

November 12, 2014

SULLE FUNZIONI CONTINUE ELEMENTARI

Lo scopo di questa dispensa è quello di individuare classi di funzioni continue che sono esplicitamente “costruibili” a partire da un insieme dato di poche funzioni “fondamentali”, applicando determinate procedure che preservano la continuità.

Indichiamo con

$$\mathcal{F} = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid D \subseteq \mathbb{R}, D \neq \emptyset\}$$

l'insieme di tutte le funzioni a valori reali, definite su qualche sottoinsieme non vuoto D di \mathbb{R} .

Ricordiamo per comodità del lettore la definizione di funzione continua già studiata in [FUNZIONI]:

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ un elemento di \mathcal{F} . Diciamo che la funzione f è continua su D se per ogni $a \in D$, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\epsilon, a) > 0$ tale che per ogni $b \in D$ tale che $|b - a| < \delta$ si ha che $|f(b) - f(a)| < \epsilon$; in modo equivalente si può dire che: $f((a - \delta, a + \delta) \cap D) \subset (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$.

Ricordiamo anche che se ogni elemento $a \in D$ è di accumulazione per D allora f è continua su D se e solo se per ogni $a \in D$ si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Indichiamo con $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ il sottoinsieme formato dalle funzioni continue.

1. PROCEDURE CHE PRESERVANO LA CONTINUITÀ

Conosciamo alcune semplici procedure che, a partire da (opportuni) elementi di \mathcal{F} , producono un altro elemento di \mathcal{F} . Elenchiamole.

Procedure.

Supponiamo che $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ siano due funzioni nell'insieme \mathcal{F} .

- (Somma.) Se $D \cap D' \neq \emptyset$, allora definiamo $(f + g) : D \cap D' \rightarrow \mathbb{R}$.
- (Prodotto.) Se $D \cap D' \neq \emptyset$, allora definiamo $(f \cdot g) : D \cap D' \rightarrow \mathbb{R}$.
- (min e max.) Se $D \cap D' \neq \emptyset$, definiamo allora due funzioni definite su $D \cap D'$ ponendo $\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.
- (Reciproco.) Se f non è costantemente nulla su D , poniamo $D^* = D \setminus f^{-1}(0)$, e definiamo $\frac{1}{f} : D^* \rightarrow \mathbb{R}$.
- (Valore assoluto.) $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}$.
- (Restrizione) Se $D^* \subseteq D$ allora possiamo considerare la restrizione $f|_{D^*} : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in D^*$, $f|_{D^*}(x) = f(x)$.
- (Inversa.) Se f è iniettiva, e D è unione di intervalli aperti, poniamo allora $D^* = \text{Im}(f)$, e definiamo $f^{-1} : D^* \rightarrow D \subset \mathbb{R}$.
- (Composizione.) Se $\text{Im}(f) = f(D) \subset D'$, definiamo $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Indichiamo genericamente con \mathbf{P} una di queste procedure.

La seguente proposizione riassume diverse proprietà strutturali delle funzioni continue.

Proposizione 1.1. \mathcal{C} è chiuso rispetto alle procedure \mathbf{P} , cioè se f è ottenuta applicando una procedura \mathbf{P} a partire da funzioni continue, allora anche f è continua.

Si noti che il valore assoluto è in effetti conseguenza di “min”, “max” e di “prodotto”: $|f| = \max(f, -f)$. A parte “min” e “max” l'affermazione per le altre procedure segue dalle proprietà dei limiti e delle funzioni continue già visti nella dispensa [FUNZIONI]. La continuità di “min” e “max” può essere giustificata per esercizio.

2. FUNZIONI CONTINUE ELEMENTARI

Si tratta delle funzioni continue che possono essere *costruite* mettendo in opera il seguente schema:

(*) *Fissiamo un insieme finito di funzioni continue “fondamentali”. Allora f è una funzione continua elementare (relativamente al sistema dato di funzioni fondamentali) se e solo se si ottiene a partire dalle funzioni fondamentali, applicando successivamente un numero finito (che però può essere arbitrariamente grande) di procedure \mathbf{P} .*

Per rendere tutto effettivo basta specificare quale sistema di funzioni fondamentali adottiamo.

Le funzioni continue “fondamentali”:

- Le funzioni costanti definite su $D = \mathbb{R}$.
- La funzione identità $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- La funzione esponenziale $x \rightarrow e^x$ definita su $D = \mathbb{R}$.
- La funzione $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Il sottoinsieme \mathcal{E} di \mathcal{C} formato dalle funzioni continue ottenute secondo quanto prescritto in (*), a partire da questo insieme di funzioni continue fondamentali, viene detto l'insieme delle *funzioni continue elementari*. Vediamo alcuni esempi notevoli di funzioni elementari.

- (*Funzioni polinomiali.*) Sono le funzioni, definite su $D = \mathbb{R}$, della forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

Sono elementari perché si ottengono applicando ripetutamente le procedure “somma” o “prodotto” a partire dalle funzioni costanti e dalla funzione identità.

- (*Funzioni razionali.*) Sono le funzioni della forma $r = \frac{p}{q}$, dove p, q sono funzioni polinomiali, q non è la funzione polinomiale costantemente nulla, r è definita su $D = \{q(x) \neq 0\}$. Sono funzioni elementari perché si ottengono applicando ripetutamente le procedure “somma” o “prodotto” a partire dalle funzioni costanti e dalla funzione identità, per ottenere sia p sia q , concludendo poi con una applicazione di “reciproco” seguita da “prodotto”.
- La funzione *logaritmo naturale* \log , definita su $D = \{x > 0\}$, è elementare perché “inversa” della funzione esponenziale.
- Per ogni $a > 0$, la *funzione esponenziale in base a* $x \rightarrow a^x = e^{\log(a)x}$ è elementare perché è composizione di funzioni elementari.
- Per ogni $a > 0$, la *funzione logaritmica in base a* $\log_a = \log / \log(a)$ è elementare perché inversa della funzione esponenziale di base a .
- Per ogni $a \in \mathbb{R}$ la *funzione potenza di esponente a* , definita su $D = \{x > 0\}$, $x^a = e^{a \log(x)}$ è elementare.
- La funzione *coseno* $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ è elementare perché composizione di funzioni elementari.
- Le *funzioni trigonometriche* $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$, $\cot(x) = \cos(x)/\sin(x)$, (definite rispettivamente su $D = \mathbb{R} \setminus \{(2m+1)(\pi/2); m \in \mathbb{Z}\}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{m\pi; m \in \mathbb{Z}\}$) sono elementari perché ottenute applicando “reciproco” seguito da “prodotto” a partire da funzioni elementari già costruite.
- (*Funzioni trigonometriche inverse.*) Componendo, per ogni $m \in \mathbb{Z}$, la restrizione all'intervallo $(2m+1)(\pi/2), (2(m+1)+1)(\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$, con la funzione \tan si ottiene una funzione bigettiva a valori in \mathbb{R} . Possiamo allora considerare la corrispondente funzione elementare inversa, definita su \mathbb{R} , che viene detta un ramo dell' *arcotangente*. Prendendo l'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ si ottiene il cosiddetto *ramo principale*, che viene indicata con \arctan . In modo analogo si trattano le altre funzioni trigonometriche inverse, che sono quindi tutte elementari.
- (*Funzioni iperboliche.*) Definiamo su $D = \mathbb{R}$:

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Si noti che $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = -1$ cioè il punto $(\sinh(x), \cosh(x))$ appartiene ad una iperbole in \mathbb{R}^2 . Per analogia con le funzioni trigonometriche, queste due funzioni si chiamano

rispettivamente il *seno iperbolico* e il *coseno iperbolico*. Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) \neq 0$, possiamo definire su $D = \mathbb{R}$ la funzione $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ che è detta la *tangente iperbolica*; $\sinh(x) = 0$ solo se $x = 0$. Dunque su $D = \{x \neq 0\}$ possiamo definire la *cotangente iperbolica* $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$. Applicando opportunamente la procedura “inversa” possiamo definire anche (i rami) delle funzioni iperboliche inverse *arc sinh*, *arc cosh*, *arc tanh* ecc.

Sulle funzioni definite da formule. Quando diciamo per esempio:

Si consideri la funzione definita dalla formula $\log(\sin(1/x))$

intendiamo che questa formula definisce una funzione elementare e che quindi può essere ottenuta applicando in successione un numero finito di procedure **P**. In particolare anche l’insieme di definizione non è dato a priori ma risulterà alla fine delle procedure. Infatti:

- (1) Applicando “reciproco” alla funzione fondamentale *id* otteniamo $x \rightarrow 1/x$ definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (2) “Componendo” $x \rightarrow 1/x$ con la funzione fondamentale *seno* otteniamo $x \rightarrow \sin(1/x)$ definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (3) Sia $D = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \sin(1/x) > 0\}$. D è unione di intervalli aperti due a due disgiunti, infatti $D = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \setminus \{1/(k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. $D \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e quindi possiamo “restringere” $x \rightarrow \sin(1/x)$ su D .
- (4) Poiché l’immagine di D tramite la restrizione di cui sopra è contenuta in $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, possiamo “comporre” con la funzione elementare (inversa di una funzione fondamentale) *log*, ottenendo infine la funzione elementare $f(x) = \log(\sin(1/x))$, definita su D .

Attenzione, ci sono formule che *non* definiscono alcuna funzione perchè risulterebbero definite sull’insieme vuoto, ad esempio la formula $\log(-|x|)$.

Poiché la stringa di procedure applicate a partire dalle funzioni fondamentali può essere arbitrariamente lunga, le funzioni elementari possono essere molto complicate e risultano essere molto “plastiche”; allo stesso tempo hanno per definizione un carattere “costruttivo” (a partire da pochi mattoni fondamentali) che le rende particolarmente utili. Infatti esse sono spesso utilizzate per modellizzare comportamenti presenti nella realtà (fisica, economica, biologica); un *lettore particolarmente interessato* può trovare maggiori informazioni in proposito nella dispensa [MODELLI]. Bisogna però tenere presente che ci sono funzioni anche molto semplici e naturali, che *non* sono elementari (secondo la definizione data sopra). Per esempio la funzione “parte intera” $x \rightarrow [x]$, definita su $D = \mathbb{R}$ non è elementare (perché non è continua). In effetti possiamo estendere la nostra nozione di funzione “costruibile” applicando lo stesso schema (*) visto sopra, ma ammettendo come funzioni fondamentali opportune funzioni non continue (per esempio la stessa funzione “parte intera”). Anche questo tipo di funzione costruibile non continua è utile nelle applicazioni, per esempio in teoria dei segnali. Altri esempi di funzioni costruite usando la funzione “parte intera” si trovano nella dispensa [INTSIGN].