Complessi.

Indice

1 Definizioni.

In questa dispensa vogliamo presentare l'estensione del campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ data dal campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e l'estensione a tale campo di alcune funzioni elementari.

Si vuole quindi un insieme che contenga $\mathbb{R}$, in cui sia possibile fare delle operazioni somma e prodotto che estendano quelle definite su $\mathbb{R}$ e in cui sia possibile fare delle cose che in $\mathbb{R}$ non si possono fare, segnatamente a proposito delle radici quadrate di numeri negativi. Sarà in effetti sufficiente richiedere che -1 abbia una radice quadrata.

Consideriamo come insieme, l'insieme delle scritture $a + ib$, ove a e b sono numeri reali e i un simbolo e definiamo su questo insieme due operazioni nel modo seguente

1. $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
2. $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Si osservi che con questa definizione risulta immediatamente che $i \cdot i = -1$, che la somma ed il prodotto così definiti verificano le proprietà di associatività, distributività e commutatività come le operazioni in $\mathbb{R}$, che $0 + i0$ (che quindi d'ora il poi indicheremo semplicemente con 0) è l'elemento neutro per la somma e che $1 + i0$ (che quindi d'ora il poi indicheremo semplicemente con 1)è quello per il prodotto. Chiameremo $\mathbb{C}$ tale insieme dotato delle operazioni appena definite.

In tale insieme ritroviamo l'insieme dei numeri reali come gli elementi del tipo $a+i0$:

si vede immediatamente che le operazioni definite inducono quelle dei reali su tale insieme. [1]

È immediato verificare che ogni elemento diverso da 0 ammette un inverso. Infatti se $a+ib$ un elemento non nullo di $\mathbb{C}$, cerchiamo se esiste un elemento $x+iy$ tale che $(a+ib)\cdot(x+iy) = 1+i0$. Applicando la definizione otteniamo che x, y debbono verificare le condizioni

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Tale sistema, essendo $a^2+b^2 \neq 0$ ammette una ed una sola soluzione, data da

$$\begin{cases} x = \frac{a}{a^2+b^2} \\ y = \frac{-b}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Coniugio. Dato un numero complesso $z = a+ib$, si definisce numero complesso *coniugato* di z il numero complesso $a-ib$ e si indica con $\overline{z}$. Il numero reale $\sqrt{a^2+b^2}$ viene detto il *modulo* di z e lo si indica con $|z|$.

Con tale definizione si ha

$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \overline{z}+\overline{w} \\ \overline{zw} &= \overline{z}\;\overline{w} \end{aligned}$$

È di immediata verifica che

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= |z|^2 \\ z^{-1} &= \frac{\overline{z}}{|z|^2} \end{aligned}$$

Sempre di immediata verifica risulta che un numero complesso z è reale se e solo se $z = \overline{z}$ e che se $z = a+ib$ si ha $a = \frac{z+\overline{z}}{2}$ e $b = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ che vengono dette rispettivamente *la parte reale* e *la parte immaginaria* del numero complesso z.

2 Forma trigonometrica: argomento e funzione arcotangente.

Se $z = a+ib$ è un numero complesso non nullo, i due numeri reali $r_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $r_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ sono tali che $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Esiste pertanto un numero reale $\theta \in (-\pi, \pi]$ tale che $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

[1] In altri termini l'applicazione iniettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ definita da $\varphi(r) = r+i0$ rispetta le operazioni, nel senso che $\varphi(r+r') = \varphi(r)+\varphi(r')$ e $\varphi(r\cdot r') = \varphi(r)\cdot\varphi(r')$ dove i primi $+$ e $\cdot$ sono pensati in $\mathbb{R}$ ed i secondi in $\mathbb{C}$.

Tale θ viene detto *argomento principale* (talvolta *fase*) del numero z e lo si indica con arg z. L'insieme dei θ tali che $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che si chiama *argomento* di z e si indica con Arg z: risulta Arg z = arg z$+2k\pi$ al variare di k in $\mathbb{Z}$. Pertanto il modulo e l'argomento di un numero complesso z verificano le relazioni

$$\begin{cases} |z|\cos\theta = a \\ |z|\sin\theta = b \qquad (*) \end{cases}$$

Vogliamo, partendo da queste relazioni, esplicitare per un numero complesso $a+ib$ il suo modulo e il suo argomento principale in termini di a e b. Per il modulo si ricava $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Per ricavare l'argomento, osserviamo che per $a \neq 0$ l'argomento verifica $\tan\theta = \frac{b}{a}$. Si è quindi portati, al fine di esplicitare tale funzione, a risolvere una una equazione del tipo $\tan\theta = \frac{b}{a}$ e quindi appare naturale esprimere la funzione argomento in termini della funzione arcotangente.

La funzione *arcotangente* è la funzione inversa della funzione *tangente,* che è una funzione di variabile reale definita su $\mathbb{R}\setminus\{x|\cos x = 0\} = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}_{kx\in\mathbb{Z}}$ a valori in $\mathbb{R}$ *che non è iniettiva* nel suo dominio di definizione e che quindi che non è invertibile. Se consideriamo la funzione tangente ristretta all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tale funzione è invertibile, ma restituisce valori appunto compresi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ mentre la funzione arg può assumere anche altri valori.

Pertanto ricaveremo la funzione argomento su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ in termini della funzione arcotangente, a pezzi, cioè sui 4 quadranti e poi vedremo dove le funzioni così definite si rincollano.

Per i numeri complessi $a+ib$ del I e IV quadrante pensati aperti, senza cioè i bordi, in altri termini per i numeri con $a > 0$, possiamo ricavare arg z dall'equazione e quindi abbiamo $\arg(z) = \arctan\frac{b}{a}$.

Per quel che riguarda i bordi osserviamo che arg(z) =0 se z è un reale positivo mentre se z è puramente immaginario, cioè se $a = 0$ abbiamo arg z= $\frac{\pi}{2}$ o $-\frac{\pi}{2}$ a seconda se $b > 0$ o $b < 0$. Ricordiamo che abbiamo escluso lo 0.

Passiamo al II e III quadrante. Se $a < 0$ poniamo arg(z)= $\arctan\frac{b}{a} + \pi$ o arg(z)= $\arctan\frac{b}{a} - \pi$ a seconda che rispettivamente sia $b > 0$ (II quadrante) o $b < 0$ (III quadrante).

Si osservi che, per i numeri complessi con $a < 0$ e $b > 0$, risulta

$$\lim_{a\to 0^-}\left[\arctan\frac{b}{a} + \pi\right] = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} \qquad (L1)$$

Mentre per i numeri complessi con $a < 0$ e $b < 0$, risulta

$$\lim_{a\to 0^-}\left[\arctan\frac{b}{a} - \pi\right] = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} \qquad (L2)$$

In conclusione la funzione di a e b così definita

$$\theta(a,b) = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} - \pi & \text{se } a < 0, b < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0, b < 0 \\ \arctan\frac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0, b > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{se } a < 0, b > 0 \\ \pi & \text{se } a < 0, b = 0 \end{cases} \tag{1}$$

è definita su tutti i punti di $\mathbb{C}^*$: tale funzione è costante lungo le semirette che escono in direzione radiale dall'origine perché $\theta(z) = \left(\frac{z}{|z|}\right)$, e (L1) e (L2) provano che è continua in tutti i punti di $\mathbb{C}^* \setminus \{x < 0, y = 0\}$. Tale funzione coincide con la funzione arg(z). [2]

Ad esempio se $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ abbiamo che $|z| = 1$ e quindi

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

da cui $\tan\theta = -1$ che, via le definizioni date, porta a dire che $\arg\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

3 Potenze e radici.

Utilizzando la forma trigonometrica, vediamo il significato della moltiplicazione di due numeri complessi.

Se $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ e $w = \sigma(\cos\beta + i\sin\beta)$, risulta $zw = \rho\sigma(cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$.

Da questa osservazione ricaviamo subito la formula per la potenza di un numero complesso

$$z^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

da cui la formula per le radici n-esime di un numero complesso:

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \qquad (+)$$

Osserviamo che le radici n-esime di un numero complesso sono n, poiché in (+) n sono i termini che non differiscono per un multiplo di 2π.

[2]Attenzione: pur essendo vero che se $\lambda \neq 0$, $\tan\frac{\lambda b}{\lambda a} = \tan\frac{b}{a}$, $\theta(\lambda a, \lambda b) \neq \theta(a,b)$ se $\lambda < 0$

4 Polinomi e radici.

Indichiamo con $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi $p(x)$ in una variabile a coefficienti reali, cioè l'insieme delle scritture $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, in cui penseremo definite le operazioni di addizione, moltiplicazione tra polinomi e moltiplicazione di un polinomio per un numero reale.

In questo insieme si può operare la divisione euclidea .

Teorema 4.1. *Dati due polinomi a e b con $\deg a = n$ e $\deg b = m$, esistono unici due polinomi q ed r con $\deg r < \deg b$ tali che $a = bq + r$.*

L'esistenza è data dall'algoritmo di divisione per polinomi appreso nella scuola secondaria e l'unicità sui ottiene dalla condizione $\deg r < \deg b$; infatti se q' e r' sono altri due polinomi che verificano la stessa relazione si ha

$$0 = b(q - q') + (r - r')$$

ed essendo $\deg(r - r') < \deg b$ si deve avere $q - q' = 0$ e di conseguenza $r - r' = 0$.

Conseguentemente se p ammette α come radice, cioè se $p(\alpha) = 0$, si ha, dividendo il polinomio p per il polinomio $x - \alpha$,

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x)$$

Poiché $\deg r < \deg(x - \alpha) = 1$, il polinomio r è una costante e calcolando questa espressione in α, si ha che $r(\alpha) = 0$ che implica che tale costante è 0. Quindi se α è una radice del polinomio p, il polinomio è divisibile per $x - \alpha$, da cui deduciamo che un polinomio p può avere al massimo $n = \deg p$ radici.

Iterando questo procedimento abbiamo che in un ambiente ove il polinomio p ammette tutte le sue radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, il polinomio può scriversi nella forma

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{m_1}(x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_h)^{m_h}.$$

Se p è un polinomio a coefficienti reali una osservazione importante è la seguente:

Teorema 4.2. *Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice del polinomio a coefficienti reali p anche $\overline{\alpha}$ lo è.*

Questo segue dalle proprietà del coniugio. Infatti se $p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ si ha

$$\overline{p(\alpha)} = \overline{\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha^i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i \alpha^i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\,\overline{\alpha^i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\ \overline{\alpha}^i = \sum_{i=1}^{n} a_i\ \overline{\alpha}^i = p(\overline{\alpha})$$

da cui $p(\overline{\alpha}) = \overline{p(\alpha)} = 0$.

Il teorema fondamentale dell'algebra,[3] che qui assumiamo senza prova, implica che ogni polinomio a coefficienti reali assume tutte le sue radici in $\mathbb{C}$, per cui per un polinomio a coefficienti reali vale il teorema

Teorema 4.3. *Ogni polinomio a coefficienti reali ammette in $\mathbb{R}[x]$ una decomposizione*

$$p(x) = \alpha(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_h)^{m_h} q_1^{n_1} q_2^{n_2}\cdots q_k^{n_k}$$

ove i polinomi q_i sono polinomi di secondo grado senza radici reali.

Gli interi m_i vengono dette *le molteplicità* delle radici a_i.

I fattori di tipo $x - a_i$ seguono direttamente da quanto detto e quelli di tipo q_i si ottengono accorpando i fattori coniugati, tenedo conto del fatto che se un polinomio reale ammette una radice complessa ammette anche la coniugata e che $(x-a)(x-\overline{a}) = x^2 - 2(a+\overline{a})x + a\overline{a}$ è un polinomio a coefficienti reali.

Ad esempio $x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$. Per ottenere questa decomposizione basta calcolare con la formula di De Moivre le radici quarte di -1 e poi accorparle.

Una ultima osservazione.

Dato un polinomio p di grado n in $\mathbb{C}$ indichiamo con con $a_1, a_2, \ldots, a_n$ le sue radici trascurando il fatto che alcune di esse possano coincidere.

Il polinomio $q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$ è un polinomio monico (cioè con coefficiente direttore uguale a 1) di grado n che differisce dal polinomio dato per un fattore costante (perché?).

Indicando con σ_i i coefficienti del polinomio q, cioè $q(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + \sigma_{n-1}x^1 + \sigma_n$, ed operando un calcolo, si mostra che i σ_i sono le somme di tutti i prodotti a i a i delle a_i [4].

Conseguenza immediata di questa osservazione è che la somma delle radici n-esime dell'unità vale 0.

5 Estensione di funzioni elementari al campo complesso.

Vogliamo definire su $\mathbb{C}$ una funzione che estenda la funzione esponenziale e^x definita su $\mathbb{R}$: indicheremo tale estensione con e^z.

Per far questo poniamo, se $z = x + iy$

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

[3] Il teorema fondamentale dell'algebra dice che ogni polinomio di grado positivo a coefficenti complessi ha almeno una radice (e quindi tutte) in $\mathbb{C}$.

[4] In letteratura le σ_i vengono dette le funzioni simmetriche elementari degli a_i.

Si vede immediatamente che questa definizione [5] ristretta ai reali coincide con la funzione esponenziale e^x e che per la funzione e^z valgono le usuali proprietà della funzione esponenziale, come, ad esempio che $e^{z++w} = e^z \cdot e^w$ etc.

Notiamo che, sempre da questa definizione, risulta

$$\forall x, y \quad e^{x+iy} = e^{x+i(y+2k\pi)}$$

cioè che la funzione esponenziale complessa è una funzione periodica di periodo $2\pi i$.

Notiamo infine che tale espressione può essere usata per estendere al campo complesso le funzioni trigonometriche elementari seno e coseno.

Tale espressione per l'esponenziale può essere usata anche per estendere al campo complesso le funzioni trigonometriche elementari seno e coseno.

Infatti sempre da $(*)$ risulta che per ogni x reale si ha

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

Quindi, partendo da queste espressioni, si può definire per z complesso

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{aligned}$$

6 Appendice per i lettori più interessati.

In questo paragrafo vogliamo provare che la funzione definita in questo modo verifica in campo complesso un'altra proprietà della funzione esponenziale reale e precisamente quella che, se x è un numero reale allora $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Pertanto, se z è un numero complesso, proveremo che [6] $e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ provando che

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad (*)$$

Indichiamo, per brevità, con a_n la successsione $1 + \frac{z}{n}$ che, pensandola in forma trigonometrica, scriveremo come $a_n = |a_n| (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$.

[5] Questa relazione ed altre analoghe sono conosciute come *relazioni di Eulero*

[6] La definizione di limite per una successione $\{a_n\}$ di numeri complessi è del tutto analoga a quella del caso reale: $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_0 tale che per ogni $n > n_0$ risulta $|a_n - L| < \varepsilon$.

Pertanto risulta

$$(a_n)^n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Poiché

$$|(a_n)^n| = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \left[1+\left(\frac{y}{x+n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \left\{\left[1+\left(\frac{y}{x+n}\right)^2\right]^{\left(\frac{x+n}{y}\right)^2}\right\}^{\frac{ny^2}{2(x+n)^2}}$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} |(a_n)^n| = e^x$$

Per calcolare $\lim_{n\to\infty} n\theta_n$ osserviamo innanzitutto che per ogni z si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ e quindi definitivamente, cioè per tutti gli n maggiori di un n_0 (che dipende anche da z) si ha che $|\arg\, a_n| < \frac{\pi}{2}$. Pertanto per tali n si ha che $\arg\, a_n = \arctan \frac{y}{x+n}$ e quindi definitivamente $\theta_n = \arctan \frac{y}{x+n}$.

Ricordando che $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ [7], si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\theta_n &= \lim_{n\to\infty} n \arctan \frac{y}{x+n} = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{y}{x+n}\right)\left(\frac{x+n}{y}\right) \arctan \frac{y}{x+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{ny}{x+n} \frac{\arctan \frac{y}{x+n}}{\frac{y}{x+n}} = y
\end{aligned}$$

[7] In un intorno di 0 si ha $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \cos t = 1$