

**Analisi I - IngBM - 2015-16**  
**COMPITO B 18 Giugno 2016**

COGNOME ..... NOME .....

MATRICOLA ..... VALUTAZIONE ..... + ..... = .....

1. ISTRUZIONI

*Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; solo questo sarà ritirato e valutato. I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di  $0 \leq x \leq 10$  punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che  $x \geq 6$ . In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di  $0 \leq y \leq 24$  punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se  $x + y \geq 18$ . In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà  $v = \min(28, x + y)$ .*

**Attenzione.** Tutte le risposte devono essere giustificate.

**Esercizio 0. (0 punti)** Leggere e capire le istruzioni.

**Esercizio 1.(3,5 punti)** Dire se la formula seguente

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \neq 0 \\ -0,9 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

definisce una funzione differenziabile da  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

SOLUZIONE.

SI la funzione  $f(x)$  è una funzione differenziabile da  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{R}$

NO la funzione  $f(x)$  non è una funzione differenziabile da  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{R}$

perché la funzione definita non è continua in 0. In effetti risulta  $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**Esercizio 2.(3 punti)**

Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{3n^2}$$

SOLUZIONE.

NO il limite non esiste

SI il limite esiste e vale  $e^3$

perché  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  e quindi (cfr. dispensa LIMSUCC)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e.$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{3n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot 3} = e^3$$

**Esercizio 3.(3.5 punti)** Negare le seguenti frasi

- (1) *Tutti gli asini sono carnivori e nessun pesce è erbivoro.*
- (2) *C'è un gatto vegano o un cane anoressico.*

SOLUZIONE.

- (1) La negazione della frase (1) è  
*C'è almeno un asino non carnivoro o un pesce non erbivoro*
- (2) La negazione della frase (2) è  
*Tutti i gatti non sono vegani e tutti i cani non sono anoressici.*

## Seconda parte

### Esercizio 1.(6 punti)

Si consideri la funzione definita dalla formula  $f(x) = \begin{cases} e^{1-x} + 1 - e^2 & \text{se } x \leq -1 \\ 2 - x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ e^{1-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

- (1) Descrivere l'insieme  $C$  dei punti di  $\mathbf{R}$  dove la funzione è continua e l'insieme  $D$  dei punti dove la funzione è derivabile
- (2) Descrivere l'insieme dei punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione  $f(x)$
- (3) Descrivere gli eventuali asintoti

SOLUZIONE.

- (1)  $C = \mathbf{R}$  e  $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$
- (2) La funzione ha un minimo relativo in 1 e un massimo relativo in 0 e non ha massimi o minimi assoluti.
- (3) Il grafico della funzione ha la retta  $y = 0$  come asintoto orizzontale e non ammette altri asintoti.

**Esercizio 2.(6 punti)** Sapendo che  $1 - i$  è una soluzione dell'equazione

$$z^4 - 4z^3 + 11z^2 - 14z + 10 = 0$$

calcolarne tutte le altre.

SOLUZIONE.

Essendo il polinomio a coefficienti reali anche  $1 + i$  è soluzione e quindi il polinomio risulta divisibile per  $(z - 1 + i)(z - 1 - i) = z^2 - 2z + 2$ . In effetti si ha  $z^4 - 4z^3 + 11z^2 - 14z + 10 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2z + 5)$ . Pertanto le soluzioni dell'equazione proposta sono  $\{1 + i, 1 - i, 1 + 2i, 1 - 2i\}$ .

### Esercizio 3. (6 punti)

Sia  $f$  una funzione continua  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  tale che  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ . Provare che  $f$  non è surgettiva.

SOLUZIONE.

Poiché la funzione tende a  $+\infty$  sia per  $x \rightarrow \infty$  sia per  $x \rightarrow -\infty$ , fissato un  $L > 0$  esiste un  $K$  per cui se  $x < -K$  o  $x > K$  si ha che  $f(x) > L$ . L'intervallo  $I = [-K, K]$  è un intervallo chiuso e limitato, pertanto essendo la funzione  $f$  continua su tutto  $\mathbf{R}$  ammetterà su  $I$  un massimo e un minimo assoluti risp  $M$  e  $N$ , quindi in definitiva la funzione  $f(x)$  non assume mai valori minori di  $\inf\{L, N\}$  e quindi non può essere surgettiva.

**Esercizio 4.(6 punti)**

Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale

$$(\cos^2 x + 1)y' + \sin x = 0$$

tale che  $y(0) = 0$ .

SOLUZIONE.

L'equazione è a variabili separabili e risulta

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos^2 x + 1}$$

da cui

$$y = \int_0^t \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = \arctan \cos(t) + C.$$

Per  $t = 0$  si ha  $\arctan 1 + C = 0$  da cui  $C = -\frac{\pi}{4}$ .