(15)

Bollettino U.M.I.
(4) **10** (1974), 52-59

Sur la surjectivité de certains opérateurs non linéaires liés aux inéquations variationnelles.

HUGO BEIRÃO-DA-VEIGA (*) - JOÃO-PAULO DIAS (Lisboa, Port.) (**)

Sunto. – *Si dimostra, sotto ipotesi convenienti, l'esistenza di soluzioni del problema* (1), *per valori positivi del parametro* λ *in un intorno dell'origine. In particolare si danno delle applicazioni a problemi ai limiti con vincoli non-lineari.*

1. – Introduction.

Dans la suite nous désignerons par H un espace d'Hilbert réel muni du produit scalaire (,) de norme associée $\|.\|$.

Soit $T: H \to 2^H$ un opérateur (multivoque) maximal monotone. Il est bien connu (cf. [1], par exemple) qu'on a alors $\mathrm{Im}(I+T) = H$ et que l'application

$$P = (I+T)^{-1}: H \to D(T) = \{u \in H / Tu \neq \emptyset\},$$

est univoque, monotone et contractante ($\|Pu - Pv\| \leqslant \|u - v\|$, $\forall u, v \in H$).

Étant donnés $f \in H$ et $\lambda \in \boldsymbol{R}$ considérons l'équation

$$f + \lambda u \in Tu \tag{1}$$

Si $\lambda < 0$ il est aisé de voir que $u = (-\lambda^{-1}T + I)^{-1}(-\lambda^{-1}f)$ est l'unique solution de (1).

Let but de cette note est d'établir certains résultats sur l'existence d'une solution de (1) dans le cas où $\lambda \geqslant 0$.

Pour cela il est commode de se ramener à une équation univoque. On a le résultat suivant de vérification facile:

LEMMA 1. - *Supposons* $0 \leqslant \lambda < +\infty$ *et posons* $\mu = 1 + \lambda$, $v = \mu u + f$. *Alors l'équation* (1) *équivaut à*

$$v - \mu P v = f \tag{2}$$

(*) Subventionné par la Fondation Calouste Gulbenkian (Portugal).
(**) Instituto de Fisica e Matemática.

2. – Quelques définitions.

Il est immédiat qu'on a

$$T(0) = \{u \in H / Pu = 0\}\,, \qquad T^{-1}(0) = \{u \in H / Pu = u\}\,. \tag{3}$$

Nous supposerons dans la suite qu'on a

$$0 \in T(0) \tag{4}$$

$$P \text{ est compact.} \tag{5}$$

La condition (4) équivaut à $P0 = 0$ et la condition (5) entraîne, puisque P est maximal monotone, que si u_n est une suite qui converge faiblement vers u dans H alors Pu_n converge fortement vers Pu dans H.

Soit

$$B_\varrho = \{u \in H / \|u\| < \varrho\}\,,\ \varrho > 0\,,\ S_\varrho = \{u \in H / \|u\| = \varrho\}\,,\ \bar{B}_\varrho = B_\varrho \cup S_\varrho\,.$$

Définition 1. – Soit $\mu \in \boldsymbol{R}$. Nous dirons que μ est localement P-régulier s'il existe $\varrho > 0$ tel Im $(I - \mu P) \supset B_\varrho$. Nous dirons que μ est P-régulier si Im $(I - \mu P) = H$.

Définition 2. – Soit $\mu \in \boldsymbol{R}$. Nous dirons que μ est une valeur caractéristique de P s'il existe $u \in H$, $u \neq 0$ tel que $u - \mu P u = 0$. Nous désignerons par $E(P)$ l'ensemble des valeurs caractéristiques de P.

Remarque 1. – Il est évident que $]-\infty, 1[\, \cap E(P) = \emptyset$ et que, si $\mu \in\,]-\infty, 1[$, alors μ est P-régulier. De plus, $\mu \in E(P)$ si et seulement si $\lambda = \mu - 1$ est une valeur propre de T, i.e. Ker $(T - \lambda I) \neq \{0\}$ (pour des résultats sur l'existence de valeurs propres de T quand $T = \partial\varphi$, sous-différentiel de φ convexe, voir [3] et [4]).

Un cas particulièrement intéréssant est celui où l'on a

$$T(tu) = tTu\,, \qquad \forall u \in D(T)\,, \qquad \forall t > 0\,. \tag{6}$$

En effet on a alors, de façon equivalente,

$$P(tu) = tPu\,, \qquad \forall u \in H\,, \qquad \forall t > 0\,, \tag{7}$$

et ainsi si μ est localement P-régulier alors μ est P-régulier. En raisonnant comme J. Nečas dans [6], § 4, on démontre facilement le résultat suivant:

THÉORÈME 1. – *Supposons qu'on a* (4), (5) *et* (6). *Alors, pour tout* $\mu \in \boldsymbol{R}$ *il existe un espace vectoriel de dimension finie* $E_\mu \subset H$ *tel que* $H = \operatorname{Im}(I - \mu P) + E_\mu = \operatorname{Im}(T - \lambda I) + E_\mu$, où $\lambda = \mu - 1$.

On peut se demander si, sous les hypothèses du théorème 1, on a: $\mu \notin E(P) \Rightarrow \mu$ est P-régulier (alternative de Fredholm). Ceci n'est pas vrai en général comme nous allons voir avec un contre-exemple; cf. aussi la remarque 2. Nous terminons cette section en enonçant deux résultats de démonstration facile:

PROPOSITION 1. – *Supposons qu'on a* (4), (5) *et* (6). *Alors* $E(P)$ *est un ensemble fermé de* $\boldsymbol{R}$.

PROPOSITION 2. – *Supposons qu'on a* (4), (5) *et* (6). *Alors*

$$\mu \notin E(P) \Rightarrow \lim_{\|u\| \to +\infty} \|u - \mu P u\| = +\infty,$$

i.e. *l'opérateur* (*multivoque*) $(I - \mu P)^{-1}$ *est borné.*

3. – Théorèmes d'existence.

Supposons toujours qu'on a (4) et (5). Étant fixés $f \in H$, $\mu \in \boldsymbol{R}$ et B_ϱ tels que $f \notin (I - \mu P)\, S_\varrho$ nous désignerons par $d(f, I - \mu P, B_\varrho)$ le dégré topologique de l'application $I - \mu P$ relativement à f et à B_ϱ (cf. [7], chapitre 3). En particulier, si $0 \notin (I - \mu P)(\bar{B}_\varrho - \{0\})$ nous posons

$$i(0, I - \mu P) = d(0, I - \mu P, B_\varrho) = d(0, I - \mu P, B_{\varrho_1}), \qquad \forall \varrho_1 < \varrho .$$

PROPOSITION 3. – *Supposons qu'on a* (4) *et* (5) *et soit* $\mu \in \boldsymbol{R}$ *tel qu'il existe* $\varrho > 0$ *tel que*

$$0 \notin (I - \mu P)\, S_\varrho \qquad \textit{et} \qquad d(0, I - \mu P, B_\varrho) \neq 0 .$$

Alors μ *est localement* P-*régulier.*

DÉMONSTRATION. – En effet, puisque $(I - \mu P)\, S_\varrho$ est fermé, il existe B_ε tel que $B_\varepsilon \cap (I - \mu P)\, S_\varrho = \emptyset$. Il vient

$$d(f, I - \mu P, B_\varrho) = d(0, I - \mu P, B_\varrho) \neq 0 , \qquad \forall f \in B_\varepsilon$$

et donc $(I - \mu P)\, B_\varrho \supset B_\varepsilon$.

COROLLAIRE 1. – *Supposons qu'on a* (4), (5) *et* (6) *et soit* $\mu \notin E(P)$ *tel que* $i(0, I - \mu P) \neq 0$. *Alors* μ *est* P-*régulier.*

REMARQUE 2. – Deux cas simples d'application du corollaire 1 sont les suivants (en supposant toujours qu'on a (4), (5) et (6)):

i) P est impair (i.e. $P(-u) = -Pu$, $\forall u \in H$) et $\mu \notin E(P)$. Alors μ est P-régulier (car $i(0, I - \mu P)$ est impair par le théorème de BORSUK, cf. [7], chapitre 3).

ii) $[1, \mu] \cap E(P) = \emptyset$. Alors μ est P-régulier (car $i(0, I - \mu P) = i(0, I) = 1$. par homotopie).

THÉORÈME 2. – *Sous les hypothèses* (4) *et* (5) *supposons qu'il existe* $R > 0$ *tel que*

$$a_R = \operatorname*{Sup}_{u \in S_R} \|Pu\| < R \,. \quad (1) \tag{8}$$

Alors, si $\mu \in [1, a_R^{-1} R[$, *on a*

$$(I - \mu P) S_R \cap B_{R-\mu a_R} = \emptyset \qquad et \qquad (I - \mu P) B_R \supset B_{R-\mu a_R} \,. \tag{9}$$

En particulier, μ *est localement* P*-régulier.*

DÉMONSTRATION. – Soit $\varphi(t, u) = u - t\mu Pu$, $t \in [0, 1]$, $f \in B_{R-\mu a_R}$. Supposons qu'on a, pour un certain t,

$$f = u - t\mu Pu \,, \qquad \text{avec } u \in S_R \,.$$

Il vient

$$\mu a_R = R - (R - \mu a_R) < R - \|f\| = \|u\| - \|f\| \leqslant \|t\mu Pu\| \leqslant \mu a_R \,.$$

Or ceci est absurde. Donc

$$d(f, I - \mu P, B_R) = d(f, I, B_R) = 1 \Rightarrow f \in (I - \mu P) B_R \,.$$

REMARQUE 3. – Le même résultat peut être obtenu en utilisant le fait que l'opérateur $I - \mu P$ est pseudo-monotone et en appliquant le raisonnement du théorème 4.2 de [5].

4. – Applications.

Supposons maintenant $H = L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné régulier de $\boldsymbol{R}^N$ de frontière Γ. Soit $j: \boldsymbol{R} \to]-\infty, +\infty]$ convexe, sémicontinue inférieurement et telle que $j(0) = 0$. Alors (cf. [1], par

(1) Obsérvons qu'on a $\|Pu\| \leqslant \|u\| = R$, $\forall u \in S_R$, car $P0 = 0$.

exemple) le sous-différentiel $\beta = \partial j : \boldsymbol{R} \to 2^{\boldsymbol{R}}$ est un opérateur maximal monotone. Supposons qu'on a $0 \in \beta(0)$ et soit

$$\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$$

définie par

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int\limits_{\Gamma} j(u)\, d\Gamma, & \text{si } u \in H^1(\Omega) \text{ et } j(u) \in L^1(\Gamma), \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où ∇u est le gradient de u et $H^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev usuel. Alors on sait (cf. [1]) que φ est convexe, semi-continue inférieurement et $\varphi(0) = 0$. De plus, le sous-différentiel $T = \partial\varphi$ est un opérateur maximal monotone caractérisé par $Tu = -\Delta u$ avec domaine

$$D(T) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \,|\, -\frac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u) \text{ p.p. sur } \Gamma \right\},$$

où n est la normale extérieure unitaire. L'équation (1) équivaut alors au problème suivant

$$(10) \qquad \begin{cases} u \in H^2(\Omega), \\ -\Delta u - \lambda u = f & \text{dans } \Omega, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u) & \text{p.p. sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ (cf. [2], pour des exemples). On a que T vérifie la condition (4) et l'opérateur $P = (I + T)^{-1}$ vérifie (5) comme on le verra de passage dans la démonstration du lemme suivant:

LEMME 2. - *Si* $\|Pu\| = \|u\|$ *alors* $Pu = u$ *et* $u \equiv c \in \beta^{-1}(0)$.

DÉMONSTRATION. - Pu est caractérisé par

$$(11) \qquad \begin{cases} -\Delta Pu + Pu = u & \text{dans } \Omega, \\ -\dfrac{\partial Pu}{\partial n} \in \beta(Pu) & \text{p.p. sur } \Gamma. \end{cases}$$

De (11) on déduit facilement, en utilisant la formule de Green,

$$(12) \qquad \|Pu\|^2_{H^1(\Omega)} = \|\nabla Pu\|^2 + \|Pu\|^2 \leqslant (u, Pu),$$

et donc $\|Pu\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u\|$, d'où la compacité de P. De plus, si $\|Pu\| = \|u\|$, il vient de (12)

$$\|\nabla Pu\|^2 + \|u\|\,\|Pu\| \leqslant (u, Pu) \leqslant \|u\|\,\|Pu\| \;,$$

d'où $\|\nabla Pu\| = 0$, $(u, Pu) = \|u\|\,\|Pu\|$ et on a le résultat.

COROLLAIRE 2. – *On a* $T^{-1}(0) \equiv \beta^{-1}(0)$ *en notation évidente.*

THÉORÈME 3. – *Supposons qu'il existe* $R > 0$ *tel que*

$$(13)\qquad 0 \notin \beta(R|\Omega|^{-\frac{1}{2}}) \cup \beta(-R|\Omega|^{-\frac{1}{2}}) \;, \qquad \text{où } |\Omega| = \text{mesure de } \Omega.$$

Alors (8) *est vérifié et, pour chaque* $\mu \in [1, a_R^{-1}R[$, *on a* (9).
En particulier, si $\lambda \in [0, a_R^{-1}R - 1[$, *le problème* (10) *admet solution pour chaque* f *tel que* $\|f\| < R - (1+\lambda)a_R$.

DÉMOSTRATION. – Supposons $a_R = \operatorname{Sup}_{u\in S_R} \|Pu\| = R$. La compacité de P entraîne qu'il existe un u tel que $\|Pu\| = R = \|u\|$. Par le lemme 2 et le corollaire 2 il vient alors $u \equiv c \in \beta^{-1}(0)$. Mais $\|u\| = R$ entraîne $c = \pm R|\Omega|^{-\frac{1}{2}}$ et on arrive à un absurde. Alors (8) est vérifié et le résultat est une conséquence du théorème 2.

COROLLAIRE 3. – *Supposons vérifiées*

$$(14)\qquad \beta(tr) = t\beta(r)\;, \qquad \forall r \in D(\beta)\;, \qquad \forall t > 0\;,$$

$$(15)\qquad \beta^{-1}(0) = \{0\}\;.$$

Alors $\operatorname{Sup}_{u\in S_1} \|Pu\| = a_1 < 1$ *et, pour chaque* $\lambda \in [0, \;_1^{-1} - 1[$, *le problème* (10) *admet solution pour tout* $f \in L^2(\Omega)$. *De plus, le problème homogène correspondant admet uniquement la solution nulle.*

DÉMONSTRATION. – La condition (15) entraîne (13) pour tout $R > 0$. En outre, (14) entraîne (6) et la thèse suit du théorème précédent.

REMARQUE 4. – Ce dernier résultat est à rapprocher à la remarque 2, ii) puisque, si $1 \notin E(P)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[1, 1+\varepsilon[\,\cap\, E(P) = \emptyset$ (cf. proposition 1) et, par homotopie, on déduit que tout $\mu \in [1, 1+\varepsilon[$ est P-régulier.

Remarquons que, sous les hypothèses du théorème 3, le problème (10) n'a pas de solution pour tout $f \in L^2(\Omega)$ (avec λ voisin de l'origine). En effet, prenons

$$\beta(r) = \begin{cases} 1, & \text{si } r > 0, \\ [-1, 1], & \text{si } r = 0, \\ -1, & \text{si } r < 0, \end{cases}$$

et soit $\Omega =]0, 1[$. Dans ce cas, si l'on prend $f \equiv c \in \boldsymbol{R}$ avec $|c| > 2$, le problème (10) n'a pas de solution pour $\lambda = 0$ (remarquer que pour $f = 0$ on a que $u = 0$ est l'unique solution).

Finalement voyons que, même sous l'hypothèse (14), $\mu \notin E(P)$ n'entraîne pas que μ est P-régulier. En effet, soit

$$\beta(r) = \begin{cases} 0, & \text{si } r > 0, \\ ]-\infty, 0], & \text{si } r = 0, \quad \text{(problème de Signorini)} \\ \emptyset, & \text{si } r < 0, \end{cases}$$

et prenons $\Omega =]0, 1[$, $\lambda_n = [(2n + \frac{1}{2})\Pi]^2$, $n = 0, 1, \ldots$. Il est aisé de voir que le problème (10), avec $f = 0$, admet uniquement la solution nulle et donc $\mu_n = \lambda_n + 1 \notin E(P)$. Cependant, si l'on pose $f(x) = x$, le problème (10) n'a pas de solution et donc μ_n n'est pas P-régulier.

Considérons maintenant un autre couple k et γ comme j et β ($\gamma = \partial k$, $k(0) = 0$, $0 \in \gamma(0)$) et soit $\psi: L^2(\Omega) \to]-\infty, +\infty]$ définie par

$$\psi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega k(u)\,dx, & \text{si } k(u) \in L^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{sinon}. \end{cases}$$

On a, en particulier, $0 \in D(\beta) \cap D(\gamma)$. En autre l'opérateur $T = \partial\varphi + \partial\psi$ est maximal monotone (cf. [1], corollaire 13) et l'équation (1) equivaut à

$$(10') \qquad \begin{cases} u \in H^2(\Omega), \\ -\Delta u + \gamma(u) - \lambda u \ni f & \text{p.p. dans } \Omega, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u) & \text{p.p.sur } \Gamma. \end{cases}$$

Sous ces conditions on obtient le lemme 2 et le corollaire 2 si l'on remplace $\beta^{-1}(0)$ par $\beta^{-1}(0) \cap \gamma^{-1}(0)$. De même, on obtient le théorème 3 si l'on remplace (10) et (13) par, respectivement, (10′) et

$$(13') \quad 0 \notin [\beta(R|\Omega|^{-\frac{1}{2}}) \cap \gamma(R|\Omega|^{-\frac{1}{2}})] \cup [\beta(-R|\Omega|^{-\frac{1}{2}}) \cap \gamma(-R|\Omega|^{-\frac{1}{2}})].$$

Finalement on a le corollaire 3 en imposant la condition (14) aussi pour γ et en remplaçant (15) par

$$\beta^{-1}(0) \cap \gamma^{-1}(0) = \{0\} . \tag{15'}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BRÉZIS, *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations*, Contributions to nonlinear functional analysis, E. H. Zarantonello ed., Acad. Press, 1971, pp. 101-156.

[2] H. BRÉZIS, *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pures Appl., **51** (1972), pp. 1-168.

[3] J. P. DIAS, *Variational inequalities and eigenvalue problems for nonlinear maximal monotone operators in a Hilbert space*, Amer. J. Math., à paraître.

[4] J. P. DIAS, *Un théorème de Sturm-Liouville ponr une classe d'opérateurs non linéaires maximaux monotones*, J. Math. Anal. Appl., à paraître.

[5] J. L. LIONS - G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math., **20** (1967), pp. 493-519.

[6] J. NEČAS, *Sur l'alternative de Fredholm pour les opérateurs non-linéaires avec applications aux problèmes aux limites*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **23** (1969), pp. 331-345.

[7] J. T. SCHWARTZ, *Nonlinear functional analysis*, Lecture notes, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1964.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 30 dicembre 1973

"Monograf" - Bologna - Via Collamarini 5