November 11, 2015

FUNZIONI DERIVABILI

1. Definizioni e prime proprietà

In questa dispensa consideriamo principalmente funzioni definite su insiemi aperti di $\mathbb{R}$. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme aperto di $\mathbb{R}$. Dato $a \in D$ definiamo sull'insieme $D \setminus \{a\}$ la funzione *rapporto incrementale di f rispetto al punto a*

$$x \to \frac{f(x) - f(a)}{x - a} .$$

Diciamo che la funzione f *è derivabile in* $a \in D$ se esiste *finito* il limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \in \mathbb{R} .$$

In tal caso L è detta la derivata di f in a e scriviamo

$$L = f'(a) .$$

Nella letteratura si trovano diverse altre notazioni per indicare la derivata oltre $f'(a)$, per esempio

$$\frac{d}{dx} f(a), \quad \dot{f}(a) .$$

Potrà capitare anche a noi di usare l'una o l'altra notazione. A volte si preferisce scrivere il rapporto incrementale nella forma

$$x \to \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

dove abbiamo fatto il cambiamento di variabile $h = x - a$. Questo in generale non ha senso su tutto D; però, siccome D è aperto, esiste $\epsilon > 0$ tale che $I(a, \epsilon) \subseteq D$, quindi basta assumere che $|h| = |x - a| < \epsilon$. E' chiaro allora che

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L \in \mathbb{R} .$$

Derivata e differenziale. Supponiamo che f sia derivabile in $a \in D$, $f'(a) = L \in \mathbb{R}$. Consideriamo la funzione lineare

$$Df_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; Df_a(x) = Lx .$$

Questa funzione è detta il *differenziale di f in a*. E' chiaro che la derivata e il differenziale in a si ricavano l'una dall'altro in modo automatico, però sono oggetti diversi perchè la derivata è uno scalare mentre il differenziale è una funzione. Possiamo allora riscrivere

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f(a+h) - f(a)) - Df_a(h)}{h} = 0$$

o, ancora, usando la notazione "o-piccolo" di Landau,

$$(f(a+h) - f(a)) - Df_a(h) = o(h) .$$

o ancora

$$f(a+h) - f(a) = D_a f(h) + o(h)$$

Si noti che $g(h) = f(a+h) - f(a)$ considerata come funzione di h (come sopra si considera $|h| < \epsilon$) è tale che $g(0) = 0$ come naturalmente $Df_a(0) = 0$. L'espressione precedente esprime bene l'idea intuitiva che Df_a è la funzione lineare di h che meglio approssima la funzione $g(h)$ in un intorno di 0 (a volte si dice anche che Df_a *linearizza* g in un intorno di 0).

Interpretazione geometrica del rapporto incrementale e della derivata. Ricordiamo che dati due punti distinti $(x_0, x_1), (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tali che $x_0 \neq y_0$, la retta passante per i due punti è parallela alla retta passante per l'origine di equazione

$$y = mx, \; m = \frac{x_1 - y_1}{x_0 - y_0}$$

ed m è detto il *coefficiente angolare* della retta. Si vede allora che il rapporto incrementale è proprio il coefficiente angolare della retta passante per i due punti del grafico di f: $(x, f(x))$ e $(a, f(a))$. Dunque se la funzione è derivabile in a, la derivata $f'(a)$ può essere interpretata come il coefficiente angolare di una retta "limite" di equazione $y = f'(a)x$; la retta parallela a questa retta e passante per il punto $(a, f(a))$ (che ha equazione $y = f'(a)x + q$ per un opportuno valore della costante q) è detta la *retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$*. Si nota che la retta $y = f'(a)x$ è proprio il grafico della funzione lineare $D_a f$. La retta tangente al grafico di f è il grafico della funzione $x \to D_a f(x) + q$.

Interpretazione cinematica della derivata. Restringiamoci come sopra ad un intervallo $I(0, \epsilon) \subseteq D$. Allora interpretando t come una variabile "temporale", l'applicazione definita su $I(0, \epsilon)$, $t \to (a + t, f(a + t)$ può essere interpretata come la "legge oraria" di un punto del piano che si muove nel tempo. La traiettoria è una curva contenuta nel grafico di f. Allora il vettore $v = (1, f'(a))$ rappresenta il vettore velocità del punto che all'istante $t = 0$ si trova nella posizione $(a, f(a))$. Questo vettore è una base della retta $y = f'(a)x$ considerata come sottospazio vettoriale di dimensione uguale a 1 di $\mathbb{R}^2$.

Derivate destre e sinistre. Dato un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$, diciamo che $a \in D$ è *una estremità locale sinistra (risp. destra)* se esiste $\epsilon > 0$ tale che $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap D = [a, a + \epsilon)$ (risp. $= (a - \epsilon, a]$). Un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ si dice *"buono"* se ogni $a \in D$ è interno oppure è una estremità locale. Se a è una estremità locale sinistra di D ed esiste finito

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = L \in \mathbb{R}$$

si dice che $f'_+(a) = L$ è la derivata destra di f in a. Analogamente si definisce la derivata sinistra $f'_-(a)$ in una estremità destra. Molte delle cose che diremo potrebbero essere generalizzate agli insiemi "buoni" e alle derivate destre e sinistre. Per semplicità ci limiteremo al caso degli insiemi aperti.

Funzioni globalmente derivabili. La funzione f si dice *derivabile su D* se lo è in ogni punto di D. In tal caso è definita la *funzione derivata* di f:

$$f' : D \to \mathbb{R} \, .$$

Se $f' := f^{(1)}$ è a sua volta derivabile (localmente nel punto a o globalmente su tutto D, allora è definita la derivata seconda $f^{(2)}(a)$ in a, oppure la *funzione derivata seconda* $f^{(2)} : D \to \mathbb{R}$. In modo induttivo, se è definita la *funzione derivata n-esima* $f^{(n)} : D \to \mathbb{R}$, se questa è localmente derivabile in a è definita $f^{(n+1)}(a)$; se è derivabile su D, allora è definita la funzione $f^{(n+1)} : D \to \mathbb{R}$. Diciamo che $f : D \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^0$ se è continua su D. Per ogni $n \geq 1$ diciamo che f è di classe $\mathcal{C}^n$ se per ogni $1 \leq j \leq n$, esiste la funzioni derivata j-esima $f^{(j)} : D \to \mathbb{R}$ ed è continua su D. La funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ se per ogni $n \geq 1$, f è di classe $\mathcal{C}^n$. Vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.1. *Se $f : D \to \mathbb{R}$ è derivabile allora $f \in \mathcal{C}^0$ (cioè è continua). Più in generale se esistono le funzioni derivata m-esima $f^{(m)}$ per ogni $0 \leq m \leq k + 1$, allora $f \in \mathcal{C}^k$. Se esistono le funzioni derivata m-esima $f^{(m)}$ per ogni $m \geq 0$, allora $f \in \mathcal{C}^\infty$.*

Dim. Ragionando poi per induzione, basta dimostrare che se f è derivabile in $a \in D$, allora f è continua in a. Infatti, poiché se $x \neq a$

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

passando al limite per $x \to a$ e usando alcune proprietà note dei limiti si vede che $f(x) \to f(a)$.

$\square$

Esempi fondamentali. Le seguenti funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ sono derivabili (in effetti sono di classe $\mathcal{C}^\infty$):

$$f(x) = c,\ f' = 0$$
$$f(x) = x,\ f'(x) = 1$$
$$f(x) = \sin(x),\ f'(x) = \cos(x)$$
$$f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$$
$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x\ .$$

Infatti:

- Per le funzioni costanti e per l'identità è chiaro.
- Calcoliamo per ogni $a \in \mathbb{R}$,
$$(\exp)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(a+h) - \exp(a)}{h}$$
si ha che
$$\exp(a+h) - \exp(a) = \exp(a)(\exp(h) - 1)$$
Dunque
$$(\exp)'(a) = \exp(a) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(a)$$
abbiamo così verificato che $(\exp)' = \exp$.
- Calcoliamo per ogni $a \in \mathbb{R}$,
$$(\sin)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - sin(a)}{h}$$
per note formule trigonometriche sappiamo che
$$\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)$$
da cui
$$\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \sin(a)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h}$$
Passando al limite per $h \to 0$ e ricordando gli opportuni limiti notevoli (vedi la scheda [LIMITI]) si conclude che
$$(\sin)'(a) = \cos(a)\ .$$
Il coseno si tratta in modo analogo.

.

2. Procedure che preservano la derivabilità

Abbiamo visto nella dispensa [C-elementari], alcune procedure che preservano la continuità. Vogliamo specializzare ed eventualmente restringere quelle procedure in modo da preservare la derivabilità.

Vediamo subito che dobbiamo eliminare le procedure "min", "max" e quindi "valore assoluto". Infatti $x \to |x|$, definita su tutto $\mathbb{R}$ non è derivabile in 0. Elenchiamo la lista ristretta delle procedure raffinate che indicheremo genericamente $\mathbf{P}_d$. In particolare vogliamo fare in modo di lavorare in ogni momento con funzioni definite su aperti di $\mathbb{R}$.

Siano $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D' \to R$ funzioni *derivabili* (quindi continue) definite su aperti di $\mathbb{R}$.

- *(somma e prodotto)* Supponiamo $D \cap D' \neq \emptyset$. Poiché l'intersezione di insiemi aperti è un insieme aperto, $f + g$ e fg sono definite come al solito.
- *(restrizione)* Per ogni insieme aperto D^* di $\mathbb{R}$ contenuto in D, consideriamo la restrizione $f_{|D^*}$.
- *(reciproco).* Poiché f è derivabile, quindi continua, $D \setminus \{f = 0\}$ è automaticamente aperto (verificarlo per esercizio) quindi la definizione usuale si specializza bene.
- *(inversa)* Se f è iniettiva e derivabile, quindi continua, sappiamo che $f(D)$ è aperto e $f^{-1} : f(D) \to D$ è continua. Richiediamo *inoltre* che per ogni $a \in D$, $f'(a) \neq 0$.

- *(composizione)* Nessuna modifica nella definizione della procedura.

La seguente proposizione riassume importanti proprietà strutturali delle funzioni derivabili.

Proposizione 2.1. *L'insieme delle funzioni definite su aperti di $\mathbb{R}$ derivabili è chiuso rispetto alle procedure $\mathbf{P}_d$, cioè la funzione risultante da una tale procedura è definita su un aperto e derivabile.*

Si nota che la richiesta fatta in "inversa" che $f'(a) \neq 0$ per ogni $a \in D$ è necessaria. Infatti si consideri per esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ è derivabile con derivata $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$; f è bigettiva con funzione inversa data da $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ se $y > 0$, $f^{-1}(y) = -|y|^{1/3}$ se $y < 0$. Si verifica che f^{-1} non è derivabile in 0 (infatti la retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(0,0)$ è verticale e dunque ha "coefficiente angolare" infinito).

2.1. **Regole di derivazione.** Possiamo rafforzare l'enunciato della proposizione precedente, dimostrando non solo che ogni funzione risultante è derivabile, ma esibendo anche esplicite formule per la sua derivata in funzione dei dati iniziali.

- ("Somma") Per ogni $a \in D \cap D'$, $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- ("Prodotto") Per ogni $a \in D \cap D'$, $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.
- ("Restrizione") Per ogni $a \in D^*$, $(f_{|D^*})'(a) = f'(a)$.
- ("Reciproco") Per ogni $a \in D^* = D \setminus f^{-1}(0)$, $(\frac{1}{f})'(a) = -\dfrac{f'(a)}{f^2(a)}$.
- ("Composizione") Per ogni $a \in D$, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.
- ("Inversa") Per ogni $b = f(a)$, $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

- Nel caso di "composizione" e "inversa" le formule diventano particolarmente espressive se riformulate in termini delle funzioni differenziali; infatti si ha:

- Per ogni $a \in D$, $D_a(g \circ f) = Dg_{f(a)} \circ Df_a$ cioè: "la funzione differenziale della composizione di due funzioni è la composizione delle funzioni differenziali (nello stesso ordine)".
- $Df^{-1}_{f(a)} = (Df_a)^{-1}$, cioè il "la funzione differenziale dell'inversa è l'inversa della funzione differenziale della funzione di partenza".

- La formula del prodotto, quando $f = c$ è una funzione costante diventa $(cg)' = cg'$. Insieme con la regola per la somma, questo mostra che la derivata ha un *comportamento lineare*.
- La formula per il prodotto è nota come formula di Leibniz. Dimostriamola: sommando e sottraendo la quantità $f(a)g(x)$ al numeratore del rapporto incrementale di fg rispetto ad $a \in D \cap D'$, si realizza che

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

e passando al limite per $x \to a$ il risultato segue.

La regola per la restrizione è immediata perché la derivata dipende solo dal comportamento *locale* della funzione.

Giustifichiamo la regola per la composizione. Poniamo $b = f(a)$, $y = f(x)$; consideriamo il rapporto incrementale rispetto ad a di $(g \circ f)$ (riscrivendolo "astutamente"):

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = g'(b)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(y)-g(b)-g'(b)(y-b)}{y-b}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

e studiamo il comportamento quando $x \to a$ e quindi $y \to b$. Segue dalle ipotesi che f è derivabile in a e che g è derivabile in b che tale limite è uguale a $g'(b)f'(a) = g'(f(a))f'(a)$ come volevamo.

La regola per "reciproco" si può ricavare da quella per "prodotto", partendo da $(f(1/f))' = (1)' = 0$.

La regola per "inversa" si può ricavare da quella di composizione, partendo da $(f^{-1} \circ f)' = \mathrm{id}' = 1$.

Un paio di esempi:

- Usando "inversa" e il fatto già visto che $(e^x)' = e^x$, si verifica che $\log'(x) = 1/x$.
- Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$. Questo si ottiene per induzione usando "prodotto". Il passo iniziale $(x)' = x^0 = 1$ è già stato verificato.

- Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione $x \to x^\alpha := e^{\alpha \log(x)}$ è definita e derivabile su $D = \{x > 0\}$. Usando "composizione" si ha che $(x^\alpha)' = (\alpha/x)e^{\alpha \log(x)} = \alpha x^{\alpha-1}$. Giustifichiamo l'ultima uguaglianza:

$$\alpha x^{\alpha-1} = \alpha e^{\alpha \log(x)}(e^{\log(x)})^{-1} = \alpha e^{\alpha \log(x)} x^{-1}$$

come volevamo.

3. Funzioni derivabili elementari

Procedendo come nel caso delle funzioni continue, una funzione derivabile elementare si ottiene applicando un numero finito di procedure $\mathbf{P}_d$ a partire dalle funzioni fondamentali

$$x \to c,\ x \to x,\ x \to \sin(x),\ x \to e^x$$

definite su tutto $\mathbb{R}$. Indichiamo $\mathcal{E}_d$ l'insieme di tutte le funzioni derivabili elementari. Tutte le famiglie particolari di funzioni continue elementari elencate alla fine di [C-elementari] (*polinomiali*, *razionali*, etc.) sono in effetti derivabili elementari.
Segue dalle regole di derivazione che:

L'insieme $\mathcal{E}_d$ è chiuso per la derivata (la derivata di ogni funzione derivabile elementare è derivabile elementare). Tutte le funzioni derivabili elementari sono di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Concludiamo enunciando (senza dare la dimostrazione) un'altra proprietà interessante delle funzioni derivabili elementari, la cosiddetta *proprietà del prolungamento analitico*.

Proposizione 3.1. *Se f e g sono due funzioni derivabili elementari definite su un intervallo aperto I che coincidono su un sotto-intervallo aperto $I' \subset I$, allora f e g coincidono su tutto I.*

4. Una tabella di funzioni derivate

In questa scheda sono raccolte le derivate di alcune funzioni elementari. Se necessario, lo studente dovrebbe essere in grado di ottenerle usando le varie regole di derivazione. Comunque questa scheda potrà essere consultata e a volte essere di aiuto per il calcolo di altre derivate.

- $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$.
- $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $f(x) = x^a = e^{a \log(x)}$, $f'(x) = \dfrac{a}{x} e^{a \log(x)} = ax^{a-1}$, $(x > 0)$
- $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$.
- $f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$.
- $f(x) = \tan(x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
- $f(x) = \cot(x)$, $f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2(x)}$.
- $f(x) = \arcsin(x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$.
- $f(x) = \arccos(x)$, $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$.
- $f(x) = \arctan(x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = a^x$, $f'(x) = \log(a)a^x$ $(a > 0)$.
- $f(x) = \log_a(x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{\log(a)x}$, $(x > 0)$.
- $f(x) = \sinh(x)$, $f'(x) = \cosh(x)$.
- $f(x) = \cosh(x)$, $f'(x) = \sinh(x)$.

- $f(x) = \tanh(x),\ f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$.
- $f(x) = \coth(x),\ f'(x) = \dfrac{-1}{\sinh^2(x)}$.
- $f(x) = arc\sinh(x),\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- $f(x) = arc\cosh(x),\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
- $f(x) = arc\tanh(x),\ f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.