September 30, 2014

PRINCIPIO DI INDUZIONE

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è *bene ordinato*; questo significa che il familiare ordinamento "$\leq$" dei numeri naturali tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n+1$ (in effetti $n < n+1$), verifica le seguenti due proprietà:

(1) E' un *ordinamento totale*, cioè due arbitrari numeri naturali sono sempre confrontabili, precisamente: dati arbitrariamente due numeri $n, m \in \mathbb{N}$ si ha che $n \leq m$ o $m \leq n$.
(2) Dato comunque un sottoinsieme $A \subset \mathbb{N}$ non vuoto, esso ha un *elemento minimo* a (necessariamente unico), cioè $a \in A$ e per ogni $b \in A$ si ha che $a \leq b$.

Questa proprietà fondamentale dei numeri naturali è alla base del cosidetto *principio di induzione* che qui descriviamo in termini delle sue principali applicazioni: le *dimostrazioni per induzione*, la *definizione di funzioni per induzione*.

Dimostrazioni per induzione. Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ un fissato numero naturale. Supponiamo che $P(n)$ sia un'affermazione che dipende da un parametro $n \in \mathbb{N}$, ha senso per ogni naturale $n \geq n_0$ e che può essere vera o falsa. Ad esempio consideriamo:

$$n_0 = 1, \quad P(n) := 2^n \geq n \ .$$

Supponiamo di essere interessati a dimostrare che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$. In certi casi questo può essere fatto "per induzione" applicando lo schema seguente:

- **Passo iniziale:** Si verifica che $P(n_0)$ è vera.
- **Passo induttivo:** Per ogni $n \geq n_0$, si dimostra che se $P(n)$ è vera, allora anche $P(n+1)$ è vera.

Se riusciamo a realizzare questi due passi, allora possiamo concludere che effettivamente $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Infatti, intuitivamente, $P(n_0)$ è vera per il passo iniziale, allora $P(n_0+1)$, $P((n_0+1)+1)$, $\cdots$, sono tutte vere "a cascata", l'una di seguito all'altra, applicando ripetutamente infinite volte il passo induttivo. Vedremo poi più rigorosamente come questa conclusione segua dal buon ordinamento di $\mathbb{N}$.

Definizione di funzioni per induzione. Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ un fissato numero naturale. Una funzione

$$f : \{n \in \mathbb{N} | n \geq n_0\} \to X$$

(a valori in qualche insieme X) è definita per induzione se è ottenuta applicando il seguente schema:

- **Valore iniziale:** Assegnamo il valore $f(n_0)$.
- **Passo induttivo:** Per ogni $n \geq n_0$, il valore $f(n+1)$ è completamente specificato in termini del valore $f(n)$.

In questo modo la funzione $f(n)$ è effettivamente definita per ogni $n \geq n_0$. Come prima il valore iniziale $f(n_0)$ è assegnato, i valori $f(n_0+1)$, $f((n_0+1)+1)$, $\cdots$, sono tutti definiti "a cascata" applicando di seguito infinite volte il passo induttivo.

Vediamo alcuni esempi di entrambe le procedure. Cominciamo trattando per induzione l'esempio considerato prima:$n_0 = 1$, $2^n \geq n$.

Passo iniziale: $P(1) := 2^1 = 2 \geq 1$ che è vera.

Passo induttivo Per ogni $n \geq 1$, vogliamo dimostrare che $2^{n+1} \geq n+1$ assumendo di sapere che $2^n \geq n$. Infatti:

$$2^{n+1} = 2(2^n) \geq 2n \geq n+1$$

dove l'ultima disuguaglianza vale perché $n \geq 1$. Dunque possiamo concludere che $2^n \geq n$ per ogni $n \geq 1$.

Osservazione. In effetti $2^0 = 1 \geq 0$, dunque l'affermazione è vera anche per $n = 0$. Però, se avessimo preso $n_0 = 0$ invece che $n_0 = 1$, la precedente discussione del passo induttivo NON avrebbe funzionato per tutti gli $n \geq n_0 = 0$ ($2n \geq n + 1$ non è vera se $n = 0$); quindi quella dimostrazione per induzione non avrebbe funzionato per $n_0 = 0$.

Esempio 1. $n_0 = 1$. Definiamo per induzione

$$f : \{n \in \mathbb{N} |\ n \geq 1\} \to \mathbb{N}$$

come segue:
- Valore iniziale: $f(1) = 1$.
- Passo induttivo: per ogni $n \geq 1$, $f(n + 1) = f(n) + (n + 1)$.

Calcoliamo alcuni valori della funzione così definita:

$$f(1) = 1,\ f(2) = 1 + 2,\ f(3) = 1 + 2 + 3, \dots, f(n) = 1 + 2 + \cdots + n, \dots\ .$$

Quindi, a parole, $f(n)$ è uguale alla somma dei primi n numeri naturali diversi da zero. La definizione per induzione permette di dare un significato preciso ai "puntolini" nell'espressione $f(n) = 1 + 2 + \cdots + n$. Consideriamo ora la funzione

$$g : \{n \in \mathbb{N} |\ n \geq 1\} \to \mathbb{N}$$
$$g(n) = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Vogliamo dimostrare per induzione che $g = f$, cioè $g(n) = f(n)$ per ogni $n \geq 1$. Infatti:
- Passo iniziale: $g(1) = 1 = f(1)$.
- Passo induttivo: $f(n+1) = f(n)+(n+1) = g(n)+(n+1) = \dfrac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \dfrac{(n + 1)(n + 2)}{2} = g(n + 1)$.

Osservazione. Un altro modo per dimostrare l'uguaglianza delle due funzioni, che spiega come la funzione g sia emersa, è il seguente: $2f(n) = (1+\cdots+n)+(n+\cdots+1) = (n+1)+\cdots(1+n) = n(n+1)$.

Esempio 2. $n_0 = 1$, $f(1) = 1$, $f(n + 1) = f(n)(n + 1)$. Si reallizza che per ogni $n \geq 1$, $f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$, cioè il prodotto dei numeri naturali compresi tra 1 e n. E' una funzione importante. La sua notazione corrente è $f(n) = n!$, si legge "n-fattoriale" e viene estesa anche in 0, ponendo $0! = 1$.

Esempio 3. $n_0 = 1$, $f(0) = 1$, $f(n + 1) = f(n) + (n + 1)^2$. Si può riformulare usando il simbolo di sommatoria:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 2^2 + \cdots + n^2\ .$$

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 1$,

$$f(n) = g(n) := \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}\ .$$

Passo iniziale: $f(1) = 1 = (2 \times 3)/6 = g(1)$.
Passo induttivo:

$$f(n + 1) = f(n) + (n + 1)^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6 + (n + 1)^2 =$$
$$(n + 1)(2n^2 + 7n + 6)/6 = (n + 1)(n + 2)(2n + 3)/6 = g(n + 1)\ .$$

Esempio 4. Fissiamo un numero $a \neq 1$; $n_0 = 1$; $f(1) = a^0 = 1$; $f(n + 1) = f(n) + a^n$. Quindi, per ogni $n \geq 1$,

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a^2 + \cdots + a^n\ .$$

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 1$

$$f(n) = g(n) := \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}\ .$$

Passo iniziale: $f(1) = 1 = \dfrac{a^1 - 1}{a - 1} = g(1)$.
Passo induttivo:

$$f(n+1) = f(n) + a^{n+1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1} = g(n+1) \ .$$

Osservazione. Il risultato precedente si può ottenere in modo leggermente diverso. Il numero 1 è una radice del polinomio $p(X) = X^{n+1} - 1$ (cioè $p(1) = 0$). Dunque $p(X)$ è divisibile per $X - 1$ e facendo la divisione tra polinomi (con resto uguale a zero) si ottiene (anche qui procedendo per induzione):

$$X^{n+1} - 1 = (X - 1)(1 + X + X^2 + \cdots + X^n) \ .$$

Dunque sostituendo un numero a arbitrario (anche $a = 1$), si ha che

$$a^{n+1} - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) \ .$$

Se $a \neq 1$ possiamo dividere per $a - 1$ ottenendo l'identità voluta.

Esempio 5. (*Disuguaglianza di Bernoulli*) Fissiamo un numero $x \geq -1$. Vogliamo dimostrare che per ogni $n \geq 0$,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \ .$$

Procediamo per induzione.
Passo iniziale: $(1 + x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0x$.
Passo induttivo:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n (1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x \ .$$

Si osservi che per la prima disuguaglianza non abbiamo usato soltanto che $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, ma anche che $1 + x \geq 0$ (l'ipotesi $x \geq -1$). Infatti per esempio la disuguaglianza non vale se prendiamo $x = -100, n = 2$.

Concludiamo facendo vedere, come promesso, che il principio di induzione è una conseguenza del buon ordinamento di $\mathbb{N}$. Facciamolo nel caso delle dimostrazioni per induzione, per le funzioni definite per induzione l'argomento è lo stesso. Nelle ipotesi date, supponiamo di avere verificato i due passi (iniziale e induttivo). Vogliamo allora concludere che l'affermazione è vera per ogni $n \geq n_0$. Vogliamo cioè dimostrare che l'insieme

$$A = \{n \geq n_0 | P(n) \text{ falsa}\} \subset \mathbb{N}$$

è vuoto. Supponiamo invece per assurdo che non sia vuoto (cioè esiste $n \geq n_0$ tale che $P(n)$ è falsa). Allora, per il buon ordinamento di $\mathbb{N}$, A ammette un elemento minimo a. Poiché $P(n_0)$ è vera (passo iniziale), allora $a > n_0$. Quindi $a - 1 \geq n_0$ e $P(a - 1)$ è vera (perché a è l'elemento minimo di A). Per il passo induttivo anche $P(a) = P((a - 1) + 1)$ è vera, ma $P(a)$ è anche falsa perché $a \in A$. Questo assurdo dimostra come volevamo che A è vuoto.