Alcuni esercizi

Ludovico Battista
Ivan Di Liberti

13 luglio 2016

Sommario

Quella che segue è la soluzione di alcuni esercizi che i due autori presentano come *foglio di esercizi* per l'esame del corso di Gruppi e Rappresentazioni. Tutti gli esercizi provengono dal Fulton Harris e si fa fede a quello per la numerazione.

1.14	✓
2.4	✓
3.25	∼
3.26	✓
2.33	✓
2.7	✓
2.26	✓
3.8	✓
3.11	✓
3.19	✓

Esercizio 1 (1.14)**.** Vogliamo provare che, a meno di scalari, esiste un unico prodotto hermitiano G-invariante in una rappresentazione irriducibile. Siano per assurdo H, K due prodotti hermitiani non multipli l'uno dell'altro. Osserviamo che $E_\lambda = H - \lambda K$ non può essere invertibile per ogni scelta di λ[1], e chiamiamo E una di tali forme hermitiane con radicale non nullo; si ha dunque che $\mathrm{Rad}(E)$ è non nullo ed è un sottospazio proprio della rappresentazione[2]. Se proviamo che $\mathrm{Rad}(E)$ é G-invariante abbiamo trovato una sottorappresentazione propria, contro le ipotesi di irriducibilità. Ora, se scelgo $x \in \mathrm{Rad}(E)$,

$$E(g \cdot x, w) = E(x, g^{-1} \cdot w) = 0,$$

perciò $G \cdot \mathrm{Rad}(E) \subset \mathrm{Rad}(E)$, che ci porta all'assurdo promesso.

Esercizio 2 (2.4)**.** Del seguente esercizio vogliamo esporre due soluzioni, una più pratica e legata al problema particolare e una di più ampio respiro, ma più difficile da applicare.

- Sia $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ la rappresentazione che vogliamo studiare, e siano $n = |G|$, $r = \dim(V)$. Fissiamo un $g \in G$ di cui vogliamo studiare gli autovalori, che chiameremo $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (eventualmente ripetuti).

  Osservazione 1. Sappiamo che $g^n = \mathrm{Id}$, e dunque le radici del polinomio caratteristico di g, ed in particolare i suoi autovalori, saranno radici n-esime dell'unità.

  Questa limitazione dell'insieme dei possibili autovalori risulterà cruciale in questa soluzione.

  Dal momento che $\rho(g)^s = \rho(g^s)$, la conoscenza di χ_V ci permette di conoscere, per ogni $s \in \mathbb{N}$, gli elementi della forma

  $$K_s = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^s = \chi_V(g^s).$$

  Chiamiamo μ_q la molteplicità dell'autovalore ζ_n^q, per $q = 0, \ldots, n-1$.

  Costruiamo ora la seguente matrice[3]:

[1] Poiché il suo determinante è un polinomio non costante in λ su un campo algebricamente chiuso.

[2] Perché H non è multiplo di K.

[3] In letteratura è nota come *matrice di Fourier*.

$$\Omega_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta_n & \zeta_n^2 & \zeta_n^3 & \dots & \zeta_n^{n-1} \\ 1 & \zeta_n^2 & \zeta_n^4 & \zeta_n^6 & \dots & \zeta_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \zeta_n^{n-1} & \zeta_n^{2(n-1)} & \dots & \dots & \zeta_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix};$$

o, in forma compatta,

$$(\Omega_n)_{i,j} = \zeta_n^{(i-1)(j-1)}.$$

Basta ora notare il seguente fatto:

$$\Omega_n \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{n-1} \end{pmatrix};$$

guardiamo infatti la riga h-esima:

$$\sum_{i=1}^{n} \zeta_n^{(h-1)(i-1)} \mu_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\zeta_n^{(i-1)}\right)^{(h-1)} \mu_{i-1} = K_{h-1}.$$

Per concludere la dimostrazione basta ora notare che Ω_n è una matrice invertibile, ed è possibile dunque risalire al vettore (μ) a partire dal vettore (K). In particolare vale $\frac{1}{n}\Omega_n^H = \Omega_n^{-1}$. Questo metodo è dunque un algoritmo efficiente e valido per trovare gli autovalori di $\rho(g)$.

- La seconda soluzione in effetti prova un risultato più forte di quello che ci serve. Proveremo che, data una matrice A il polinomio caratteristico della matrice p_A è univocamente determinato da $\mathrm{tr}(A^i)$. Equivalentemente proveremo che dato, per ogni k, $\sum_i \lambda_i^k$, è possibile identificare le funzioni simmetriche elementari dei $\{\lambda_i\}_i$. In effetti questo è un corollario del risultato provato a lezione che assicura che $\{\sum_i x_i^k\}_k$ è una base di $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$.

Procediamo ora al lato più pratico dell'esercizio;

- Per quel che riguarda la ridotta dimensione dello spazio vettoriale, in questo caso conviene utilizzare il secondo approccio; cerchiamo cioè di trovare i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice $\rho(g)$. Se la dimensione di V è 4, allora il polinomio caratteristico della matrice $\rho(g)$ sarà della forma

$$t^4 - \left(\sum_i \lambda_i\right) t^3 + \left(\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j\right) t^2 - \left(\sum_{i<j<k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k\right) t + \left(\sum_{i<j<k<h} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_h\right).$$

Mostriamo come trovare questi valori esplicitamente in questo caso, se la dimensione dello spazio vettoriale è minore di 4 il ragionamento si applica allo stesso modo, ma non bisogna arrivare in fondo perché si ha bisogno di meno informazioni.

Valgono le seguenti formule (è possibile dimostrarlo svolgendo i conti, ma se c'è qualcosa di didattico in questa soluzione è costruirli a mano e non verificarli):

$$\left(\sum_i \lambda_i\right)^2 - \left(\sum_i \lambda_i^2\right) = 2\left(\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j\right); \tag{1}$$

$$\left(\sum_i \lambda_i\right)^3 - 3\left(\sum_i \lambda_i^2\right)\left(\sum_i \lambda_i\right) + 2\left(\sum_i \lambda_i^3\right) = 6\left(\sum_{i<j<k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k\right); \tag{2}$$

$$\left(\sum_i \lambda_i\right)^4 - 6\left(\sum_i \lambda_i^2\right)\left(\sum_i \lambda_i\right)^2 - 4\left(\sum_i \lambda_i^3\right)\left(\sum_i \lambda_i\right) \tag{3}$$

$$+3\left(\sum_i \lambda_i^4\right) = 24\left(\sum_{i<j<k<h} \lambda_i\lambda_j\lambda_k\lambda_h\right).$$

Da cui risulta evidente che con le informazioni in nostro possesso è possibile determinare gli autovalori.

- Se invece è l'ordine dell'elemento ad essere piccolo, ci rifaremo all'idea della prima soluzione. In questo caso infatti possiamo ragionare in questo modo:
  1. Se g ha ordine 2, chiamiamo x la molteplicità di 1 come autovalore e y la molteplicità di -1. La traccia di $\rho(g)$ mi dice quanto vale $x - y$, e poiché conosco $x + y = \chi(e)$, ho finito.
  2. Se g ha ordine 3, analogamente al caso precedente chiamiamo x la molteplicità di 1, y la molteplicità di ζ_3 e z la molteplicità di ζ_3^2. In questa occasione consideriamo ζ_3 come la radice primitiva con parte immaginaria maggiore di 0.
     A questo punto basta impostare un sistema lineare. Sappiamo infatti che vale
     $$\Im\left(\sum_i \lambda_i\right)\frac{2}{\sqrt{3}} = y - z,$$
     e anche
     $$\Re\left(\sum_i \lambda_i\right) = x - \frac{1}{2}(y + z).$$
     Basta a questo punto notare che la matrice
     $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
     è invertibile.
  3. Abbiamo capito l'andazzo. Associamo alle lettere la molteplicità degli autovalori, secondo la seguente tabella:

x	1
y	-1
z	i
w	$-i$

     In questo caso, valgono:
     $$\Im\left(\sum_i \lambda_i\right) = z - w; \qquad \Re\left(\sum_i \lambda_i\right) = x - y; \qquad \left(\sum_i \lambda_i^2\right) = x + y - z - w.$$
     Dunque la matrice che vorremmo invertire è
     $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$
     in effetti questa matrice ha determinante uguale a 8, ed è dunque invertibile.

Esercizio 3 (3.25)**.** Non siamo sicuri di essere giunti alle conclusioni che l'esercizio richiedeva, ma abbiamo comunque ottenuto dei risultati.

1. Per quanto riguarda la prima questione, calcoliamo il seguente prodotto scalare sfruttando una conseguenza della reciprocità di Frobenius; data V una rappresentazione irriducibile di S_n, il carattere della rappresentazione ristretta soddisfa le seguenti relazioni (omettiamo la χ per maggiore leggibilità):
$$\langle \mathrm{Res}_{A_n}^{S_n} V, \mathrm{Res}_{A_n}^{S_n} V \rangle_{A_n} = \langle V, \mathrm{Ind}_{A_n}^{S_n} \mathrm{Res}_{A_n}^{S_n} V \rangle_{S_n} =$$
$$\langle V, V \otimes \mathrm{Ind}_{A_n}^{S_n} \text{Banale} \rangle_{S_n} = \langle \chi_V, \chi_V \cdot \chi_{\mathrm{Ind}_{A_n}^{S_n} \text{Banale}} \rangle_{S_n}.$$
D'ora in poi chiameremo R la rappresentazione $\mathrm{Ind}_{A_n}^{S_n}$ Banale. Di quest'ultima conosciamo il carattere, infatti un elemento in A_n agisce come l'identità, e dunque ha traccia 2, mentre un elemento fuori da A_n agisce scambiando i due sottospazi in somma diretta, e dunque ha traccia 0 [4]. In conclusione:
$$\chi_R(g) = \begin{cases} 2 \text{ se } g \in A_n \\ 0 \text{ se } g \notin A_n \end{cases}.$$
Dunque il precedente prodotto scalare vale:
$$\langle \chi_V, \chi_V \cdot \chi_R \rangle_{S_n} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in S_n} \overline{\chi_V(g)} \chi_V(g) \chi_R(g) =$$
$$\frac{2}{|G|} \sum_{g \in A_n} \overline{\chi_V(g)} \chi_V(g) \overset{5}{=} \frac{2}{n!} \sum_{g \in A_n} \chi_V(g)^2.$$
Questa scrittura ci permette di valutare l'irriducibilità di $\mathrm{Res}_{A_n}^{S_n} V$ conoscendo il carattere di V come S_n-rappresentazione. In realtà possiamo essere più precisi: il valore ottenuto deve essere intero, e vale
$$\frac{2}{n!} \sum_{g \in A_n} \chi_V(g)^2 \leq \frac{2}{n!} \sum_{g \in S_n} \chi_V(g)^2 = 2 \left(\frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \chi_V(g)^2 \right) = 2;$$
dove l'uguaglianza vale se e solo se $\chi_V(g) = 0$ per ogni g permutazione dispari. Dunque una rappresentazione resta irriducibile ristretta ad A_n se e solo se il suo carattere assume un valore diverso da zero su qualche permutazione dispari. Questa sembra essere la caratteristica più evidente di tali rappresentazioni.
Dando uno sguardo alle tabelle dei caratteri di S_3, S_4 e S_5, in tutti e tre questi casi una sola rappresentazione diventa riducibile.
2. Grazie all'osservazione precedente, sappiamo che, comunque presa V una A_n-rappresentazione, il carattere di $\mathrm{Ind}_{A_n}^{S_n} V$ ha degli zeri in corrispondenza delle classi di coniugio delle permutazioni dispari, e dunque le candidate possono essere solo quelle che (per il punto 1) si spezzano quando le restringiamo ad A_n. Introduciamo una notazione: se $\sigma \in A_n$, denotiamo con σ' la sua coniugata per (12).
Prendiamo dunque una rappresentazione V tale che il suo carattere χ_V si annulla su $S_n \setminus A_n$. Si ha che
$$\mathrm{Res}_{A_n}^{S_n} V \cong V_1 \oplus V_2, \qquad V_1 \ncong V_2.$$
Chiaramente $(12)V = (12)V_1 \oplus (12)V_2$, dove $(12)V_1$ è ancora una rappresentazione di A_n; dati infatti $\sigma \in A_n$ e $v \in V_1$, vale
$$\sigma((12)v) = (12)(\sigma'(v)) = (12)(v') \in (12)V_1.$$
Si ha dunque $(12)V_1 = V_1$ oppure $(12)V_1 = V_2$[6], ma se si verificasse il primo caso, V_1 sarebbe una S_n-sottorapresentazione di V, il che è assurdo per irriducibilità. Vale dunque
$$\mathrm{Res}_{A_n}^{S_n} V \cong_{A_n} V_1 \oplus (12)V_1.$$

[4] Quest'ultimo fatto vale in generale.
[5] I caratteri delle rappresentazioni di S_n sono reali.
[6] A priori vale solo l'isomorfismo, ma basta ricordare che le componenti isotopiche sono univocamente determinate.

Prima di andare avanti, vediamo come agisce S_n su V interpretato in questo modo. Data $\tau \in S_n$, se τ è pari vale

$$\tau(v + (12)w) = \tau(v) + (12)\tau'(w);$$

mentre, se $\tau = \overline{\tau}(12)$ è dispari, vale

$$\tau(v + (12)w) = \overline{\tau}(12)v + \overline{\tau}(12)(12)w = \overline{\tau}(w) + (12)\overline{\tau}'(v).$$

Vogliamo dimostrare che $\operatorname{Ind}_{A_n}^{S_n} V_1 \cong V_1 \oplus (12)V_1$. Questo è facile: sia

$$\varphi : \operatorname{Ind}_{A_n}^{S_n} V_1 \to V_1 \oplus (12)V_1$$

$$\varphi(ev + (12)w) = v + (12)(w).$$

Tale funzione è chiaramente bigettiva. È inoltre un isomorfismo di S_n-rappresentazioni; data infatti $\sigma \in A_n$:

$$\sigma(\varphi(ev + (12)w)) = \sigma(v + (12)(w)) =$$

$$\sigma(v) + (12)\sigma'(w) = \varphi(\sigma(ev + (12)w)).$$

Mentre, data $\tau = \overline{\tau}(12) \in S_n \setminus A_n$, vale

$$\tau(\varphi(ev + (12)w)) = \tau(v + (12)(w)) =$$

$$\overline{\tau}(12)(v) + \overline{\tau}(12)(12)(w) = (12)\overline{\tau}'(v) + \overline{\tau}(w) = \varphi(\tau(ev + (12)w)).$$

Dunque tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di S_n che sono indotte da A_n sono quelle il cui carattere si annulla su $S_n \setminus A_n$.

Esercizio 4 (3.26)**.** In questo esercizio classifichiamo le rappresentazioni irriducibili dell'unico gruppo G non abeliano di ordine 21. Per cominciare capiamo quante sono. Ci basta contare le classi di coniugio in G. Osserviamo che un 7-Sylow è normale[7] e perciò è unico, lo indicheremo con G_σ e chiameremo σ un suo generatore. Un 3-Sylow G_τ non può essere normale[8] e perciò esistono almeno 7 3-Sylow che non possono che intersecarsi nella sola identità. Ne conveniamo che[9] esistono esattamente 7 copie di G_τ tutte coniugate tra loro.

I 7 elementi di G_σ individuano 3 classi di coniugio[10]. I 3 elementi di G_τ ne individuano 3[11], una in comune con G_σ[12]. Abbiamo trovato in definitiva 5 classi di coniugio che riassumiamo in una tabella.

e	σ	σ^3	τ	τ^2

Cominciamo la classificazione delle rappresentazioni irriducibili da quelle infedeli. Infatti ${}^{G}\!/_{G_\sigma} \cong \mathbb{Z}_3$, perciò abbiamo tutte le rappresentazioni irriducibili di $\mathbb{Z}_3$.

G	e	σ	σ^3	τ	τ^2
T	1	1	1	1	1
ω	1	1	1	ω	ω^2
ω^2	1	1	1	ω^2	ω

[7] Perché ha indice il più piccolo primo che divide l'ordine del gruppo.

[8] Il gruppo sarebbe abeliano.

[9] Perché il numero di 3-Sylow deve dividere la cardinalità del gruppo.

[10] Infatti la regola di commutazione impone che $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$ e che $\tau^2\sigma{\tau^2}^{-1} = \sigma^4$.

[11] Qualche spiegazione: sicuramente $\sigma^i\tau\sigma^{-i} \notin G_\tau$. Inoltre ogni elemento $g \in G$ si può scrivere come $g_\sigma g_\tau$, con $g_\sigma \in G_\sigma$ e $g_\tau \in G_\tau$. Ma allora $g_\sigma g_\tau \tau g_\tau^{-1} g_\sigma^{-1} \notin G_\tau$

[12] La classe dell'identità.

Rimangono da individuare due rappresentazioni irriducibili. Cominciamo con l'osservare che poiché $\sum \dim V_i{}^2 = |G|$ queste devono avere entrambe dimensione 3. Realizzeremo concretamente le due rappresentazioni irriducibili che mancano.

Sia

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & G & \longrightarrow & M(3,\mathbb{C}) \\ & \sigma & \longmapsto & \begin{pmatrix} \zeta_7 & & \\ & \zeta_7^2 & \\ & & \zeta_7^4 \end{pmatrix} \\ & \tau & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Una noiosa verifica prova che è un omomorfismo di gruppi. Vediamo l'irriducibilità. Se esistesse una sottorappresentazione propria irriducibile V, questa dovrebbe essere una delle 3 esibite. Perciò $\rho(\sigma)$ dovrebbe agire come l'identità su una retta, ma l'autospazio per l'autovalore 1 di $\rho(\sigma)$ contiene solo lo 0.

Riportiamo la tabella dei caratteri di questa rappresentazione, dove abbiamo definito $\xi = \sum_0^2 \zeta_7^{2^i}$.

G	e	σ	σ^3	τ	τ^2
♠	3	ξ	$\overline{\xi}$	0	0

L'ultima ragazza che rimorchiamo alla festa è la gemella di ♠, perciò la chiameremo ♣ e la descriviamo brevemente.

Sia

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & G & \longrightarrow & M(3,\mathbb{C}) \\ & \sigma & \longmapsto & \begin{pmatrix} \zeta_7^{-1} & & \\ & \zeta_7^{-2} & \\ & & \zeta_7^{-4} \end{pmatrix} \\ & \tau & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Analogamente a prima questa rappresentazione è irriducibile, bisogna provare che le gemelle non siano la stessa ragazza. Ci basta provare che hanno caratteri diversi. Vediamo che carattere ha ♣.

G	e	σ	σ^3	τ	τ^2
♣	3	$\overline{\xi}$	ξ	0	0

Ora ci basta osservare che $\sum_0^2 \zeta_7^{-2^i} \neq \sum_0^2 \zeta_7^{2^i}$ per concludere[13]. In definitiva:

G	e	σ	σ^3	τ	τ^2
T	1	1	1	1	1
ω	1	1	1	ω	ω^2
ω^2	1	1	1	ω^2	ω
♠	3	ξ	$\overline{\xi}$	0	0
♣	3	$\overline{\xi}$	ξ	0	0

Esercizio 5 (2.33)**.** Cominciamo col ricordare una definizione.

Definizione 1. Un **carattere virtuale** è un oggetto della forma

$$\sum a_i \chi_{V_i} : a_i \in \mathbb{Z}.$$

[13]Infatti la somma fa -1, il prodotto fa 2 e questo è incompatibile col fatto che siano uguali.

- Voglio provare che se un carattere virtuale χ ha norma 1 allora $\pm\chi$ è un carattere di una rappresentazione irriducibile. Osserviamo che, preso un carattere virtuale χ,
$$\langle \chi, \chi \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle \sum a_i \chi_{V_i}, \sum a_i \chi_{V_i} \rangle \overset{14}{=} \sum a_i^2.$$
Perciò se $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ allora c'è un solo a_i diverso da 0 e uguale a ± 1, che è la tesi.
- Adesso ci chiediamo cosa possiamo dire di quei caratteri virtuali che hanno norma 2 e $\chi(1)$ positivo. Riguardando la formula estesa, osserviamo che è possibile ottenere 2 come somma di quadrati in $\mathbb{Z}$ solo se entrambi gli addendi sono ± 1 e d'altro canto non possono essere entrambi negativi per l'ipotesi di positività.
- Infine proviamo che se U, V, W sono rappresentazioni irriducibili allora U compare in $V \otimes W$ se e solo se W compare in $V^* \otimes U$. *Ma questo è un conto che non riserva sorprese*[15].

$$\begin{aligned}\langle \chi_{V\otimes W}, \chi_U \rangle = \overline{\langle \chi_{V\otimes W}, \chi_U \rangle} = \overline{\sum \overline{\chi_V(g)\chi_W(g)}\chi_U(g)} = \\ = \sum \overline{\chi_U(g)}\chi_V(g)\chi_W(g) = \langle \chi_{V^*\otimes U}, \chi_W \rangle.\end{aligned}$$

Esercizio 6 (2.7)**.** Chiamiamo V la rappresentazione irriducibile di dimensione 2 di S_3. In questo esercizio vogliamo dare la decomposizione in irriducibili di $V^{\otimes n}$. La tabella dei caratteri di questa rappresentazione è:

S_3	e	τ	σ
$V^{\otimes n}$	2^n	0	$(-1)^n$

Perciò ci basta chiederci quale vettore è soluzione del seguente sistema lineare:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \\ (-1)^n \end{pmatrix};$$
da cui otteniamo:
$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \\ (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7 (2.26)**.** In questo esercizio presentiamo la tabella dei caratteri di A_4. Come sempre dobbiamo passare in esame alle classi di coniugio, sulle quali però non avremo difficoltà. Usiamo la classificazione delle classi di coniugio di S_4 per orientarci. In S_4 le classi di coniugio *pari* sono univocamente determinate dalla loro struttura in cicli e le listiamo:

e	(12)(34)	(123)

In A_4 la classe di coniugio (123) si spezza in due classi di coniugio perché per portarlo in (132) serve una trasposizione. Perciò la lista delle classi di coniugio di A_4 è quella che segue:

e	(12)(34)	(123)	(132)

Adesso osserviamo che il gruppo di Klein K è normale in A_4[16] e perciò possiamo quozientare per lui e trovare le prime rappresentazioni irriducibili. Poiché ${}^{A_4}\!/_{K} \cong \mathbb{Z}_3$ ritroviamo tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo ciclico con tre elementi, che riportiamo ancora una volta.

[14] $\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle = \delta_{ij}$.
[15] Ferruccio Colombini, aula E, A.A. 2011-2012.
[16] Perché è una classe di coniugio.

A_4	e	(12)(34)	(123)	(132)
T	1	1	1	1
ω	1	1	ω	ω^2
ω^2	1	1	ω^2	ω

Visto che le classi di coniugio sono 4 manca una sola rappresentazione irriducibile che deve per forza avere dimensione 3[17]. La chiameremo Δ[18] ed osserviamo da subito che il suo carattere ci è già noto. Infatti il carattere $\chi_{\mathbb{C}(A_4)} = \chi_T + \chi_\omega + \chi_{\omega^2} + 3\chi_\Delta$. Da cui otteniamo per differenza la seguente tabella di caratteri.

A_4	e	(12)(34)	(123)	(132)
Δ	3	-1	0	0

In effetti si riesce a descrivere esplicitamente questa rappresentazione come il gruppo delle isometrie del tetraedro regolare. Non andremo oltre in questa presentazione.

Esercizio 8 (3.8)**.** In questo esercizio vediamo le rappresentazioni irriducibili di D_n. Ancora una volta cominciamo dalle classi di coniugio. Sfortunatamente non sappiamo presentare una soluzione che non dipenda dalla parità di n. Cominciamo dal caso n dispari. Nella classe di coniugio di una qualunque rotazione r troviamo un solo altro elemento (r^{-1}). Nella classe di coniugio di una riflessione s troviamo qualunque altra riflessione[19] In definitiva troviamo

$$\frac{n-1}{2} + 1 + 1$$

classi di coniugio. Il caso pari è molto simile. Con un argomento simile a prima fra le riflessioni troviamo esattamente due classi di coniugio. Mentre le classi di coniugio che vengono dalle rotazioni sono esattamente $\overset{20}{\frac{n-2}{2}} + \overset{21}{1}$ ed in definitiva nel caso pari troviamo

$$1 + 2 + \frac{n-2}{2} + 1$$

classi di coniugio.

Dispari	Pari
$\frac{n-1}{2} + 1 + 1$	$1 + 2 + \frac{n-2}{2} + 1$

Adesso sappiamo dove vogliamo arrivare. Prima di proseguire presentiamo alcune rappresentazioni fedeli di D_n che a modo loro sono il cuore di questa soluzione.

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & D_n & \longrightarrow & M(2,\mathbb{C}) \\ & r & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} \\ & s & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Questa rappresentazione è irriducibile[22], di dimensione 2 ed è tale che $\chi(r) = 2\cos(\frac{2\pi}{n})$. Adesso consideriamo l'automorfismo (esterno) ψ_i di D_n che associa $r \mapsto r^i$ e fissa s. Trovo esattamente $\varphi(n)$ automorfismi di questo tipo. Chiamo $\rho_k := \rho \circ \psi_k$ ed osservo che $\chi(\rho_k) = 2\cos(k\frac{2\pi}{n})$ perciò almeno quando $j \neq -i$ ho che la rappresentazione $\rho_j \not\cong \rho_i$ e

[17] 9+1+1+1=12.

[18] Non abbiamo trovato il simbolo di una piramide.

[19] $r^k s r^{-k} = r^{2k} s$, che al variare di k descrive tutte le rotazioni poiché n è dispari.

[20] Infatti esattamente $n-2$ rotazioni sono tali che $r \neq r^{-1}$.

[21] Il caso di $r^{\frac{n}{2}}$.

[22] Infatti $\rho(r)$ e $\rho(s)$ non hanno autovettori comuni.

dunque abbiamo esibito almeno $\frac{\varphi(n)}{2}$ rappresentazioni irriducibili distinte. Ora osservo che se $d|n$ e $d < \frac{n}{2}$

$$D_n \big/ < r^d > \cong D_{\frac{n}{d}}.$$

Rinominando $q = \frac{n}{d}$, questo ci garantisce altre $\frac{\varphi(q)}{2}$ rappresentazioni irriducibili per ogni q maggiore di 2 che divide n: basta infatti passare al quoziente e agire come descritto prima[23].

Abbiamo lasciato da parte due casi: quello in cui $\frac{n}{d} = 1$ e quello in cui $\frac{n}{d} = 2$; è chiaro infatti che non si possa applicare il ragionamento di D_q per questi due numeri, sia perché $\frac{\varphi(q)}{2}$ non sarebbe naturale, sia perché D_1 e D_2 hanno caratteristiche molto diverse dal caso generale. Studiamo questi casi a parte:

- Nel caso n pari, ai quozienti precedenti possiamo aggiungere le rappresentazioni di $D_n \big/ < r^2 > \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (che sono 4), e quelle di $D_n \big/ < r > \cong \mathbb{Z}_2$. A questo punto serve accorgersi che le due rappresentazioni di $D_n \big/ < r >$ sono già contenute nelle quattro di $D_n \big/ < r^2 >$, infatti la banale è chiaramente la stessa, mentre la "segno" è già contemplata come quella della seguente tabella:

$D_n \big/ < r^2 >$	e	r	s	rs
R	1	1	-1	-1

  In definitiva, alle rappresentazioni già contate dobbiamo aggiungerne altre 4. Ricordiamo che, se n è pari,

$$\sum_{\substack{q|n \\ q>2}} \frac{\varphi(q)}{2} = \sum_{q|n} \frac{\varphi(q)}{2} - 1.$$

- Nel caso n dispari, possiamo e dobbiamo aggiungere solo le rappresentazioni di $D_n \big/ < r > \cong \mathbb{Z}_2$, che sono 2. Inoltre, se n è dispari,

$$\sum_{\substack{q|n \\ q>2}} \frac{\varphi(q)}{2} = \sum_{q|n} \frac{\varphi(q)}{2} - \frac{1}{2}.$$

In definitiva abbiamo trovato:

Dispari	Pari
$\sum_{q\|n} \frac{\varphi(q)}{2} - \frac{1}{2} + 2$	$\sum_{q\|n} \frac{\varphi(q)}{2} - 1 + 4$

Non rimane che osservare che $\sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{2} = \frac{n}{2}$ per concludere.

Esercizio 9 (3.11)**.** In questo esercizio vediamo le rappresentazioni irriducibili del gruppo di Heisenberg H. Ormai abbiamo fatto l'orecchio alla strategia che usiamo. Bisogna anzitutto capire quante sono. Osserviamo che dal centro Z ricaviamo 3 classi di coniugio. Ora proviamo che nella classe di coniugio di ogni altro dei 24 elementi rimanenti ci sono esattamente 3 elementi. Fissato un elemento di g fuori dal centro lo stabilizzatore di g per l'azione di cogiugio $\mathrm{Stab}(g)$ contiene $< g, Z >$ ed in effetti coincide con quest'ultimo poiché il suo indice (in H) è strettamente maggiore di 1. Dunque

$$|\mathrm{Orb}(g)| = |H \big/ \mathrm{Stab}(g)| = 3.$$

Perciò abbiamo $3 + \frac{24}{3} = 11$ classi di coniugio. Non c'è da spaventarsi per un numero così ciclopico, sapremo ovviare a questo inconveniente.

[23] Queste rappresentazioni sono tutte distinte; si può dimostrare anche con lo stesso metodo utilizzato precedentemente.

${}^{H}\!/_{Z}$ è un gruppo di cardinalità p^2, perciò abeliano, e senza elementi di ordine 9. Ne conveniamo che

$$ {}^{H}\!/_{Z} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3. $$

Cominciamo col rappresentare questo quoziente, ormai siamo navigati in questa tecnica. Visto che è abeliano, ci garantirà 9 rappresentazioni irriducibili[24]. Osserviamo che tutte le rappresentazioni avranno dimensione 1 e perciò non saranno fedeli[25] . In definitiva ci basta scegliere una qualunque funzione dall'insieme

$$ \{(1,0),(0,1)\} \to \{1, \omega, \omega^2\} $$

per ottenere una rappresentazione irriducibile e queste sono esattamente 9, tutte distinte perchè il carattere della rappresentazione identifica univocamente la funzione.
Rimangono da esibire 2 rappresentazioni irriducibili fedeli di H che avranno dimensione 3. Come è già successo le esibiamo esplicitamente. Questa volta diversamente dalle precedenti non sappiamo ben dire con che criterio l'abbiamo trovate, infatti sono il risultato di alcune prove. Ci ha guidati la certezza che l'immagine di un elemento nel centro z dovesse essere un multiplo dell'identità[26] e la fiducia nel fatto che le matrici somigliassero alle più naturali permutazioni di ordine 3 in $\mathbb{C}^3$.

$$
\begin{array}{cccc}
\rho\colon & H & \longrightarrow & M(3,\mathbb{C}) \\
& \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & \omega^2 \\ \omega & & \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \omega & & \\ & \omega & \\ & & \omega \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} & & \omega \\ 1 & & \\ & \omega^2 & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Come sempre omettiamo la verifica che questa sia davvero una rappresentazione; l'irriducibilità si prova osservando che, chiamati σ_i i generatori nell'ordine indicato nelle definizione di ρ, $[\rho(\sigma_1), \rho(\sigma_3)]$[27] è invertibile e perciò le due matrici non possono avere autovettori comuni. L'ultima rappresentazione è molto simile alla precedente e si ottiene rimpiazzando nella definizione tutti gli ω con ω^2 e viceversa. Le tracce sono evidentemente diverse, mentre l'irriducibilità è analoga.

Esercizio 10 (3.19)**.** Procediamo ad una soluzione piuttosto singolare, e siamo sicuri che ce ne siano di più snelle; tuttavia noi non le abbiamo trovate.

Innanzitutto definiamo un oggetto più "grande" della rappresentazione indotta: sia

$$ \bigoplus_{h \in H} (\operatorname{Ind}_H^G W)_h; $$

dove immaginiamo che, per h diversi, tutti i rappresentanti delle classi laterali di H presenti nella rappresentazione $(\operatorname{Ind}_H^G W)_h$ siano diversi. Questo è solo un trucco che ci aiuta a trovare il carattere cercato, non ha alcun significato intrinseco.

Dalla definizione, sappiamo che

$$ \chi_{\bigoplus_{h \in H} (\operatorname{Ind}_H^G W)_h} = |H| \cdot \chi_{\operatorname{Ind}_H^G W}. $$

Vediamo quanto vale la valutazione del carattere a sinistra: dato $g \in G$, gli elementi $\sigma \in G$ tali che $\sigma^{-1} g \sigma \in D_i$ sono esattamente $|\mathrm{Stab}(g)||D_i|$, infatti per un elemento fissato in C sono proprio $|\mathrm{Stab}(g)|$. Come ci fa notare il libro stesso, possiamo considerare la rappresentazione di g sul singolo σW; questa rappresentazione avrà traccia nulla tranne

[24] Che su 11 sono di certo un bel numero.

[25] $x^3 - 1$ ha solo 3 radici in $\mathbb{C}$.

[26] Infatti moltiplicare per un elemento del centro è un automorfismo di rappresentazioni e per il lemma di Shur, su una rappresentazione irriducibile, deve essere $\lambda \mathrm{id}$.

[27] $[\rho(\sigma_1), \rho(\sigma_3)] := \rho(\sigma_1)\rho(\sigma_3) - \rho(\sigma_3)\rho(\sigma_1)$.

quando $\sigma^{-1}g\sigma \in D_i$, e in quel caso avrà traccia uguale a $\chi_W(D_i)$. Dunque il carattere cercato vale

$$\sum_{i=i}^{r} |\mathrm{Stab}(g)||D_i|\chi_W(D_i);$$

da cui, ricordando che $|\mathrm{Stab}(g)||C| = |G|$,

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G W}(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{i=i}^{r} |\mathrm{Stab}(g)||D_i|\chi_W(D_i) = \frac{1}{|H|}\frac{|G|}{|C|}\sum_{i=i}^{r} |D_i|\chi_W(D_i) =$$

$$\frac{|G|}{|H|}\sum_{i=i}^{r}\frac{|D_i|}{|C|}\chi_W(D_i).$$

Il secondo punto è una banale conseguenza del primo, quando $\chi_W(D_i) = 1$ per ogni i.