lezione:

$$\text{volume}(V) = \text{volume}(V') = \int_0^3 2\pi x f(x-1) dt = \int_1^2 2\pi(t+1)f(t) dx$$

(nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $t = x - 1$).

Pertanto

$$\begin{aligned}\text{volume}(V) &= 2\pi \left[\int_{-1}^1 (x+1)(1 + \sqrt{1-x^2}) dx + \int_1^2 (x+1)(2-x) dx \right] \\ &= 2\pi \left[\int_{-1}^1 x(1 + \sqrt{1-x^2}) dx + \int_{-1}^1 1 dx + \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_1^2 2+x-x^2 dx \right] \\ &= 2\pi \left[2 + \frac{\pi}{2} + \left. 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_1^2 \right] = \pi^2 + \frac{19}{3}\pi.\end{aligned}$$

(Nel terzo passaggio ho usato i seguenti fatti: il primo integrale nella seconda riga vale 0 perché la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è $[-1, 1]$; il terzo integrale nella seconda riga vale $\frac{\pi}{2}$ perché rappresenta l'area di un semicerchio di raggio 1.)

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Determinare la successione (x_n) tale che $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e $x_{n+2} = -x_{n+1} + 6x_n$ per $n = 0, 1, \dots$

SOLUZIONE. La successione risolve un'equazione ricorsiva lineare omogenea il cui polinomio caratteristico $\lambda^2 + \lambda - 6$ ha radici $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$. La soluzione è $x_n = \frac{1}{5}(2^n - (-3)^n)$.

2. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) := \begin{cases} e^{ax} & \text{per } x \geq 1 \\ bx & \text{per } x < 1 \end{cases}$ è derivabile.

SOLUZIONE. Le due funzioni nella formula devono coincidere in $x = 1$ (cioè $e^a = b$), e lo stesso vale per le derivate (cioè $ae^a = b$). Quindi deve essere $a = 1$, $b = e$.

3. Calcolare la derivata di $f(x) := \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t^8} dt$.

SOLUZIONE. $f'(x) = \frac{2x}{1+x^{16}} - \frac{1}{1+x^8}$.

4. Determinare l'estremo superiore e inferiore dell'insieme $E := \left\{ \frac{1}{1+(3n+2)^4} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ specificando se si tratta di un massimo o un minimo.

SOLUZIONE. Scrivo $E = \{f(3n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$ con $f(x) := \frac{1}{1+x^4}$. La funzione $f(x)$ cresce per $x \leq 0$, decresce per $x \geq 0$ e ha limite 0 per $x \rightarrow \pm\infty$. Pertanto l'estremo inferiore di E è 0 (ottenuto per $n \rightarrow \pm\infty$) e il minimo non esiste. L'estremo superiore di E , che è anche il massimo, è il valore più grande tra $f(-1)$ e $f(2)$, cioè è $f(-1) = \frac{1}{2}$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\int_1^2 \frac{x^{2a}}{(\log x)^a}$ è un numero finito.

SOLUZIONE. Integrale improprio in 1 che si comporta come $\int_1^2 \frac{dx}{(\log x)^a} = \int_0^1 \frac{dt}{(\log(1+t))^a} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^a}$, e quindi è finito per $a < 1$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $x^3 \leq y \leq (x + \frac{1}{x^a})^3$ ha area finita.

SOLUZIONE. L'area è data dall'integrale improprio $\int_1^{+\infty} (x + \frac{1}{x^a})^3 - x^3 dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{a-2}}$, che è finito per $a > 3$.

7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{3^n + 2^n} x^n$.

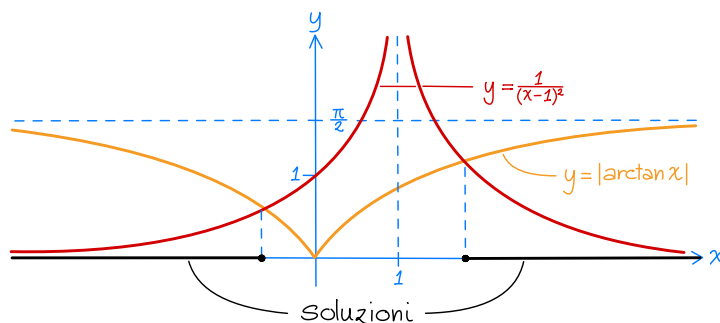
SOLUZIONE. $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{4^n}} = \frac{3}{4}$.

8. Calcolare il valore della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

SOLUZIONE. La serie cambiata di segno coincide con la serie di Taylor di $\log(1+x)$ calcolata in $x = -\frac{1}{2}$, che vale $\log(\frac{1}{2}) = -\log 2$. La serie di partenza vale $\log 2$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $\frac{1}{(x-1)^2} \leq |\arctan x|$.

SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

1 Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile, e poniamo $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ per ogni $x \in [0, 1]$. Dato $a > 0$, dimostrare che

- a) $f(x) = o(x^a) \Rightarrow F(x) = o(x^{a+1})$;
- b) $f(x) = O(x^a) \Rightarrow F(x) = O(x^{a+1})$.¹

[Se serve si può supporre f continua.]

SOLUZIONE. Comincio da b), che è leggermente più semplice per come ho impostato la soluzione.

b) L'ipotesi $f(x) = O(x^a)$ significa che esiste $m \geq 0$ (finito) e $\delta > 0$ tale che se $0 \leq x \leq \delta$ allora $|f(x)| \leq mx^a$. Pertanto, per ogni x tale che $0 \leq x \leq \delta$,

$$|F(x)| = \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^x mt^a dt = \frac{m}{a+1} x^{a+1}$$

(nel terzo passaggio ho usato che $|f(t)| \leq mt^a$ per ogni $0 \leq t \leq x$). Questa disuguaglianza implica che $F(x) = O(x^{a+1})$.

a) L'ipotesi $f(x) = o(x^a)$ significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per $0 < x \leq \delta(\varepsilon)$ vale che $|f(x)/x^a| \leq \varepsilon$, ovvero $|f(x)| \leq \varepsilon x^a$. Pertanto, per ogni x tale che $0 < x \leq \delta(\varepsilon)$,

$$|F(x)| = \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^x \varepsilon t^a dt = \frac{\varepsilon}{a+1} x^{a+1} \leq \varepsilon x^{a+1}, \quad (1)$$

cioè $|F(x)/x^{a+1}| \leq \varepsilon$. Ho dunque dimostrato che $F(x)/x^{a+1} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$, cioè $F(x) = o(x^{a+1})$.

OSSERVAZIONI. (i) Se f è continua, allora $F'(x) = f(x)$ per ogni x per il teorema fondamentale del calcolo, e posso dimostrare l'enunciato a) usando il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{a+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(a+1)x^a} = 0.$$

Se f è continua ed esiste il limite per $x \rightarrow 0$ del rapporto $f(x)/x^a$, posso dimostrare anche l'enunciato b) usando il teorema di de l'Hôpital.

(ii) Nel terzo passaggio in (1) la disuguaglianza $|f(t)| \leq \varepsilon t^a$ vale per $0 < t \leq x$ ma non necessariamente per $t = 0$, e quindi la disuguaglianza è giustificata dal seguente enunciato, leggermente diverso da uno visto a lezione: *se g_1 e g_2 sono integrabili su $[a, b]$ e vale $g_1 \leq g_2$ su tutto $[a, b]$ tranne al più un numero finito di punti, allora l'integrale di g_1 è minore o uguale a quello di g_2 .*²

2 Dato a reale consideriamo l'integrale improprio

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^a} dx.$$

- a) Dire dove I è improprio e studiarne il comportamento per $a > 1$.
- b) Studiare il comportamento di I per $0 < a \leq 1$.

SOLUZIONE. L'integrale I è improprio in 0 e $+\infty$, perché la funzione integranda è ben definita e continua su $(0, +\infty)$ ma non è definita in 0.

Per studiare il comportamento di I lo scrivo quindi come somma degli integrali impropri semplici

$$I_1 := \int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^a} dx, \quad I_2 := \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^a} dx,$$

di cui studio separatamente il comportamento.

¹ Gli "o piccoli" e gli "o grandi" sono intesi per $x \rightarrow 0$.

² Questo enunciato può essere ottenuto a partire da quello visto a lezione usando il seguente lemma: *se g è integrabile su $[a, b]$ e \tilde{g} è una funzione su $[a, b]$ che coincide con g tranne che in un numero finito di punti, allora \tilde{g} è integrabile e l'integrale coincide con quello di g .*

Passo 1: comportamento di I_1 . Questo integrale è improprio in 0 e la funzione integranda è positiva e soddisfa

$$\frac{\sin(x^2)}{x^a} \sim \frac{1}{x^{a-2}} \quad \text{per } x \rightarrow 0;$$

per il criterio del confronto asintotico I_1 si comporta come $\int_0^1 \frac{dx}{x^{a-2}}$ e quindi è finito per $a < 3$ e vale $+\infty$ per $a \geq 3$.

Passo 2: comportamento di I_2 per $a > 1$. Questo integrale è improprio in $+\infty$ e la funzione integranda non ha segno costante in alcun intorno di $+\infty$. Osservo ora che, essendo $a > 1$,

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(x^2)}{x^a} \right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a} < +\infty$$

e quindi I_2 converge ad un valore finito per il criterio della convergenza assoluta.

Passo 3: comportamento di I_2 per $-1 < a \leq 1$. In questo caso il criterio della convergenza assoluta non dice nulla sul comportamento di I_2 .³ Procedo allora come visto a lezione per lo studio del comportamento di $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, cioè metto in evidenza $2x \sin(x^2)$, che è la derivata di $-\cos(x^2)$, ed integro per parti:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} 2x \sin(x^2) \frac{1}{x^{a+1}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left| -\cos(x^2) \frac{1}{x^{a+1}} \right|_1^{+\infty} - \frac{a+1}{2} \int_1^{+\infty} \cos(x^2) \frac{1}{x^{a+2}} dx \\ &= \frac{\cos(1)}{2} - \frac{a+1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^{a+2}} dx; \end{aligned} \tag{2}$$

osservo quindi che l'integrale nell'ultima riga (che è improprio in $+\infty$) è finito per il criterio della convergenza assoluta perché $a > -1$, infatti

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos(x^2)}{x^{a+2}} \right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{a+2}} < +\infty.$$

Pertanto I_2 è finito anche per $-1 < a \leq 1$.

Passo 4: conclusioni. L'integrale improprio I vale $+\infty$ per $a \geq 3$ ed è finito per $-1 < a < 3$.

OSSERVAZIONI. (i) Per $a \leq 2$ la funzione integranda in I ammette limite finito per $x \rightarrow 0$ e quindi può essere estesa ad una funzione continua su $[0, +\infty)$; così facendo l'integrale risulta improprio solo in $+\infty$, ma questo non comporta una vera semplificazione.

(ii) L'uso della formula di integrazione per parti nel Passo 3 andrebbe giustificata perché la formula è stata dimostrata a lezione solo per gli integrali "propri".

Un modo per farlo consiste nell'integrare per parti $\int_1^m \frac{\sin(x^2)}{x^a} dx$ invece di I_2 ,

$$\begin{aligned} \int_1^m \frac{\sin(x^2)}{x^a} dx &= \frac{1}{2} \int_1^m 2x \sin(x^2) \frac{1}{x^{a+1}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left| -\cos(x^2) \frac{1}{x^{a+1}} \right|_1^m - \frac{a+1}{2} \int_1^m \cos(x^2) \frac{1}{x^{a+2}} dx \\ &= -\frac{\cos(m^2)}{2m^{a+1}} + \frac{\cos(1)}{2} - \frac{a+1}{2} \int_1^m \frac{\cos(x^2)}{x^{a+2}} dx, \end{aligned}$$

e poi passare al limite per $m \rightarrow +\infty$, ottenendo così il valore di I_2 in (2).

3 Data $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ consideriamo la funzione g definita da

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan((f(x))^n).$$

³ In effetti si può dimostrare che $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(x^2)}{x^a} \right| dx = +\infty$.

Osservare che $g(x)$ è ben definita per ogni $x \in [0, 1]$ e caratterizzare le f per cui g è continua.

SOLUZIONE. Si vede subito che

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) < 1, \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } f(x) = 1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } f(x) > 1. \end{cases}$$

Osservo ora che se g è continua sull'intervallo $I = [0, 1]$, allora per il teorema dei valori intermedi l'immagine $g(I)$ è un intervallo (o al limite un intervallo degenere, cioè un punto). Siccome $g(I)$ è contenuta nell'insieme $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$, che contiene solo intervalli degeneri, concludo che se g è continua allora deve essere costante (e chiaramente vale anche il viceversa: se g è costante allora è continua). Dalla formula sopra è chiaro che g è costante (ovvero continua) se e solo se si verifica uno dei seguenti casi:

- (i) $f(x) < 1$ per ogni x (nel qual caso $g = 0$);
- (ii) $f(x) = 1$ per ogni x (nel qual caso $g = \frac{\pi}{4}$);
- (iii) $f(x) > 1$ per ogni x (nel qual caso $g = \frac{\pi}{2}$).

4 Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ considero la successione (x_n) definita per ricorrenza da $x_{n+1} = \frac{3}{4-x_n}$.

- a) Studiare il comportamento di (x_n) per $x_0 \in (-\infty, 3]$.
- b) Studiare il comportamento di (x_n) per $x_0 \in (4, +\infty)$.
- c) Dimostrare che esiste un'insieme numerabile $E \subset (3, 4]$ tale che la successione (x_n) è ben definita per ogni n se e solo se $x_0 \notin E$.
- d) Studiare il comportamento di (x_n) per $x_0 \in (3, 4] \setminus E$.

SOLUZIONE. Riscrivo la ricorrenza che definisce (x_n) come $x_{n+1} = f(x_n)$, dove

$$f(x) := \frac{3}{4-x}.$$

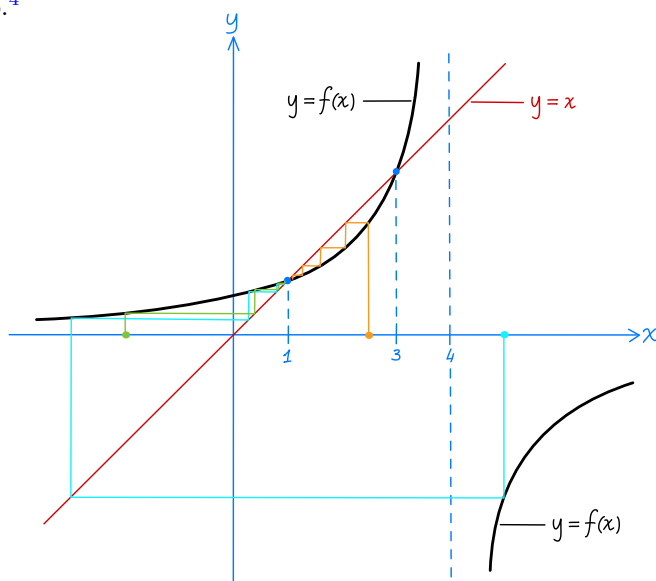
La discussione del comportamento di (x_n) è diviso in diversi casi.

Risolvendo l'equazione $f(x) = x$ ottengo $x = 1$ ed $x = 3$, da cui seguono i primi due casi.

Caso 1: se $x_0 = 1$ allora $x_n = 1$ per ogni n .

Caso 2: se $x_0 = 3$ allora $x_n = 3$ per ogni n .

Il comportamento della successione (x_n) nei casi $x_0 < 1$, $1 < x_0 < 3$ e $x_0 > 4$ risulta chiaro della figura sotto.⁴



⁴ I tre pallini colorati sull'asse delle x rappresentano tre diverse possibili scelte del valore iniziale x_0 ; le spezzate che partono da questi pallini illustrano il comportamento della successione.

Dimostro ora rigorosamente quanto suggerito dalla figura.

Caso 3: se $x_0 < 1$ allora (a) $x_n < 1$ per ogni n , (b) (x_n) è strettamente crescente, (c) $x_n \rightarrow 1$.

- (a) si dimostra per induzione su n usando che $x < 1 \Rightarrow f(x) < 1$.⁵ Infatti $x_0 < 1$ per ipotesi, e dall'ipotesi induttiva $x_n < 1$ segue che $x_{n+1} = f(x_n) < 1$.
- (b) segue da (a) e dall'implicazione $x < 1 \Rightarrow x < f(x)$.
- La successione (x_n) ammette limite $L \in [x_0, 1]$ perché è crescente e soddisfa $x_n \leq 1$; poiché f è continua, passando al limite in $x_{n+1} = f(x_n)$ ottengo l'equazione $L = f(L)$, da cui segue che $L = 1$ (l'altra soluzione dell'equazione, $L = 3$, è esclusa dal fatto che $L \leq 1$); questo conclude la dimostrazione di (c).

Caso 4: se $1 < x_0 < 3$ allora (a) $1 < x_n < 3$ per ogni n , (b) (x_n) è strettamente decrescente, (c) $x_n \rightarrow 1$.

- (a) si dimostra per induzione su n usando che $1 < x < 3 \Rightarrow 1 < f(x) < 3$.
- (b) segue da (a) e dall'implicazione $1 < x < 3 \Rightarrow f(x) < x$.
- La successione (x_n) ammette limite $L \in [1, x_0]$ perché è decrescente e soddisfa $1 \leq x_n$; per la stessa ragione del Caso 3, il limite L soddisfa $L = f(L)$ da cui segue che $L = 1$ (la soluzione $L = 3$ è esclusa dal fatto che $L \leq x_0 < 3$).

Caso 5: se $x_0 > 4$ allora (a) $x_n < 1$ per $n \geq 1$, (b) (x_n) è strettamente crescente per $n \geq 1$; (c) $x_n \rightarrow 1$.

- Osservo che $x > 4 \Rightarrow f(x) < 0$ e quindi l'ipotesi $x_0 > 4$ implica $x_1 < 0$; mi riconduco quindi al Caso 3.

Per discutere cosa succede nei casi rimanenti devo innanzitutto determinare l'insieme E dei dati iniziali x_0 per cui la successione (x_n) non è ben definita. Per farlo ho bisogno di introdurre delle nuove notazioni: la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è invertibile e indico l'inversa con

$$g(y) := 4 - \frac{3}{y};$$

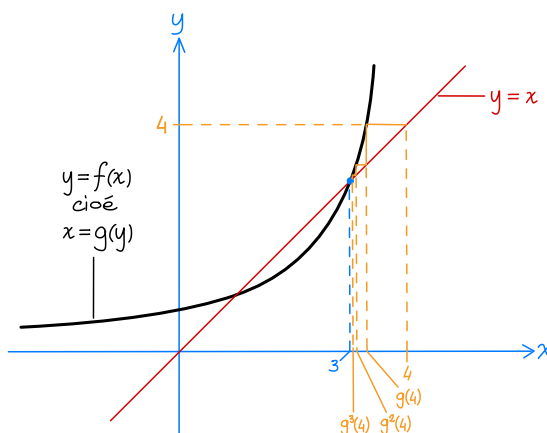
indico inoltre con f^n (rispettivamente g^n) la funzione f (rispettivamente g) composta con se stessa n volte.⁶ Notare che $x_n = f^n(x_0)$ e che g^n è l'inversa di f^n .

Supponiamo ora che i valori x_n siano ben definiti per $n = 0, \dots, m$, ma non per $n = m + 1$. Siccome $f(x)$ non è definita solo per $x = 4$, questo significa che $4 = x_m = f^m(x_0)$, da cui segue che $x_0 = g^m(4)$. In altre parole, se i valori x_n non sono definiti per tutti gli n allora x_0 appartiene all'insieme

$$E := \{g^m(4) : m = 0, 1, \dots\}, \tag{3}$$

e d'altra parte vale chiaramente il viceversa: se $x_0 \in E$, ovvero $x_0 = g^m(4)$ per qualche m , allora $x_m = 4$ e x_{m+1} non è ben definito.

Il comportamento della successione $a_m := g^m(4)$ è ottenuto graficamente nella figura sotto:



Vale che (a) $3 < a_m \leq 4$ per ogni m , (b) (a_m) è strettamente decrescente, (c) $a_m \rightarrow 3$.

⁵ Questa implicazione, come le altre usate nel resto di questo esercizio, risulta chiara dalla figura sopra e si dimostra con un semplice calcolo.

⁶ Questa notazione è in disaccordo con quella usuale, per cui f^n indica la potenza n -esima di f .

- Osservo che (a_n) soddisfa $a_0 = 4$ e l'equazione ricorsiva $a_{n+1} = g(a_n)$ per $m = 0, 1, \dots$
- (a) si dimostra per induzione su n usando l'implicazione $3 < y \leq 4 \Rightarrow 3 < g(y) \leq 4$.
- (b) segue da (a) e dall'implicazione $3 < y \leq 4 \Rightarrow g(y) < y$.
- La successione (a_m) ammette limite $L \in [3, 4]$ perchè è decrescente e $3 < a_m \leq 4$ per ogni m ; siccome g è continua, L soddisfa l'equazione $L = g(L)$ e quindi $L = 3$ (l'altra soluzione dell'equazione, $L = 1$, è esclusa perchè $L \geq 3$).

Caso 6: se $x_0 \in (3, 4] \setminus E$ allora (a) esiste un indice m tale che $x_m > 4$, (b) (x_n) è strettamente crescente per $n \geq m + 1$, (c) $x_n \rightarrow 1$.

- Osservo che basta dimostrare l'enunciato (a) per poi ricondursi al Caso 5. Procedo per assurdo, supponendo che $x_n < 4$ per ogni n .
- Usando che $3 < x < 4 \Rightarrow 3 < f(x)$ dimostro per induzione che $3 < x_n$ per ogni n .
- Usando l'implicazione $3 < x < 4 \Rightarrow x < f(x)$ e il fatto che $3 < x_n < 4$ per ogni n , ottengo che (x_n) è strettamente crescente.
- Essendo crescente e minore di 4, la successione (x_n) ha limite $L \in [x_0, 4] \subset (3, 4]$; inoltre $L = f(L)$, da cui segue che $L = 1$ oppure $L = 3$, e questo è assurdo perchè $L \in (3, 4]$.

Conclusioni. La successione (x_n) è ben definita per ogni n se e solo se x_0 non appartiene all'insieme E definito in (3), e converge a 1 tranne che per $x_0 = 3$, nel qual caso vale sempre 3.

OSSERVAZIONI. È possibile trovare una formula esplicita per la successione (x_n) :

$$x_n = \frac{(3^n - 3)x_0 - (3^{n+1} - 3)}{(3^n - 1)x_0 - (3^{n+1} - 1)} \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots,^7 \quad (4)$$

e da questa formula si ottiene immediatamente che:

- x_n non è ben definita se $x_0 = \frac{3^{n+1}-1}{3^n-1}$, e dunque $E = \left\{ \frac{3^{n+1}-1}{3^n-1} : n = 0, 1, 2, \dots \right\}$;
- per ogni $x_0 \notin E$ con $x_0 \neq 3$ la successione (x_n) tende a 1;
- se $x_0 = 3$ allora $x_n = 3$ per ogni n ; se $x_0 = 1$ allora $x_n = 1$ per ogni n .

Osservo che dimostrare che la correttezza della formula (4) è molto semplice: si deve verificare che la successione (x_n) definita in questo modo vale x_0 per $n = 0$ (questo è immediato) e soddisfa l'equazione ricorsiva $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni n (questo è un calcolo algebrico appena più complicato).

Il punto interessante, però, non è tanto verificare la formula (4) quanto trovarla.

In effetti si può trovare una formula simile per le soluzioni di una classe di equazioni ricorsive che includono quella considerata in questo esercizio come caso particolare. Per la precisione, data una matrice $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con determinante non nullo, consideriamo una successione (x_n) che risolve per ogni n l'equazione ricorsiva

$$x_{n+1} = f_A(x_n) \quad \text{dove} \quad f_A(x) := \frac{A_{11}x + A_{12}}{A_{21}x + A_{22}}.$$

Chiaramente la successione (x_n) è data dalla formula

$$x_n = f_A^n(x_0) \quad \text{per } n = 0, 1, \dots$$

dove f_A^n indica la composizione di f_A con se stessa n volte (per ogni $n \geq 1$, mentre $f_A^0(x) := x$).

Le funzioni f_A sono esempi di mappe note come proiezioni, e hanno la seguente interessante proprietà (di facile verifica): per ogni coppia di matrici $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ vale che

$$f_A \circ f_B = f_{AB}.$$

In particolare per $n = 0, 1, 2, \dots$ si ha

$$f_A^n = f_{A^n},$$

e quindi, trovando una formula esplicita per la matrice A^n si trova anche una formula esplicita per $f_A^n = f_{A^n}$ e infine per $x_n = f_A^n(x_0)$.

⁷ Ci tengo a precisare che trovare questa formula non è lo scopo dell'esercizio.

Nel caso specifico di questo esercizio, la matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix};$$

questa matrice ha due autovalori reali distinti $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$, e quindi può essere diagonalizzata, cioè può essere scritta nella forma

$$A = RDR^{-1}$$

dove D è la matrice diagonale associata agli autovalori λ_1 e λ_2 ed R è una matrice le cui colonne v_1 e v_2 sono autovettori corrispondenti agli autovalori λ_1 e λ_2 (per esempio $v_1 := (3, 1)$ e $v_2 := (1, 1)$), vale a dire

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad R := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} A^n &= (RDR^{-1})^n = RD^nR^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 - 3^n & -3 + 3^{n+1} \\ 1 - 3^n & -1 + 3^{n+1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene infine

$$x_n = f_A^n(x_0) = f_{A^n}(x_0) = \frac{(3^n - 3)x_0 - (3^{n+1} - 3)}{(3^n - 1)x_0 - (3^{n+1} - 1)}.$$

(Un calcolo simile può essere svolto per qualunque matrice $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, anche non diagonalizzabile, prendendo D uguale alla forma canonica di Jordan complessa.)

5 Dato $k = 1, 2, \dots$ calcolare il valore della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(nk)!} = 1 + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(2k)!} + \frac{1}{(3k)!} + \dots$$

[Suggerimento: osservare che la funzione $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{nk}}{(nk)!}$ soddisfa un'opportuna equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.]

[Può convenire iniziare da casi particolari, per esempio $k = 2$ e $k = 4$.]

SOLUZIONE. Pongo

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{nk}}{(nk)!} \tag{5}$$

ed osservo che questa serie di potenze ha raggio di convergenza infinito,⁸ e per quanto detto a lezione la funzione $f(x)$ è derivabile infinite volte; inoltre per ogni $h = 1, 2, \dots$ vale che

$$\begin{aligned} D^h f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^h(x^{nk})}{(nk)!} \\ &= \sum_{n=\lceil h/k \rceil}^{+\infty} \frac{nk(nk-1) \cdots (nk-h+1)x^{nk-h}}{(nk)!} = \sum_{n=\lceil h/k \rceil}^{+\infty} \frac{x^{nk-h}}{(nk-h)!}. \end{aligned} \tag{6}$$

Prendendo $h = k$ e usando il cambio di indice $n = m + 1$, ottengo

$$D^k f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{nk-k}}{(nk-k)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{mk}}{(mk)!} = f(x),$$

⁸ Questa affermazione può essere dimostrata in più modi; uno è osservare che la serie converge assolutamente in per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x^{nk}}{(nk)!} \right| \leq \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|x|^m}{m!} = e^{|x|} < +\infty.$$

ovvero $f(x)$ risolve l'equazione differenziale

$$D^k y - y = 0. \quad (7)$$

Quest'equazione differenziale ha ordine k ed è lineare, omogenea e a coefficienti costanti; il polinomio caratteristico è $\lambda^k - 1$ e gli zeri di questo polinomio sono le radici complesse k -esime di 1, vale a dire

$$\lambda_j := \exp\left(j \frac{2\pi i}{k}\right) = \lambda^j \quad \text{con } j = 0, 1, \dots, k-1 \text{ e } \lambda := \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right). \quad (8)$$

Le soluzioni di (7) si scrivono quindi come combinazioni lineari a coefficienti complessi delle funzioni $\exp(\lambda^j x)$; in particolare esistono $c_0, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{C}$ tali che

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \exp(\lambda^j x). \quad (9)$$

Com'è noto, i coefficienti c_j sono univocamente determinati dai valori di f e delle sue derivate fino alla $(k-1)$ -esima in un qualche punto. Il punto in cui è più facile calcolare questi valori è $x = 0$: usando infatti le formule (5) e (6) ottengo

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ D^h f(0) = 0 \quad \text{per } h = 1, \dots, k-1. \end{cases} \quad (10)$$

Dalla (9) ottengo che

$$D^h f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \lambda^{hj} \exp(\lambda^j x) \quad \text{per } h = 0, 1, \dots;$$

tramite questa formula e (9) riscivo il sistema (10) come

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{k-1} c_j = 1, \\ \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{hj} c_j = 0 \quad \text{per } h = 1, \dots, k-1. \end{cases} \quad (11)$$

Risolvendo esplicitamente questo sistema per $k = 2$ ottengo $\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{1}{2}$, mentre per $k = 4$ ottengo $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}$. È quindi naturale ipotizzare che per ogni k l'unica soluzione sia

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{k-1} = \frac{1}{k}.$$

In effetti così è: si vede al volo che la prima equazione (11) è soddisfatta prendendo c_j come come sopra, mentre la verifica dell' h -esima equazione segue da un semplice conto:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{hj} c_j = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda^h)^j = \frac{(\lambda^h)^k - 1}{k(\lambda^h - 1)} = \frac{\lambda^{hk} - 1}{k(\lambda^h - 1)} = 0 \quad (12)$$

(nel secondo passaggio ho usato la nota formula $1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1} = \frac{a^k - 1}{a - 1}$; nell'ultimo passaggio ho usato l'identità $\lambda^{hk} = 1$, che segue dalla definizione di λ in (8)).

In conclusione, la funzione $f(x)$ è data da

$$f(x) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \exp(\lambda^j x), \quad (13)$$

e ricordando che la serie nel testo del problema coincide con $f(1)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(nk)!} = f(1) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \exp(\lambda^j).$$

OSSERVAZIONI. Se si vuole solo verificare la formula (13) e non trovarla (che è il vero punto dell'esercizio), si può procedere anche in altro modo: sostituendo al posto di $\exp(\lambda^j x)$ la sua

espressione come serie di Taylor ottengo

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \exp(\lambda^j x) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^j x)^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{jn} \right] \frac{x^n}{n!};^9 \quad (14)$$

usando poi il calcolo in (12) ottengo

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{jn} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda^n)^j = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda^n = 1, \text{ cioè se } k \text{ divide } n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque l'ultima serie in (14) coincide con la serie che definisce $f(x)$.

⁹ Nel secondo passaggio ho scambiato le due somme; per legittimare questa operazione serve una parte della teoria delle serie che non è stata spiegata in questo corso.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Determinare la più grande semiretta I su cui la funzione $f(x) := \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x^2$ risulta essere convessa.

SOLUZIONE. $f''(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$; la semiretta cercata è $[2, +\infty)$.

2. Determinare il polinomio di Taylor all'ordine 6 in 0 di $f(x) := (1 - x^3) \log(1 + 2x^3)$.

SOLUZIONE. $P_6(x) = 2x^3 - 4x^6$.

3. Calcolare $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx$.

SOLUZIONE. Usando la scomposizione $\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$ ottengo

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx = \left| -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione \ll per $x \rightarrow +\infty$:

$$\underbrace{e^{x \log x}}_a, \quad \underbrace{\frac{x^2 - 1}{x^5 + 3}}_b, \quad \underbrace{\frac{1}{x^2 + 1} + 2^{-x}}_c, \quad \underbrace{5^x - x^5}_d.$$

SOLUZIONE. L'ordine corretto è $b \ll c \ll d \ll a$.

5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = x(\log x)^2$ tale che $x(0) = \frac{1}{e}$.

SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \exp\left(-\frac{1}{t+1}\right)$.

6. Scrivere le soluzioni dell'equazione differenziale $P(D)x = 0$ dove $P(\lambda) := (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 - 1)(\lambda + 1)^2$.

SOLUZIONE. $x(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) + c_3 e^t + (c_4 + c_5 t + c_6 t^2) e^{-t}$ con $c_1, \dots, c_6 \in \mathbb{R}$.

7. Dato $a > 0$, sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \geq 0$ e $x^a \leq y \leq \sqrt[4]{x^{4a} + 1}$. Dire per quali a l'insieme A ha area finita.

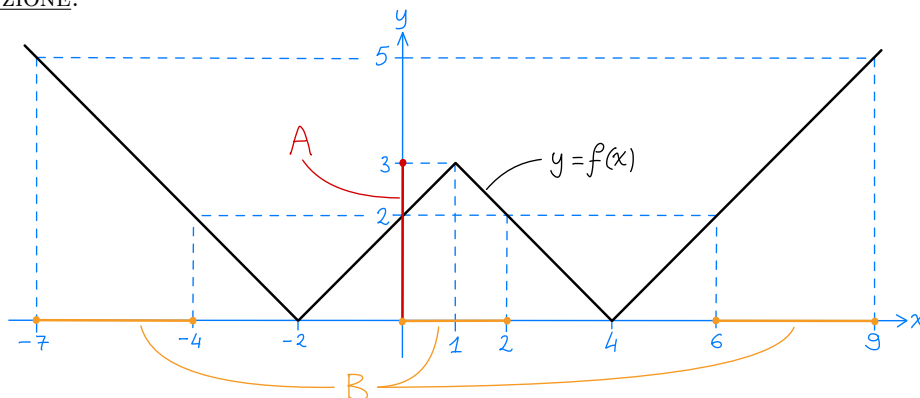
SOLUZIONE. $\text{area}(A) = \int_0^\infty \sqrt[4]{x^{4a} + 1} - x^a dx \approx \int_1^\infty x^{-3a} dx$ è finita per $a > \frac{1}{3}$.

8. Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{1 + 2^n}$ converge.

SOLUZIONE. La serie si comporta come $\sum (a/2)^n$ e quindi converge per $0 < a < 2$.

9. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := ||x - 1| - 3|$ e determinare gli insiemi $A := f([1, 4])$ e $B := f^{-1}([2, 5])$.

SOLUZIONE.



Come si vede dal disegno sopra $A = [0, 3]$ e $B = [-7, -4] \cup [0, 2] \cup [6, 9]$.

SECONDA PARTE (prima variante)

1 Dire per quali $a \geq 0$ vale che

$$\exp(x^2) \geq a \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

SOLUZIONE. Noto che la disequazione in (1) è sempre verificata per $x = \frac{3}{2}$; inoltre $(x - \frac{3}{2})^2 > 0$ per ogni $x \neq \frac{3}{2}$, e quindi posso riscrivere la (1) come

$$a \leq \underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right)^{-2} \exp(x^2)}_{f(x)} \quad \text{per ogni } x \neq \frac{3}{2}, \quad (2)$$

o equivalentemente come

$$a \leq \inf f(x),$$

dove l'inf è preso su tutti gli $x \neq \frac{3}{2}$, vale a dire l'insieme di definizione della funzione f .

Siccome il dominio di f si scrive come unione delle semirette aperte $(-\infty, \frac{3}{2})$ e $(\frac{3}{2}, +\infty)$ e la funzione f è continua e derivabile all'interno di ciascuna semiretta, per trovare l'inf di f posso applicare l'algoritmo visto a lezione, che consiste nel confrontare i valori di f nei punti in cui si annulla la derivata e i valori di f agli estremi delle semirette, intesi in questo caso come limiti. Osservo per cominciare che tali limiti sono tutti uguali a $+\infty$, infatti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{-2} \exp(x^2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) &= \frac{\exp(\frac{9}{4})}{0^+} = +\infty. \end{aligned}$$

Quindi l'inf di f è dato dal più piccolo dei i valori di f nei punti in cui si annulla $f'(x)$; osservo ora che

$$f'(x) = (2x^2 - 3x - 2) \left(x - \frac{3}{2}\right)^{-3} \exp(-x^2)$$

si annulla per $x = 2$ e $x = -\frac{1}{2}$, e che

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \exp\left(\frac{1}{4}\right) = 0,321 \pm 10^{-4}, \quad f(2) = 4 \exp(4) = 218,39 \pm 10^{-2};$$

dunque

$$\inf f = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \exp\left(\frac{1}{4}\right),^1$$

e la (1) vale per

$$a \leq \frac{1}{4} \exp\left(\frac{1}{4}\right).$$

OSSERVAZIONI. (i) In alternativa all'algoritmo per la ricerca del minimo visto a lezione, si potrebbe anche studiare il segno della derivata di f e tracciare il grafico di f , arrivando ovviamente alle stesse conclusioni, vale dire che il valore minimo di f è $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

(ii) Nella soluzione sopra ho riscritto la disequazione (1) in modo da ridurre il problema al calcolo dell'inf dei valori di una funzione. La stessa idea può essere realizzata in altri modi; per esempio si può riscrivere la disequazione (1) come

$$\frac{1}{a} \geq \underbrace{\exp(-x^2) \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}_{f_1(x)},$$

e in tal caso i valori di a cercati sono quelli tali che $\frac{1}{a} \geq \sup f_1$. Oppure si riscrive (1) come

$$\log a \leq \underbrace{x^2 - 2 \log \left|x - \frac{3}{2}\right|}_{f_2(x)},$$

e in tal caso i valori di a cercati sono quelli tali che $\log a \leq \inf f_2$.

¹ In particolare questo inf è anche il minimo di f , ma questo è irrilevante per il problema in oggetto.

(iii) È possibile anche un altro approccio, basato su un'interpretazione grafica (e dinamica) del problema.² Innanzitutto noto che la (1) equivale a dire che il grafico della funzione $a(x - \frac{3}{2})^2$ sta sotto quello di $\exp(x^2)$. Chiaramente questa condizione è soddisfatta per $a = 0$; facendo quindi crescere a , il grafico di $a(x - \frac{3}{2})^2$ si muove verso l'alto finché, per un certo valore di a che indico con a_0 , tocca il grafico di $\exp(x^2)$ per la prima volta; quando poi a oltrepassa il valore a_0 il grafico di $a(x - \frac{3}{2})^2$ non sta più sotto a quello di $\exp(x^2)$. In altre parole vale (1) se e solo se $a \leq a_0$.

Per trovare a_0 , osservo che quando il grafico di $a(x - \frac{3}{2})^2$ tocca quello di $\exp(x^2)$ per la prima volta ci deve essere un punto di tangenza,³ ovvero deve esistere x tale che le due funzioni e le loro derivate coincidono in x . Questo porta al sistema

$$\begin{cases} a(x - \frac{3}{2})^2 = \exp(x^2), \\ 2a(x - \frac{3}{2}) = 2x \exp(x^2), \end{cases}$$

che si risolve esplicitamente: sostituendo infatti il termine $\exp(x^2)$ nella seconda equazione con $a(x - \frac{3}{2})^2$ ottengo l'equazione

$$1 = x(x - \frac{3}{2}),$$

che ha soluzioni $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 2$, a cui corrispondono rispettivamente i valori $a = \frac{1}{4} \exp(\frac{1}{4})$ e $a = 4 \exp(4)$. Per quanto detto sopra, il valore critico a_0 è il minore dei due.

2 Dato $a > 0$ consideriamo la funzione $f(x) := (x^2 + a)^a + (x^2 - 2)^a - 2x^{2a}$.

a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ al variare di $a > 0$.

b) Dire per quali $a > 0$ la serie $S := \sum_{n=2}^{+\infty} f(n)$ converge.

SOLUZIONE. a) Raccogliendo x^{2a} nella formula di $f(x)$ ottengo

$$f(x) = x^{2a} \left[\left(1 + \frac{a}{x^2}\right)^a + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)^a - 2 \right];$$

uso ora lo sviluppo di Taylor $(1 + t)^a = 1 + at + \frac{1}{2}a(a-1)t^2 + O(t^3)$ per sviluppare le due potenze le tra parentesi quadre (pongo $t = \frac{a}{x^2}$ per la prima e $t = -\frac{2}{x^2}$ per la seconda):

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{2a} \left[\left(1 + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3(a-1)}{2x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) + \left(1 - \frac{2a}{x^2} + \frac{4a(a-1)}{2x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) - 2 \right] \\ &= x^{2a} \left[\frac{a(a-2)}{x^2} + \frac{a(a^2+4)(a-1)}{2x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right) \right]. \end{aligned}$$

Per trovare la parte principale di $f(x)$ devo distinguere il caso in cui il coefficiente $a(a-2)$ del monomio $\frac{1}{x^2}$ non si annulla (cioè $a \neq 2$) da quello in cui si annulla (cioè $a = 2$):

$$\text{p.p.}(f(x)) = \begin{cases} a(a-2)x^{2a-2} & \text{se } a \neq 2, \\ 8 & \text{se } a = 2. \end{cases} \quad (3)$$

b) Siccome $f(x)$ ha una parte principale per $x \rightarrow +\infty$, ha anche segno costante in un intorno di $+\infty$, e quindi posso applicare alla serie $S := \sum f(n)$ tutti i criteri che valgono per le serie a segno definitivamente costante. In particolare, usando il criterio del confronto asintotico e la formula (3) ottengo che, per $a = 2$,

$$S \approx \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty,$$

mentre per $a \neq 2$

$$S \approx \sum_{n=1}^{+\infty} a(a-2)n^{2a-2} \approx \pm \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2a-2},$$

² Va detto che questo approccio è decisamente più complicato da formalizzare rigorosamente.

³ Questa affermazione è più delicata di quello che sembra.

dove il segno \pm coincide con il segno del coefficiente $a(a-2)$. Ricordando il comportamento della serie armonica generalizzata, ottengo che

- S diverge a $+\infty$ per $a \geq 2$,
- S diverge a $-\infty$ per $\frac{1}{2} \leq a < 2$,
- S converge a un numero finito per $0 < a < \frac{1}{2}$.

3 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua e sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che:

- a) $g \circ f$ è uniformemente continua se anche g è uniformemente continua;
- b) $g \circ f$ è uniformemente continua se f è limitata;
- c) in generale $g \circ f$ può non essere uniformemente continua.

SOLUZIONE. a) L'ipotesi che f è uniformemente continua significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_f(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vale l'implicazione

$$|x_1 - x_2| \leq \delta_f(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon,$$

mentre l'ipotesi che g è uniformemente continua significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_g(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vale l'implicazione

$$|x_1 - x_2| \leq \delta_g(\varepsilon) \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leq \varepsilon.$$

Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vale la seguente catena di implicazioni:

$$|x_1 - x_2| \leq \delta_f(\delta_g(\varepsilon)) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \delta_g(\varepsilon) \Rightarrow |g(f(x_1)) - g(f(x_2))| \leq \varepsilon.$$

Ho quindi dimostrato che $g \circ f$ è uniformemente continua, e per la precisione si può prendere

$$\delta_{g \circ f}(\varepsilon) := \delta_f(\delta_g(\varepsilon)).$$

Osservo infine che questa stessa dimostrazione mi permette di ottenere un enunciato leggermente più generale di quello appena dimostrato:

(P) *dati X, Y sottoinsiemi di \mathbb{R} e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni uniformemente continue, allora $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua.*

b) Siccome f è limitata, esiste m finito tale che $-m \leq f(x) \leq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi, se indico con \hat{g} la restrizione di g all'intervallo $[-m, m]$, ho che $g \circ f = \hat{g} \circ f$. Inoltre \hat{g} è continua e definita su un intervallo chiuso e limitato, e quindi è uniformemente continua per il teorema di Heine-Cantor. Dimostro infine che $g \circ f = \hat{g} \circ f$ è uniformemente continua applicando l'enunciato (P) a f e \hat{g} .

c) Sia $f(x) := x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una qualunque funzione continua ma non uniformemente continua (per esempio $g(x) := e^x$). La funzione f è chiaramente uniformemente continua, ma la funzione $g \circ f$ è uguale a g e non è uniformemente continua.

4 Sia $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione concava di classe C^2 . Per ogni $x \geq 1$ sia R_x la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x , sia I_x il segmento di R_x avente come estremi i punti di ascissa x e $x+1$, e sia infine A l'unione dei segmenti I_x al variare di $x \geq 1$.

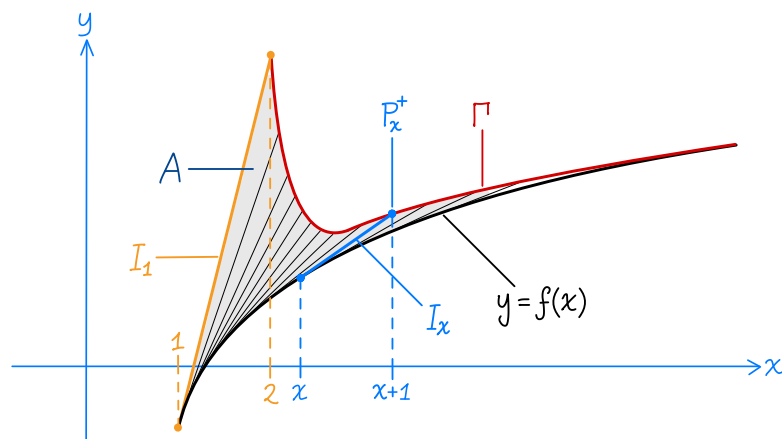
Dimostrare che A ha area finita nei seguenti casi:

- a) $f(x) = x^a$ con $0 < a < 1$;
- b) $f''(x) \sim -\frac{c}{x^m}$ per $x \rightarrow +\infty$, con $m > 1$, $c > 0$;
- c) $f'(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

SOLUZIONE. Nella prima parte della soluzione scrivo l'area di A come integrale improprio.

Indico gli estremi destro e sinistro del segmento I_x con P_x^+ e P_x^- rispettivamente. Dalla figura sotto si intuisce che l'insieme A è delimitato inferiormente dal grafico di f (disegnato in nero) e superiormente dal segmento I_1 (in arancione) e dalla curva Γ (in rosso) tracciata dall'estremo P_x^+ quando x varia tra 1 e $+\infty$.⁴

⁴ Do una dimostrazione rigorosa di questa affermazione nelle osservazioni alla fine.



Osservo ora che i punti della retta R_x sono della forma $P_x(t) := (t, f(x) + f'(x)(t - x))$ con $t \in \mathbb{R}$,⁵ quindi il segmento I_x è formato dai punti $P_x(t)$ con $0 \leq t \leq 1$ e in particolare l'estremo destro è dato da

$$P_x^+ = P_x(x + 1) = (x + 1, f(x) + f'(x)).$$

Come detto sopra, Γ consiste dei punti P_x^+ con x che varia tra 1 e $+\infty$, o equivalentemente dei punti P_{x-1}^+ con x che varia tra 2 e $+\infty$ (sto solo sostituendo l'indice x con $x - 1$), e siccome

$$P_{x-1}^+ = (x, f(x - 1) + f'(x - 1))$$

ne segue che Γ è il grafico della funzione $g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$g(x) := f(x - 1) + f'(x - 1); \tag{4}$$

noto inoltre che il segmento I_1 è contenuto nella retta R_1 , che è il grafico della funzione

$$\tilde{g}(x) := f(1) + f'(1)(x - 1). \tag{5}$$

Pertanto l'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_1^2 \tilde{g}(x) - f(x) dx + \int_2^{+\infty} g(x) - f(x) dx.$$

Osservo ora che il primo integrale è finito (non è improprio) mentre il secondo è improprio, e quindi

$$\text{area}(A) \approx \int_2^{+\infty} g(x) - f(x) dx = \int_1^{+\infty} \underbrace{f(t) + f'(t) - f(t + 1)}_{h(t)} dt \tag{6}$$

(nel secondo passaggio ho usato la formula (4) e il cambio di variabile $x = t + 1$).

In conclusione, l'area di A è finita se e solo se l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} h(t) dt$ è finito; nel seguito dimostro che ciascuna delle ipotesi a), b) e c) implica la finitezza di questo integrale.

a) Supponendo $f(x) = x^a$ con $0 < a < 1$, posso calcolare facilmente la parte principale per $t \rightarrow +\infty$ della funzione $h(t)$ in (6):

$$\begin{aligned} h(t) &= t^a + at^{a-1} - (t + 1)^a = t^a \left[1 + \frac{a}{t} - \left(1 + \frac{1}{t} \right)^a \right] \\ &= t^a \left[1 + \frac{a}{t} - \left(1 + \frac{a}{t} + \frac{a^2 - a}{2t^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right) \right) \right] \\ &= t^a \left[\frac{a - a^2}{2t^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right) \right] \sim \frac{a - a^2}{2t^{2-a}} \end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato lo sviluppo di Taylor $(1 + s)^a = 1 + as + \frac{a^2 - a}{2}s^2 + O(s^3)$ con $s = \frac{1}{t}$). Pertanto, per il criterio del confronto asintotico,

$$\int_1^{+\infty} h(t) dt \approx \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-a}}$$

⁵ Ricordo che la retta tangente R_x è data dai punti (t, y) che soddisfano l'equazione $y = f(x) + f'(x)(t - x)$ (uso la variabile t invece di x perché quest'ultima è un parametro del problema!).

e l'ultimo integrale è finito perché l'ipotesi $0 < a < 1$ implica $2 - a > 1$.

b) Lo sviluppo di Taylor di ordine 1 di f in t con il resto in forma di Lagrange mi permette di scrivere $f(t + 1)$ come

$$f(t + 1) = f(t) + f'(t) + \frac{1}{2}f''(\tau(t))$$

dove $\tau(t)$ è un opportuno numero tale che $t \leq \tau(t) \leq t + 1$; in particolare

$$h(t) = f(t) + f'(t) - f(t + 1) = -\frac{1}{2}f''(\tau(t))$$

e $\tau(t) \sim t$ per $t \rightarrow +\infty$. Usando quindi l'ipotesi $f''(x) \sim -\frac{c}{x^m}$ ottengo che, per $t \rightarrow +\infty$,

$$h(t) = -\frac{1}{2}f''(\tau(t)) \sim \frac{c}{2(\tau(t))^m} \sim \frac{c}{2t^m}.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico,

$$\int_1^{+\infty} h(t) dt \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^m} dt$$

e l'ultimo integrale è finito per via dell'ipotesi $m > 1$.

c) Per definizione, l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} h(t) dt$ è dato dal limite per $s \rightarrow +\infty$ di

$$I(s) := \int_1^s f(t) + f'(t) - f(t + 1) dt.$$

Devo quindi far vedere che il limite di $I(s)$ per $s \rightarrow +\infty$ è finito.

A questo scopo riscrivo $I(s)$ spezzandolo come somma di tre integrali, uno per ogni addendo della funzione integranda:

$$\begin{aligned} I(s) &= \int_1^s f'(t) dt + \int_1^s f(t) dt - \int_1^s f(t + 1) dt \\ &= \left| f'(t) \right|_1^s + \int_1^s f(t) dt - \int_2^{s+1} f(t) dt = f(s) - f(1) + \int_1^2 f(t) dt - \int_s^{s+1} f(t) dt \end{aligned} \quad (7)$$

(nel secondo passaggio ho applicato il teorema fondamentale dal calcolo al primo integrale e il cambio di variabile $\tau = t + 1$ all'ultimo integrale, sostituendo poi la variabile τ con t ; nel terzo passaggio ho spezzato $\int_1^s \dots$ come $\int_1^2 \dots + \int_2^s \dots$ e ho spezzato $\int_2^{s+1} \dots$ come $\int_2^s \dots + \int_s^{s+1} \dots$; i due integrali $\int_2^s \dots$ così ottenuti si cancellano).

Integrando per parti l'ultimo integrale nella riga (7) ottengo

$$\begin{aligned} \int_s^{s+1} f(t) dt &= \left| f(t)(t - s - 1) \right|_s^{s+1} - \int_s^{s+1} f'(t)(t - s - 1) dt \\ &= -f(s) + \int_s^{s+1} f'(t)(s + 1 - t) dt, \end{aligned} \quad (8)$$

e mettendo insieme (7) e (8) ottengo

$$I(s) = -f(1) + \int_1^2 f(t) dt - \int_s^{s+1} f'(t)(s + 1 - t) dt.$$

Per dimostrare che $I(s)$ ha limite finito per $s \rightarrow +\infty$ mi basta dimostrare che l'ultimo integrale in questa formula tende a 0.

L'ipotesi $f'(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $m(\varepsilon) > 0$ tale che $|f'(x)| \leq \varepsilon$ per ogni $x \geq m(\varepsilon)$; ma allora per ogni $s \geq m(\varepsilon)$ vale che

$$\left| \int_s^{s+1} f'(t)(s + 1 - t) dt \right| \leq \int_s^{s+1} |f'(t)| |s + 1 - t| dt \leq \int_s^{s+1} \varepsilon dt = \varepsilon$$

(nel secondo passaggio ho usato che $|f'(t)| \leq \varepsilon$ e $0 \leq s + 1 - t \leq 1$ per ogni $t \in [s, s + 1]$).

OSSERVAZIONI. All'inizio della soluzione ho scritto che si intuisce dal disegno che l'insieme A è delimitato inferiormente dal grafico di f e superiormente dal segmento I_1 e dalla curva Γ .

Dimostro ora questa affermazione in modo rigoroso (senza disegni!). Per ogni $t \geq 1$ indico con A_t la sezione di A corrispondente all'ascissa t , vale a dire

$$A_t := \{y : (t, y) \in A\},$$

e cerco di descrivere A_t esplicitamente.⁶ Ho già osservato sopra che per ogni $x \geq 1$, il segmento I_x consiste dei punti $P_x(t) := (t, f(x) + f'(x)(t - x))$ con t che varia in $[x, x + 1]$, e quindi

$$A := \bigcup_{x \geq 1} I_x = \left\{ (t, f(x) + f'(x)(t - x)) : x \leq t \leq x + 1 \text{ e } x \geq 1 \right\}.$$

Per ogni $x \geq 1$ ed ogni $t \in \mathbb{R}$ pongo

$$g_t(x) := f(x) + f'(x)(t - x),$$

e riscrivo le condizioni “ $x \leq t \leq x + 1$ e $x \geq 1$ ” come “ $t - 1 \leq x \leq t$ e $x \geq 1$ ”, ovvero come “ $\alpha(t) \leq x \leq t$ ”, dove ho posto $\alpha(t) := \max\{t - 1, 1\}$; così facendo ottengo

$$A = \left\{ (t, g_t(x)) : t \in \mathbb{R}, \alpha(t) \leq x \leq t \right\},$$

da cui segue che, per ogni $t \geq 1$,

$$A_t = g_t([\alpha(t), t]).$$

Osservo ora che

- la funzione $g_t(x)$ è decrescente sulla semiretta $x \leq t$ (infatti $g'_t(x) = f''(x)(t - x) \leq 0$ perché f è concava e dunque $f'' \leq 0$); pertanto

$$A_t = [g_t(t), g_t(\alpha(t))];$$

- $g_t(t) = f(t)$ per ogni $t \geq 1$;
- per $1 \leq t \leq 2$ si ha $\alpha(t) = 1$ e quindi, ricordando la definizione di \tilde{g} in (5),

$$g_t(\alpha(t)) = g_t(1) = f(1) + f'(1)(t - 1) = \tilde{g}(t);$$

- per $t \geq 2$ si ha $\alpha(t) = t - 1$ e quindi, ricordando la definizione di g in (4),

$$g_t(\alpha(t)) = g_t(t - 1) = f(t - 1) + f'(t - 1) = g(t).$$

Riassumendo

$$A_t = \begin{cases} [f(t), \tilde{g}(t)] & \text{se } 1 \leq t \leq 2, \\ [f(t), g(t)] & \text{se } t \geq 2, \end{cases}$$

Questo significa proprio che A è la parte del piano delimitata dal basso dal grafico di f e dall'alto dall'unione del grafico di \tilde{g} ristretta all'intervallo $[1, 2]$ (vale a dire il segmento I_1) e del grafico di g (vale a dire la curva Γ).

5 Siano f, g funzioni definite sull'intervallo $[a, b]$, positive, limitate ed integrabili. Dimostrare che fg è integrabile.

SOLUZIONE. Mi servono alcune notazioni oltre a quelle già viste a lezione. Sia $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata, I un intervallo contenuto in $[a, b]$, e $\sigma = (x_0, \dots, x_N)$ una partizione di $[a, b]$; indico con $\text{osc}(h, I)$ l'oscillazione di h su I , vale a dire

$$\text{osc}(h, I) := \sup_I h - \inf_I h,$$

e con $\Delta(f, \sigma)$ la differenza tra la somma di Riemann superiore di f su σ e quella inferiore; per la precisione, posto $\delta_i := x_i - x_{i-1}$ e $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ per ogni $i = 1, \dots, N$, vale che

$$\begin{aligned} \Delta(h, \sigma) &:= S''(h, \sigma) - S'(h, \sigma) \\ &= \left[\sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \sup_{I_i} h \right] - \left[\sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \inf_{I_i} h \right] = \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \text{osc}(h, I_i). \end{aligned} \quad (9)$$

Pongo infine

$$M(h) := \sup_{[a, b]} |h|.$$

Per quanto visto a lezione, data una successione (σ_n) di partizioni di $[a, b]$ con parametro di finezza che tende a zero per $n \rightarrow +\infty$, le somme di Riemann superiori $S''(h, \sigma_n)$ e le somme di Riemann inferiori $S'(h, \sigma_n)$ tendono rispettivamente all'integrale superiore ed inferiore di h .

⁶ Mi limito a considerare $t \geq 1$ perché A_t è chiaramente vuoto per $t < 0$.

Inoltre, per definizione, h è integrabile quando l'integrale superiore coincide con quello inferiore, ovvero quando $S''(h, \sigma_n)$ ed $S'(h, \sigma_n)$ hanno lo stesso limite per $n \rightarrow \infty$, cioè quando

$$\Delta(h, \sigma_n) \rightarrow 0.$$

Dimostro che fg è integrabile facendo vedere che $\Delta(fg, \sigma_n) \rightarrow 0$. Per farlo, il punto chiave è la seguente stima (che vale per ogni partizione σ di $[a, b]$):

$$\Delta(fg, \sigma) \leq M(g) \cdot \Delta(f, \sigma) + M(f) \cdot \Delta(g, \sigma). \quad (10)$$

Applicando infatti questa stima alle partizioni σ_n ottengo

$$0 \leq \Delta(fg, \sigma_n) \leq M(g) \cdot \Delta(f, \sigma_n) + M(f) \cdot \Delta(g, \sigma_n);$$

ora, il termine di destra di questa catena di disuguaglianze tende a zero perché f e g sono integrabili e quindi $\Delta(f, \sigma_n) \rightarrow 0$ e $\Delta(g, \sigma_n) \rightarrow 0$, e quindi $\Delta(fg, \sigma_n)$ tende a zero per confronto.

Mi resta da dimostrare la stima (10).⁷

Comincio osservando che, essendo f e g positive, per ogni intervallo I contenuto in $[a, b]$ vale

$$\sup_I fg \leq \sup_I f \cdot \sup_I g, \quad \inf_I fg \geq \inf_I f \cdot \inf_I g,$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} \text{osc}(fg, I) &:= \sup_I fg - \inf_I fg \\ &\leq \sup_I f \cdot \sup_I g - \inf_I f \cdot \inf_I g \\ &= (\sup_I f - \inf_I f) \cdot \sup_I g + \inf_I f \cdot (\sup_I g - \inf_I g) \\ &\leq M(g) \cdot \text{osc}(f, I) + M(f) \cdot \text{osc}(g, I). \end{aligned} \quad (11)$$

Presa ora una partizione σ , usando la formula (9) e la stima (11) ottengo infine

$$\begin{aligned} \Delta(fg, \sigma) &= \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \text{osc}(fg, I_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \delta_i \left[M(g) \cdot \text{osc}(f, I_i) + M(f) \cdot \text{osc}(g, I_i) \right] \\ &= M(g) \left[\sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \text{osc}(f, I_i) \right] + M(f) \left[\sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \text{osc}(g, I_i) \right] \\ &= M(g) \cdot \Delta(f, \sigma) + M(f) \cdot \Delta(g, \sigma). \end{aligned}$$

⁷ L'ipotesi che f e g sono positive semplifica leggermente la dimostrazione, ma può essere omessa senza troppe difficoltà.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Scrivere l'inversa della funzione $f(x) := (1 + \log x)^3 + 1$.

SOLUZIONE. L'inversa è $g(y) := \exp((y - 1)^{1/3} - 1) = \frac{1}{e} \exp((y - 1)^{1/3})$.

2. Calcolare a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(2^x)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \log x)^{1/8}}{(\log(\log x))^4}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 - 2x^3}{1 - \cos(x^2 + x^3)}$.

SOLUZIONE. a) 1; b) $+\infty$; c) non esiste.

3. Sia $f(x) := (x^2 + 4)(x - 1)^{-2}$. Scrivere l'estremo inferiore e superiore dei valori f , specificando se sono il massimo e il minimo.

SOLUZIONE. Il minimo è $f(-4) = \frac{4}{5}$; il massimo non esiste e il sup dei valori è $+\infty$.

4. Un punto P si muove con legge oraria $P(t) := e^{-t}(2t^2 + 4t + 4, 2t + 2, 1)$; calcolarne la velocità (vettore) e lo spazio percorso a partire dall'istante $t = 0$ fino alla fine dei tempi.

SOLUZIONE. La velocità è $\vec{v}(t) = e^{-t}(-2t^2, -2t, -1)$.

La distanza percorsa è $d = \int_0^\infty |\vec{v}(t)| dt = \int_0^\infty e^{-t}(2t^2 + 1) dt = 5$.

5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \frac{2}{t}x = 8t$ che soddisfa $x(1) = 1$.

SOLUZIONE. Equazione differenziale lineare del primo ordine; $x(t) = 2t^2 - \frac{1}{t^2}$.

6. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione di Dirichlet (cioè $f(x) := 1$ per x razionale e $f(x) := 0$ altrimenti). Dire in quali punti x la funzione $g(x) := \sin x \cdot f(x)$ è continua.

SOLUZIONE. g è continua in x se e solo se $\sin x = 0$, cioè $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

7. Discutere il comportamento dell'integrale improprio $I := \int_0^1 (1 - \sqrt{1 + x^{2a}})^{-3} dx$ per $a > 0$.

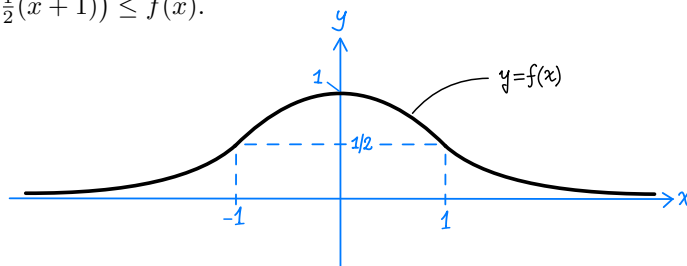
SOLUZIONE. $I \approx -\int_1^\infty x^{-6a} dx$ e quindi I è finito se $0 < a < \frac{1}{6}$, e $I = -\infty$ se $a \geq \frac{1}{6}$.

8. Calcolare il valore della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$.

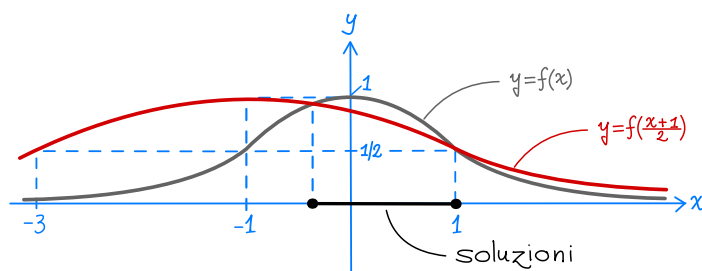
SOLUZIONE. La serie si riconduce alla serie di Taylor di e^x :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n!} = 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = 2 \left[-3 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \right] = 2e^2 - 6.$$

9. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nel disegno sotto. Risolvere graficamente la disequazione $f(\frac{1}{2}(x + 1)) \leq f(x)$.



SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

1 Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale

$$D^4x - (a + a^2)D^2x + a^3x = e^t, \quad (1)$$

e indichiamo con X l'insieme della soluzioni di (1) tali che $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \rightarrow +\infty$.

- a) Scrivere la soluzione generale di (1).
 b) Dire per quali a la dimensione di X è due.¹

SOLUZIONE. a) Dalla teoria so che la soluzione generale di (1) è data da

$$x = x_{\text{om}} + \tilde{x}$$

dove x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$D^4x - (a + a^2)D^2x + a^3x = 0,$$

e \tilde{x} è una particolare soluzione di (1). *Calcolo di x_{om} .* Gli zeri del polinomio caratteristico

$$P_a(\lambda) := \lambda^4 - (a + a^2)\lambda^2 + a^3 = (\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - a)$$

sono

$$\lambda_{1,2} = \pm a, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{a};$$

in particolare per $a = 0$ ho un'unica radice $\lambda = 0$ con molteplicità 4, mentre per $a = 1$ ho due radici $\lambda = \pm 1$ entrambe con molteplicità 2; infine per $a < 0$ le radici $\lambda_{3,4}$ sono immaginarie pure. Pertanto:

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} (c_1 + c_2t)e^t + (c_3 + c_4t)e^{-t} & \text{se } a = 1; \\ c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 & \text{se } a = 0; \\ c_1e^{at} + c_2e^{-at} + c_3e^{\sqrt{a}t} + c_4e^{-\sqrt{a}t} & \text{se } a > 0 \text{ e } a \neq 1; \\ c_1e^{at} + c_2e^{-at} + c_3 \sin(\omega t) + c_4 \cos(\omega t) & \text{se } a < 0; \end{cases} \quad (2)$$

dove $\omega := \sqrt{|a|}$ e c_1, \dots, c_4 sono numeri reali arbitrari.

Calcolo di \tilde{x} . Il termine noto e^t nell'equazione (1) risolve l'equazione omogenea $\dot{x} - x = 0$, il cui polinomio caratteristico $\lambda - 1$ ha come radice $\lambda = 1$. Come già osservato, $\lambda = 1$ è anche una radice del polinomio caratteristico $P_a(\lambda)$ se $a = \pm 1$; in particolare è una radice di molteplicità 2 per $a = 1$, e di molteplicità 1 per $a = -1$. Per calcolare \tilde{x} devo quindi distinguere tre casi:

- *Caso $a \neq \pm 1$.* In questo caso esiste una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = \alpha e^t$ con $\alpha \in \mathbb{R}$; sostituendo questa espressione in (1) ottengo l'identità $\alpha(1 - a - a^2 + a^3)e^t = e^t$ che è soddisfatta per

$$\alpha = \frac{1}{a^3 - a^2 - a + 1} = \frac{1}{(a-1)^2(a+1)}.$$

- *Caso $a = -1$.* In questo caso esiste una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = \alpha t e^t$ con $\alpha \in \mathbb{R}$; sostituendo questa espressione in (1) ottengo l'identità $4\alpha e^t = e^t$, che è soddisfatta per $\alpha = \frac{1}{4}$.
- *Caso $a = 1$.* In questo caso esiste una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = \alpha t^2 e^t$ con $\alpha \in \mathbb{R}$; sostituendo questa espressione in (1) ottengo l'identità $8\alpha e^t = e^t$, che è soddisfatta per $\alpha = \frac{1}{8}$.

Riassumendo

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \frac{1}{(a-1)^2(a+1)} e^t & \text{per } a \neq \pm 1; \\ \frac{1}{4} t e^t & \text{per } a = 1; \\ \frac{1}{8} t^2 e^t & \text{per } a = -1. \end{cases} \quad (3)$$

¹ Per la precisione, si chiede per quali a esiste una soluzione particolare \tilde{x} di (1) ed un sottospazio 2-dimensionale \hat{X} dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea tale che $X = \tilde{x} + \hat{X}$ (cioè le soluzioni in X si scrivono come $x = \tilde{x} + \hat{x}$ con $\hat{x} \in \hat{X}$).

b) Sulla base di quanto fatto al punto a), voglio determinare le soluzioni x di (1) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \rightarrow +\infty$. Siccome la soluzione particolare \tilde{x} in (3) soddisfa $\tilde{x}(t) = O(e^{2t})$, il problema equivale a trovare per quali parametri c_1, \dots, c_4 la soluzione dell'equazione omogenea x_{om} data in (2) soddisfa $x_{\text{om}}(t) = O(e^{2t})$. Esamino ora i generatori delle soluzioni dell'equazione omogenea che appaiono in quella formula, ed osservo che:

- $e^{at} = O(e^{2t})$ per $a \leq 2$,
- $e^{-at} = O(e^{2t})$ per $a > -2$,
- $e^{\sqrt{a}t} = O(e^{2t})$ per $0 \leq a \leq 4$,
- $e^{-\sqrt{a}t} = O(e^{2t})$ per ogni $a \geq 0$,
- $\cos(\omega t), \sin(\omega t) = O(e^{2t})$ per ogni $a < 0$,
- $1, t, t^2, t^3, e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t} = O(e^{2t})$.

Da queste osservazioni segue che $x_{\text{om}}(t) = O(e^{2t})$ se e solo se i parametri c_1, \dots, c_4 soddisfano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} c_1 = c_3 = 0 & \text{se } a > 4, \\ c_1 = 0 & \text{se } 2 < a \leq 4, \\ \text{nessuna condizione} & \text{se } -2 \leq a \leq 2, \\ c_2 = 0 & \text{se } a < -2. \end{cases}$$

Pertanto

$$\dim(X) = \begin{cases} 2 & \text{se } a > 4, \\ 3 & \text{se } 2 < a \leq 4, \\ 4 & \text{se } -2 \leq a \leq 2, \\ 3 & \text{se } a < -2; \end{cases}$$

in particolare X ha dimensione 2 se e solo se $a > 4$.

2 Consideriamo la funzione $f(x) := \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x}$. Determinare, al variare di $a \geq 0$, il numero delle rette tangenti al grafico di f che passano per il punto $(0, a)$.

SOLUZIONE. La funzione $f(x)$ è definita per $x \neq 0$; preso $\bar{x} \neq 0$, la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa \bar{x} ha equazione

$$y = f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f(\bar{x}),$$

e quindi il punto $(0, a)$ appartiene a tale retta se e solo se

$$a = f(\bar{x}) - \bar{x}f'(\bar{x}).$$

In altre parole, sostituita la variabile \bar{x} con x e posto

$$g(x) := f(x) - xf'(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x}\right) - x\left(-\frac{9}{x^4} + \frac{2}{x^2}\right) = \frac{12}{x^3} - \frac{4}{x},$$

il numero di rette tangenti al grafico di f che passano per $(0, a)$ è uguale al numero di soluzioni dell'equazione

$$g(x) = a. \tag{4}$$

Per trovare il numero di soluzioni di tale equazione studio il grafico di g : osservo innanzitutto che $g(x)$ è definita per $x \neq 0$, dispari, positiva per $x < -\sqrt{3}$ e $0 < x < \sqrt{3}$ e negativa altrimenti, e presenta i seguenti comportamenti in 0 e all'infinito:

$$g(\pm\infty) = 0, \quad g(0^\pm) = \pm\infty.$$

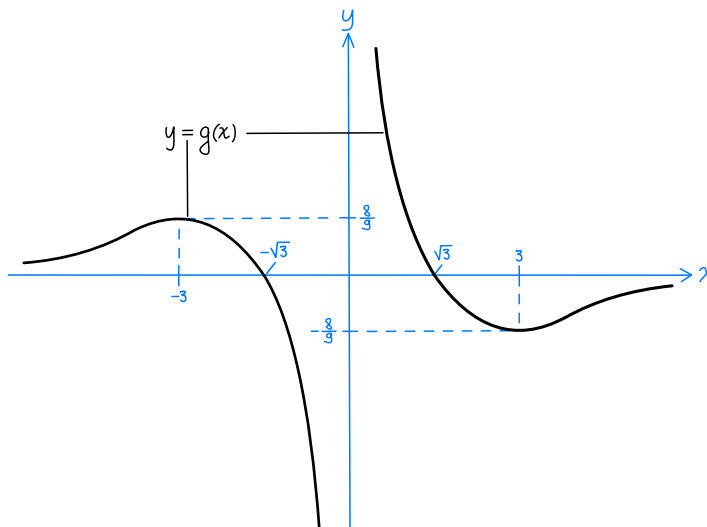
Studiando inoltre il segno della derivata

$$g'(x) = -\frac{36}{x^4} + \frac{4}{x^2} = \frac{4(x^2 - 9)}{x^4}$$

ottengo che g è strettamente crescente nelle semirette $x \leq -3$ e $x \geq 3$, ed è strettamente decrescente negli intervalli $-3 \leq x < 0$ e $0 < x \leq 3$; in particolare -3 è un punto di massimo locale, e $f(-3) = \frac{8}{9}$, e 3 è un punto di minimo locale, e $f(3) = -\frac{8}{9}$.

² Ad essere precisi questa conclusione non è del tutto corretta, come spiegato nell'osservazione in fondo.

Sulla base di quanto appena detto traccio il grafico riportato sotto:³



Da questo grafico risulta che il numero di soluzioni dell'equazione (4) (e quindi di tangenti al grafico di f che passano per $(0, a)$) è:

- 1 per $a > \frac{8}{9}$,
- 2 per $a = \frac{8}{9}$,
- 3 per $0 \leq a < \frac{8}{9}$,
- 2 per $a = 0$.

OSSERVAZIONI. Nella tabella sopra, una retta che passa per il punto $(0, a)$ ed è tangente al grafico di f in due punti viene contata due volte.⁴ È quindi opportuno chiedersi se esistono rette che sono tangenti in più punti, la risposta è sì: la retta $y = -\frac{1}{3}x$ passa per $(0, 0)$ ed è tangente al grafico di f sia nel punto di ascissa $x = \sqrt{3}$ che in quello di ascissa $x = -\sqrt{3}$. In altre parole, le due rette riportate nella tabella sopra in corrispondenza al caso $a = 0$ sono in realtà la stessa retta.

Si può tuttavia dimostrare che non ci sono altre rette tangenti “multiple”. Prendiamo infatti x_1, x_2 con $x_1, x_2 \neq 0$ e $x_1 \neq x_2$, e supponiamo che le rette tangenti al grafico di f nei punti di ascissa x_1 e x_2 coincidano; allora la coppia x_1, x_2 risolve il sistema

$$\begin{cases} g(x_1) = g(x_2) & , \\ f'(x_1) = f'(x_2) & . \end{cases} \quad (5)$$

(La prima equazione corrisponde all'uguaglianza delle pendenze delle rette tangenti in x_1 e x_2 , la seconda all'uguaglianza dell'intersezione di tali rette con l'asse delle y .)

Questo sistema può essere risolto completamente: la seconda equazione in (5) si scrive infatti come

$$(2x_1^2x_2^2 - 9(x_1^2 + x_2^2))(x_2^2 - x_1^2) = 0,$$

ed esplicitando x_2 in funzione di x_1 ottengo

$$x_2 = -x_1, \quad x_2 = \pm \frac{3x_1}{\sqrt{2x_1^2 - 9}}.$$

(Non ho considerato la soluzione $x_2 = x_1$ perché $x_1 \neq x_2$ per ipotesi.)

Sostituendo $x_2 = -x_1$ nella prima equazione in (5) ottengo $g(x_1) = g(-x_1)$, da cui segue che $x_1 = \pm\sqrt{3}$, e quindi $x_2 = \mp\sqrt{3}$; queste soluzioni corrispondono alla retta tangente doppia già trovata in precedenza.

³ Le proporzioni non sono rispettate

⁴ Più in generale, una retta che è tangente in k punti viene contata k -volte.

Sostituendo $x_2 = 3x_1/\sqrt{2x_1^2 - 9}$ nella prima equazione in (5) ottengo dopo qualche passaggio $x_1 = \pm 3$ da cui segue $x_2 = \pm 3$, soluzioni non accettabili perché deve essere $x_1 \neq x_2$.

Sostituendo infine $x_2 = -3x_1/\sqrt{2x_1^2 - 9}$ nella prima equazione in (5) ottengo dopo qualche passaggio $-3\sqrt{2x_1^2 - 9} = x_1^2$, e questa equazione non ha soluzioni.

3 Dato $a > 0$, sia A l'insieme dei punti (x, y) tali $x^4 \leq y \leq (|x|^a + 1)^{4/a}$; siano inoltre V e V' i solidi ottenuti ruotando A attorno all'asse delle x e delle y , rispettivamente.

a) Dire per quali a il volume di V è finito.

b) Dire per quali a il volume di V' è finito.

SOLUZIONE. Pongo $f_0(x) := x^4$ e $f_1(x) := (|x|^a + 1)^{4/a}$, e riscrivo l'insieme A come

$$A := \{(x, y) : f_0(x) \leq y \leq f_1(x)\}.$$

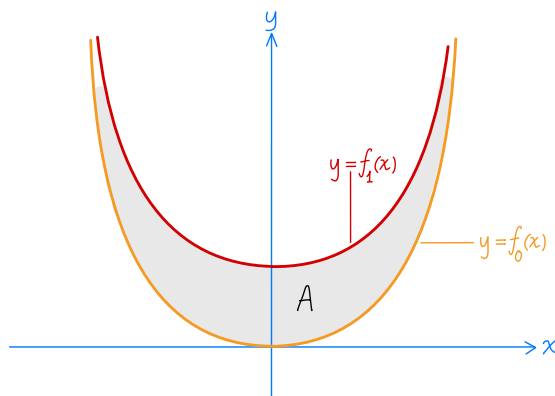
Osservo ora che le funzioni f_0 e f_1 sono definite su tutto \mathbb{R} , pari, e usando la formula

$$f_1(x) = x^4(1 + |x|^{-a})^{4/a} \quad \text{per } x \neq 0, \tag{6}$$

si vede che

$$0 \leq f_0(x) \leq f_1(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Al fine di disegnare l'insieme A ,⁵ osservo inoltre che f_1 ed f_0 sono strettamente crescenti per $x \geq 0$ $f_1(x) \sim f_0(x) = x^4$ per $x \rightarrow +\infty$. Sulla base di queste informazioni ottengo il disegno riportato sotto (le proporzioni non sono rispettate):



a) Usando la prima formula per il volume dei solidi di rotazione vista a lezione (o meglio una sua variante), le disuguaglianze (7) e il fatto che f_0 e f_1 sono pari, ottengo

$$\text{volume}(V) = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^2(x) - f_0^2(x) dx = 2\pi \int_0^{+\infty} f_1^2(x) - f_0^2(x) dx.$$

Osservo ora che l'ultimo integrale è improprio in $+\infty$, e per studiarne il comportamento cerco la parte principale della funzione integranda per $x \rightarrow +\infty$:

$$f_1^2(x) - f_0^2(x) = x^8 \left[(1 + x^{-a})^{8/a} - 1 \right] \sim \frac{8}{a} x^{8-a}$$

(nel primo passaggio ho usato la formula (6), nel secondo ho usato lo sviluppo $(1 + t)^b - 1 \sim bt$ per $t \rightarrow 0$ con $b := 8/a$ e $t := x^{-a}$). Pertanto

$$\text{volume}(V) \approx \int_1^{+\infty} x^{8-a} dx$$

e questo integrale improprio è finito se e solo se $a > 9$.

b) Siccome f_0 e f_1 sono funzioni pari, l'insieme A è simmetrico rispetto all'asse y e quindi, detta A' la metà di A che sta a destra dell'asse delle y , il solido V' è dato dalla rotazione di A' attorno all'asse delle y ; posso quindi applicare la seconda formula per il volume dei solidi di

⁵ Attenzione: per la risoluzione dell'esercizio non serve disegnare A , ma è essenziale sapere che valgono le disuguaglianze in (7).

rotazione vista a lezione (o meglio una sua variante), e tenendo conto delle disuguaglianze (7) ottengo

$$\text{volume}(V') = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(f_1(x) - f_0(x)) dx.$$

L'integrale così ottenuto è improprio in $+\infty$, e per studiarne il comportamento determino come prima la parte principale della funzione integranda per $x \rightarrow +\infty$:

$$x(f_1(x) - f_0(x)) = x^5 \left[(1 + x^{-a})^{4/a} - 1 \right] \sim \frac{4}{a} x^{5-a}.$$

Pertanto

$$\text{volume}(V') \approx \int_1^{+\infty} x^{5-a} dx$$

e questo integrale improprio è finito se e solo se $a > 6$.

- 4] Siano X sottoinsieme di \mathbb{R} , \bar{x} punto di X , e $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili in \bar{x} . Per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in X, \\ f_2(x) & \text{se } x \in X^c := \mathbb{R} \setminus X. \end{cases}$$

- a) Dare condizioni necessarie e sufficienti affinché f sia continua in \bar{x} .
 b) Dare condizioni necessarie e sufficienti affinché f sia derivabile in \bar{x} .

SOLUZIONE. a) Osservo per cominciare che l'ipotesi che le funzioni f_1 ed f_2 sono derivabili in \bar{x} implica in particolare che sono continue. Distinguo quindi due casi, a seconda che \bar{x} sia o meno un punto di accumulazione di X^c .

- (i) Se \bar{x} non è un punto di accumulazione di X^c allora f è continua in \bar{x} .
 (ii) Se \bar{x} è un punto di accumulazione di X^c allora f è continua in $\bar{x} \Leftrightarrow f_2(\bar{x}) = f_1(\bar{x})$.

Dimostrazione di (i). Faccio vedere che dato un qualunque intorno I di $f(\bar{x}) = f_1(\bar{x})$ posso trovare un intorno J di \bar{x} tale che $f(J) \subset I$.⁶

Siccome \bar{x} non è un punto di accumulazione di X^c esiste J_0 intorno di \bar{x} tale che l'intersezione $J_0 \cap X^c$ è vuoto, ovvero $J_0 \subset X$, e di conseguenza

$$f = f_1 \quad \text{su } J_0. \tag{8}$$

Siccome f_1 è continua in \bar{x} esiste J_1 intorno di \bar{x} tale che

$$f_1(J_1) \subset I. \tag{9}$$

Osservo infine che $J := J_0 \cap J_1$ è un intorno di \bar{x} che ha la proprietà desiderata: usando (9) e (8) ottengo infatti

$$f(J) = f_1(J) \subset f_1(J_1) \subset I.$$

Dimostrazione dell'implicazione \Leftarrow in (ii). Dato un intorno I di $f(\bar{x}) = f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x})$ trovo un intorno J di \bar{x} tale che $f(J) \subset I$.

Prendo J_1 come nella dimostrazione di (i). Inoltre, siccome f_2 è continua in \bar{x} , esiste J_2 intorno di \bar{x} tale che

$$f_2(J_2) \subset I. \tag{10}$$

Osservo ora che $J := J_1 \cap J_2$ è un intorno di \bar{x} che ha la proprietà desiderata:

$$\begin{aligned} f(J) &= f((J \cap X) \cup (J \cap X^c)) \\ &= f(J \cap X) \cup f(J \cap X^c) \\ &= f_1(J \cap X) \cup f_2(J \cap X^c) \subset f_1(J_1) \cup f_2(J_2) \subset I. \end{aligned}$$

(Nel terzo passaggio ho usato che, per definizione, $f = f_1$ su X e $f = f_2$ su X^c , mentre nell'ultimo passaggio ho usato le inclusioni (9) e (10).)

⁶ Ho scritto la soluzione di questo esercizio usando la terminologia degli intorni perché mi pare più comoda, ma non c'è molto da cambiare se si vuole usare invece quella degli ε e δ .

Dimostrazione dell'implicazione \Rightarrow in (ii). Siccome \bar{x} è un punto di accumulazione di X^c , esiste una successione (x_n) contenuta in X^c che converge a \bar{x} ; ma allora

$$f_2(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_2(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\bar{x}) = f_1(\bar{x}).$$

(Nel primo passaggio ho usato che f_1 è continua in \bar{x} ; nel secondo ho usato che $f(x) = f_2(x)$ in ogni punto $x \in X^c$; nel terzo che f è continua in \bar{x} ; nell'ultimo che $f(x) = f_1(x)$ per definizione.)

b) Distinguo tre casi, a seconda che \bar{x} sia o meno un punto di accumulazione di X e di X^c :⁷

- (iii) Se \bar{x} non è un punto di accumulazione di X^c allora f è derivabile in \bar{x} e $f'(\bar{x}) = f'_1(\bar{x})$.
- (iv) Se \bar{x} non è un punto di accumulazione di X allora f è derivabile in $\bar{x} \Leftrightarrow f_2(\bar{x}) = f_1(\bar{x})$; inoltre quando f è derivabile si ha $f'(\bar{x}) = f'_2(\bar{x})$.
- (v) Se \bar{x} è un punto di accumulazione di X e di X^c allora f è derivabile in $\bar{x} \Leftrightarrow f_2(\bar{x}) = f_1(\bar{x})$ e $f'_2(\bar{x}) = f'_1(\bar{x})$; inoltre quando f è derivabile si ha $f'(\bar{x}) = f'_1(\bar{x}) = f'_2(\bar{x})$.

Notazione aggiuntiva:⁸ per ogni $x \neq \bar{x}$ indico con $F(x)$ il rapporto incrementale

$$F(x) := \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

e analogamente indico con $F_1(x)$ e $F_2(x)$ i rapporti incrementali di f_1 e f_2 , rispettivamente. Inoltre per ogni intorno J di \bar{x} pongo

$$J^* := J \setminus \{\bar{x}\}.$$

Dimostrazione di (iii). Faccio vedere che il rapporto incrementale $F(x)$ tende a $f'_1(\bar{x})$ per $x \rightarrow \bar{x}$, ovvero che per ogni I intorno di $f'_1(\bar{x})$ esiste J intorno di \bar{x} tale che $F(J^*) \subset I$.

Prendo J_0 come nella dimostrazione di (i). Siccome f_1 è derivabile in \bar{x} esiste J_1 intorno di \bar{x} tale che

$$F_1(J_1^*) \subset I. \tag{11}$$

Osservo ora che $J := J_0 \cap J_1$ è un intorno di \bar{x} che ha la proprietà desiderata, infatti

$$F(J^*) = F_1(J^*) \subset F_1(J_1^*) \subset I.$$

(La prima uguaglianza segue dal fatto che $F = F_1$ su J_0^* , che a sua volta segue da (9); la seconda inclusione segue da (11).)

Dimostrazione dell'implicazione \Leftarrow in (iv). Faccio vedere che il rapporto incrementale $F(x)$ tende a $f'_2(\bar{x})$ per $x \rightarrow \bar{x}$, ovvero che per ogni I intorno di $f'_2(\bar{x})$ esiste J intorno di \bar{x} tale che $F(J^*) \subset I$.

Siccome \bar{x} non è un punto di accumulazione di X esiste J_0 intorno di \bar{x} tale che l'intersezione $J_0 \cap X$ contiene solo \bar{x} , e di conseguenza

$$f = f_2 \quad \text{su } J_0^*. \tag{12}$$

Siccome f_2 è derivabile in \bar{x} esiste J_2 intorno di \bar{x} tale che

$$F_2(J_2^*) \subset I. \tag{13}$$

Osservo ora che $J := J_0 \cap J_2$ è un intorno di \bar{x} che ha la proprietà desiderata, infatti

$$F(J^*) = F_2(J^*) \subset F_2(J_2^*) \subset I.$$

(La prima uguaglianza segue dal fatto che $F = F_2$ su J_0^* , che a sua volta segue da (9) e dall'ipotesi $f_2(x) = f_1(x) = f(x)$; la seconda inclusione segue da (13).)

Dimostrazione dell'implicazione \Rightarrow in (iv). Siccome f è derivabile allora è continua, e questo implica che $f_1(x) = f_2(x)$ grazie all'enunciato (ii) (uso che \bar{x} , non essendo punto di accumulazione di X , deve necessariamente essere punto di accumulazione di X^c).

Dimostrazione dell'implicazione \Leftarrow in (v). Faccio vedere che il rapporto incrementale $F(x)$ tende a $y := f'_1(\bar{x}) = f'_2(\bar{x})$ per $x \rightarrow \bar{x}$, ovvero che per ogni I intorno di y esiste J intorno di \bar{x} tale che $F(J^*) \subset I$.

⁷ I casi elencati coprono tutte le possibilità perché \bar{x} deve essere un punto di accumulazione di X e/o di X^c .

⁸ Lo scopo di questa notazione è di sottolineare le analogie tra le dimostrazioni nella soluzione del punto a) e quelle nella soluzione di b).

Prendo J_1 come nella dimostrazione dell'enunciato (iii) e J_2 come nella dimostrazione dell'implicazione \Leftarrow in (iv), ed osservo che $J := J_0 \cap J_1$ è un intorno di \bar{x} che ha la proprietà desiderata, infatti

$$\begin{aligned} F(J^*) &= F((J^* \cap X) \cup (J^* \cap X^c)) \\ &= F(J^* \cap X) \cup F(J^* \cap X^c) \\ &= F_1(J^* \cap X) \cup F_2(J^* \cap X^c) \subset F_1(J_1) \cup F_2(J_2) \subset I. \end{aligned}$$

(Nel terzo passaggio ho usato che $F = F_1$ su X e $F = F_2$ su X^c , e queste identità seguono dalla definizione di f e dall'ipotesi $f(\bar{x}) = f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x})$; nell'ultimo passaggio ho usato le inclusioni (11) e (13).)

Dimostrazione dell'implicazione \Rightarrow in (iv). Siccome f è derivabile allora è continua, e questo implica che $f_1(x) = f_2(x)$ grazie all'enunciato (ii).

Per dimostrare che $f'(\bar{x}) = f'_1(\bar{x})$ uso il fatto che \bar{x} è un punto di accumulazione di X , e quindi esiste una successione (x_n) contenuta in $X \setminus \{\bar{x}\}$ che converge a \bar{x} , ma allora

$$f'_1(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_1(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = f'(\bar{x}).$$

(Nel primo passaggio ho usato che f_1 è derivabile in \bar{x} , nel secondo ho usato che $F_1(x) = F(x)$ per ogni $x \in X$, nel terzo ho usato che f è derivabile in \bar{x} .)

La dimostrazione che $f'(\bar{x}) = f'_2(\bar{x})$ è del tutto analoga.

5 Sia $a > 0$ e sia $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione *positiva* tale che $h(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$. Dato $x_0 > 0$, sia (x_n) la successione definita dalla formula ricorsiva $x_{n+1} = x_n + a + h(x_n)$.

- Dimostrare che $x_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$;
- Dimostrare che $x_n \sim an$ per $n \rightarrow +\infty$.
- Dato $y_0 > 0$, sia (y_n) la successione definita dalla formula ricorsiva $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{y_n}$; dimostrare che esiste $c > 0$ tale che $y_n \sim c\sqrt{n}$ per $n \rightarrow +\infty$. [Suggerimento: ricondursi all'enunciato b) tramite un opportuno cambio di variabile.]

SOLUZIONE. a) La tesi segue dal fatto che

$$x_n \geq x_0 + an \quad \text{per ogni intero } n \geq 0. \tag{14}$$

Dimostro questo enunciato per induzione su n : è chiaramente vero per $n = 0$, e supponendolo vero per un certo n ottengo

$$x_{n+1} = x_n + a + h(x_n) \geq x_0 + na + a + h(x_n) \geq x_0 + (n+1)a,$$

ovvero la disuguaglianza in (14) per $n+1$ (nel secondo passaggio ho usato l'ipotesi induttiva, nel terzo il fatto che la funzione h è positiva).

b) Dimostro per cominciare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero intero $\bar{n} \geq 0$ tale che

$$x_n \leq x_{\bar{n}} + (a + \varepsilon)(n - \bar{n}) \quad \text{per ogni intero } n \geq \bar{n}. \tag{15}$$

Siccome la funzione $h(x)$ è positiva e tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$, esiste \bar{x} tale $h(x) \leq \varepsilon$ per ogni $x \geq \bar{x}$. Inoltre, siccome x_n tende a $+\infty$ (come dimostrato al punto precedente), esiste \bar{n} tale che $x_n \geq \bar{x}$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Di conseguenza

$$h(x_n) \leq \varepsilon \quad \text{per ogni intero } n \geq \bar{n}. \tag{16}$$

Partendo da questa stima dimostro l'enunciato (15) per induzione su n . L'enunciato è chiaramente vero per $n = \bar{n}$, e supponendolo vero per un certo $n \geq \bar{n}$ ottengo

$$x_{n+1} = x_n + a + h(x_n) \leq x_{\bar{n}} + (a + \varepsilon)(n - \bar{n}) + h(x_n) \leq x_{\bar{n}} + (a + \varepsilon)(n + 1 - \bar{n}),$$

ovvero la disuguaglianza in (15) per $n+1$ (nel secondo passaggio ho usato l'ipotesi induttiva, nel terzo la disuguaglianza (16)).

Posso ora dimostrare che $x_n \sim an$ per $n \rightarrow +\infty$. Da (14) e (15) deduco che, per ogni intero $n \geq \bar{n}$,

$$\frac{x_0 + na}{na} \leq \frac{x_n}{na} \leq \frac{x_{\bar{n}} + (a + \varepsilon)(n - \bar{n})}{na}, \tag{17}$$

e passando a limite per $n \rightarrow +\infty$,

$$1 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{na} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{na} \leq \frac{a + \varepsilon}{a}. \quad (18)$$

(la prima disuguaglianza segue dal fatto che il primo termine in (17) tende a 1 per $n \rightarrow +\infty$; la terza dal fatto che il terzo termine in (17) tende a $\frac{a+\varepsilon}{a}$).

Prendendo infine il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ in (18) ottengo

$$1 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{na} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{na} \leq 1,$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{na} = 1.$$

c) Considero la successione (x_n) definita da

$$x_n := y_n^2. \quad (19)$$

e faccio vedere che posso applicare l'enunciato b) a questa successione.⁹ A questo scopo cerco (e trovo) una formula ricorsiva per (x_n) a partire da quella di (y_n) :

$$x_{n+1} = (y_{n+1})^2 = \left(y_n + \frac{1}{y_n}\right)^2 = y_n^2 + 2 + \frac{1}{y_n^2} = x_n + 2 + \frac{1}{x_n}$$

(nel primo e ultimo passaggio ho usato la definizione di x_n , secondo passaggio ho usato la formula ricorsiva di (y_n)).

In altre parole (x_n) soddisfa la formula ricorsiva

$$x_{n+1} = x_n + 2 + \frac{1}{x_n}$$

ovvero la formula $x_{n+1} = x_n + a + h(x_n)$ con $a := 2$ e $h(x) := \frac{1}{x}$; pertanto, per quanto visto al punto b),

$$x_n \sim 2n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

da cui segue che

$$y_n = \sqrt{x_n} \sim \sqrt{2n} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

(L'identità $y_n = \sqrt{x_n}$ segue da (19) e dal fatto che $y_n \geq 0$ per ogni n ; quest'ultima affermazione può essere facilmente dimostrata per induzione.)

⁹ La scelta di x_n è sostanzialmente forzata dalla tesi: infatti dimostrare che $y_n \sim c\sqrt{n}$ è lo stesso che dimostrare che $y_n^2 \sim c^2n$, che è la tesi del punto b).

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Consideriamo la circonferenza nel piano con centro $(1, 0)$ e raggio 1. Scriverne l'equazione in coordinate cartesiane e in coordinate polari.

SOLUZIONE. $x^2 - 2x + y^2 = 0$; $\rho = 2 \cos \theta$.

2. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ vale che $e^{ax} x^a (\log x)^b = O(e^x x^b (\log x)^a)$ per $x \rightarrow +\infty$.

SOLUZIONE. Deve essere $a < 1$ oppure $b \geq a = 1$.

3. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arcsin(\sqrt{1-x^2})$; b) $\frac{x}{(1+x^4)^5}$; c) $\log\left(\frac{2^{4-x}}{3^{x+1}4^{2-x}}\right)$.

SOLUZIONE. a) $-\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$; ¹ b) $\frac{1-19x^4}{(1+x^4)^6}$; c) $\log(2/3)$.

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione \ll per $x \rightarrow 0^+$:

$$\underbrace{(1 + \log x)^3}_a, \quad \underbrace{\log(1 - \sqrt{x}) + \sqrt{x}}_b, \quad \underbrace{\cos(\sqrt[3]{x}) - e^x}_c, \quad \underbrace{\exp(-\log x)}_d.$$

SOLUZIONE. L'ordine corretto è $b \ll c \ll a \ll d$.

5. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sia f la funzione data da $f(x) := \begin{cases} \sin(2 \sin(ax)) & \text{per } x < 0, \\ e^{bx} - 1 & \text{per } x \geq 0. \end{cases}$

Dire per quali a, b la funzione f è continua e derivabile in 0.

SOLUZIONE. I valori cercati di a, b sono quelli tali che $b = 2a$.

6. Consideriamo l'equazione differenziale $D^3x + 3D^2x + 3Dx + x = e^{-t} + 1$. Scrivere la soluzione dell'equazione omogenea associata e dire in quale classe di funzioni si può trovare una soluzione particolare (senza calcolarla).

SOLUZIONE. $x_{\text{om}}(t) = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2)e^{-t}$ con $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; $\tilde{x}(t) = a_1 + a_2 t^3 e^{-t}$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

7. Descrivere il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a - 2n^{2a}}$ al variare di $a > 0$.

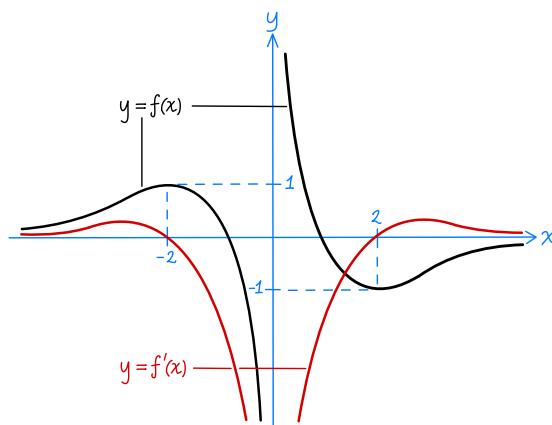
SOLUZIONE. La serie diverge a $-\infty$ per $a \leq \frac{1}{2}$ e converge altrimenti.

8. Descrivere il comportamento dell'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x^3)^{2a}} dx$ al variare di $a > 0$.

SOLUZIONE. L'integrale diverge a $+\infty$ per $a \geq \frac{1}{2}$ e converge altrimenti.

9. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nel disegno sotto. Disegnare il grafico di f' .

SOLUZIONE.



¹ $\operatorname{sgn}(x)$ è la funzione segno: vale 1 per $x > 0$, -1 per $x < 0$, e non è definita per $x = 0$.

SECONDA PARTE (prima variante)

1 Siano f, g due funzioni strettamente positive su \mathbb{R} tali che

- (i) f e g tendono a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$;
- (ii) f e g sono asintoticamente equivalenti per $x \rightarrow +\infty$.

- a) Dimostrare che $\log g - \log f \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.
- b) Vale anche che $(\log g)^2 - (\log f)^2 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$?
- c) Per quali $a > 0$ vale che $(\log g)^a - (\log f)^a \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$?

SOLUZIONE. a) Per l'ipotesi (ii) il rapporto g/f tende a 1 per $x \rightarrow +\infty$ e quindi

$$\log g - \log f = \log(g/f) \rightarrow 0.$$

Per la precisione f e g soddisfano l'ipotesi (ii) *se e solo se* $\log g - \log f \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

b) L'affermazione non è sempre vera; per dimostrarlo esibisco due funzioni f e g che soddisfano le ipotesi (i) e (ii) e tali che $(\log g)^2 - (\log f)^2$ non tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$. Per la precisione pongo

$$f(x) := \exp(x), \quad g(x) := \exp(x + x^{-1}).$$

La verifica dell'ipotesi (i) è immediata, mentre l'ipotesi (ii) segue dal fatto che

$$\log g - \log f = x^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

(cfr. punto a)). Inoltre

$$(\log g)^2 - (\log f)^2 = (x + x^{-1})^2 - x^2 = 2 + x^{-2} \rightarrow 2 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

c) L'affermazione vale se e solo se $a \leq 1$.

La dimostrazione è divisa in due parti: per prima cosa dimostro che l'affermazione non vale per $a > 1$ costruendo due funzioni f, g che soddisfano (i) ed (ii) e tali che $(\log g)^a - (\log f)^a$ non tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$. Per la precisione prendo

$$f(x) := \exp(x), \quad g(x) := \exp(x + x^{-\alpha}),$$

dove α è un parametro positivo che verrà scelto alla fine.

La verifica delle ipotesi (i) e (ii) è la stessa del punto b). Inoltre, per $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} (\log g)^a &= (x + x^{-\alpha})^a = x^a(1 + x^{-\alpha-1})^a \\ &= x^a(1 + ax^{-\alpha-1} + O(x^{-2\alpha-2})) \\ &= x^a + ax^{a-\alpha-1} + O(x^{a-2\alpha-2}) \end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato lo sviluppo $(1+t)^a = 1 + at + O(t^2)$ per $t \rightarrow 0$ con la sostituzione $t = x^{-\alpha-1}$). Pertanto

$$(\log g)^a - \log f^a = ax^{a-\alpha-1} + O(x^{a-2\alpha-2}) \sim ax^{a-\alpha-1},$$

e preso $\alpha > 0$ tale che $a - 1 - \alpha > 0$ (per esempio $\alpha := \frac{1}{2}(a - 1)$) ottengo

$$(\log g)^a - (\log f)^a \rightarrow +\infty.$$

Dimostro infine che l'affermazione in c) è vera per $a < 1$ (la dimostrazione per $a = 1$ è stata data al punto a)). Per quanto dimostrato in a) vale che

$$\log g = \log f + o(1) = \log f (1 + o(1/\log f))$$

e quindi

$$\begin{aligned} (\log g)^a - (\log f)^a &= (\log f)^a [(1 + o(1/\log f))^a - 1] \\ &\sim (\log f)^a o(1/\log f) = o((\log f)^{a-1}) \end{aligned} \tag{1}$$

(nel secondo passaggio ho usato lo sviluppo $(1+t)^a - 1 = O(t)$ per $t \rightarrow 0$ con la sostituzione $t = 1/\log f$; notare che t tende a 0 perché $\log f$ tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, cosa che segue dall'ipotesi (i)).

Infine, siccome $\log f$ tende a $+\infty$ e $a - 1 < 0$ ho che $(\log f)^{a-1} \rightarrow 0$ e quindi la formula (1) implica che $(\log g)^a - (\log f)^a \rightarrow 0$.

OSSERVAZIONI. Per i controesempi nei punti b) e c) si possono prendere anche altre funzioni, ad esempio

$$f(x) := e^x, \quad g(x) := e^x(1 + x^{-\alpha}).$$

I calcoli per queste funzioni sono leggermente più complicati di quelli svolti sopra.

2 Sia a un numero reale non nullo, e sia $p(x)$ un polinomio di grado d . Dimostrare che

$$\int p(x) e^{ax} dx = q(x) e^{ax} + c \tag{2}$$

con $q(x)$ polinomio di grado d (e $c \in \mathbb{R}$). [Può essere utile scrivere la relazione che lega p e q in termini di derivate.]

SOLUZIONE. Dimostro la tesi per induzione su d .

Per $d = 0$ la formula (2) è vera perché la primitiva di $c_0 e^{ax}$ è $\frac{c_0}{a} e^{ax} + c$.

Suppongo ora che la formula (2) sia vera per un certo numero naturale d e la dimostro per $d + 1$. Preso dunque p polinomio di grado $d + 1$, integrando per parti ottengo

$$\int p(x) e^{ax} dx = \frac{1}{a} p(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int p'(x) e^{ax} dx; \tag{3}$$

siccome p' è un polinomio di grado d , per via dell'ipotesi induttiva esiste \tilde{q} polinomio di grado d tale che

$$\int p'(x) e^{ax} dx = \tilde{q}(x) e^{ax} + c,$$

e quindi

$$\int p(x) e^{ax} dx = \frac{1}{a} p(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int p'(x) e^{ax} dx = \frac{1}{a} (p(x) - \tilde{q}(x)) e^{ax} + c,$$

che corrisponde alla formula (2) ponendo $q := \frac{1}{a}(p - \tilde{q})$.

Notare che q è un polinomio di grado $d + 1$ perché p è un polinomio di grado $d + 1$ e \tilde{q} è un polinomio di grado d .

OSSERVAZIONI. (i) La soluzione sopra dimostra che esiste un polinomio q per cui vale (2), ma non dà una formula per q . Posso ottenere tale formula applicando iterativamente l'identità (3):

$$\begin{aligned} \int p(x) e^{ax} dx &= \frac{1}{a} p(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int p'(x) e^{ax} dx \\ &= \frac{1}{a} p(x) e^{ax} - \frac{1}{a^2} p'(x) e^{ax} + \frac{1}{a^2} \int p''(x) e^{ax} dx \\ &= \frac{1}{a} p(x) e^{ax} - \frac{1}{a^2} p'(x) e^{ax} + \frac{1}{a^3} p''(x) e^{ax} - \frac{1}{a^3} \int p'''(x) e^{ax} dx \\ &\dots \end{aligned}$$

per la precisione, nel primo passaggio ho applicato l'identità (3) all'integrale indefinito di partenza, nel secondo l'ho applicata al secondo integrale nella prima riga, nel terzo l'ho applicata all'integrale nella seconda riga, e così via. Dopo $d + 1$ passaggi ottengo

$$\int p(x) e^{ax} dx = \left[\sum_{j=0}^d \frac{(-1)^j}{a^{j+1}} D^j p(x) \right] e^{ax} + \frac{(-1)^{d+1}}{a^{d+1}} \int D^{d+1} p(x) e^{ax} dx, \tag{4}$$

e siccome $D^{d+1} p = 0$ (perché p ha grado d), l'ultimo integrale indefinito è semplicemente una costante c . Pertanto questa identità corrisponde alla formula (2) con

$$q(x) := \sum_{j=0}^d \frac{(-1)^j}{a^{j+1}} D^j p(x). \tag{5}$$

² Per dimostrare rigorosamente questa formula ci sono più modi: uno consiste nel dimostrare per induzione su d che l'identità (4) vale per ogni funzione p ; un'altro consiste nel verificare che il polinomio q in (5) soddisfa l'equazione (6) nell'osservazione (ii), cosa abbastanza semplice.

(ii) L'identità (2) significa che $q(x)e^{ax}$ è una primitiva di $p(x)e^{ax}$, ovvero

$$p(x)e^{ax} = (q(x)e^{ax})' = (aq(x) + q'(x))e^{ax},$$

ovvero

$$p(x) = aq(x) + q'(x). \tag{6}$$

In altre parole, un polinomio q soddisfa la (2) se e solo se risolve l'equazione (6). L'esistenza di un tale polinomio q può essere dimostrata in molti modi; ne riporto sotto qualcuno.

(iii) L'equazione (6) è un'equazione differenziale del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti, e non omogenea.³ Siccome il termine noto p è un polinomio di grado d , sappiamo dalla teoria che è possibile trovare una soluzione particolare \tilde{q} di (6) tra i polinomi di grado d .⁴ Dunque \tilde{q} è il polinomio cercato.

(iv) Un altro modo per trovare un polinomio q che soddisfa la (6) è questo: detto P_d lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più d , considero l'applicazione lineare $T : P_d \rightarrow P_d$ data da

$$T : q \mapsto aq + q'.$$

Allora l'equazione (6) ammette una soluzione $q \in P_d$ per ogni $p \in P_d$ se e solo se T è surgettiva, che per un noto risultato di Algebra Lineare equivale a dire che T è iniettiva, ovvero che $Tq = 0$ solo se $q = 0$. La dimostrazione di quest'ultima affermazione è immediata: un polinomio q diverso da 0 ha grado k compreso tra 0 e d , ma allora anche $Tq = aq + q'$ ha grado k e in particolare $Tq \neq 0$.

(v) Un altro modo per trovare un polinomio q che soddisfa la (6) è questo: indico con p_i i coefficienti di p , con q_i quelli di q , ed osservo che l'equazione (6) si riscrive come il seguente sistema di $d + 1$ equazioni nelle incognite q_0, \dots, q_d :

$$\begin{cases} aq_0 + q_1 = p_0 \\ aq_1 + 2q_2 = p_1 \\ aq_2 + 3q_3 = p_2 \\ \vdots \\ aq_{d-1} + dq_d = p_{d-1} \\ aq_d = p_d \end{cases}$$

Osservo ora che questo sistema può essere facilmente risolto partendo dall'equazione più in fondo e poi risalendo (non riporto i dettagli).

Notare che a differenza degli approcci descritti in (iii) e (iv), quest'ultimo permette di calcolare esplicitamente q .

3 Sia C la traiettoria del punto P che si muovo con legge oraria

$$P(t) = \left(\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t) \sqrt{1 + \sin^2 t} \right).$$

a) Disegnare C . [Suggerimento: esplicitare y in funzione di x .]

b) Trovare la più piccola circonferenza centrata nell'origine che contiene C .

SOLUZIONE. a) Indicando con x e y le coordinate del punto $P(t)$ ottengo che

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t) \sqrt{1 + \sin^2 t} = \sqrt{2} \sin t \cos t \sqrt{1 + \sin^2 t} \\ &= \sqrt{2} \sin t \left(\pm \sqrt{1 - \sin^2 t} \right) \sqrt{1 + \sin^2 t} \\ &= \pm \sqrt{2} x \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Siccome la funzione

$$f(x) := \sqrt{2} x \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + x^2} = x \sqrt{2 - 2x^4}$$

³ La funzione incognita è q e la variabile indipendente è x .

⁴ Ad essere precisi, la teoria dice che siccome la soluzione dell'equazione caratteristica è $-a$, ed è quindi diversa da 0, allora esiste una soluzione particolare \tilde{q} tra i polinomi di grado d o meno; osservando la (6) si vede subito che \tilde{q} deve avere grado d e non meno.

è definita per $-1 \leq x \leq 1$, il calcolo sopra dimostra che C è contenuto nell'insieme

$$C' := \{(x, \pm f(x)) : -1 \leq x \leq 1\}.$$

Voglio ora far vedere che C coincide con C' , e per farlo mi basta dimostrare l'inclusione $C' \subset C$. Un punto $P \in C'$ si scrive come $P = (x, f(x))$ con $-1 \leq x \leq 1$ oppure come $P = (x, -f(x))$; nel primo caso prendo $t \in [0, 2\pi]$ tale che $\sin t = x$ e $\cos t \geq 0$, quindi

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2},$$

e da questo segue che $f(x) = \sqrt{2} \sin t \cos t \sqrt{1 + \sin^2 t}$, ovvero che P coincide con il punto $P(t)$ e quindi appartiene a C . Nel secondo caso, cioè se $P = (x, -f(x))$, prendo $t \in [0, 2\pi]$ tale che $\sin t = x$ e $\cos t \leq 0$, per cui

$$\cos t = -\sqrt{1 - \sin^2 t} = -\sqrt{1 - x^2},$$

ed ottengo come prima che P coincide con il punto $P(t)$, e quindi appartiene a C .

Siccome la funzione f è dispari, per disegnare l'insieme $C = C'$ mi basta disegnare il grafico della funzione $f(x)$ con $0 \leq x \leq 1$. Osservo per cominciare che f è continua, $f(0) = f(1) = 0$ e $f(x) > 0$ per $0 < x < 1$.

Osservo poi che per $0 \leq x < 1$ la derivata di f è data da

$$f'(x) = (x(2 - 2x^4)^{1/2})' = (2 - 6x^4)(2 - 2x^4)^{-1/2}, \quad (7)$$

mentre per $x = 1$ la derivata può essere ottenuta come limite:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - 6x^4)(2 - 2x^4)^{-1/2} = -\infty.$$

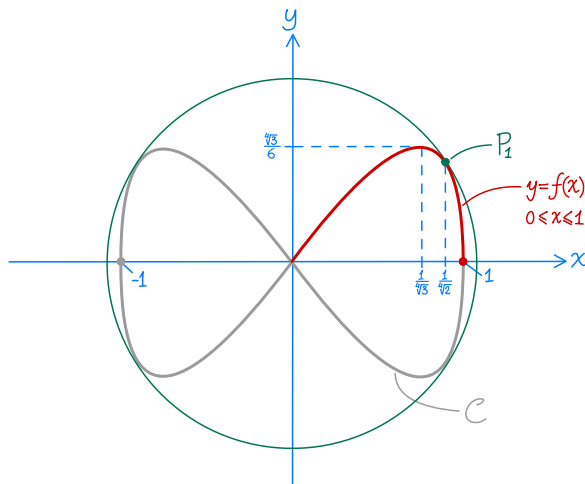
Studiando poi il segno di f' (ovvero del fattore $2 - 6x^4$ nella formula (7)) ottengo che $f(x)$ cresce per $0 \leq x \leq x_0$ e decresce $x_0 \leq x \leq 1$ dove $x_0 := 1/\sqrt[4]{3}$.

Infine per $0 \leq x < 1$ la derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = ((2 - 6x^4)(2 - 2x^4)^{-1/2})' = -8x^3(5 - 3x^4)(2 - 2x^4)^{-3/2}$$

ed è sempre negativa, per cui la funzione f è concava nell'intervallo $[0, 1]$.

Sulla base di quanto appena scritto traccio il grafico di f e l'insieme C' , che coincide con C :



b) Devo determinare il raggio r della circonferenza cercata, che chiaramente è uguale al valore massimo della distanza di un punto di C dall'origine.⁵

Sia $P = (x, \pm f(x))$ un punto di C ; allora la distanza di P dall'origine è $d = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$ e devo quindi cercare il valore massimo di $d(x)$ al variare di x nell'intervallo $[-1, 1]$. Tuttavia dal punto di vista dei calcoli è leggermente più semplice cercare il valore massimo del *quadrato della distanza*, vale a dire

$$d^2(x) = x^2 + f^2(x) = 3x^2 - 2x^6;$$

⁵ Ovvero l'estremo inferiore se il minimo non esistesse (ma come vedremo non è questo il caso).

trattandosi inoltre di una funzione pari, basta cercarne il valore massimo al variare di x in $[0, 1]$. Per farlo applico il solito algoritmo per la ricerca dei massimi: siccome la funzione d^2 è derivabile in tutto l'intervallo $[0, 1]$ e l'unico punto interno all'intervallo in cui si annulla la derivata

$$(d^2(x))' = 6x - 12x^5 = 6x(1 - 2x^4)$$

è $x_1 := 1/\sqrt[4]{2}$, devo confrontare i valori di d^2 negli estremi dell'intervallo e in x_1 :

$$d^2(0) = 0, \quad d^2(1) = 1, \quad d^2(x_1) = \sqrt{2}.$$

Dal confronto risulta che il valore massimo di d^2 è $\sqrt{2}$, ottenuto per $x = x_1$.

Pertanto il raggio cercato è $r = \sqrt[4]{2}$. Inoltre i punti di C che massimizzano la distanza dall'origine, ovvero i punti in cui C tocca la circonferenza di centro l'origine e raggio r , sono dati da $P_1 := (x_1, f(x_1))$ più tutti i punti ottenuti riflettendo P_1 rispetto agli assi e all'origine (vedere il disegno sopra).

OSSERVAZIONI. L'uguaglianza tra la traiettoria C del punto P e l'insieme C' (la curva a forma di "otto" riportata nella figura sopra) vale solo se P si muove per un intervallo di tempo di lunghezza 2π o più. Se l'intervallo di tempo considerato è più breve, la traiettoria C è un sottoinsieme proprio di C' .

4 Consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + (1 + 4t)\dot{x} + (2 + 2t + 4t^2)x = f(t). \quad (8)$$

a) Trovare una soluzione dell'equazione (8) con $f(t) = 0$ della forma $x_0(t) = e^{at^2}$ con $a \in \mathbb{R}$.

b) Risolvere l'equazione (8) con $f(t) = 4t e^{-t^2}$.

c) Risolvere l'equazione (8) con $f(t) = (2 - 2t + 4t^2) e^{-t}$.

[Suggerimento per b), c): usare il cambio di variabile $x(t) = y(t) x_0(t)$ dove x_0 è la soluzione trovata al punto a).]

SOLUZIONE. a) Ponendo $x = e^{at^2}$ ho che

$$\dot{x} = 2at e^{at^2}, \quad \ddot{x} = (2a + 4at^2) e^{at^2};$$

sostituendo queste espressioni nell'equazione (8) con $f(t) = 0$ ottengo

$$[2(a + 1) + 2(a + 1)t + 4(a + 1)^2 t^2] e^{at^2} = 0,$$

e questa uguaglianza vale per ogni t se (e solo se) tutti i coefficienti del polinomio tra parentesi quadre sono nulli, vale a dire per $a = -1$. La soluzione cercata è dunque

$$x_0 = e^{-t^2}.$$

b) Come suggerito, considero il cambio di variabile $x = y e^{-t^2}$. A partire da questa formula ottengo

$$\dot{x} = [-2ty + \dot{y}] e^{-t^2}, \quad \ddot{x} = [(-2 + 4t^2)y - 4t\dot{y} + \ddot{y}] e^{-t^2},$$

e sostituendo queste espressioni nell'equazione (8) ottengo $[\ddot{y} + \dot{y}] e^{-t^2} = f(t)$, ovvero

$$\ddot{y} + \dot{y} = f(t) e^{t^2}. \quad (9)$$

Per $f(t) = 4t e^{-t^2}$ questa equazione diventa

$$\ddot{y} + \dot{y} = 4t, \quad (10)$$

vale a dire un'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti il cui termine noto permette di usare il metodo degli annihilatori. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea $\ddot{y} + \dot{y} = 0$ è $\lambda^2 - \lambda = 0$ ed ha come soluzioni $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_{\text{om}} = c_0 + c_1 e^t$$

con $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

Siccome il termine noto dell'equazione è un polinomio di grado 1, e le costanti sono soluzioni

dell'equazione omogenea, posso trovare una soluzione particolare della forma $\tilde{y} = a_1 t + a_2 t^2$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.⁶ Partendo da questa formula ottengo

$$\dot{\tilde{y}} = a_1 + 2a_2 t, \quad \ddot{\tilde{y}} = a_2,$$

e sostituendo queste espressioni in (10) ottengo l'identità

$$(2a_2 + a_1) + 2a_2 t = 4t,$$

che è verificata per ogni t se (e solo se) $2a_2 + a_1 = 0$ e $2a_2 = 4$, vale dire $a_2 = 2$ e $a_1 = -4$. Pertanto la soluzione particolare cercata è $\tilde{y} = -4t + 2t^2$, la soluzione generale della (10) è

$$y = c_0 + c_1 e^t - 4t + 2t^2,$$

e infine la soluzione generale della (8) per $f(t) = 4te^{-t^2}$ è

$$x = (c_0 + c_1 e^t - 4t + 2t^2) e^{-t^2}.$$

c) Per $f(t) = (2 - 2t + 4t^2) e^{-t}$ l'equazione (9) diventa

$$\ddot{y} + \dot{y} = (2 - 2t + 4t^2) e^{-t+t^2}. \quad (11)$$

Questa è un'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti il cui termine noto *non* permette di usare il metodo degli annihilatori (a differenza dell'equazione (10)). Tuttavia usando il cambio di variabile $z = \dot{y}$ l'equazione (11) diventa

$$\dot{z} + z = (2 - 2t + 4t^2) e^{-t+t^2}, \quad (12)$$

vale a dire un'equazione lineare del primo ordine che posso risolvere moltiplicando per il fattore integrante e^t : così facendo ottengo

$$(e^t z)' = (2 - 2t + 4t^2) e^{t^2}$$

e quindi

$$e^t z = \int (2 - 2t + 4t^2) e^{t^2} dt = - \int 2t e^{t^2} dt + \int 2e^{t^2} dt + \int 4t^2 e^{t^2} dt. \quad (13)$$

Tramite il cambio di variabile $s = t^2$ ottengo che

$$\int 2t e^{t^2} dt = e^{t^2} + c; \quad (14)$$

integrando per parti il secondo integrale ottengo

$$\int 2e^{t^2} dt = 2t e^{t^2} - \int 2t (e^{t^2})' dt = 2t e^{t^2} - \int 4t e^{t^2} dt; \quad (15)$$

sostituendo infine le formule (14) e (15) nella (13) ottengo

$$e^t z = (2t - 1) e^{t^2} + c_1,$$

ovvero

$$\dot{y} = z = (2t - 1) e^{t^2-t} + c_1,$$

e integrando ottengo la soluzione generale della (11):

$$y = \int (2t - 1) e^{t^2-t} + c_1 dt = e^{t^2-t} + c_1 t + c_2$$

(nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $s = t^2 - t$). Da questa formula segue infine che la soluzione generale della (8) per $f(t) = (2 - 2t + 4t^2) e^{-t}$ è

$$x = (e^{t^2-t} + c_1 t + c_2) e^{-t^2}.$$

⁶ Detto in modo più formale: il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea è $P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$ e la base canonica dello spazio delle soluzioni è $\mathcal{B}_P := \{1, e^t\}$; il termine noto $4t$ risolve l'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti $\ddot{x} = 0$, che ha polinomio caratteristico $Q(\lambda) = \lambda^2$; quindi $PQ(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 1)$ e la base canonica dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata a PQ è $\mathcal{B}_{PQ} = \{1, t, t^2, e^t\}$; infine posso trovare una soluzione particolare \tilde{y} nello spazio generato da $\mathcal{B}_{PQ} \setminus \mathcal{B}_P = \{t, t^2\}$.

5 Dato $a > 0$, considero la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) := (x^2 + a)e^{ax}$, e indico con A l'insieme degli $a > 0$ per cui f è strettamente crescente, e per tali a indico con f^{-1} l'inversa di f (avendo posto il codominio di f uguale all'immagine).

a) Determinare l'insieme A .

b) Per ogni $a \in A$, trovare una funzione esplicita g tale che $f^{-1}(y) \sim g(y)$ per $y \rightarrow +\infty$.

c) Per ogni $a \in A$, trovare una funzione esplicita h tale che $f^{-1}(y) - h(y) \rightarrow 0$ per $y \rightarrow +\infty$.

SOLUZIONE. a) Siccome la derivata di f è

$$f'(x) = (ax^2 + 2x + a^2)e^{ax},$$

la funzione f è strettamente crescente se il polinomio di secondo grado $ax^2 + 2x + a^2$ è sempre positivo o nullo,⁷ ovvero se il discriminante $\Delta = 4 - 4a^3$ è negativo o nullo, vale a dire per $a \geq 1$. Dunque $A = [1, +\infty)$.

Osservo ora che $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, e quindi, dato $a \geq 1$, la funzione inversa $f^{-1}(y)$ tende a $+\infty$ per $y \rightarrow +\infty$.⁸ Questa fatto sarà usato in seguito.

b) Per alleggerire la notazione indico con \tilde{g} l'inversa di f . Per tutti gli y nel dominio di \tilde{g} vale

$$y = f(\tilde{g}(y)) = (\tilde{g}^2(y) + a)e^{a\tilde{g}(y)},$$

e sempre per alleggerire la notazione scrivo semplicemente

$$y = (\tilde{g}^2 + a)e^{a\tilde{g}};$$

passando al logaritmo ottengo quindi

$$\log y = \log(\tilde{g}^2 + a) + a\tilde{g}. \tag{16}$$

Osservo ora che

$$\log(x^2 + a) \sim \log(x^2) = 2 \log x = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \tag{17}$$

(la relazione \sim può essere dimostrata usando l'esercizio 1) e quindi

$$\log(x^2 + a) + ax = ax + o(x) \sim ax \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Usando ora il cambio di variabile $x = \tilde{g}(y)$ e il fatto che $\tilde{g}(y) \rightarrow +\infty$ per $y \rightarrow +\infty$ ottengo

$$\log(\tilde{g}^2 + a) + a\tilde{g} \sim a\tilde{g} \quad \text{per } y \rightarrow +\infty,$$

e da questa formula e dalla (16) segue che $\log y \sim a\tilde{g}$, ovvero

$$x\tilde{g} \sim \frac{1}{a} \log y \quad \text{per } y \rightarrow +\infty. \tag{18}$$

Concludo l'esercizio prendendo $g(y) := \frac{1}{a} \log y$.

c) Usando la formula (17) e il cambio di variabile $x = \tilde{g}(y)$ ottengo

$$\log(\tilde{g}^2 + a) \sim 2 \log \tilde{g},$$

mentre usando la formula (18) e l'esercizio 1 ottengo

$$\log \tilde{g} = \log\left(\frac{1}{a} \log y\right) + o(1) = -\log a + \log \log y + o(1).$$

Dalle ultime due formule segue che

$$\log(\tilde{g}^2 + a) = -2 \log a + 2 \log \log y + o(1),$$

e inserendo questa formula nella (16) ottengo

$$\log y = a\tilde{g} - 2 \log a + 2 \log \log y + o(1),$$

da cui segue infine che

$$\tilde{g} = \frac{1}{a} \log y - \frac{2}{a} \log \log y + \frac{2}{a} \log a + o(1).$$

⁷ Sto usando il fatto che una funzione derivabile definita su un intervallo è strettamente crescente se la derivata è sempre positiva o si annulla in un numero finito di punti (notare infatti che un polinomio di secondo grado che è sempre maggiore o uguale a zero si annulla in al più un punto).

⁸ Questa affermazione può sembrare ovvia, ma richiede una dimostrazione: la funzione f^{-1} è strettamente crescente (perché f è strettamente crescente) e dunque esiste il limite di $f^{-1}(y)$ per $y \rightarrow +\infty$, che indico con L . Quindi $f^{-1}(f(x))$ tende a L per $x \rightarrow +\infty$ (perché $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$); d'altronde $f^{-1}(f(x)) = x$ e quindi deve essere $L = +\infty$.

Concludo l'esercizio prendendo $h(y) := \frac{1}{a} \log y - \frac{2}{a} \log \log y + \frac{2}{a} \log a$.

PRIMA PARTE

1. Trovare insieme di definizione, immagine e infine inversa della funzione $f(x) := \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$.

SOLUZIONE. L'insieme di definizione di f è $\{x \in \mathbb{R}: x \neq -1\}$, l'immagine è $\{y \in \mathbb{R}: y \neq 1\}$, l'inversa è $g(y) := \sqrt[3]{(1+y)/(1-y)}$.

2. Calcolare a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{1 + \cos x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (9 + x^2)^8 2^{-x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^5 - 2x^4}{\cos(x^2 + x^4) - 1}$.

SOLUZIONE. a) $+\infty$; b) 0; c) 4.

3. Scrivere il polinomio di Taylor all'ordine 4 in 0 della funzione $f(x) := (1 - x^2) \log(1 + 2x^2)$.

SOLUZIONE. $P(x) = 2x^2 - 4x^4$.

4. Determinare il valore massimo e minimo della funzione $f(x) := (x^2 - x - 1)e^x$ relativamente alla semiretta $x \leq 2$ (se non esistono specificarlo e calcolare invece estremo inferiore e superiore dei valori).

SOLUZIONE. La derivata $f'(x) = (x^2 + x - 2)e^x$ si annulla in -2 e 1 ; confrontando i valori di f in $-\infty, -2, 1$ e 2 ottengo che il valore massimo è $f(2) = e^2$ e il valore minimo è $f(1) = -e$.

5. Per ogni $a > 0$ calcolare $\int_0^a \frac{1}{a^2 + x^2} dx$.

SOLUZIONE. Usando il cambio di variabile $y = x/a$ ottengo

$$\int_0^a \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a^2} \int_0^a \frac{1}{1 + (x/a)^2} dx = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} dy = \frac{\pi}{4a}.$$

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^x \cos t$ tale che $x(\pi) = 0$.

SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili; la soluzione cercata è $x(t) = -\log(1 - \sin t)$.

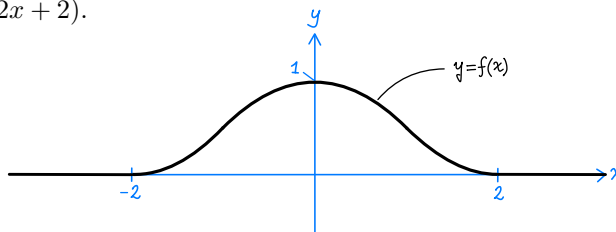
7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

SOLUZIONE. Usando il criterio del rapporto si ottiene $R = 4$.

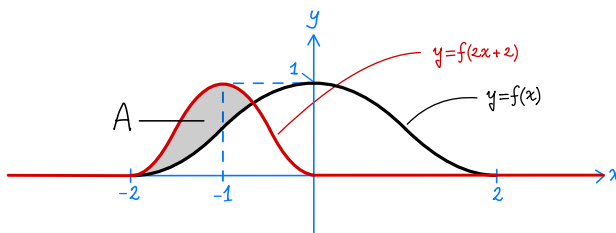
8. Dire per quali $a > 0$ risulta finito l'integrale improprio $\int_1^3 (\log x)^{-a} dx$.

SOLUZIONE. L'integrale è improprio semplice in 1; usando il cambio di variabile $x = 1 + t$ ottengo $\int_1^3 (\log x)^{-a} dx = \int_0^2 (\log(1+t))^{-a} dt \approx \int_0^1 t^{-a} dt$ e quindi l'integrale è finito per $a < 1$.

9. Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è riportato sotto. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq f(2x+2)$.



SOLUZIONE.



SECONDA PARTE

1 a) Dire per quali $a, a', m, m' \in \mathbb{R}$ vale che

$$|x|^a e^{mx} \ll |x|^{a'} e^{m'x} \quad \text{per } x \rightarrow -\infty. \quad (1)$$

b) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata che non tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$.¹ Dimostrare che vale

$$f(x) |x|^a e^{mx} \ll |x|^{a'} e^{m'x} \quad \text{per } x \rightarrow -\infty \quad (2)$$

se e solo se vale (1).

SOLUZIONE. a) Per definizione (1) equivale a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^a e^{mx}}{|x|^{a'} e^{m'x}} = 0;$$

usando il cambio di variabile $x = -t$ ottengo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^a e^{mx}}{|x|^{a'} e^{m'x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^{a-a'}}{e^{(m'-m)x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{a-a'}}{e^{(m-m')t}} = \begin{cases} 0 & \text{se } m > m', \\ 0 & \text{se } m = m' \text{ e } a < a', \\ 1 & \text{se } m = m' \text{ e } a = a', \\ +\infty & \text{se } m = m' \text{ e } a > a', \\ +\infty & \text{se } m < m'. \end{cases}$$

(Dei casi elencati sopra, il secondo, terzo e quarto sono ovvi; il primo segue dal fatto, ben noto, che $t^\alpha \ll e^{\beta t}$ per $t \rightarrow +\infty$ se $\beta > 0$; invece se $\beta < 0$ vale che $t^{-\alpha} \ll e^{-\beta t}$, e passando al reciproco si ottiene $t^\alpha \gg e^{\beta t}$, che giustifica il quinto caso.)

In conclusione (1) vale se e solo se $m > m'$ oppure $m = m'$ e $a < a'$.

b) Siccome f è limitata, ho che $f(x) = O(1)$ per $x \rightarrow -\infty$, da cui segue che

$$f(x) |x|^a e^{mx} = O(|x|^a e^{mx}) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty,$$

che insieme a (1) implica (2).

Suppongo ora che (1) non vale e ne deduco che neanche (2) vale.

Come visto nello svolgimento del punto precedente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^a e^{mx}}{|x|^{a'} e^{m'x}} \geq 1,$$

e quindi esiste m tale che per ogni $x < m$ vale

$$\frac{|x|^a e^{mx}}{|x|^{a'} e^{m'x}} \geq \frac{1}{2}.$$

Siccome $f(x)$ non tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$, esistono $\varepsilon > 0$ ed una successione (x_n) che tende a $-\infty$ tale che $|f(x_n)| > \varepsilon$ per ogni n . Pertanto, per gli n tali che $x_n \leq m$ (vale a dire tutti gli n tranne un numero finito) vale anche

$$\frac{|f(x_n)| |x_n|^a e^{mx_n}}{|x_n|^{a'} e^{m'x_n}} \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui segue che $\frac{|f(x)| |x|^a e^{mx}}{|x|^{a'} e^{m'x}}$ non tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$, e dunque (2) non vale.

2 Dato $a \geq 0$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + x = te^t \quad (3)$$

a) Risolvere (3) per $a \neq 1$.

b) Risolvere (3) per $a = 1$.

c) Per quali a esistono soluzioni tali che $x(t) \gg e^{2t}$ per $t \rightarrow +\infty$?

¹ Attenzione, non è detto che esista il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow -\infty$.

d) Per quali a tutte le soluzioni soddisfano a $x(t) \ll e^{t/3}$ per $t \rightarrow -\infty$?

SOLUZIONE. Risolvo i punti a) e b) insieme. Ricordo che la soluzione di (3) è data dalla formula

$$x(t) = x_{\text{om}}(t) + \tilde{x}(t),$$

dove x_{om} è la *soluzione generale* dell'equazione omogenea

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + x = 0 \tag{4}$$

mentre \tilde{x} è una *soluzione particolare* di (3).

Passo 1: Calcolo di x_{om} . Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea (4) è

$$P(\lambda) := \lambda^2 - 2a\lambda + 1$$

ed ha come radici

$$\lambda_{1,2} := \begin{cases} a \pm i\omega & \text{(due radici complesse coniugate) se } 0 \leq a < 1, \\ 1 & \text{(radice reale con molteplicità 2) se } a = 1, \\ a \pm \sqrt{a^2 - 1} & \text{(due radici reali distinte) se } a > 1, \end{cases}$$

dove $\omega := \sqrt{1 - a^2}$. Pertanto x_{om} è data da

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} (c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t))e^{at} & \text{se } 0 \leq a < 1, \\ (c_1 + c_2 t)e^t & \text{se } a = 1, \\ c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{se } a > 1, \end{cases} \tag{5}$$

dove c_1, c_2 sono numeri reali qualunque.

Il termine noto in (3) è della forma $p(t)e^{mt}$ con $m = 1$ e $p(t) = t$ polinomio di grado 1, e quindi posso trovare \tilde{x} usando il metodo degli annihilatori. Nel farlo distinguo due casi, a seconda che $m = 1$ sia o non sia una radice del polinomio caratteristico $P(\lambda)$, e osservo che il primo caso significa che $P(1) = 0$, che a sua volta diventa $a = 1$.

Passo 2: Determinazione di \tilde{x} per $a \neq 1$. In questo caso cerco \tilde{x} della forma

$$\tilde{x}(t) = (a_1 t + a_0)e^t.$$

Per funzioni di questo tipo l'equazione (3) si riduce all'identità

$$(2 - 2a)a_1 t + (2 - 2a)(a_0 + a_1) = t$$

che è verificata per ogni t se $(2 - 2a)a_1 = 1$ e $(2 - 2a)(a_0 + a_1) = 0$, ovvero $a_1 = \frac{1}{2-2a}$ e $a_0 = -a_1 = -\frac{1}{2-2a}$. Pertanto

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2-2a}(t-1)e^t.$$

Passo 3: Determinazione di \tilde{x} per $a = 1$. In questo caso cerco \tilde{x} della forma

$$\tilde{x}(t) = (a_1 t^3 + a_0 t^2)e^t.$$

Per funzioni di questo tipo l'equazione (3) si riduce all'identità

$$-a_0 t^2 + (2a_0 + 6a_1)t = t$$

che è verificata per ogni t se $a_0 = 0$ e $2a_0 + 6a_1 = 1$, vale a dire $a_1 = \frac{1}{6}$; pertanto

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{6}t^3 e^t.$$

Riassumendo quanto appena fatto, la soluzione generale di (3) è

$$x(t) = \begin{cases} (c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t))e^{at} + \frac{1}{2-2a}(t-1)e^t & \text{se } 0 \leq a < 1, \\ (c_1 + c_2 t + \frac{1}{6}t^3)e^t & \text{se } a = 1, \\ c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{2-2a}(t-1)e^t & \text{se } a > 1, \end{cases} \tag{6}$$

dove c_1, c_2 sono numeri reali qualunque e $\omega := \sqrt{1 - a^2}$.

c) Dalla formula (6) si vede subito che per $0 \leq a \leq 1$, la soluzione generale di (3) soddisfa

$$x(t) = O(t^3 e^t) \quad \text{per } t \rightarrow +\infty,$$

quindi tutte le soluzioni sono trascurabili rispetto a e^{2t} , e in particolare nessuna soluzione soddisfa $x(t) \gg e^{2t}$.

Riguardo al caso $a > 1$, si vede invece che esistono soluzioni x tali che $x(t) \gg e^{2t}$ se e solo se almeno una delle due radici $\lambda_{1,2}$ (cioè la più grande delle due) è strettamente maggiore di 2; vale a dire

$$a + \sqrt{a^2 - 1} > 2 \quad \text{cioè} \quad a > \frac{5}{4}.$$

Riassumendo, la risposta alla domanda c) è $a > \frac{5}{4}$.

d) Per rispondere a questa domanda è bene tenere presente quanto fatto nell'esercizio 1.

Osservo per cominciare che la soluzione particolare \tilde{x} trovata sopra soddisfa $\tilde{x}(t) \ll e^{t/3}$ per $t \rightarrow -\infty$ qualunque sia a , e quindi la domanda può essere riformulata chiedendo per quali a la soluzione generale dell'equazione omogenea soddisfa

$$x_{\text{om}}(t) \ll e^{t/3} \quad \text{per } t \rightarrow -\infty. \quad (7)$$

Nel rispondere considero separatamente tre casi:

Caso $0 \leq a < 1$. Dalla formula (5) si vede subito che $x_{\text{om}}(t) = O(e^{at})$ e quindi (7) vale se $a > 1/3$ (uso il punto a) dell'esercizio 1). Inoltre è vero anche il viceversa: per $a \leq 1/3$, la soluzione $e^{at} \sin(\omega t)$, ottenuta prendendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, non è trascurabile rispetto a $e^{t/3}$ (uso il punto b) dell'esercizio 1).

Caso $a = 1$. Dalla formula (5) e dal punto a) dell'esercizio 1 segue la formula (7).

Caso $a > 1$. Da (5) e dal punto a) dell'esercizio 1 segue che (7) vale se e solo se $\lambda_1, \lambda_2 \geq 1/3$, ovvero

$$a - \sqrt{a^2 - 1} \geq \frac{1}{3} \quad \text{cioè} \quad a < \frac{5}{3}.$$

Riassumendo quanto appena detto, la risposta alla domanda d) è $\frac{1}{3} < a < \frac{5}{3}$.

3 Dato $a > 0$, considero l'insieme A dato dai punti (x, y) tali che $x \geq 0$ e $x^{5a^2} \leq y \leq (x^{5a} + 1)^a$, e indico con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle x .

a) Fare un disegno approssimativo dell'insieme A per $a = 1/10$;

b) Dire per quali a l'area di A è finita.

c) Dire per quali a il volume di V è finito.

SOLUZIONE. Per ogni $a > 0$ e $x \geq 0$ pongo

$$f(x) := (x^{5a} + 1)^a,$$

e osservo che $f(x)$ è ben definita per $x \geq 0$, continua, strettamente positiva, e soddisfa

$$f(x) = x^{5a^2} (1 + x^{-5a})^a > x^{5a^2} \quad (8)$$

a) Limitatamente al caso $a = 1/10$, ho che $f(x)$ è asintoticamente equivalente a $x^{1/20}$ per $x \rightarrow +\infty$ e in particolare $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.

Inoltre f è derivabile infinite volte per $x > 0$ e

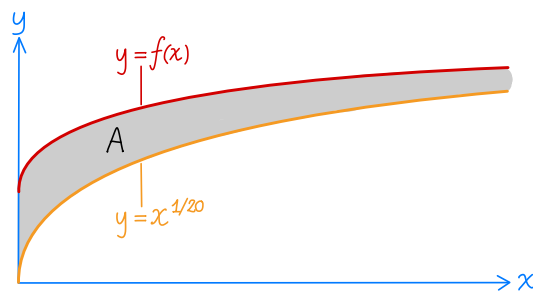
$$f'(x) = \frac{1}{20} (x^{1/2} + 1)^{-9/10} x^{-1/2},$$

da cui segue che f è strettamente crescente e che $f'(0) = +\infty$; infine

$$f''(x) = -\frac{1}{400} (x^{1/2} + 1)^{-19/10} x^{-3/2} (19x^{1/2} + 10),$$

da cui segue che f è strettamente concava.

Usando queste informazioni e la (8) posso tracciare il grafico di f e l'insieme A :



b) Tenendo conto della disuguaglianza (8) ho che

$$\text{area}(A) = \int_0^{+\infty} f(x) - x^{5a^2} dx.$$

Questo integrale è improprio semplice a $+\infty$, e per determinarne il comportamento trovo la parte principale della funzione integranda per $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) - x^{5a^2} = x^{5a^2} \left[(1 + x^{-5a})^a - 1 \right] \sim ax^{5a^2-5a} \quad (9)$$

(nel secondo passaggio ho usato lo sviluppo $(1+t)^a - 1 \sim at$ per $t \rightarrow 0$, con $t = x^{-5a}$).

Pertanto

$$\text{area}(A) \approx \int_1^{+\infty} x^{5a^2-5a} dx,$$

e in particolare A ha area finita se e solo se $5a^2 - 5a < -1$, ovvero $\frac{5-\sqrt{5}}{10} < a < \frac{5+\sqrt{5}}{10}$.

c) Tenendo conto della disuguaglianza (8) e della prima formula per il volume dei solidi di rotazione ho che

$$\text{volume}(V) = \pi \int_0^{+\infty} (f(x))^2 - (x^{5a^2})^2 dx.$$

Come prima, questo integrale è improprio semplice a $+\infty$, e per determinarne il comportamento trovo la parte principale della funzione integranda per $x \rightarrow +\infty$:

$$(f(x))^2 - (x^{5a^2})^2 = (f(x) - x^{5a^2})(f(x) + x^{5a^2}) = 2ax^{10a^2-5a}$$

(nel secondo passaggio ho usato la formula (9) e il fatto che $f(x) + x^{5a^2} \sim 2x^{5a^2}$).

Pertanto

$$\text{volume}(V) \approx \int_1^{+\infty} x^{10a^2-5a} dx,$$

e in particolare V ha volume finito se e solo se $10a^2 - 5a < -1$, ma questa disuguaglianza non è verificata per alcun valore di a .

4 a) Dimostrare che per ogni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua vale

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(t) dt \right) x dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)f(x) dx. \quad (10)$$

[Suggerimento: integrare il termine di sinistra per parti.]

b) Siano f, g, α, β funzioni su \mathbb{R} , con f continua e g, α, β di classe C^1 , tali che $\alpha(0) = \beta(0)$. Trovare una formula analoga alla (10) per

$$\int_0^1 \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right) g'(x) dx.$$

Più precisamente, si chiede di scrivere questa quantità come l'integrale tra 0 e 1 di un'opportuna funzione ottenuta combinando le funzioni f, g, α, β e le loro derivate.

SOLUZIONE. a) Posto $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x f(t) dt \right) x dx &= \int_0^1 x F(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 F(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 F'(x) dx \\ &= \frac{1}{2}F(1) - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2) f(x) dx. \end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho integrato per parti, nel terzo ho usato che $F' = f$, e infine nel quarto ho usato che $F(1) = \int_0^1 f(x) dx$.)

b) Posto $F(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt$ si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right) g'(x) dx &= \int_0^1 g'(x) F(x) dx \\ &= \left| (g(x) - g(1)) F(x) \right|_0^1 - \int_0^1 (g(x) - g(1)) F'(x) dx \\ &= \int_0^1 (g(1) - g(x)) F'(x) dx \\ &= \int_0^1 (g(1) - g(x)) (f(\beta(x)) \beta'(x) - f(\alpha(x)) \alpha'(x)) dx. \end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho integrato per parti, scegliendo come primitiva di $g'(x)$ la funzione $g(x) - g(1)$; la ragione di questa scelta è che la funzione $(g(x) - g(1)) F(x)$ si annulla sia per $x = 0$ che per $x = 1$, e quindi il primo addendo nella seconda riga vale 0 (terzo passaggio); nel quarto passaggio ho usato la nota formula $F'(x) = f(\beta(x)) \beta'(x) - f(\alpha(x)) \alpha'(x)$.)

Ho dunque ottenuto la seguente generalizzazione della formula (10):

$$\int_0^1 \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right) g'(x) dx = \int_0^1 (g(1) - g(x)) (f(\beta(x)) \beta'(x) - f(\alpha(x)) \alpha'(x)) dx.$$

PRIMA PARTE

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \geq -1$ nell'intervallo $[0, \pi]$.

SOLUZIONE. $x \in [0, \frac{\pi}{4}) \cup [\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}) \cup [\frac{7\pi}{8}, \pi]$.

2. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione \ll per $x \rightarrow +\infty$:

$$\underbrace{\log(4^x x^2)}_a, \quad \underbrace{\frac{1}{x^3+1} + \frac{1}{1+e^x}}_b, \quad \underbrace{x \log(\log x)}_c, \quad \underbrace{\frac{1}{2^x - x^4}}_d.$$

SOLUZIONE. $d \ll b \ll a \ll c$.

3. Trovare la parte principale per $x \rightarrow +\infty$ di $f(x) := x^{1/2} - (x^2 + 8)^{1/4}$.

SOLUZIONE. Raccogliendo $x^{1/2}$ e usando lo sviluppo $(1+t)^{1/4} - 1 \sim \frac{1}{4}t$ per $t \rightarrow 0$ con $t = 8x^{-2}$ ottengo che $f(x) \sim -2x^{-3/2}$ per $x \rightarrow +\infty$.

4. Dire per quali $a > 1$ la funzione $f(x) := (x^2 + 2)^a - 4ax^2$ è crescente per $x \geq 0$.

SOLUZIONE. La derivata $f'(x) := 2ax((x^2 + 2)^{a-1} - 4)$ è positiva se e solo se $(x^2 + 2)^{a-1} \geq 4$; questa disuguaglianza è verificata per ogni $x \geq 0$ se e solo se $2^{a-1} \geq 4$, cioè $a \geq 3$.

5. Calcolare l'area dell'insieme A dato dai punti (x, y) tali che $x \geq 0$ e $\frac{4}{\sqrt{10-x}} \leq y \leq \sqrt{x}$.

SOLUZIONE. La disuguaglianza $4/\sqrt{10-x} \leq \sqrt{x}$ è verificata per $2 \leq x \leq 8$, e quindi

$$\text{area}(A) = \int_2^8 \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{10-x}} dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} + 8(10-x)^{1/2} \right]_2^8 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

6. Sia P un punto che si muove con legge oraria $P(t) = (e^t \cos(2t), e^t \sin(2t))$. Calcolare il modulo della velocità di P e la distanza d percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 2$.

SOLUZIONE. $|v(t)| = \sqrt{5}e^t$, $d = \int_0^2 |v(t)| dt = \sqrt{5}(e^2 - 1)$.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 4t$ che soddisfano $x(0) = 0$.

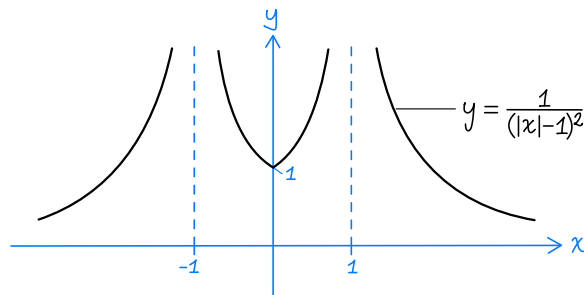
SOLUZIONE. La soluzione generale dell'equazione omogenea è $x_{\text{om}}(t) = e^t(c_1 \sin t + c_2 \cos t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, una soluzione particolare è $\tilde{x}(t) = 2t + 2$, e infine le soluzioni cercate sono $x(t) = e^t(c_1 \sin t - 2 \cos t) + 2t + 2$ con $c_1 \in \mathbb{R}$.

8. Determinare il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^a}{(2n)!}$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.¹

SOLUZIONE. Detto a_n l'addendo n -esimo della serie, si ha che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim n^{a-2}$ per $n \rightarrow +\infty$; quindi, per il criterio del rapporto, la serie converge per $a < 2$ e diverge per $a > 2$.

9. Disegnare il grafico della funzione $\frac{1}{(|x|-1)^2}$.

SOLUZIONE.



¹ È accettabile dare la risposta per tutti i valori di a tranne al più uno.

SECONDA PARTE

- 1** a) Trovare la più grande costante m tale che $16 + x^6 \geq m(4 + x^2)^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
 b) Trovare la più piccola costante M tale che $16 + x^6 \leq M(4 + x^2)^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONE. Risolvo a) e b) insieme. Osservo innanzitutto che le disuguaglianze in questione si riscrivono come

$$m \leq \underbrace{(16 + x^6)(4 + x^2)^{-3}}_{f(x)} \leq M \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

da cui risulta chiaro che la più grande costante m e la più piccola M per cui questo vale sono

$$m := \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x), \quad M := \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

Per calcolare questi valori utilizzo la procedura vista a lezione: siccome la funzione f è ben definita e derivabile su tutto \mathbb{R} , confronto i valori di f nei punti in cui si annulla la derivata con i limiti a $\pm\infty$. Poiché $f'(x) = 24x(x^4 - 4)(4 + x^2)^{-4}$ si annulla per $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{2}$, confronto

$$f(\pm\infty) = 1, \quad f(\pm\sqrt{2}) = \frac{1}{9}, \quad f(0) = \frac{1}{4},$$

ed ottengo che $\frac{1}{9}$ è il valore minimo di f mentre 1 è l'estremo superiore dei valori (il valore massimo non esiste). Pertanto $m = \frac{1}{9}$ e $M = 1$.

- 2** a) Trovare la parte principale per $x \rightarrow 0$ della funzione $f(x) := (\cos(2x))^{1/x} - 1$.
 b) Trovare la parte principale per $x \rightarrow 0$ di $f(x) + ax$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONE. Osservo che la soluzione di a) è un caso particolare di quella di b), e rispondo direttamente a questo punto. Per cominciare riscrivo la funzione f nella forma

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \log(\cos(2x))\right) - 1. \tag{1}$$

Osservo ora che

$$\log(\cos(2x)) = \log(1 - 2x^2 + O(x^4)) = -2x^2 + O(x^4) \tag{2}$$

(nel primo passaggio ho usato lo sviluppo di Taylor $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$ con $t = 2x$; nel secondo ho usato lo sviluppo $\log(1 + t) = t + O(t^2)$ con $t = -2x^2 + O(x^4)$).

Ripartendo dalla formula (1) ottengo quindi

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \log(\cos(2x))\right) - 1 = \exp(-2x + O(x^3)) - 1 = -2x + 2x^2 + O(x^3). \tag{3}$$

(nel secondo passaggio ho usato la formula (2); nel terzo passaggio ho usato lo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t = -2x + O(x^3)$). Dalla (3) ottengo immediatamente la parte principale cercata:

$$\text{p.p.}(f(x) + ax) = \begin{cases} (a - 2)x & \text{se } a \neq 2, \\ 2x^2 & \text{se } a = 2. \end{cases}$$

- 3** Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con parte principale bx^a per $x \rightarrow +\infty$, con $a \neq -1$, e siano α, β numeri reali con $0 < \alpha < \beta$.

a) Determinare la parte principale per $x \rightarrow +\infty$ di

$$F(x) := \int_{x^\alpha}^{x^\beta} f(t) dt. \tag{4}$$

b) Cosa succede se $\alpha = 0$?

SOLUZIONE. a) La soluzione è divisa in due passi: prima ricavo la parte principale della funzione $G(x)$ ottenuta dalla sostituendo la funzione $f(t)$ nella formula (4) con bt^a , poi faccio vedere che G ed F hanno la stessa parte principale.

Passo 1. Osservo che per ogni $x > 0$ vale

$$G(x) := \int_{x^\alpha}^{x^\beta} bt^a dt = \left| \frac{b}{a+1} t^{a+1} \right|_{x^\alpha}^{x^\beta} = \frac{b}{a+1} (x^{\beta(a+1)} - x^{\alpha(a+1)}),$$

e per determinare la parte principale di $G(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ osservo che tra gli esponenti $\beta(a+1)$ e $\alpha(a+1)$ il più grande è il primo se $a+1 > 0$, e il secondo se $a+1 < 0$. Pertanto

$$\text{p.p.}(G(x)) = \begin{cases} \frac{b}{a+1} x^{\beta(a+1)} & \text{se } a > -1, \\ -\frac{b}{a+1} x^{\alpha(a+1)} & \text{se } a < -1. \end{cases} \quad (5)$$

Passo 2. $\text{p.p.}(F(x)) = \text{p.p.}(G(x))$ per via del seguente fatto di carattere generale:

Lemma. Siano f, g funzioni continue su \mathbb{R} , asintoticamente equivalenti per $x \rightarrow +\infty$ e con g positiva; sia F la funzione definita in (4) e sia G la funzione definita allo stesso modo con g al posto di f . Allora F e G sono asintoticamente equivalenti per $x \rightarrow +\infty$.

Osservo innanzitutto che la condizione $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ equivale dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m tale che

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon g(x) \quad \text{per } x \geq m. \quad (6)$$

Allora per ogni $x \geq m' := m^{1/\alpha}$ vale che

$$|F(x) - G(x)| = \left| \int_{x^\alpha}^{x^\beta} f(t) - g(t) dt \right| \leq \int_{x^\alpha}^{x^\beta} |f(t) - g(t)| dt \leq \varepsilon \int_{x^\alpha}^{x^\beta} g(t) dt \leq \varepsilon G(x).$$

(Nel primo passaggio ho usato la definizione di $F(x)$ e $G(x)$, nel secondo ho usato la disuguaglianza $|\int_a^b h(t) dt| \leq \int_a^b |h(t)| dt$, nel terzo ho usato la disuguaglianza (6), che vale per ogni $t \geq x^\alpha$ perché ho imposto che $x^\alpha \geq m$ - in questi passaggi serve che $\alpha > 0$.)

Ho dunque dimostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m' tale che

$$|F(x) - G(x)| \leq \varepsilon G(x) \quad \text{per } x \geq m',$$

e, come già osservato, questo equivale a dire che $F(x) \sim G(x)$ per $x \rightarrow +\infty$.

b) Ho usato l'ipotesi $\alpha > 0$ nella dimostrazione del lemma, e quindi la dimostrazione sopra non si applica al caso $\alpha = 0$. Se $\alpha = 0$ e $a > -1$, si può dimostrare che la formula (5) continua a valere, vale a dire

$$\text{p.p.}(F(x)) = \text{p.p.}(G(x)) = \frac{b}{a+1} x^{\beta(a+1)}.$$

Se invece $\alpha = 0$ e $a < 1$, allora il limite di $F(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ è dato dall'integrale improprio

$$L := \int_1^{+\infty} f(x) dx,$$

che è finito, e quindi $\text{p.p.}(F(x)) = L$. (Notare che L può essere diverso dal limite di $G(x)$ per $x \rightarrow +\infty$, che è $-\frac{b}{a+1}$.)

OSSERVAZIONI. Nel caso in cui G è presa come nel passo 1 (cioè quando $g(x) = bx^a$) è possibile dimostrare il lemma sopra usando il teorema di de L'Hôpital. Consideriamo per esempio il caso $a > -1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x^\beta) \beta x^{\beta-1} - f(x^\alpha) \alpha x^{\alpha-1}}{\beta b x^{\beta(a+1)-1} - \alpha b x^{\alpha(a+1)-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x^\beta) \beta x^{\beta-1}}{\beta b x^{\beta(a+1)-1}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x^\alpha) \alpha x^{\alpha-1}}{\beta b x^{\beta(a+1)-1}} = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato che $\beta b x^{\beta(a+1)-1} - \alpha b x^{\alpha(a+1)-1} \sim \beta b x^{\beta(a+1)-1}$, nel quarto ho usato che $f(t) \sim bt^a$, da cui segue che $f(x^\beta) \sim bx^{\beta a}$ e $f(x^\alpha) \sim bx^{\alpha a}$.)

Attenzione: per applicare il teorema di de L'Hôpital bisogna prima verificarne le ipotesi, e questo significa far vedere che $F(x) \rightarrow +\infty$ nel caso $a > -1$ e $F(x) \rightarrow +0$ nel caso $a < -1$ (dettaglio che ometto, e che rende questa dimostrazione più lunga di quello che sembra).

- 4] Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che ammette un'unico punto di massimo \bar{x} , e inoltre vale $a < \bar{x} < b$ e $f''(\bar{x}) \neq 0$. Dimostrare che esistono costanti c_0, c_1 tali che

$$\int_a^b e^{tf(x)} dx \sim \frac{e^{c_0 t}}{c_1 \sqrt{t}} \quad \text{per } t \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Esplicitare c_0 e c_1 in funzione di f . [Può essere utile sapere che $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.]

SOLUZIONE. Siccome \bar{x} è un punto di massimo interno ad $[a, b]$, ho che $f'(\bar{x}) = 0$ e $f''(\bar{x}) < 0$. Pertanto lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di f nel punto \bar{x} è

$$f(x) = c - c'(x - \bar{x})^2 + R(x), \quad (8)$$

dove R è il resto di Taylor di ordine 2 e

$$c := f(\bar{x}), \quad c' := -\frac{1}{2}f''(\bar{x}).$$

Risolvero l'esercizio in due passi: per prima cosa ottengo la formula (7) nel caso in cui il resto R è nullo, e poi dimostro che la stessa formula vale anche se R non è nullo.

Passo 1. Siccome $f(x) = c - c'(x - \bar{x})^2$, ho che

$$\int_a^b e^{tf(x)} dx = \int_a^b e^{ct - c't(x - \bar{x})^2} dx = e^{ct} \int_a^b e^{-c't(x - \bar{x})^2} dx = \frac{e^{ct}}{\sqrt{c't}} \int_{a(t)}^{b(t)} e^{-y^2} dy,$$

dove nell'ultimo passaggio ho usato il cambio di variabile $y = \sqrt{c't}(x - \bar{x})$ e ho posto $a(t) := \sqrt{c't}(a - \bar{x})$ e $b(t) := \sqrt{c't}(b - \bar{x})$. Pertanto

$$\frac{\sqrt{t}}{e^{ct}} \int_a^b e^{tf(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{c'}} \int_{a(t)}^{b(t)} e^{-y^2} dy,$$

e siccome $a(t)$ e $b(t)$ convergono rispettivamente a $-\infty$ e $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, l'integrale a destra dell'uguale converge all'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$, che come detto vale $\sqrt{\pi}$. Dunque

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^{ct}} \int_a^b e^{tf(x)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c'}}, \quad (9)$$

e questo significa che

$$\int_a^b e^{tf(x)} dx \sim \frac{e^{ct}}{\sqrt{c'/\pi}\sqrt{t}} \quad \text{per } t \rightarrow +\infty,$$

da cui ottengo la formula (7) ponendo

$$c_0 := c = f(\bar{x}), \quad c_1 := \sqrt{c'/\pi} = \sqrt{-\frac{1}{2\pi}f''(\bar{x})}. \quad (10)$$

Passo 2. Suppongo ora che il resto R in (8) non sia nullo, e faccio vedere che anche in questo caso vale la formula (9), che a sua volta implica la formula (7) con c_0 e c_1 dati da (10).

Per dimostrare la (9), cerco delle opportune stime dall'alto e dal basso dell'integrale, che ottengo a partire da stime dall'alto e dal basso della funzione $f(x)$. Uso inoltre i concetti di liminf e limsup di una funzione, che permettono di semplificare alcuni dettagli.

Siccome $R(x) = o((x - \bar{x})^2)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|R(x)| \leq \varepsilon(x - \bar{x})^2$ se $|x - \bar{x}| \leq \delta$, vale a dire

$$-\varepsilon(x - \bar{x})^2 \leq R(x) \leq \varepsilon(x - \bar{x})^2 \quad \text{per } x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta],$$

e applicando queste disuguaglianze alla formula (8) ottengo

$$c - (c' + \varepsilon)(x - \bar{x})^2 \leq f(x) \leq c - (c' - \varepsilon)(x - \bar{x})^2 \quad \text{per } x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]. \quad (11)$$

Stima dal basso dell'integrale in (7). Sia $t \geq 0$. Dalla prima disuguaglianza in (11) ottengo che

$$tf(x) \geq ct - (c' + \varepsilon)t(x - \bar{x})^2 \quad \text{per } x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta].$$

e quindi, usando il fatto che la funzione integranda $e^{tf(x)}$ è positiva,

$$\int_a^b e^{tf(x)} dx \geq \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} e^{tf(x)} dx \geq \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} e^{ct - (c'+\varepsilon)t(x-\bar{x})^2} dx = \frac{e^{ct}}{\sqrt{(c'+\varepsilon)t}} \int_{-\alpha(t)}^{\alpha(t)} e^{-y^2} dy,$$

dove nell'ultimo passaggio ho usato il cambio di variabile $y = \sqrt{(c' + \varepsilon)t}(x - \bar{x})$ e ho posto $\alpha(t) := \delta\sqrt{(c' + \varepsilon)t}$. Dunque

$$\frac{\sqrt{t}}{e^{ct}} \int_a^b e^{tf(x)} dx \geq \frac{1}{\sqrt{c + \varepsilon}} \int_{-\alpha(t)}^{\alpha(t)} e^{-y^2} dy,$$

e siccome $\alpha(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, l'ultimo integrale tende a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$; quindi

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^{ct}} \int_a^b e^{tf(x)} dx \geq \frac{1}{\sqrt{c + \varepsilon}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\alpha(t)}^{\alpha(t)} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{c + \varepsilon}}.$$

Nota infine che questa disuguaglianza vale per ogni $\varepsilon > 0$, e quindi posso passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ nel termine di destra, ottenendo

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^{ct}} \int_a^b e^{tf(x)} dx \geq \sqrt{\frac{\pi}{c'}} \quad (12)$$

Stima dall'alto dell'integrale in (7). Sia $t > 0$. Spezzo l'integrale in questione come

$$\int_a^b e^{tf(x)} dx = \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} e^{tf(x)} dx + \int_a^{\bar{x}-\delta} e^{tf(x)} dx + \int_{\bar{x}+\delta}^b e^{tf(x)} dx \quad (13)$$

dove δ è lo stesso della formula (11), e stimo separatamente gli addendi a destra dell'uguale. La seconda disuguaglianza in (11) implica che

$$tf(x) \leq ct - (c' - \varepsilon)t(x - \bar{x})^2 \quad \text{per } x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta],$$

e procedendo come sopra ottengo

$$\frac{\sqrt{t}}{e^{ct}} \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} e^{tf(x)} dx \leq \frac{1}{\sqrt{c' - \varepsilon}} \int_{-\beta(t)}^{\beta(t)} e^{-y^2} dy,$$

dove $\beta(t) := \delta\sqrt{(c' - \varepsilon)t}$, e quindi

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^{ct}} \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} e^{tf(x)} dx \leq \frac{1}{\sqrt{c' - \varepsilon}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\beta(t)}^{\beta(t)} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{c' - \varepsilon}};$$

prendendo infine il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ ottengo

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^{ct}} \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} e^{tf(x)} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{c'}} \quad (14)$$

Stimo ora il secondo integrale a destra dell'uguale in (13). Detto m il valore massimo di f relativamente all'intervallo $[a, \bar{x} - \delta]$ (che esiste per il teorema di Weierstrass), si vede facilmente che

$$\frac{\sqrt{t}}{e^{ct}} \int_a^{\bar{x}-\delta} e^{tf(x)} dx \leq \sqrt{t}(b-a)e^{(m-c)t}.$$

Osservo ora che, siccome \bar{x} è l'unico punto di massimo di f relativamente all'intervallo $[a, b]$, il valore di m deve essere strettamente inferiore a $f(\bar{x}) = c$, e quindi

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^{ct}} \int_a^{\bar{x}-\delta} e^{tf(x)} dx \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t}(b-a)e^{(m-c)t} = 0.$$

Analogamente si dimostra che

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^{ct}} \int_a^{\bar{x}-\delta} e^{tf(x)} dx \leq 0.$$

Mettendo insieme queste due stime e la (14) ottengo

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^{ct}} \int_a^b e^{tf(x)} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{c'}}$$

che insieme alla (12) implica la (9).