

UNIVERSITÀ DI PISA
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

PROVE SCRITTE DELL'ESAME DI
Analisi Matematica 1 (561AA), a.a. 2023-24
Testi

GIOVANNI ALBERTI
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa

<http://pagine.dm.unipi.it/alberti>

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I (per la laurea triennale in Matematica) si compongono di due parti: una prima parte con nove domande relativamente semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con quattro o cinque problemi di cui dare invece una soluzione dettagliata. Il tempo a disposizione è di 70 minuti per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno sei risposte corrette nella prima parte, e due problemi completamente risolti nella seconda.

Questa raccolta contiene i testi degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2023-24, incluse le prove in itinere, ma non le soluzioni. A chi vuole esercitarsi si raccomanda di cominciare da qui, di svolgere per proprio conto gli esercizi, e di leggere le soluzioni solo dopo aver provato a risolverli. Degli scritti di cui sono state preparate più varianti viene riportata qui solo la prima.

Programma del corso [versione: 8 luglio 2024].

Gli argomenti non fondamentali sono riportati in corsivo.

Prima parte: Calcolo.

1. RICHIAMO DI ALCUNE NOZIONI DI BASE

- Trigonometria, coordinate polari di un punto nel piano.
- Grafici delle funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche, funzioni trigonometriche inverse.
- Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
- Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione “grafica” di equazioni e disequazioni.

2. LIMITI DI FUNZIONI E CONTINUITÀ

- Funzioni continue; definizione, proprietà di base e continuità delle funzioni elementari (le dimostrazioni sono rimandate alla seconda parte del corso).
- Limiti di funzioni: definizione e significato; proprietà di base.

3. DERIVATE

- Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Alcuni significati fisici della derivata: velocità e accelerazione di un punto in movimento.
- Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate (dimostrazioni parziali, cf. seconda parte del corso).
- Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato); trascurabilità di una funzione rispetto ad un'altra; notazione di Landau (“o piccolo” e “o grande”). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
- Teorema di de l'Hôpital (dimostrato nella seconda parte del corso). Confronto tra i comportamenti delle funzioni elementari all'infinito e in zero.
- Sviluppo di Taylor di una funzione; rappresentazione del resto di Taylor come “o piccolo” e “o grande” (formule del resto di Peano). Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo di limiti e di parti principali.
- Massimo e minimo di un insieme di numeri reali; valore massimo e valore minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali). Estremo superiore ed inferiore di un insieme (nel caso che si scriva come unione finita di intervalli); estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione.
- Nei punti di massimo e minimo locali interni al dominio la derivata (se esiste) vale zero. Procedura per la determinazione del valore massimo e minimo (oppure dell'estremo superiore ed inferiore dei valori) di una funzione continua definita su un'unione finita di intervalli (la giustificazione completa della procedura è rimandata al secondo semestre).
- Funzioni crescenti e decrescenti: definizione e caratterizzazione in termini di segno della derivata; funzioni convesse e concave: definizione e caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda (dimostrazioni parziali, quelle complete sono rimandate alla seconda parte del corso). Disegno del grafico di una funzione.

4. INTEGRALI

- Definizione (provvisoria) di integrale di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale (dimostrazione parziale, cf. seconda parte del corso).
- Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.
- Approssimazione dell'integrale tramite somme finite.
- La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza.
- Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide e in particolare dei solidi di rotazione.

5. EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- Equazioni differenziali del primo ordine: esempi e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari del primo ordine e delle equazioni a variabili separabili.
- Equazioni differenziali lineari di ordine qualunque: teorema di esistenza e unicità (senza dimostrazione); struttura dell'insieme delle soluzioni; risoluzione delle equazioni omogenee a coefficienti costanti; calcolo della soluzione particolare di un'equazione a coefficienti costanti non omogenea con il metodo degli annihilatori; variazione delle costanti.

Seconda parte: Analisi.

6. BASI DI TEORIA DEGLI INSIEMI.

- Prodotto di due insiemi. Le funzioni $f : A \rightarrow B$ intese come grafici. L'insieme B^A delle funzioni da A ad B ; l'insieme delle parti (sottoinsiemi) di un insieme A .
- Numeri naturali, interi e razionali. Numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite. *I numeri razionali corrispondono ai numeri reali con espansione decimale finita o periodica.*
- Insiemi finiti e infiniti, numerabili e più che numerabili.
- L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile; il prodotto di una famiglia finita di insiemi numerabili è numerabile. I numeri interi, razionali e algebrici sono numerabili; i numeri reali sono più che numerabili. Insiemi con uguale cardinalità.

7. COMPLETEZZA DEI NUMERI REALI

- I numeri reali estesi. Definizione di estremo superiore e inferiore per un insieme qualunque di numeri reali (o di numeri reali estesi). Completezza dei numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite.
- *Insiemi ordinati (parzialmente o totalmente); definizione di massimo e minimo di un sottoinsieme di un insieme ordinato; definizione di estremo superiore ed inferiore; assioma di completezza ed equivalenza con l'esistenza dell'estremo superiore/inferiore; definizione di insieme ordinato completo. Definizione di campo ordinato; caratterizzazione dei numeri reali come campo ordinato e completo (senza dimostrazione).*

8. SUCCESSIONI DI NUMERI REALI

- Limite di una successione di numeri reali; possibili comportamenti di una successione.
- Le successioni monotone hanno limite.
- Caratterizzazione delle successioni convergenti (con limite finito) come successioni di Cauchy.
- Teorema di Bolzano-Weierstrass: ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.
- Limite inferiore (liminf) e limite superiore (limsup) di una successione.
- Successioni definite per ricorrenza; formula esplicita per successioni definite da ricorrenze lineari. *Successione di Fibonacci.*

9. FUNZIONI CONTINUE

- Rivisitazione della definizione di continuità e di limite di una funzione in termini di intorno.

- Caratterizzazione della continuità di una funzione in termini di limiti.
- Caratterizzazione della continuità e del limite in termini di successioni.
- Teorema di esistenza degli zeri (e dei valori intermedi). Calcolo approssimato degli zeri.
- Teorema di Weierstrass: esistenza dei punti di massimo e minimo di una funzione continua su un intervallo chiuso. Giustificazione della procedura per la ricerca dei massimi e dei minimi vista nella prima parte del corso.
- Le funzioni continue e strettamente monotone su un intervallo hanno inversa continua.

10. DERIVATE

- Caratterizzazione della derivabilità in termini di sviluppo di Taylor al primo ordine. Dimostrazione dei teoremi chiave sul calcolo delle derivate: derivata della somma, del prodotto, della funzione composta, della funzione inversa.
- Teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange.
- Uso dei teoremi di Cauchy e di Lagrange per dimostrare alcuni risultati enunciati nella prima parte del corso: caratterizzazione delle funzioni monotone in termini segno della derivata; caratterizzazione delle funzioni convesse/concave in termini di monotonia della derivata; teorema di de L'Hôpital.
- Teorema dello sviluppo di Taylor: rappresentazione del resto in forma di Lagrange e in forma integrale.

11. INTEGRALE SECONDO RIEMANN

- Funzioni uniformemente continue. Teorema di Heine-Cantor: una funzioni continua su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua.
- Definizione di integrale secondo Riemann. Le funzioni continue sono integrabili secondo Riemann; stima dell'errore nell'approssimazione dell'integrale con somme di Riemann.
- *Altre classi di funzioni integrabili secondo Riemann (senza dimostrazioni dettagliate). Esempi di funzioni non integrabili secondo Riemann.*
- Definizione di primitiva di una funzione continua; esistenza di una primitiva e teorema fondamentale del calcolo integrale.

12. INTEGRALI IMPROPRI

- Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
- Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
- Integrali impropri non semplici.
- *Rappresentazione del fattoriale come integrale improprio e formula di Stirling (con cenno di dimostrazione).*

13. SERIE NUMERICHE

- Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Esempio: la serie geometrica.
- Criterio del confronto serie-integrale; serie armonica generalizzata; stima integrale della coda di una serie.
- Criteri per determinare il comportamento di una serie: confronto e confronto asintotico (per serie a termini positivi), convergenza assoluta (per serie a segno variabile), radice, rapporto.
- Teorema di Leibniz per serie a segni alterni.

14. SERIE DI POTENZE

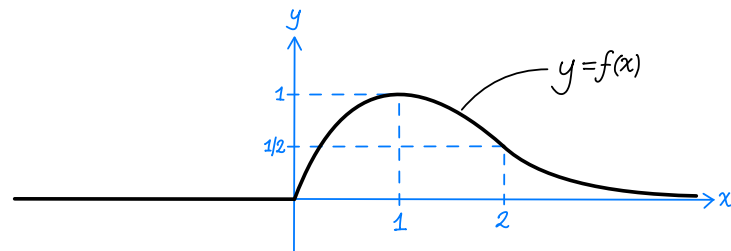
- Serie di potenze: definizione, raggio di convergenza, comportamento. Formula alternativa per il calcolo del raggio di convergenza. Derivata di una serie di potenze (senza dimostrazione).
- Convergenza della serie di Taylor di alcune funzioni elementari: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$, $\log(1+x)$. Rappresentazione del numero e come serie. Definizione di e^z con z numero complesso e dimostrazione della formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. *Rappresentazione di $\pi/4$ come serie.*

TEST I

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione D della funzione $\log(\sqrt{2} \sin(\pi x) - 1)$.
2. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \rightarrow +\infty$:

$$\underbrace{\frac{1-5^x}{x+2^x}}_a, \quad \underbrace{\frac{x \log x}{x^2+2 \log x}}_b, \quad \underbrace{\frac{x+2x^2}{x^{-3}+x^3}}_c, \quad \underbrace{2^x + \log x}_d.$$
3. Trovare la parte principale per $x \rightarrow +\infty$ di $f(x) := \sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x+2}$.
4. Trovare $a \in \mathbb{R}$ tale che la retta $y = 3x$ è tangente al grafico $y = a 2^x$ in un qualche punto.
5. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $(|x| - 4)^2 \leq y \leq 16 + x^2 - x^4$; calcolare l'area di A .
6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4(1 + x^2)t e^t$ che soddisfa $x(0) = 0$.
7. Dire in quale classe di funzioni è possibile trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = e^{-t} \cos(2t)$.
8. Trovare il valore massimo/minimo di $f(x) := |x e^{-x/2}|$ relativamente alla semiretta $x \geq -\frac{1}{4}$.
(Se non esistono specificarlo e calcolare invece l'estremo superiore/inferiore dei valori.)
9. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura sotto. Disegnare i grafici $y = f(1-x)$ e $y = f(2x)$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(1-x) \leq y \leq f(2x)$.

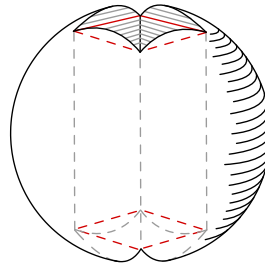


SECONDA PARTE

1. Calcolare la primitiva $\int \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x} dx$.
2. a) Completare la formula $O(x^a) \cdot o(x^b) = \dots$, tradurla in un enunciato preciso, e dimostrarla.
b) Date due funzioni f, g che, per $x \rightarrow x_0$, tendono a $+\infty$ e soddisfano $f(x) \sim g(x)$, dimostrare che $\log(f(x)) \sim \log(g(x))$, sempre per $x \rightarrow x_0$.
3. Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x} = \frac{4}{\pi(4 + t^2) \cos x}. \quad (1)$$

- a) Trovare la soluzione di (1) che soddisfa $x(0) = \frac{\pi}{6}$ e disegnarne sommariamente il grafico.
- b) Trovare la soluzione di (1) che soddisfa $x(0) = \frac{5\pi}{6}$.
4. a) Trovare la parte principale per $x \rightarrow 0$ di $f(x) := (1 + x^2)^{\sin x} - 1$.
b) Trovare lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 in 0 di $f(x)$.
5. Sia V una sfera di raggio 1 in cui è stato fatto un foro che la attraversa da parte a parte, con sezione quadrata di lato 1 e passante per il centro (vedere la figura). Calcolare il volume di V .



[Avvertenza: per un errore di formulazione questo esercizio non ha soluzioni concise. Per la precisione è possibile impostarlo in più modi, ma tutti quelli tentati da noi portano ad integrali piuttosto complicati. Riporto sotto uno di questi approcci.]

6. Per ogni $\varepsilon > 0$, sia $m(\varepsilon)$ il valore minimo di $f_\varepsilon(x) := \cos x + \varepsilon x^2$ al variare di x in $\mathbb{R}$. Ci interessa il comportamento di $m(\varepsilon)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$:
 - a) dimostrare che $m(\varepsilon)$ tende a -1 per $\varepsilon \rightarrow 0$, e anzi $m(\varepsilon) = -1 + O(\varepsilon)$;
 - b) calcolare lo sviluppo di Taylor di $m(\varepsilon)$ in ε all'ordine 1;
 - c) calcolare lo sviluppo di Taylor di $m(\varepsilon)$ all'ordine 3.

[Avvertenza: il testo dà per scontato che f_ε ammette un valore minimo $m(\varepsilon)$. Questa affermazione potrebbe essere dimostrata ma non è il punto dell'esercizio.]

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \frac{\log(1-x^2)}{\sqrt{1-2\sin(\pi x)}}$.
2. Determinare la retta tangente al grafico $y = xe^{-x}$ nel punto di ascissa $x = 2$.
3. Calcolare a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(2^x)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\log(\log x)}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 2x^4}{\cos(x^2 + x^4) - 1}$.
4. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in $x = 0$ della funzione $\log(1 - 2x^2 + x^4)$.
5. Dire se esistono *punti* di massimo e di minimo (assoluti) della funzione $f(x) := x(\log x)^{-2}$ relativamente alla semiretta $x \geq 3$, e in caso affermativo calcolarli.
6. Calcolare $\int_0^2 x^3 \log(1+x^2) dx$.
7. Un punto si muove con legge oraria $p(t) = (t^3 - 3t, 3t^2)$. Calcolare la velocità v (come vettore) e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = 1$.
8. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 5e^t$.
9. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) del piano tali che $|e^x - 1| \leq y \leq \arctan(1 - x)$.

SECONDA PARTE (prima variante)

1. Dato $a > 0$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8t + 4e^{2t}. \quad (1)$$

- a) Trovare la soluzione generale di (1).
- b) Per ogni $a > 2$, trovare le soluzioni di (1) che tendono a $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione

$$\exp(x^2) = a(3 - x^2), \quad (2)$$

e indichiamo con $x(a)$ la più piccola soluzione di questa equazione tra quelle *strettamente positive* (se ne esiste almeno una).

- a) Dire quante sono le soluzioni *strettamente positive* dell'equazione (2) al variare di $a \in \mathbb{R}$.
 - b) Disegnare il grafico della funzione $x(a)$ e determinarne il limite di $x(a)$ per $a \rightarrow -\infty$.
 - c) Trovare una funzione elementare $g(a)$ che approssima $x(a)$ con errore $o(\frac{1}{a})$ per $a \rightarrow -\infty$.¹
3. Consideriamo la figura piana A data dall'unione del cerchio con centro $(0, 1)$ e raggio 1, e del triangolo con vertici $(\pm 2, 0)$ e $(0, 2)$, e indichiamo con V il solido ottenuto ruotando A attorno alla retta di equazione $x = -1$.
Fare un disegno approssimativo di A e V e calcolare il volume di V .

¹ Per “funzione elementare” si intende in questo caso una funzione data da una formula esplicita.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Determinare la successione (x_n) tale che $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e $x_{n+2} = -x_{n+1} + 6x_n$ per $n = 0, 1, \dots$
2. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) := \begin{cases} e^{ax} & \text{per } x \geq 1 \\ bx & \text{per } x < 1 \end{cases}$ è derivabile.
3. Calcolare la derivata di $f(x) := \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t^8} dt$.
4. Determinare l'estremo superiore e inferiore dell'insieme $E := \left\{ \frac{1}{1+(3n+2)^4} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ specificando se si tratta di un massimo o un minimo.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\int_1^2 \frac{x^{2a}}{(\log x)^a} dx$ è un numero finito.
6. Dire per quali $a > 0$ l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $x^3 \leq y \leq \left(x + \frac{1}{x^a}\right)^3$ ha area finita.
7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{3^n + 2^n} x^n$.
8. Calcolare il valore della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.
9. Risolvere graficamente la disequazione $\frac{1}{(x-1)^2} \leq |\arctan x|$.

SECONDA PARTE (prima variante)

1. Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile, e poniamo $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ per ogni $x \in [0, 1]$. Dato $a > 0$, dimostrare che

a) $f(x) = o(x^a) \Rightarrow F(x) = o(x^{a+1})$;

b) $f(x) = O(x^a) \Rightarrow F(x) = O(x^{a+1})$.¹

[Se serve si può supporre f continua.]

2. Dato a reale consideriamo l'integrale improprio

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^a} dx.$$

- a) Dire dove I è improprio e studiarne il comportamento per $a > 1$.

- b) Studiare il comportamento di I per $0 < a \leq 1$.

3. Data $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ consideriamo la funzione g definita da

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan((f(x))^n).$$

Osservare che $g(x)$ è ben definita per ogni $x \in [0, 1]$ e caratterizzare le f per cui g è continua.

4. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ considero la successione (x_n) definita per ricorrenza da $x_{n+1} = \frac{3}{4-x_n}$.

- a) Studiare il comportamento di (x_n) per $x_0 \in (-\infty, 3]$.

- b) Studiare il comportamento di (x_n) per $x_0 \in (4, +\infty)$.

- c) Dimostrare che esiste un'insieme numerabile $E \subset (3, 4]$ tale che la successione (x_n) è ben definita per ogni n se e solo se $x_0 \notin E$.

- d) Studiare il comportamento di (x_n) per $x_0 \in (3, 4] \setminus E$.

5. Dato $k = 1, 2, \dots$ calcolare il valore della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(nk)!} = 1 + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(2k)!} + \frac{1}{(3k)!} + \dots$$

[Suggerimento: osservare che la funzione $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{nk}}{(nk)!}$ soddisfa un'opportuna equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.]

[Può convenire iniziare da casi particolari, per esempio $k = 2$ e $k = 4$.]

¹ Gli "o piccoli" e gli "o grandi" sono intesi per $x \rightarrow 0$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Determinare la più grande semiretta I su cui la funzione $f(x) := \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x^2$ risulta essere convessa.
2. Determinare il polinomio di Taylor all'ordine 6 in 0 di $f(x) := (1 - x^3) \log(1 + 2x^3)$.
3. Calcolare $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx$.
4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \rightarrow +\infty$:

$$\underbrace{e^{x \log x}}_a, \quad \underbrace{\frac{x^2 - 1}{x^5 + 3}}_b, \quad \underbrace{\frac{1}{x^2 + 1} + 2^{-x}}_c, \quad \underbrace{5^x - x^5}_d.$$
5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = x(\log x)^2$ tale che $x(0) = \frac{1}{e}$.
6. Scrivere le soluzioni dell'equazione differenziale $P(D)x = 0$ dove $P(\lambda) := (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 - 1)(\lambda + 1)^2$.
7. Dato $a > 0$, sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \geq 0$ e $x^a \leq y \leq \sqrt[4]{x^{4a} + 1}$. Dire per quali a l'insieme A ha area finita.
8. Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + 2^n}$ converge.
9. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := ||x - 1| - 3|$ e determinare gli insiemi $A := f([1, 4])$ e $B := f^{-1}([2, 5])$.

SECONDA PARTE (prima variante)

1. Dire per quali $a \geq 0$ vale che

$$\exp(x^2) \geq a \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

2. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione $f(x) := (x^2 + a)^a + (x^2 - 2)^a - 2x^{2a}$.

a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ al variare di $a > 0$.

b) Dire per quali $a > 0$ la serie $S := \sum_{n=2}^{+\infty} f(n)$ converge.

3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua e sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che:

a) $g \circ f$ è uniformemente continua se anche g è uniformemente continua;

b) $g \circ f$ è uniformemente continua se f è limitata;

c) in generale $g \circ f$ può non essere uniformemente continua.

4. Sia $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione concava di classe C^2 . Per ogni $x \geq 1$ sia R_x la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x , sia I_x il segmento di R_x avente come estremi i punti di ascissa x e $x + 1$, e sia infine A l'unione dei segmenti I_x al variare di $x \geq 1$.

Dimostrare che A ha area finita nei seguenti casi:

a) $f(x) = x^a$ con $0 < a < 1$;

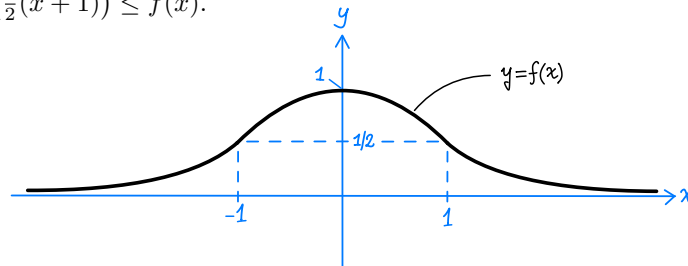
b) $f''(x) \sim -\frac{c}{x^m}$ per $x \rightarrow +\infty$, con $m > 1$, $c > 0$;

c) $f'(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

5. Siano f, g funzioni definite sull'intervallo $[a, b]$, positive, limitate ed integrabili. Dimostrare che fg è integrabile.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Scrivere l'inversa della funzione $f(x) := (1 + \log x)^3 + 1$.
2. Calcolare a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(2^x)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \log x)^{1/8}}{(\log(\log x))^4}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 - 2x^3}{1 - \cos(x^2 + x^3)}$.
3. Sia $f(x) := (x^2 + 4)(x - 1)^{-2}$. Scrivere l'estremo inferiore e superiore dei valori f , specificando se sono il massimo e il minimo.
4. Un punto P si muove con legge oraria $P(t) := e^{-t}(2t^2 + 4t + 4, 2t + 2, 1)$; calcolarne la velocità (vettore) e lo spazio percorso a partire dall'istante $t = 0$ fino alla fine dei tempi.
5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \frac{2}{t}x = 8t$ che soddisfa $x(1) = 1$.
6. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione di Dirichlet (cioè $f(x) := 1$ per x razionale e $f(x) := 0$ altrimenti). Dire in quali punti x la funzione $g(x) := \sin x \cdot f(x)$ è continua.
7. Discutere il comportamento dell'integrale improprio $I := \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 + x^{2a}}\right)^{-3} dx$ per $a > 0$.
8. Calcolare il valore della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$.
9. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nel disegno sotto. Risolvere graficamente la disequazione $f(\frac{1}{2}(x+1)) \leq f(x)$.



SECONDA PARTE (prima variante)

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale

$$D^4x - (a + a^2)D^2x + a^3x = e^t, \quad (1)$$

e indichiamo con X l'insieme delle soluzioni di (1) tali che $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \rightarrow +\infty$.

- a) Scrivere la soluzione generale di (1).
 - b) Dire per quali a la dimensione di X è due.¹
2. Consideriamo la funzione $f(x) := \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x}$. Determinare, al variare di $a \geq 0$, il numero delle rette tangenti al grafico di f che passano per il punto $(0, a)$.
3. Dato $a > 0$, sia A l'insieme dei punti (x, y) tali $x^4 \leq y \leq (|x|^a + 1)^{4/a}$; siano inoltre V e V' i solidi ottenuti ruotando A attorno all'asse delle x e delle y , rispettivamente.
- a) Dire per quali a il volume di V è finito.
 - b) Dire per quali a il volume di V' è finito.
4. Siano X sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $\bar{x}$ punto di X , e $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili in $\bar{x}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in X, \\ f_2(x) & \text{se } x \in X^c := \mathbb{R} \setminus X. \end{cases}$$

- a) Dare condizioni necessarie e sufficienti affinché f sia continua in $\bar{x}$.
 - b) Dare condizioni necessarie e sufficienti affinché f sia derivabile in $\bar{x}$.
5. Sia $a > 0$ e sia $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione *positiva* tale che $h(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$. Dato $x_0 > 0$, sia (x_n) la successione definita dalla formula ricorsiva $x_{n+1} = x_n + a + h(x_n)$.
- a) Dimostrare che $x_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$;
 - b) Dimostrare che $x_n \sim an$ per $n \rightarrow +\infty$.
 - c) Dato $y_0 > 0$, sia (y_n) la successione definita dalla formula ricorsiva $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{y_n}$; dimostrare che esiste $c > 0$ tale che $y_n \sim c\sqrt{n}$ per $n \rightarrow +\infty$. [Suggerimento: ricondursi all'enunciato b) tramite un opportuno cambio di variabile.]

¹ Per la precisione, si chiede per quali a esiste una soluzione particolare $\tilde{x}$ di (1) ed un sottospazio 2-dimensionale $\hat{X}$ dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea tale che $X = \tilde{x} + \hat{X}$ (cioè le soluzioni in X si scrivono come $x = \tilde{x} + \hat{x}$ con $\hat{x} \in \hat{X}$).

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Consideriamo la circonferenza nel piano con centro $(1, 0)$ e raggio 1. Scrivere l'equazione in coordinate cartesiane e in coordinate polari.
2. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ vale che $e^{ax}x^a(\log x)^b = O(e^x x^b (\log x)^a)$ per $x \rightarrow +\infty$.
3. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arcsin(\sqrt{1-x^2})$; b) $\frac{x}{(1+x^4)^5}$; c) $\log\left(\frac{2^{4-x}}{3^{x+1}4^{2-x}}\right)$.
4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \rightarrow 0^+$:

$$\underbrace{(1 + \log x)^3}_a, \quad \underbrace{\log(1 - \sqrt{x}) + \sqrt{x}}_b, \quad \underbrace{\cos(\sqrt[3]{x}) - e^x}_c, \quad \underbrace{\exp(-\log x)}_d.$$
5. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sia f la funzione data da $f(x) := \begin{cases} \sin(2 \sin(ax)) & \text{per } x < 0, \\ e^{bx} - 1 & \text{per } x \geq 0. \end{cases}$
 Dire per quali a, b la funzione f è continua e derivabile in 0.
6. Consideriamo l'equazione differenziale $D^3x + 3D^2x + 3Dx + x = e^{-t} + 1$. Scrivere la soluzione dell'equazione omogenea associata e dire in quale classe di funzioni si può trovare una soluzione particolare (senza calcolarla).
7. Descrivere il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a - 2n^{2a}}$ al variare di $a > 0$.
8. Descrivere il comportamento dell'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x^3)^{2a}} dx$ al variare di $a > 0$.
9. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nel disegno sotto. Disegnare il grafico di f' .

SECONDA PARTE (prima variante)

1. Siano f, g due funzioni strettamente positive su $\mathbb{R}$ tali che

(i) f e g tendono a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$;

(ii) f e g sono asintoticamente equivalenti per $x \rightarrow +\infty$.

a) Dimostrare che $\log g - \log f \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

b) Vale anche che $(\log g)^2 - (\log f)^2 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$?

c) Per quali $a > 0$ vale che $(\log g)^a - (\log f)^a \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$?

2. Sia a un numero reale non nullo, e sia $p(x)$ un polinomio di grado d . Dimostrare che

$$\int p(x) e^{ax} dx = q(x) e^{ax} + c \quad (1)$$

con $q(x)$ polinomio di grado d (e $c \in \mathbb{R}$). [Può essere utile scrivere la relazione che lega p e q in termini di derivate.]

3. Sia C la traiettoria del punto P che si muove con legge oraria

$$P(t) = \left(\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t) \sqrt{1 + \sin^2 t} \right).$$

a) Disegnare C . [Suggerimento: esplicitare y in funzione di x .]

b) Trovare la più piccola circonferenza centrata nell'origine che contiene C .

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + (1 + 4t)\dot{x} + (2 + 2t + 4t^2)x = f(t). \quad (2)$$

a) Trovare una soluzione dell'equazione (2) con $f(t) = 0$ della forma $x_0(t) = e^{at^2}$ con $a \in \mathbb{R}$.

b) Risolvere l'equazione (2) con $f(t) = 4t e^{-t^2}$.

c) Risolvere l'equazione (2) con $f(t) = (2 - 2t + 4t^2) e^{-t}$.

[Suggerimento per b), c): usare il cambio di variabile $x(t) = y(t) x_0(t)$ dove x_0 è la soluzione trovata al punto a).]

5. Dato $a > 0$, considero la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) := (x^2 + a) e^{ax}$, e indico con A l'insieme degli $a > 0$ per cui f è strettamente crescente, e per tali a indico con f^{-1} l'inversa di f (avendo posto il codominio di f uguale all'immagine).

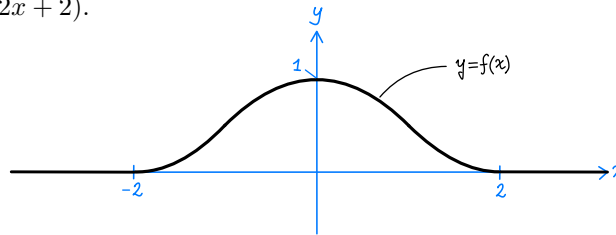
a) Determinare l'insieme A .

b) Per ogni $a \in A$, trovare una funzione esplicita g tale che $f^{-1}(y) \sim g(y)$ per $y \rightarrow +\infty$.

c) Per ogni $a \in A$, trovare una funzione esplicita h tale che $f^{-1}(y) - h(y) \rightarrow 0$ per $y \rightarrow +\infty$.

PRIMA PARTE

1. Trovare insieme di definizione, immagine e infine inversa della funzione $f(x) := \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$.
2. Calcolare a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{1 + \cos x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (9 + x^2)^8 2^{-x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^5 - 2x^4}{\cos(x^2 + x^4) - 1}$.
3. Scrivere il polinomio di Taylor all'ordine 4 in 0 della funzione $f(x) := (1 - x^2) \log(1 + 2x^2)$.
4. Determinare il valore massimo e minimo della funzione $f(x) := (x^2 - x - 1)e^x$ relativamente alla semiretta $x \leq 2$ (se non esistono specificarlo e calcolare invece estremo inferiore e superiore dei valori).
5. Per ogni $a > 0$ calcolare $\int_0^a \frac{1}{a^2 + x^2} dx$.
6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^x \cos t$ tale che $x(\pi) = 0$.
7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.
8. Dire per quali $a > 0$ risulta finito l'integrale improprio $\int_1^3 (\log x)^{-a} dx$.
9. Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è riportato sotto. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq f(2x + 2)$.



SECONDA PARTE

1. a) Dire per quali $a, a', m, m' \in \mathbb{R}$ vale che

$$|x|^a e^{mx} \ll |x|^{a'} e^{m'x} \quad \text{per } x \rightarrow -\infty. \quad (1)$$

- b) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata che non tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$.¹ Dimostrare che vale

$$f(x) |x|^a e^{mx} \ll |x|^{a'} e^{m'x} \quad \text{per } x \rightarrow -\infty \quad (2)$$

se e solo se vale (1).

2. Dato $a \geq 0$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + x = te^t \quad (3)$$

- a) Risolvere (3) per $a \neq 1$.
 b) Risolvere (3) per $a = 1$.
 c) Per quali a esistono soluzioni tali che $x(t) \gg e^{2t}$ per $t \rightarrow +\infty$?
 d) Per quali a tutte le soluzioni soddisfano a $x(t) \ll e^{t/3}$ per $t \rightarrow -\infty$?
3. Dato $a > 0$, considero l'insieme A dato dai punti (x, y) tali che $x \geq 0$ e $x^{5a^2} \leq y \leq (x^{5a} + 1)^a$, e indico con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle x .
 a) Fare un disegno approssimativo dell'insieme A per $a = 1/10$;
 b) Dire per quali a l'area di A è finita.
 c) Dire per quali a il volume di V è finito.

4. a) Dimostrare che per ogni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua vale

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(t) dt \right) x dx = \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - x^2) f(x) dx. \quad (4)$$

[Suggerimento: integrare il termine di sinistra per parti.]

- b) Siano f, g, α, β funzioni su $\mathbb{R}$, con f continua e g, α, β di classe C^1 , tali che $\alpha(0) = \beta(0)$. Trovare una formula analoga alla (4) per

$$\int_0^1 \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right) g'(x) dx.$$

Più precisamente, si chiede di scrivere questa quantità come l'integrale tra 0 e 1 di un'opportuna funzione ottenuta combinando le funzioni f, g, α, β e le loro derivate.

¹ Attenzione, non è detto che esista il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow -\infty$.

PRIMA PARTE

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \geq -1$ nell'intervallo $[0, \pi]$.
2. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \rightarrow +\infty$:

$$\underbrace{\log(4^x x^2)}_a, \quad \underbrace{\frac{1}{x^3+1} + \frac{1}{1+e^x}}_b, \quad \underbrace{x \log(\log x)}_c, \quad \underbrace{\frac{1}{2^x - x^4}}_d.$$
3. Trovare la parte principale per $x \rightarrow +\infty$ di $f(x) := x^{1/2} - (x^2 + 8)^{1/4}$.
4. Dire per quali $a > 1$ la funzione $f(x) := (x^2 + 2)^a - 4ax^2$ è crescente per $x \geq 0$.
5. Calcolare l'area dell'insieme A dato dai punti (x, y) tali che $x \geq 0$ e $\frac{4}{\sqrt{10-x}} \leq y \leq \sqrt{x}$.
6. Sia P un punto che si muove con legge oraria $P(t) = (e^t \cos(2t), e^t \sin(2t))$. Calcolare il modulo della velocità di P e la distanza d percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 2$.
7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 4t$ che soddisfano $x(0) = 0$.
8. Determinare il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^a}{(2n)!}$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.¹
9. Disegnare il grafico della funzione $\frac{1}{(|x| - 1)^2}$.

¹ È accettabile dare la risposta per tutti i valori di a tranne al più uno.

SECONDA PARTE

1. a) Trovare la più grande costante m tale che $16 + x^6 \geq m(4 + x^2)^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
 b) Trovare la più piccola costante M tale che $16 + x^6 \leq M(4 + x^2)^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
2. a) Trovare la parte principale per $x \rightarrow 0$ della funzione $f(x) := (\cos(2x))^{1/x} - 1$.
 b) Trovare la parte principale per $x \rightarrow 0$ di $f(x) + ax$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.
3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con parte principale bx^a per $x \rightarrow +\infty$, con $a \neq -1$, e siano α, β numeri reali con $0 < \alpha < \beta$.
 a) Determinare la parte principale per $x \rightarrow +\infty$ di

$$F(x) := \int_{x^\alpha}^{x^\beta} f(t) dt. \quad (1)$$

- b) Cosa succede se $\alpha = 0$?
4. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che ammette un'unico punto di massimo $\bar{x}$, e inoltre vale $a < \bar{x} < b$ e $f''(\bar{x}) \neq 0$. Dimostrare che esistono costanti c_0, c_1 tali che

$$\int_a^b e^{tf(x)} dx \sim \frac{e^{c_0 t}}{c_1 \sqrt{t}} \quad \text{per } t \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Esplicitare c_0 e c_1 in funzione di f . [Può essere utile sapere che $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.]