Appendice alla nota Primitive Elementari.

Qui sono raccolte alcune osservazioni in margine alla nota *Primitive Elementari* dove è osservato che le funzioni razionali ammettono primitive elementari e viene descritta una procedura per trovare tali primitive.

1. A pagina 3 della Nota è enunciato il fatto che per una funzione razionale $\dfrac{R(x)}{D(x)}$ con $\deg R(x) < \deg D(x)$ esiste una decomposizione in pacchetti di un certo tipo, cioè che se

$$D(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \dots (x-\alpha_r)^{m_r}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{k_s}$$

allora

$$\frac{R(x)}{D(x)} = L^{(1)} + L^{(2)} + \dots + L^{(k)} + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots + S^{(s)} \qquad (*)$$

dove gli $L^{(i)}$ e $S^{(i)}$ sono pacchetti del tipo

$$L^{(i)} = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_j^{(i)}}{(x-\alpha_i)^j} \quad \text{e} \quad S^{(i)} = \sum_{j=1}^{k_i} \frac{B_j^{(i)}x + C_j^{(i)}}{(x^2+p_ix+q_i)^j} \text{ con } p_i^2 - 4q_i < 0.$$

Fermo restando il fatto, già notato a pag 4 della dispensa stessa, della non banailtà della procedura stessa, almeno dal punto di vista calcolistico, poiché parte essenziale di tutto ciò è la conoscenza di una effettiva decomposizione in fattori irriducibili del denominatore della funzione razionale, cosa tutt'altro che ovvia, notiamo anche che una decomposizione del tipo presentato sussiste in quanto i polinomi sono supposti a coefficienti reali e quindi se ammettono una radice complessa α anche $\overline{\alpha}$ è radice e i fattori x^2+px+q con p, q reali con discriminante negativo nascono per l'appunto dal prodotto di due fattori di questo tipo.

Un modo per convincersi dell'esistenza di una tale decomposizione è quello di impostare il sistema lineare derivante da tutte le considerazioni fatte fino a quel momento e vedere che ha una soluzione: qui esponiamo un' altra via.

Supponiamo che la radice α di D sia semplice e moltiplichiamo ambo i membri della (*) per $x-\alpha$. Otteniamo

$$(x-\alpha)\frac{R(x)}{D(x)} = (x-\alpha)\frac{A}{(x-\alpha)} + (x-\alpha)\Phi(x)$$

e prendendo di entrambi i membri il limite per x tendente ad α otteniamo $A = \dfrac{R(\alpha)}{D'(\alpha)}$. [1]

[1] Se α è radice di D, da $D(x) = (x-\alpha)E(x)$ si ha $D'(x) = E(x) + (x-\alpha)E'(x)$ da cui $\lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)}{D(x)} = \frac{1}{E(\alpha)} = \frac{1}{D'(\alpha)}$; essendo α radice semplice $E(\alpha) \neq 0$ e quindi il denominatore è ben definito.

Se invece la radice α ha molteplicità m, moltiplicando per $(x-\alpha)^m$ ambo i membri della (*) otteniamo

$$(x-\alpha)^m \frac{R}{D} = \Psi(x-\alpha) + \Phi \text{ [2]}$$

dove appunto Ψ è un polinomio di grado m in $x-\alpha$ e il resto un infinitesimo di ordine superiore a m. Pertanto per l'unicità del polinomio di Taylor otteniamo che i coefficienti A_j altro non sono che le derivate successive della funzione $(x-\alpha)^m \frac{R}{D}$ (che è regolare in α) calcolate appunto in α.

Questa osservazione oltre a produrre, adattata al caso che le radici siano complesse, una prova dell'esistenza e unicità della decomposizione in questione, produce anche un mezzo di calcolo talvolta più rapido della soluzione di un sistema lineare che può essere di dimensioni ragguardevoli.

2. Talvolta può venir comoda la seguente osservazione. Ogni pacchetto L e S si può scrivere

$$L = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{d}{dx}\frac{P_L}{Q_L} \qquad \text{e} \qquad S = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)} + \frac{d}{dx}\frac{P_S}{Q_S}$$

e quindi in definitiva la decomposizione si riduce a

$$\frac{R}{D} = \sum_i \frac{A^{(i)}}{(x-\alpha_i)} + \sum_i \frac{B^{(i)}x + C^{(i)}}{(x^2+p_i x+q_i)} + \frac{d}{dx}\frac{P}{Q}$$

In certi casi può essere più semplice eseguire i calcoli lasciando incogniti i coefficienti dei singoli $\frac{P_L}{Q_L}$ o $\frac{P_S}{Q_S}$ e risolvere il sistema lineare derivante che si presenta probabilmente più semplice.

3. *Una idea della prova della formula per l'integrazione degli integrali del tipo* $\int \frac{1}{(1+t^2)^s} dt$ *con* $s > 1$.

Punto di partenza è la seguente relazione di ovvia verifica:

$$\frac{1}{(1+t^2)^s} = \frac{1}{(1+t^2)^{s-1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^s} \qquad (**)$$

Indichiamo, coerentemente con la notazione usata nella Nota

$$I_s = \int \frac{1}{(1+t^2)^s} dt$$

Da $(**)$ otteniamo

$$I_s = I_{s-1} - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^s} dt$$

[2] Con le notazioni usate fino ad ora, indicando con L il pacchetto relativo alla radice α e con $g(x)$ tutto il resto, abbiamo $(x-\alpha)^m \frac{R}{D} = (x-\alpha)^m L + (x-\alpha)^m g(x) = A_m + A_{m-1}(x-\alpha) + \ldots + A_1(x-\alpha)^{m-1} + (x-\alpha)^m g(x)$

Calcoliamo per parti l'ultimo integrale.

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{(1+t^2)^s}dt = \int \frac{t}{2} \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^s}dt =& \\ =&\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{(1-s)} \frac{1}{(1+t^2)^{s-1}} - \frac{1}{2(1-s)} \int \frac{1}{(1+t^2)^{s-1}}dt = \\ =&\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{(1-s)} \frac{1}{(1+t^2)^{s-1}} - \frac{1}{2(1-s)} I_{s-1}\end{aligned}$$

da cui la formula ricorsiva data a pag 2 punto 5 della Nota:

$$\begin{aligned}I_s = I_{s-1} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{(1-s)} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{s-1}} + \frac{1}{2(1-s)} I_{s-1} = \\ = \frac{2s-3}{2s-2} I_{s-1} + \frac{1}{2(s-1)} \cdot \frac{t}{(1+t^2)^{s-1}}\end{aligned}$$